Métodos Numéricos de Optimización con restricciones.

Bustos Jordi
Práctica IV

28 de octubre de 2025

Capítulo V

Ejercicio 1. Resolver a partir del punto inicial mencionado, aplicando el método del gradiente proyectado con búsqueda de Armijo ($\sigma_1 = 1/2$) presentado previamente.

Min $f(x, y) = x - y$ sujeto a $1 \leq x \leq 3$ y $1 \leq y \leq 2$, empezando en $x_0 = (3, 1)$.

Demostración. El método del gradiente proyectado consiste en iterar a partir de un punto inicial factible x_0 haciendo lo siguiente

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \nabla f(x_k) \\ z_k &= P_\Omega(y_k) \\ d_k &= z_k - x_k \end{aligned}$$

Si $d_k = 0$ se frena el algoritmo, si no se hace una búsqueda de Armijo con d_k tal que, dado $t = 1$, si:

$$f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \sigma_1 t \nabla f(x_k)^T d_k$$

Entonces, $t_k = t$ y $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$. Si no se cumple, se reduce $t = t/2$ y se vuelve a comprobar la condición anterior. En nuestro caso, el conjunto factible es el rectángulo definido por las restricciones que resulta en un conjunto convexo y cerrado, por lo que podemos aplicar el método.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (1, -1) \\ x_0 &= (3, 1) \\ y_0 &= (3, 1) - (1, -1) = (2, 2) \in \Omega \\ z_0 &= P_\Omega(y_0) = (2, 2) \\ d_0 &= z_0 - x_0 = (2, 2) - (3, 1) = (-1, 1) \\ \nabla f(x_0)^T d_0 &= (1, -1) \cdot (-1, 1) = -2 \\ f(x_0 + d_0) &= f(2, 2) = 0 \\ f(x_0) + \sigma_1 \nabla f(x_0)^T d_0 &= f(3, 1) + \frac{1}{2}(-2) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $t_0 = 1$ y $x_1 = x_0 + d_0 = (2, 2)$. Ahora, repetimos el proceso a partir de x_1:

$$\begin{aligned} y_1 &= (2, 2) - (1, -1) = (1, 3) \\ z_1 &= P_\Omega(y_1) = (1, 2) \\ d_1 &= z_1 - x_1 = (1, 2) - (2, 2) = (-1, 0) \\ \nabla f(x_1)^T d_1 &= (1, -1) \cdot (-1, 0) = -1 \\ f(x_1 + d_1) &= f(1, 2) = -1 \\ f(x_1) + \sigma_1 \nabla f(x_1)^T d_1 &= f(2, 2) + \frac{1}{2}(-1) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, $t_1 = 1$ y $x_2 = x_1 + d_1 = (1, 2)$. Repetimos el proceso a partir de x_2:

$$\begin{aligned} y_2 &= (1,2) - (1,-1) = (0,3) \\ z_2 &= P_\Omega(y_2) = (1,2) \\ d_2 &= z_2 - x_2 = (1,2) - (1,2) = (0,0) \end{aligned}$$

Como $d_2 = 0$, el algoritmo se detiene y el punto $x_2 = (1, 2)$ es el óptimo del problema. □

Ejercicio 2. Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, rango$(A) = m$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $c \in \mathbb{R}^n$, si $x^T Qx > 0\, \forall x \neq 0 : Ax = 0$ entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

es no singular.

Demostración. Supongamos que $M = \begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ es singular. Entonces, existe un vector no nulo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} Qx + A^T y &= 0 \quad (1) \\ Ax &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De la ecuación (1) tenemos que $Qx = -A^T y$. Multiplicando por la izquierda por x^T obtenemos:

$$\begin{aligned} x^T Qx &= -x^T A^T y \\ &= -(Ax)^T y \\ &= 0 \quad (\text{por } (2)) \end{aligned}$$

Pero esto contradice la hipótesis de que $x^T Qx > 0 \quad \forall x \neq 0 : Ax = 0$. Por lo tanto, M debe ser no singular. □

Ejercicio 3. En los siguientes problemas cuadráticos estudiar si se verifican las hipótesis del Teorema 5.3 (ejercicio anterior) y analizar en qué caso se puede afirmar que el problema tiene solución única.

(a) Min $5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz - y + 4z$ sujeto a $x + 2z = 4$, $y + 3z = 2$.

(b) Min $3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz + 2x + 3y + z$ sujeto a $x + z = 5$, $2y + z = 1$.

(c) Min $6x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 2yz + 3x - 2y - z$ sujeto a $x + y = 1$.

Demostración. Siguiendo el ejemplo del apunte, podemos escribir cada uno de los problemas en la forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \frac{1}{2} x^T Qx + c^T x \\ &\text{s.a } Ax = b \end{aligned}$$

donde Q es la matriz de los coeficientes cuadráticos, c el vector de los coeficientes lineales, A la matriz de los coeficientes de las restricciones y b el vector de los términos independientes de las restricciones. Entonces, podemos analizar cada caso:

(a) Si $q(x, y, z) = 5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz$, entonces $\nabla q(x, y, z) = \begin{pmatrix} 10x + 4y + 2z \\ 8y + 4x \\ 6z + 2x \end{pmatrix}$. Luego, la matriz $Q = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ que es simétrica y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sea:

$$\begin{aligned} \{x : Ax = 0\} &= \{(x, y, z) : x + 2z = 0,\ y + 3z = 0\} \\ &= \{(-2z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(-2, -3, 1)\} \end{aligned}$$

Luego, consideramos al vector $v = (-2, -3, 1)$ y calculamos $v^T Q v > 0$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 y el problema tiene solución única.

(b) Siguiendo un razonamiento similar al del apartado (a), obtenemos que la matriz $Q = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 8 \\ -4 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sea:

$$\begin{aligned} \{x : Ax = 0\} &= \{(x, y, z) : x + z = 0,\, 2y + z = 0\} \\ &= \{(-z, -\frac{z}{2}, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(-1, -\frac{1}{2}, 1)\} \end{aligned}$$

Luego, consideramos al vector $v = (-1, -\frac{1}{2}, 1)$ y calculamos $v^T Q v \leq 0$. Por lo tanto, no se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 y no podemos asegurar que el problema tenga solución única.

(c) Análogamente, obtenemos que la matriz $Q = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sea

$$\begin{aligned} \{x : Ax = 0\} &= \{(x, y, z) : x + y = 0\} \\ &= \{(z, -z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Luego, consideramos a los vectores $v_1 = (1, -1, 0)$ y $v_2 = (0, 0, 1)$ y calculamos:

$$\begin{aligned} v_1^T Q v_1 > 0 \\ v_2^T Q v_2 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 y el problema tiene solución única.

□

Ejercicio 4. Resolver utilizando el método de restricciones activas comenzando en $x_0 = (0, 0)$. De ser posible, analizar el proceso gráficamente.

$$\begin{aligned} &\text{Min } q(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x \\ &\text{s.a } x + y \leq 4 \\ &x \geq 0,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

Demostración. EL método de restricciones activas consiste en iterar a partir de un punto inicial factible x_0, definir $A(x_0)$ como el conjunto de índices de las restricciones activas en el punto, $[a_i]_{i \in A(x_0)}$ l.i y resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} \text{mín } \frac{1}{2} d^T Q d + \nabla q(x_0)^T d \\ \text{s.a } A_k d = 0 \end{aligned}$$

Si $d = 0$, calculamos $\mu = -(A_k^T A_k)^{-1} A_k \nabla q(x_k)$, si $\mu \geq 0$ ya está, si no, definimos $x_{k+1} = x_k$, $A(x_k) \setminus \{j\}$ donde j es tal que la coordenada j de μ es negativa y repetimos.

Si $d \neq 0$, calculamos $t_{\text{máx}} = \text{mín}_{j \notin A(x_k), a_j^T d > 0} \left\{ \dfrac{b_j - a_j^T x_k}{a_j^T d} \right\}$. Si $t_{\text{máx}} \leq 1$ definimos $t_k = t_{\text{máx}}$, $x_{k+1} =$

$x_k + t_k d$ y $W(x_{k+1}) = W(x_k) \cup \{j\}$ donde j es tal que $t_{\text{máx}} = \dfrac{b_j - a_j^T x_k}{a_j^T d}$. Si no, $t_k = 1$ y $x_{k+1} = x_k + d$, $W(x_{k+1}) = W(x_k)$, $k := k+1$ y repetir la resolución del subproblema con los nuevos datos.

En nuestro caso, tenemos que $\nabla q(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 3 \\ -x + 2y \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Empezamos en $x_0 = (0,0)$ con $A(x_0) = \{2,3\}$. Entonces, resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} \text{mín}\ \frac{1}{2} d^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}^T d \\ \text{s.a}\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} d = 0 \end{aligned}$$

Si consideramos $d = (d_1, d_2)$ la restricción nos pide que $-d_1 = 0$ y $-d_2 = 0$ por lo que $d = 0$. Entonces, calculamos μ y obtenemos que $\mu = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$. Por lo tanto:

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 = (0,0) \\ A(x_1) = A(x_0) \setminus \{2\} = \{3\} \end{gathered}$$

Luego, en nuestra nueva restricción si $d = (d_1, d_2)$ tenemos que $A_1 d = 0$ implica que $-d_2 = 0$ por lo que $d = (d_1, 0)$. Entonces, resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad q(d_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{s.a}\ -d_2 = 0 \end{aligned}$$

Donde $q(d_1) = d_1^2 - 3d_1$. Derivando e igualando a cero obtenemos que $d_1 = \frac{3}{2}$ y como la segunda derivada es positiva, es un mínimo. Por lo tanto, $d = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Ahora, calculamos $t_{\text{máx}} = \text{mín}_{j \notin A(x_1), a_j^T d > 0} \left\{ \dfrac{b_j - a_j^T x_1}{a_j^T d} \right\}$. En nuestro caso, $j = 1$ ya que es la única restricción que no está en $A(x_1)$ y $a_1^T d = 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 = \frac{3}{2} > 0$. Entonces:

$$t_{\text{máx}} = \frac{4 - (1,1) \cdot (0,0)}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} > 1$$

Por lo tanto, $t_1 = 1$ y $x_2 = x_1 + d = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $A(x_2) = A(x_1) = \{3\}$. Repetimos el proceso: si $d = (d_1, d_2)$ tenemos que $-d_2 = 0$ por lo que $d = (d_1, 0)$. Entonces, resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad q(d_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{s.a}\ -d_2 = 0 \end{aligned}$$

Luego, $q(d_1) = d_1^2 \implies d = 0$ y calculamos $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \leq 0$. Por lo tanto, actualizamos $A(x_2) = A(x_1) \setminus \{3\} = \varnothing$ y $A = 0$, $x_2 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Obtenemos:

$$\text{mín} \quad q(d_1, d_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Análogamente derivamos e igualamos a cero para obtener el d buscado, hallamos $t_{\text{máx}}$ con $j = 1,2,3$ y continuamos el proceso hasta obtener el punto óptimo. TODO: completar últimas iteraciones. $\square$