

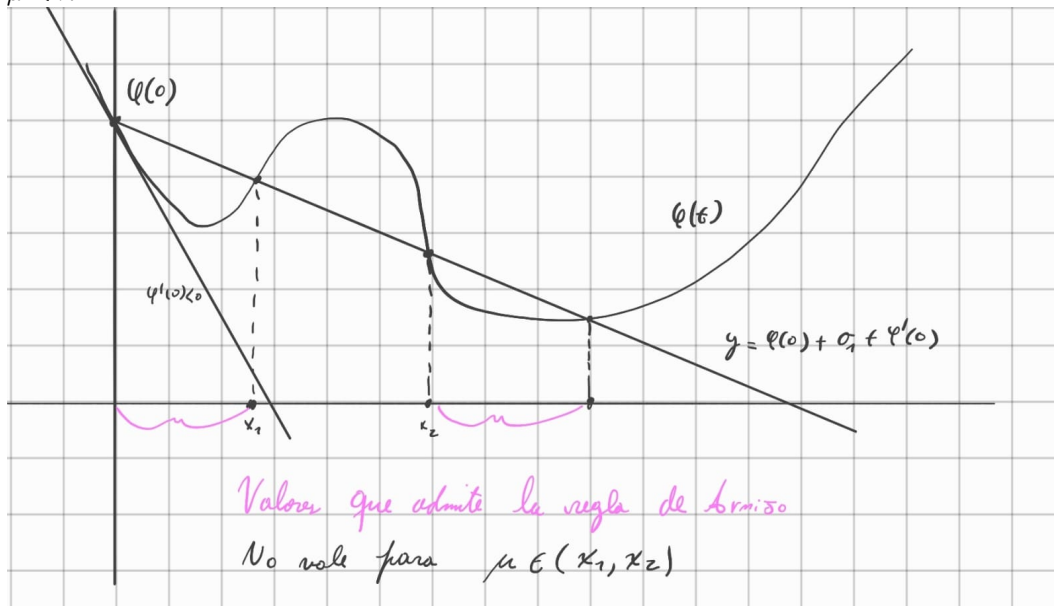
Métodos Numéricos de Optimización con restricciones.

Bustos Jordi
Práctica II

September 15, 2025

Ejercicio 1. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x, d \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ tales que $x + \lambda d$ cumple la condición de Armijo. Sea $0 < \mu < \lambda$. ¿Cumple μ la condición de Armijo? Pruébalo o dé un contraejemplo que puede ser gráfico.

Proof. Análogamente al ejemplo visto en clase podemos ver que no siempre se cumple la condición de Armijo para $0 < \mu < \lambda$ pues en este caso, si $\mu \in (x_1, x_2)$ no se cumple la regla de armijo y sin embargo se vale que $\mu < \lambda$.



□

Ejercicio 2. Considere la función

$$f(x, y) = x - y + 2x^2 + 2xy + y^2.$$

- Muestre que $d = (-1, 0)$ es una dirección de descenso para f en $(0, 0)$. Analizar cuál es el paso óptimo que se puede dar en esa dirección para hacer decrecer el valor de f utilizando búsqueda exacta.
- Para la dirección de máximo decrecimiento en $(0, 0)$ determinar el intervalo de paso máximo que se puede dar en esa dirección a partir de $(0, 0)$ para hacer decrecer el valor de f utilizando la regla de Armijo con parámetro $\sigma_1 = 1/4$.

Proof. Para demostrar (a) notemos que f es diferenciable y por lo tanto si $\nabla f(0, 0)^T \cdot d < 0 \implies d$ es una

dirección de descenso. En efecto, sea $d = (-1, 0)$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 + 4x + 2y \\ -1 + 2x + 2y \end{pmatrix} \\ \nabla f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \nabla f(0, 0)^T \cdot d &= -1 < 0\end{aligned}$$

Para hallar la longitud del paso óptimo, definimos $\phi(t) = f((0, 0) + t \cdot d) = f(-t, 0) = -t + 2t^2$, luego $\phi'(t) = -1 + 4t = 0 \iff t = \frac{1}{4}$ que es la longitud de paso óptima en la dirección d . Para la parte (b) consideremos la regla de Armijo:

$$f(x + td) \leq f(x) + \sigma_1 t \nabla f(x)^T d$$

La dirección de máximo decrecimiento está dada por $-\nabla f(0, 0) = (-1, 1)$, si $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ la regla de Armijo se traduce en:

$$\begin{aligned}f((0, 0) + t \cdot (-1, 1)) &\leq f(0, 0) + \frac{1}{4} t \nabla f(0, 0)^T \cdot (-1, 1) \\ f(-t, t) &\leq \frac{1}{4} t \cdot (-2) \\ t^2 - 2t &\leq -\frac{1}{2} t \\ t^2 - \frac{3}{2} t &\leq 0 \\ t(t - \frac{3}{2}) &\leq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, el intervalo de paso máximo es $(0, \frac{3}{2}]$. □

Ejercicio 3. Considere la función

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4.$$

- (a) Verificar que $d = (0, 1)$ es una dirección de descenso para f a partir de $(0, -2)$.
- (b) Para la dirección a partir de $(0, -2)$ considerada en (a), el valor $t = 1$ verifica la regla de Armijo con parámetro $\sigma_1 = 4/5$? ¿Para qué valores de σ_1 el valor de longitud de paso $t = 1$ verifica la regla de Armijo?

Proof. Análogamente al ejercicio anterior, para (a) se tiene que, dado $d = (0, 1)$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4x - 2y + 6x^2 + 4x^3 \\ 2y - 2x \end{pmatrix} \\ \nabla f(0, -2) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \nabla f(0, -2)^T \cdot d &= -4 < 0\end{aligned}$$

Luego, d es una dirección de descenso para f en $(0, -2)$.

Para (b) consideremos la regla de Armijo con $\sigma_1 = \frac{4}{5}$ y $t = 1$:

$$\begin{aligned} f((0, -2) + 1 \cdot (0, 1)) &\leq f(0, -2) + \frac{4}{5} \cdot 1 \cdot \nabla f(0, -2)^T \cdot (0, 1) \\ f(0, -1) &\leq f(0, -2) + \frac{4}{5} \cdot (-4) \\ 1 &\leq 4 - \frac{16}{5} \\ 1 &\leq \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Absurdo, luego $t = 1$ no verifica la regla de Armijo con $\sigma_1 = \frac{4}{5}$.

Para hallar los valores de σ_1 para los cuales $t = 1$ verifica la regla de Armijo, consideremos:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 4 + \sigma_1 \cdot (-4) \\ \sigma_1 &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $t = 1$ verifica la regla de Armijo para $\sigma_1 \in (0, \frac{3}{4}]$. □

Ejercicio 4. Sea f una función diferenciable tal que $\nabla f(x) \neq 0$. Mostrar que si $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función continua que asigna a cada $x \in \mathbb{R}^n$ una matriz definida positiva $H(x)$ entonces la dirección

$$d = -H(x)\nabla f(x)$$

es una dirección de descenso para f en x .

Proof. Como la matriz $H(x)$ es definida positiva y $\nabla f(x) \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla f(x)^T \cdot H(x) \cdot \nabla f(x) &> 0 \\ -\nabla f(x)^T \cdot H(x) \cdot \nabla f(x) &< 0 \\ \nabla f(x)^T \cdot d &< 0 \end{aligned}$$

y como f es diferenciable $d = -H(x)\nabla f(x)$ es una dirección de descenso. □

Ejercicio 5. Considere la función $f(x, y) = (x - 2y)^2 + x^4$. Calcular la dirección de Newton en el punto $(2, 1)$. ¿Cumple el valor $t = 1$ la regla de Armijo con parámetro $\sigma_1 = 1/5$?

Proof. Por definición de dirección de Newton buscamos:

$$\nabla^2 f(2, 1) \cdot d = -\nabla f(2, 1)$$

Donde

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2(x - 2y) + 4x^3 \\ -4(x - 2y) \end{pmatrix} \\ \nabla f(2, 1) &= \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2 + 12x^2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(2, 1) &= \begin{pmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot d = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Una vez más, recordemos la regla de Armijo:

$$f(x + t \cdot d) \leq f(x) + \sigma_1 t \nabla f(x)^T \cdot d$$

En particular,

$$f((2, 1) + 1 \cdot (-1/3, -1/6)) \leq f(2, 1) + \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \nabla f(2, 1)^T \cdot (-1/3, -1/6)$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^4 \leq 16 - \frac{16}{15}$$

Que es verdadero, luego $t = 1$ cumple la regla de Armijo con $\sigma_1 = \frac{1}{5}$. □

Ejercicio 6. Considere el siguiente método:

- Dado x_k . Calcular d_k como se indica a continuación.
- Hacer $t = 1$.

Si $f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \frac{1}{2}td_k^T \nabla f(x_k)$ (*) hacer $x_{k+1} = x_k + td_k$,
Sino, reemplazar por $t/2$ hasta que se verifique (*).

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $x_0 = (2, 0)$.

- Dibuje algunas curvas de nivel de f .
- Hacer dos iteraciones del método utilizando la dirección de Cauchy. Dibuje los iterados obtenidos en el plano en el cual están las curvas de nivel de f .
- Resuelva el problema mediante el uso de la dirección de Newton.

Proof. □

Ejercicio 7. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ no nulos y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz no singular. Sea $B = A + uv^T$. Demuestre que B es no singular si y solo si $\sigma = 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. En este caso demuestre que

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^T A^{-1}.$$

Idea de la demostración:

- Mostrar que la matriz $B = I + xy^T$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ tiene dos autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $n - 1$ (hay que demostrar que $\dim(\text{Nú}(B - \lambda_1 I)) = n - 1$, para eso considerar que la imagen de $B - \lambda_1 I = xy^T$ que es una matriz de rango 1 cuya imagen tiene dimensión 1) y $\lambda_2 = 1 + y^T x$.
- Lo anterior implica que

$$\det(B) = 1 + y^T x,$$

luego,

$$\det(I + A^{-1}xy^T) = 1 + y^T A^{-1}x.$$

- (c) Finalmente mostrar que $A + uv^T$ es no singular si y solo si $I + A^{-1}uv^T = A^{-1}(A + uv^T)$ es invertible. Luego, hacer el producto de la matriz por su inversa para verificar la fórmula.

Proof.

□

Ejercicio 8. Demostrar que la adaptada BFGS para la inversa cumple: Si H_k es simétrica definida positiva y se tiene que $s_k^T y_k > 0$ entonces H_{k+1} es simétrica definida positiva.

Proof.

□

Ejercicio 9. Considere el método de Quasi-Newton con fórmula adaptada secante DFP de rango 2 con búsqueda lineal exacta y matriz inicial H_0 definida positiva. Demuestre que $y_k^T s_k > 0$ para todo k . Ídem si se utiliza la búsqueda de Wolfe.

Proof.

□