# Métodos Numéricos de Optimización con restricciones.

Bustos Jordi
Práctica I

September 10, 2025

**Ejercicio 1.** Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x, d \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ tales que $x + \lambda d$ cumple la condición de Armijo. Sea $0 < \mu < \lambda$. ¿Cumple $\mu$ la condición de Armijo? Pruébelo o dé un contraejemplo que puede ser gráfico.

*Proof.* □

**Ejercicio 2.** Considere la función

$$f(x, y) = x - y + 2x^2 + 2xy + y^2.$$

(a) Muestre que $d = (-1, 0)$ es una dirección de descenso para $f$ en $(0, 0)$. Analizar cuál es el paso óptimo que se puede dar en esa dirección para hacer decrecer el valor de $f$ utilizando búsqueda exacta.

(b) Para la dirección de máximo decrecimiento en $(0, 0)$ determinar el intervalo de paso máximo que se puede dar en esa dirección a partir de $(0, 0)$ para hacer decrecer el valor de $f$ utilizando la regla de Armijo con parámetro $\sigma_1 = 1/4$.

*Proof.* □

**Ejercicio 3.** Considere la función

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4.$$

(a) Verificar que $d = (0, 1)$ es una dirección de descenso para $f$ a partir de $(0, -2)$.

(b) Para la dirección a partir de $(0, -2)$ considerada en (a), el valor $t = 1$ verifica la regla de Armijo con parámetro $\sigma_1 = 4/5$? ¿Para qué valores de $\sigma_1$ el valor de longitud de paso $t = 1$ verifica la regla de Armijo?

*Proof.* □

**Ejercicio 4.** Sea $f$ una función diferenciable tal que $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Mostrar que si $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función continua que asigna a cada $x \in \mathbb{R}^n$ una matriz definida positiva $H(x)$ entonces la dirección

$$d = -H(x)\nabla f(x)$$

es una dirección de descenso para $f$ en $\bar{x}$.

*Proof.* □

**Ejercicio 5.** Considere la función $f(x,y) = (x-2y)^2 + x^4$. Calcular la dirección de Newton en el punto $(2,1)$. ¿Cumple el valor $t = 1$ la regla de Armijo con parámetro $\sigma_1 = 1/5$?

*Proof.* □

**Ejercicio 6.** Considere el siguiente método:

- Dado $x_k$. Calcular $d_k$ como se indica a continuación.
- Hacer $t = 1$.
  Si $f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \frac{1}{2} t d_k^T \nabla f(x_k)$ $(*)$ hacer $x_{k+1} = x_k + td_k$,
  Sino, reemplazar por $t/2$ hasta que se verifique $(*)$.

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $x_0 = (2,0)$.

(a) Dibuje algunas curvas de nivel de $f$.

(b) Hacer dos iteraciones del método utilizando la dirección de Cauchy. Dibuje los iterados obtenidos en el plano en el cual están las curvas de nivel de $f$.

(c) Resuelva el problema mediante el uso de la dirección de Newton.

*Proof.* □

**Ejercicio 7.** Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ no nulos y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz no singular. Sea $B = A + uv^T$. Demuestre que $B$ es no singular si y solo si $\sigma = 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. En este caso demuestre que

$$B^{-1} = A^{-1} - \tfrac{1}{\sigma} A^{-1} u v^T A^{-1}.$$

**Idea de la demostración:**

(a) Mostrar que la matriz $B = I + xy^T$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ tiene dos autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n-1$ (hay que demostrar que $\dim(\text{Nú}(B - \lambda_1 I)) = n - 1$, para eso considerar que la imagen de $B - \lambda_1 I = xy^T$ que es una matriz de rango 1 cuya imagen tiene dimensión 1) y $\lambda_2 = 1 + y^T x$.

(b) Lo anterior implica que

$$\det(B) = 1 + y^T x,$$

luego,

$$\det(I + A^{-1} x y^T) = 1 + y^T A^{-1} x.$$

(c) Finalmente mostrar que $A + uv^T$ es no singular si y solo si $I + A^{-1}uv^T = A^{-1}(A + uv^T)$ es invertible. Luego, hacer el producto de la matriz por su inversa para verificar la fórmula.

*Proof.* □

**Ejercicio 8.** Demostrar que la adaptada BFGS para la inversa cumple: Si $H_k$ es simétrica definida positiva y se tiene que $s_k^T y_k > 0$ entonces $H_{k+1}$ es simétrica definida positiva.

*Proof.* □

**Ejercicio 9.** Considere el método de Quasi-Newton con fórmula adaptada secante DFP de rango 2 con búsqueda lineal exacta y matriz inicial $H_0$ definida positiva. Demuestre que $y_k^T s_k > 0$ para todo $k$. Ídem si se utiliza la búsqueda de Wolfe.

*Proof.* $\square$