

# Métodos Numéricos de Optimización con restricciones.

Bustos Jordi  
Práctica IV

28 de octubre de 2025

## Capítulo V

**Ejercicio 1.** Resolver a partir del punto inicial mencionado, aplicando el método del gradiente proyectado con búsqueda de Armijo ( $\sigma_1 = 1/2$ ) presentado previamente.

Min  $f(x, y) = x - y$  sujeto a  $1 \leq x \leq 3$  y  $1 \leq y \leq 2$ , empezando en  $x_0 = (3, 1)$ .

*Demostración.* El método del gradiente proyectado consiste en iterar a partir de un punto inicial factible  $x_0$  haciendo lo siguiente

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \nabla f(x_k) \\z_k &= P_\Omega(y_k) \\d_k &= z_k - x_k\end{aligned}$$

Si  $d_k = 0$  se frena el algoritmo, si no se hace una búsqueda de Armijo con  $d_k$  tal que, dado  $t = 1$ , si:

$$f(x_k + td_k) \leq f(x_k) + \sigma_1 t \nabla f(x_k)^T d_k$$

Entonces,  $t_k = t$  y  $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ . Si no se cumple, se reduce  $t = t/2$  y se vuelve a comprobar la condición anterior. En nuestro caso, el conjunto factible es el rectángulo definido por las restricciones que resulta en un conjunto convexo y cerrado, por lo que podemos aplicar el método.

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (1, -1) \\x_0 &= (3, 1) \\y_0 &= (3, 1) - (1, -1) = (2, 2) \in \Omega \\z_0 &= P_\Omega(y_0) = (2, 2) \\d_0 &= z_0 - x_0 = (2, 2) - (3, 1) = (-1, 1) \\\nabla f(x_0)^T d_0 &= (1, -1) \cdot (-1, 1) = -2 \\f(x_0 + d_0) &= f(2, 2) = 0 \\f(x_0) + \sigma_1 \nabla f(x_0)^T d_0 &= f(3, 1) + \frac{1}{2}(-2) = 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $t_0 = 1$  y  $x_1 = x_0 + d_0 = (2, 2)$ . Ahora, repetimos el proceso a partir de  $x_1$ :

$$\begin{aligned}y_1 &= (2, 2) - (1, -1) = (1, 3) \\z_1 &= P_\Omega(y_1) = (1, 2) \\d_1 &= z_1 - x_1 = (1, 2) - (2, 2) = (-1, 0) \\\nabla f(x_1)^T d_1 &= (1, -1) \cdot (-1, 0) = -1 \\f(x_1 + d_1) &= f(1, 2) = -1 \\f(x_1) + \sigma_1 \nabla f(x_1)^T d_1 &= f(2, 2) + \frac{1}{2}(-1) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Luego,  $t_1 = 1$  y  $x_2 = x_1 + d_1 = (1, 2)$ . Repetimos el proceso a partir de  $x_2$ :

$$y_2 = (1, 2) - (1, -1) = (0, 3)$$

$$z_2 = P_\Omega(y_2) = (1, 2)$$

$$d_2 = z_2 - x_2 = (1, 2) - (1, 2) = (0, 0)$$

Como  $d_2 = 0$ , el algoritmo se detiene y el punto  $x_2 = (1, 2)$  es el óptimo del problema.  $\square$

**Ejercicio 2.** Para  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$ ,  $\text{rango}(A) = m$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y  $c \in \mathbb{R}^n$ , si  $x^T Q x > 0 \forall x \neq 0 : Ax = 0$  entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

es no singular.

*Demostración.* Supongamos que  $M = \begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$  es singular. Entonces, existe un vector no nulo  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ , es decir,

$$Qx + A^T y = 0 \quad (1)$$

$$Ax = 0 \quad (2)$$

De la ecuación (1) tenemos que  $Qx = -A^T y$ . Multiplicando por la izquierda por  $x^T$  obtenemos:

$$\begin{aligned} x^T Q x &= -x^T A^T y \\ &= -(Ax)^T y \\ &= 0 \quad (\text{por (2)}) \end{aligned}$$

Pero esto contradice la hipótesis de que  $x^T Q x > 0 \quad \forall x \neq 0 : Ax = 0$ . Por lo tanto,  $M$  debe ser no singular.  $\square$

**Ejercicio 3.** En los siguientes problemas cuadráticos estudiar si se verifican las hipótesis del Teorema 5.3 (ejercicio anterior) y analizar en qué caso se puede afirmar que el problema tiene solución única.

(a) Min  $5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz - y + 4z$  sujeto a  $x + 2z = 4$ ,  $y + 3z = 2$ .

(b) Min  $3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz + 2x + 3y + z$  sujeto a  $x + z = 5$ ,  $2y + z = 1$ .

(c) Min  $6x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 2yz + 3x - 2y - z$  sujeto a  $x + y = 1$ .

*Demostración.* Siguiendo el ejemplo del apunte, podemos escribir cada uno de los problemas en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.a } & Ax = b \end{aligned}$$

donde  $Q$  es la matriz de los coeficientes cuadráticos,  $c$  el vector de los coeficientes lineales,  $A$  la matriz de los coeficientes de las restricciones y  $b$  el vector de los términos independientes de las restricciones. Entonces, podemos analizar cada caso:

(a) Si  $q(x, y, z) = 5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz$ , entonces  $\nabla q(x, y, z) = \begin{pmatrix} 10x + 4y + 2z \\ 8y + 4x \\ 6z + 2x \end{pmatrix}$ . Luego, la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ que es simétrica y } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Sea:}$$

$$\begin{aligned} \{x : Ax = 0\} &= \{(x, y, z) : x + 2z = 0, y + 3z = 0\} \\ &= \{(-2z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\{(-2, -3, 1)\} \end{aligned}$$

Luego, consideramos al vector  $v = (-2, -3, 1)$  y calculamos  $v^T Q v > 0$ . Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 y el problema tiene solución única.

(b) Siguiendo un razonamiento similar al del apartado (a), obtenemos que la matriz  $Q = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 8 \\ -4 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

y  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Sea:

$$\begin{aligned} \{x : Ax = 0\} &= \{(x, y, z) : x + z = 0, 2y + z = 0\} \\ &= \{(-z, -\frac{z}{2}, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\{(-1, -\frac{1}{2}, 1)\} \end{aligned}$$

Luego, consideramos al vector  $v = (-1, -\frac{1}{2}, 1)$  y calculamos  $v^T Q v \leq 0$ . Por lo tanto, no se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 y no podemos asegurar que el problema tenga solución única.

(c) Análogamente, obtenemos que la matriz  $Q = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$  y  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Sea

$$\begin{aligned} \{x : Ax = 0\} &= \{(x, y, z) : x + y = 0\} \\ &= \{(z, -z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Luego, consideramos a los vectores  $v_1 = (1, -1, 0)$  y  $v_2 = (0, 0, 1)$  y calculamos:

$$\begin{aligned} v_1^T Q v_1 &> 0 \\ v_2^T Q v_2 &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 y el problema tiene solución única.

□

**Ejercicio 4.** Resolver utilizando el método de restricciones activas comenzando en  $x_0 = (0, 0)$ . De ser posible, analizar el proceso gráficamente.

$$\begin{aligned} \text{Min } q(x, y) &= x^2 - xy + y^2 - 3x \\ \text{s.a } x + y &\leq 4 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

*Demostración.* EL método de restricciones activas consiste en iterar a partir de un punto inicial factible  $x_0$ , definir  $A(x_0)$  como el conjunto de índices de las restricciones activas en el punto,  $[a_i]_{i \in A(x_0)}$  l.i y resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} \text{mín } \frac{1}{2} d^T Q d + \nabla q(x_0)^T d \\ \text{s.a } A_k d = 0 \end{aligned}$$

Si  $d = 0$ , calculamos  $\mu = -(A_k^T A_k)^{-1} A_k \nabla q(x_k)$ , si  $\mu \geq 0$  ya está, si no, definimos  $x_{k+1} = x_k$ ,  $A(x_k) \setminus \{j\}$  donde  $j$  es tal que la coordenada  $j$  de  $\mu$  es negativa y repetimos.

Si  $d \neq 0$ , calculamos  $t_{\text{máx}} = \text{mín}_{j \notin A(x_k), a_j^T d > 0} \left\{ \frac{b_j - a_j^T x_k}{a_j^T d} \right\}$ . Si  $t_{\text{máx}} \leq 1$  definimos  $t_k = t_{\text{máx}}$ ,  $x_{k+1} =$

$x_k + t_k d$  y  $W(x_{k+1}) = W(x_k) \cup \{j\}$  donde  $j$  es tal que  $t_{\max} = \frac{b_j - a_j^T x_k}{a_j^T d}$ . Si no,  $t_k = 1$  y  $x_{k+1} = x_k + d$ ,  $W(x_{k+1}) = W(x_k)$ ,  $k := k + 1$  y repetir la resolución del subproblema con los nuevos datos.

En nuestro caso, tenemos que  $\nabla q(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 3 \\ -x + 2y \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Empezamos en  $x_0 = (0, 0)$  con  $A(x_0) = \{2, 3\}$ . Entonces, resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} d^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}^T d \\ \text{s.a.} \quad & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} d = 0 \end{aligned}$$

Si consideramos  $d = (d_1, d_2)$  la restricción nos pide que  $-d_1 = 0$  y  $-d_2 = 0$  por lo que  $d = 0$ . Entonces, calculamos  $\mu$  y obtenemos que  $\mu = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 = (0, 0) \\ A(x_1) &= A(x_0) \setminus \{2\} = \{3\} \end{aligned}$$

Luego, en nuestra nueva restricción si  $d = (d_1, d_2)$  tenemos que  $A_1 d = 0$  implica que  $-d_2 = 0$  por lo que  $d = (d_1, 0)$ . Entonces, resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} \min \quad & q(d_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{s.a.} \quad & -d_2 = 0 \end{aligned}$$

Donde  $q(d_1) = d_1^2 - 3d_1$ . Derivando e igualando a cero obtenemos que  $d_1 = \frac{3}{2}$  y como la segunda derivada es positiva, es un mínimo. Por lo tanto,  $d = (\frac{3}{2}, 0)$ . Ahora, calculamos  $t_{\max} = \min_{j \notin A(x_1), a_j^T d > 0} \left\{ \frac{b_j - a_j^T x_1}{a_j^T d} \right\}$ .

En nuestro caso,  $j = 1$  ya que es la única restricción que no está en  $A(x_1)$  y  $a_1^T d = 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 = \frac{3}{2} > 0$ . Entonces:

$$t_{\max} = \frac{4 - (1, 1) \cdot (0, 0)}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} > 1$$

Por lo tanto,  $t_1 = 1$  y  $x_2 = x_1 + d = (\frac{3}{2}, 0)$ ,  $A(x_2) = A(x_1) = \{3\}$ . Repetimos el proceso: si  $d = (d_1, d_2)$  tenemos que  $-d_2 = 0$  por lo que  $d = (d_1, 0)$ . Entonces, resolvemos el subproblema:

$$\begin{aligned} \min \quad & q(d_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{s.a.} \quad & -d_2 = 0 \end{aligned}$$

Luego,  $q(d_1) = d_1^2 \implies d = 0$  y calculamos  $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \leq 0$ . Por lo tanto, actualizamos  $A(x_2) = A(x_1) \setminus \{3\} = \emptyset$  y  $A = 0$ ,  $x_2 = (\frac{3}{2}, 0)$ . Obtenemos:

$$\min \quad q(d_1, d_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Análogamente derivamos e igualamos a cero para obtener el  $d$  buscado, hallamos  $t_{\max}$  con  $j = 1, 2, 3$  y continuamos el proceso hasta obtener el punto óptimo. TODO completar últimas iteraciones.  $\square$