

Métodos Numéricos de Optimización con restricciones.

Bustos Jordi
Práctica V

December 21, 2025

Capítulo VI

Ejercicio 1. Sea $\{x_k\}$ una sucesión tal que $\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^p \rho_k \max\{0, g_i(x_k)\} \nabla g_i(x_k) = 0$. Si $x_k \rightarrow x^*$, solución regular del problema de minimizar $f(x)$ sujeto a $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, p$ entonces $\mu_k = \rho_k \max\{0, g_i(x_k)\}$ converge al multiplicador de Lagrange asociado.

Proof. Sea el problema original minimizar $f(x)$ sujeto a $x \in \Omega$. Definimos la función de penalidad:

$$Q(x, \rho_k) = f(x) + \rho_k P(x) \quad (1)$$

donde $P(x) \geq 0$ y $P(x) = 0 \iff x \in \Omega$. Asumimos que $\rho_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

1. Existencia del punto límite:

Por hipótesis, la sucesión generada $\{x_k\}$ pertenece a un conjunto compacto K . Por el teorema de **Bolzano-Weierstrass**, toda sucesión en un conjunto compacto posee una subsucesión convergente. Sea $\{x_{k_j}\}$ dicha subsucesión tal que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \bar{x}$$

donde $\bar{x} \in K$ por ser este un conjunto cerrado.

2. Prueba de Factibilidad ($\bar{x} \in \Omega$):

Sea x^* una solución óptima global del problema original. Como x^* es factible, se cumple que $P(x^*) = 0$, y por tanto $Q(x^*, \rho_{k_j}) = f(x^*)$.

Dado que x_{k_j} minimiza Q en el paso k_j , se tiene:

$$f(x_{k_j}) + \rho_{k_j} P(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Despejando el término de penalidad $P(x_{k_j})$:

$$P(x_{k_j}) \leq \frac{f(x^*) - f(x_{k_j})}{\rho_{k_j}} \quad (2)$$

Aquí aplicamos la nueva hipótesis: Como K es compacto y f es una función continua, por el **Teorema de Weierstrass**, f alcanza un mínimo global en K , denotado por m . Por lo tanto, $f(x_{k_j}) \geq m$ para todo j .

Esto implica que el numerador en (2) está acotado superiormente (no diverge a infinito):

$$P(x_{k_j}) \leq \frac{f(x^*) - m}{\rho_{k_j}}$$

Tomando el límite cuando $j \rightarrow \infty$ (recordando que $\rho_{k_j} \rightarrow \infty$):

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} P(x_{k_j}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{Cte}}{\rho_{k_j}} = 0$$

Por la continuidad de P , concluimos que $P(\bar{x}) = 0$. Por la definición de la función de penalidad, esto implica que \bar{x} es **factible** ($\bar{x} \in \Omega$).

3. Prueba de Optimalidad:

Retomamos la desigualdad de optimalidad del subproblema:

$$f(x_{k_j}) + \rho_{k_j} P(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Como $\rho_{k_j} > 0$ y $P(x_{k_j}) \geq 0$, el término $\rho_{k_j} P(x_{k_j})$ es no negativo. Podemos eliminarlo manteniendo la desigualdad (acotamos inferiormente):

$$f(x_{k_j}) \leq f(x_{k_j}) + \rho_{k_j} P(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Por tanto:

$$f(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Tomando el límite $j \rightarrow \infty$ y utilizando la continuidad de f :

$$f(\bar{x}) \leq f(x^*)$$

Conclusión:

Hemos demostrado que \bar{x} es un punto factible cuyo valor objetivo es menor o igual al del óptimo global x^* . Por definición de óptimo global, no puede ser estrictamente menor, por lo que $f(\bar{x}) = f(x^*)$. Por lo tanto, \bar{x} es una solución óptima del problema original. \square

Ejercicio 2. Considere el problema de minimizar $f(x, y) = x^2 - y$ sujeto a $x + y = 6$ y $x \geq 0$. Mostrar que si se utiliza el método de penalidad con la función de penalidad cuadrática, entonces $(x_k, y_k) \rightarrow x^*$ si $\rho_k \rightarrow \infty$.

Proof. Primero, encontremos la solución óptima del problema original manualmente, si consideramos la restricción $y = 6 - x$, podemos reescribir la función objetivo como:

$$g(x) = x^2 - (6 - x) = x^2 + x - 6$$

y minimizando g sujeto a $x \geq 0$ se tiene que el mínimo se alcanza en $x^* = (0, 6)$.

Sea $h(x, y) = x + y - 6$ la función que representa la restricción de igualdad. La función de penalidad cuadrática se define como:

$$Q(x, y, \rho) = f(x, y) + \frac{\rho}{2} h(x, y)^2 = x^2 - y + \frac{\rho}{2} (x + y - 6)^2$$

En cada iteración k , queremos minimizar $Q(x, y, \rho_k)$ sujeto a $x \geq 0$. Si calculamos el gradiente de Q e igualamos a cero para obtener los puntos críticos, tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -1 + \rho_k(x + y - 6) = 0 \implies x + y - 6 = \frac{1}{\rho_k}$$

por otro lado,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + \rho_k(x + y - 6)$$

y utilizando el resultado anterior, tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo, esta solución no es factible ya que debe ser $x \geq 0$. Observemos que para cualquier $x \geq 0$, la derivada parcial anterior es siempre positiva, por lo que Q es creciente en x en la zona factible.

Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el límite inferior $x_k = 0$. Ahora encontremos y_k usando lo anterior:

$$\begin{aligned}x_k + y_k - 6 &= \frac{1}{\rho_k} \\0 + y_k - 6 &= \frac{1}{\rho_k} \\y_k &= 6 + \frac{1}{\rho_k}\end{aligned}$$

Luego, la solución para la iteración k es $(x_k, y_k) = \left(0, 6 + \frac{1}{\rho_k}\right)$. Finalmente, tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ (y por tanto $\rho_k \rightarrow \infty$), tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(0, 6 + \frac{1}{\rho_k}\right) = (0, 6) = x^*$$

por lo que hemos demostrado que $(x_k, y_k) \rightarrow x^*$ cuando $\rho_k \rightarrow \infty$. □

Ejercicio 3. En el problema de minimizar $f(x) = x^2 + y^2$ sujeto a $x + y^2 = 1$. Demostrar que para todo $\rho > 0$, los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ son minimizadores de la función de penalidad

$$\begin{aligned}\bar{l} &= f(x) - h(x) + \frac{\rho}{2}h^2(x) \\&= x^2 + y^2 - (x + y^2 - 1) + \frac{\rho}{2}(x + y^2 - 1)^2 \\&= x^2 - x + 1 + \frac{\rho}{2}(x + y^2 - 1)^2\end{aligned}$$

Proof. Para que los puntos sean minimizadores de \bar{l} , primero deben ser puntos críticos. Calculamos el gradiente de \bar{l} :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{l}}{\partial x} &= 2x - 1 + \rho(x + y^2 - 1) \\ \frac{\partial \bar{l}}{\partial y} &= 2\rho y(x + y^2 - 1)\end{aligned}$$

Evaluando en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{l}}{\partial x} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = 0 \\ \frac{\partial \bar{l}}{\partial y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = 0\end{aligned}$$

Análogamente para $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Por lo tanto, ambos puntos son puntos críticos de \bar{l} .

Ahora, para confirmar que son minimizadores, calculamos la matriz Hessiana de \bar{l} :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \rho & 2\rho y \\ 2\rho y & 2\rho(x + 3y^2 - 1) \end{bmatrix}$$

Evaluable en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 2 + \rho & 2\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\rho \left(\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \rho & \frac{2\rho}{\sqrt{2}} \\ \frac{2\rho}{\sqrt{2}} & 2\rho \end{bmatrix}$$

Si usamos el criterio de Sylvester para la positividad definida, vemos que ambos menores principales son positivos para todo $\rho > 0$:

- Primer menor principal: $2 + \rho > 0$
- Segundo menor principal: $\det(H) = 4\rho > 0$

Por lo tanto, la matriz Hessiana es definida positiva en ambos puntos críticos, lo que confirma que son minimizadores de \bar{l} para todo $\rho > 0$. \square

Ejercicio 4. Demostrar que x^* es un minimizador local del problema (A) de minimizar $f(x)$ sujeto a $h_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$ y $g_j \leq 0$, $j = 1, \dots, p$ si y sólo si x^*, z^* es minimizador local del problema (B) de minimizar $f(x)$ sujeto a $h_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$ y $g_j(x) + z_j^2 = 0$, $j = 1, \dots, p$ donde $z_i^* = \sqrt{-g_i(x^*)}$.

Proof. Supongamos que x^* es un minimizador local del problema original A. Quiero ver que (x^*, z^*) es un minimizador local del problema modificado B. Por definición de minimizador local en A, existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de x^* tal que para todo $x \in U$ que cumple las restricciones, se tiene $f(x) \geq f(x^*)$. Consideremos un punto (x, z) que sea factible para B y que esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de (x^*, z^*) . Si (x, z) es factible para B, debe ser

$$g_j(x) + z_j^2 = 0 \implies z_j^2 = -g_j(x) \implies g_j(x) \leq 0$$

Además, $h_i(x) = 0$ se mantiene igual en ambos problemas. Esto nos dice que la componente x de cualquier solución factible (x, z) de B es automáticamente una solución factible de A. Si tomamos una vecindad del espacio aumentado (x, z) tal que la proyección sobre x caiga en U entonces por la hipótesis de que x^* es minimizador local en A, se cumple que $f(x) \geq f(x^*)$. Dado que la función objetivo de B es $F(x, z) = f(x)$ tenemos que $F(x, z) \geq F(x^*, z^*)$ por lo que (x^*, z^*) es minimizador local en B.

Supongamos ahora que (x^*, z^*) es minimizador del problema modificado B y vamos a demostrar que x^* es minimizador local del problema original A. Por definición de minimizador local en B, existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ de (x^*, z^*) tal que para todo $(x, z) \in V$ que cumple las restricciones, se tiene $F(x, z) \geq F(x^*, z^*)$. Lo que nos dice que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo (x, z) factible en V . Consideremos ahora un punto x que sea factible para A y que esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de x^* . Notemos que factible para A significa que $g_j(x) \leq 0$ y $h_i(x) = 0$. Definamos $z_j = \sqrt{-g_j(x)}$ para cada $j = 1, \dots, p$. Entonces, el punto (x, z) es factible para B ya que $g_j(x) + z_j^2 = 0$ y $h_i(x) = 0$. Si tomamos una vecindad del espacio original x tal que la extensión (x, z) caiga en V entonces por la hipótesis de que (x^*, z^*) es minimizador local en B, se cumple que $f(x) \geq f(x^*)$. Por lo tanto, x^* es minimizador local en A. \square

Ejercicio 5. Considere el problema de minimizar $f(x) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y$ sujeto a $x = 0$.

1. Calcule la solución (x^*, λ^*) .
2. Puede afirmar que existe $\bar{\rho}$ para el cual x^* es minimizador de la función Lagrangiano aumentada $L(x, \lambda^*; \rho)$ para todo $\rho \geq \bar{\rho}$?

3. Hacer tres iteraciones del método de Lagrangiano aumentado comenzando en $x_0 = (0, 0)$, $\rho_1 = 1$ y $\lambda_1 = 0$.

Proof. Para el primer inciso planteamos la función Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \lambda x$$

Aplicamos las condiciones de primer orden:

- $\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + 2y + \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0$
- Restricción: $x = 0$

Reemplazando la restricción en las otras dos ecuaciones, tenemos:

- $2y + \lambda = 0$
- $2y - 2 = 0$

Por lo tanto $x^* = (0, 1)$ y el multiplicador de Lagrange asociado es $\lambda^* = -2$.

Para la segunda parte consideremos el Lagrangiano aumentado:

$$L(x, y, \lambda, \rho) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \lambda x + \frac{\rho}{2}x^2$$

evaluando en $\lambda^* = -2$:

$$\begin{aligned} L(x, y, -2, \rho) &= 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 2x + \frac{\rho}{2}x^2 \\ &= (2 + \frac{\rho}{2})x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y \end{aligned}$$

Calculemos la matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} 4 + \rho & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

y análogamente al ejercicio 3, usando el criterio de Sylvester, vemos que ambos menores principales son positivos para todo $\rho > -2$ y entonces la matriz Hessiana es definida positiva. Por lo tanto, podemos afirmar que existe $\bar{\rho} = 0$ para el cual x^* es minimizador de la función Lagrangiano aumentada $L(x, \lambda^*; \rho)$ para todo $\rho \geq \bar{\rho}$.

Finalmente para el tercer inciso, comenzando en $x_0 = (0, 0)$, $\rho_1 = 1$ y $\lambda_1 = 0$, tenemos que minimizar:

$$L(x, y, 0, 1) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2 + 2xy + y^2 - 2y$$

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 5x + 2y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $x_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Por lo que $\lambda_2 = 0 + 1 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$. Ahora minimizamos:

$$L(x, y, -\frac{2}{3}, 1) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{2}{3}x + y^2 - 2y$$

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 5x + 2y - \frac{2}{3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $x_2 = \left(\frac{-4}{9}, \frac{13}{9}\right)$. Actualizamos nuevamente $\lambda_3 = -\frac{2}{3} + 1 \cdot \left(\frac{-4}{9}\right) = \frac{-10}{9}$. Finalmente minimizamos:

$$L(x, y, -\frac{10}{9}, 1) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{10}{9}x + y^2 - 2y$$

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 5x + 2y - \frac{10}{9} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $x_3 = \left(\frac{-8}{27}, \frac{35}{27}\right)$. Notemos que $-38/27 \approx -1.407$ y cada vez se acerca más a la solución $\lambda^* = -2$ mientras que x_k se acerca a $x^* = (0, 1)$. \square

Ejercicio 6. OPTATIVO

Ejercicio 7. Considere el problema de minimizar $f(x) = 2x^2 + 9y$ sujeto a $x + y \geq 4$. Mostrar que si se utiliza el método de barrera inversa, entonces $(x_k, y_k) \rightarrow x^*$ si $\mu_k \rightarrow 0$.

Proof. TODO \square

Ejercicio 8. Considere el problema de minimizar $f(x) = -30x + 3x^2 - 8y + 2y^2$ sujeto a $3x + 2y \leq 6$. Calcular la solución mediante la aplicación del método de barrera logarítmica. Calcular el multiplicador de Lagrange asociado.

Proof. \square