

# Métodos Numéricos de Optimización con restricciones.

Bustos Jordi  
Práctica V

December 21, 2025

## Capítulo VI

**Ejercicio 1.** Sea  $\{x_k\}$  una sucesión tal que  $\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^p \rho_k \max\{0, g_i(x_k)\} \nabla g_i(x_k) = 0$ . Si  $x_k \rightarrow x^*$ , solución regular del problema de minimizar  $f(x)$  sujeto a  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  entonces  $\mu_k = \rho_k \max\{0, g_i(x_k)\}$  converge al multiplicador de Lagrange asociado.

*Proof.* Sea el problema original minimizar  $f(x)$  sujeto a  $x \in \Omega$ . Definimos la función de penalidad:

$$Q(x, \rho_k) = f(x) + \rho_k P(x) \quad (1)$$

donde  $P(x) \geq 0$  y  $P(x) = 0 \iff x \in \Omega$ . Asumimos que  $\rho_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

### 1. Existencia del punto límite:

Por hipótesis, la sucesión generada  $\{x_k\}$  pertenece a un conjunto compacto  $K$ . Por el teorema de **Bolzano-Weierstrass**, toda sucesión en un conjunto compacto posee una subsucesión convergente. Sea  $\{x_{k_j}\}$  dicha subsucesión tal que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \bar{x}$$

donde  $\bar{x} \in K$  por ser este un conjunto cerrado.

### 2. Prueba de Factibilidad ( $\bar{x} \in \Omega$ ):

Sea  $x^*$  una solución óptima global del problema original. Como  $x^*$  es factible, se cumple que  $P(x^*) = 0$ , y por tanto  $Q(x^*, \rho_{k_j}) = f(x^*)$ .

Dado que  $x_{k_j}$  minimiza  $Q$  en el paso  $k_j$ , se tiene:

$$f(x_{k_j}) + \rho_{k_j} P(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Despejando el término de penalidad  $P(x_{k_j})$ :

$$P(x_{k_j}) \leq \frac{f(x^*) - f(x_{k_j})}{\rho_{k_j}} \quad (2)$$

Aquí aplicamos la nueva hipótesis: Como  $K$  es compacto y  $f$  es una función continua, por el **Teorema de Weierstrass**,  $f$  alcanza un mínimo global en  $K$ , denotado por  $m$ . Por lo tanto,  $f(x_{k_j}) \geq m$  para todo  $j$ .

Esto implica que el numerador en (2) está acotado superiormente (no diverge a infinito):

$$P(x_{k_j}) \leq \frac{f(x^*) - m}{\rho_{k_j}}$$

Tomando el límite cuando  $j \rightarrow \infty$  (recordando que  $\rho_{k_j} \rightarrow \infty$ ):

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} P(x_{k_j}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{Cte}}{\rho_{k_j}} = 0$$

Por la continuidad de  $P$ , concluimos que  $P(\bar{x}) = 0$ . Por la definición de la función de penalidad, esto implica que  $\bar{x}$  es **factible** ( $\bar{x} \in \Omega$ ).

### 3. Prueba de Optimalidad:

Retomamos la desigualdad de optimalidad del subproblema:

$$f(x_{k_j}) + \rho_{k_j} P(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Como  $\rho_{k_j} > 0$  y  $P(x_{k_j}) \geq 0$ , el término  $\rho_{k_j} P(x_{k_j})$  es no negativo. Podemos eliminarlo manteniendo la desigualdad (acotamos inferiormente):

$$f(x_{k_j}) \leq f(x_{k_j}) + \rho_{k_j} P(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Por tanto:

$$f(x_{k_j}) \leq f(x^*)$$

Tomando el límite  $j \rightarrow \infty$  y utilizando la continuidad de  $f$ :

$$f(\bar{x}) \leq f(x^*)$$

#### Conclusión:

Hemos demostrado que  $\bar{x}$  es un punto factible cuyo valor objetivo es menor o igual al del óptimo global  $x^*$ . Por definición de óptimo global, no puede ser estrictamente menor, por lo que  $f(\bar{x}) = f(x^*)$ . Por lo tanto,  $\bar{x}$  es una solución óptima del problema original.  $\square$

**Ejercicio 2.** Considere el problema de minimizar  $f(x, y) = x^2 - y$  sujeto a  $x + y = 6$  y  $x \geq 0$ . Mostrar que si se utiliza el método de penalidad con la función de penalidad cuadrática, entonces  $(x_k, y_k) \rightarrow x^*$  si  $\rho_k \rightarrow \infty$ .

*Proof.* Primero, encontremos la solución óptima del problema original manualmente, si consideramos la restricción  $y = 6 - x$ , podemos reescribir la función objetivo como:

$$g(x) = x^2 - (6 - x) = x^2 + x - 6$$

y minimizando  $g$  sujeto a  $x \geq 0$  se tiene que el mínimo se alcanza en  $x^* = (0, 6)$ .

Sea  $h(x, y) = x + y - 6$  la función que representa la restricción de igualdad. La función de penalidad cuadrática se define como:

$$Q(x, y, \rho) = f(x, y) + \frac{\rho}{2} h(x, y)^2 = x^2 - y + \frac{\rho}{2} (x + y - 6)^2$$

En cada iteración  $k$ , queremos minimizar  $Q(x, y, \rho_k)$  sujeto a  $x \geq 0$ . Si calculamos el gradiente de  $Q$  e igualamos a cero para obtener los puntos críticos, tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -1 + \rho_k(x + y - 6) = 0 \implies x + y - 6 = \frac{1}{\rho_k}$$

por otro lado,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + \rho_k(x + y - 6)$$

y utilizando el resultado anterior, tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo, esta solución no es factible ya que debe ser  $x \geq 0$ . Observemos que para cualquier  $x \geq 0$ , la derivada parcial anterior es siempre positiva, por lo que  $Q$  es creciente en  $x$  en la zona factible.

Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el límite inferior  $x_k = 0$ . Ahora encontremos  $y_k$  usando lo anterior:

$$\begin{aligned}x_k + y_k - 6 &= \frac{1}{\rho_k} \\0 + y_k - 6 &= \frac{1}{\rho_k} \\y_k &= 6 + \frac{1}{\rho_k}\end{aligned}$$

Luego, la solución para la iteración  $k$  es  $(x_k, y_k) = \left(0, 6 + \frac{1}{\rho_k}\right)$ . Finalmente, tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  (y por tanto  $\rho_k \rightarrow \infty$ ), tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(0, 6 + \frac{1}{\rho_k}\right) = (0, 6) = x^*$$

por lo que hemos demostrado que  $(x_k, y_k) \rightarrow x^*$  cuando  $\rho_k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Ejercicio 3.** En el problema de minimizar  $f(x) = x^2 + y^2$  sujeto a  $x + y^2 = 1$ . Demostrar que para todo  $\rho > 0$ , los puntos  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  y  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  son minimizadores de la función de penalidad

$$\begin{aligned}\bar{l} &= f(x) - h(x) + \frac{\rho}{2}h^2(x) \\&= x^2 + y^2 - (x + y^2 - 1) + \frac{\rho}{2}(x + y^2 - 1)^2 \\&= x^2 - x + 1 + \frac{\rho}{2}(x + y^2 - 1)^2\end{aligned}$$

*Proof.* Para que los puntos sean minimizadores de  $\bar{l}$ , primero deben ser puntos críticos. Calculamos el gradiente de  $\bar{l}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{l}}{\partial x} &= 2x - 1 + \rho(x + y^2 - 1) \\ \frac{\partial \bar{l}}{\partial y} &= 2\rho y(x + y^2 - 1)\end{aligned}$$

Evaluando en  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{l}}{\partial x} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = 0 \\\frac{\partial \bar{l}}{\partial y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = 0\end{aligned}$$

Análogamente para  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Por lo tanto, ambos puntos son puntos críticos de  $\bar{l}$ .

Ahora, para confirmar que son minimizadores, calculamos la matriz Hessiana de  $\bar{l}$ :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \rho & 2\rho y \\ 2\rho y & 2\rho(x + 3y^2 - 1) \end{bmatrix}$$

Evaluando en  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ :

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 2 + \rho & 2\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\rho \left(\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \rho & \frac{2\rho}{\sqrt{2}} \\ \frac{2\rho}{\sqrt{2}} & 2\rho \end{bmatrix}$$

Si usamos el criterio de Sylvester para la positividad definida, vemos que ambos menores principales son positivos para todo  $\rho > 0$ :

- Primer menor principal:  $2 + \rho > 0$
- Segundo menor principal:  $\det(H) = 4\rho > 0$

Por lo tanto, la matriz Hessiana es definida positiva en ambos puntos críticos, lo que confirma que son minimizadores de  $\bar{l}$  para todo  $\rho > 0$ .  $\square$

**Ejercicio 4.** Demostrar que  $x^*$  es un minimizador local del problema (A) de minimizar  $f(x)$  sujeto a  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  y  $g_j \leq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$  si y sólo si  $x^*, z^*$  es minimizador local del problema (B) de minimizar  $f(x)$  sujeto a  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  y  $g_j(x) + z_j^2 = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$  donde  $z_i^* = \sqrt{-g_i(x^*)}$ .

*Proof.* Supongamos que  $x^*$  es un minimizador local del problema original A. Quiero ver que  $(x^*, z^*)$  es un minimizador local del problema modificado B. Por definición de minimizador local en A, existe una vecindad  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x^*$  tal que para todo  $x \in U$  que cumple las restricciones, se tiene  $f(x) \geq f(x^*)$ . Consideremos un punto  $(x, z)$  que sea factible para B y que esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de  $(x^*, z^*)$ . Si  $(x, z)$  es factible para B, debe ser

$$g_j(x) + z_j^2 = 0 \implies z_j^2 = -g_j(x) \implies g_j(x) \leq 0$$

Además,  $h_i(x) = 0$  se mantiene igual en ambos problemas. Esto nos dice que la componente  $x$  de cualquier solución factible  $(x, z)$  de B es automáticamente una solución factible de A. Si tomamos una vecindad del espacio aumentado  $(x, z)$  tal que la proyección sobre  $x$  caiga en  $U$  entonces por la hipótesis de que  $x^*$  es minimizador local en A, se cumple que  $f(x) \geq f(x^*)$ . Dado que la función objetivo de B es  $F(x, z) = f(x)$  tenemos que  $F(x, z) \geq F(x^*, z^*)$  por lo que  $(x^*, z^*)$  es minimizador local en B.

Supongamos ahora que  $(x^*, z^*)$  es minimizador del problema modificado B y vamos a demostrar que  $x^*$  es minimizador local del problema original A. Por definición de minimizador local en B, existe una vecindad  $V \subset \mathbb{R}^{n+p}$  de  $(x^*, z^*)$  tal que para todo  $(x, z) \in V$  que cumple las restricciones, se tiene  $F(x, z) \geq F(x^*, z^*)$ . Lo que nos dice que  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $(x, z)$  factible en  $V$ . Consideremos ahora un punto  $x$  que sea factible para A y que esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de  $x^*$ . Notemos que factible para A significa que  $g_j(x) \leq 0$  y  $h_i(x) = 0$ . Definamos  $z_j = \sqrt{-g_j(x)}$  para cada  $j = 1, \dots, p$ . Entonces, el punto  $(x, z)$  es factible para B ya que  $g_j(x) + z_j^2 = 0$  y  $h_i(x) = 0$ . Si tomamos una vecindad del espacio original  $x$  tal que la extensión  $(x, z)$  caiga en  $V$  entonces por la hipótesis de que  $(x^*, z^*)$  es minimizador local en B, se cumple que  $f(x) \geq f(x^*)$ . Por lo tanto,  $x^*$  es minimizador local en A.  $\square$

**Ejercicio 5.** Considere el problema de minimizar  $f(x) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y$  sujeto a  $x = 0$ .

1. Calcule la solución  $(x^*, \lambda^*)$ .
2. Puede afirmar que existe  $\bar{\rho}$  para el cual  $x^*$  es minimizador de la función Lagrangiano aumentada  $L(x, \lambda^*; \rho)$  para todo  $\rho \geq \bar{\rho}$ ?

3. Hacer tres iteraciones del método de Lagrangiano aumentado comenzando en  $x_0 = (0, 0)$ ,  $\rho_1 = 1$  y  $\lambda_1 = 0$ .

*Proof.* Para el primer inciso planteamos la función Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \lambda x$$

Aplicamos las condiciones de primer orden:

- $\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + 2y + \lambda = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2y - 2 = 0$
- Restricción:  $x = 0$

Reemplazando la restricción en las otras dos ecuaciones, tenemos:

- $2y + \lambda = 0$
- $2y - 2 = 0$

Por lo tanto  $x^* = (0, 1)$  y el multiplicador de Lagrange asociado es  $\lambda^* = -2$ .

Para la segunda parte consideremos el Lagrangiano aumentado:

$$L(x, y, \lambda, \rho) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \lambda x + \frac{\rho}{2}x^2$$

evaluando en  $\lambda^* = -2$ :

$$\begin{aligned} L(x, y, -2, \rho) &= 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y - 2x + \frac{\rho}{2}x^2 \\ &\quad (2 + \frac{\rho}{2})x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y \end{aligned}$$

Calculemos la matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} 4 + \rho & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

y análogamente al ejercicio 3, usando el criterio de Sylvester, vemos que ambos menores principales son positivos para todo  $\rho > -2$  y entonces la matriz Hessiana es definida positiva. Por lo tanto, podemos afirmar que existe  $\bar{\rho} = 0$  para el cual  $x^*$  es minimizador de la función Lagrangiano aumentada  $L(x, \lambda^*; \rho)$  para todo  $\rho \geq \bar{\rho}$ .

Finalmente para el tercer inciso, comenzando en  $x_0 = (0, 0)$ ,  $\rho_1 = 1$  y  $\lambda_1 = 0$ , tenemos que minimizar:

$$L(x, y, 0, 1) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y + \frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2 + 2xy + y^2 - 2y$$

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 5x + 2y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $x_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ . Por lo que  $\lambda_2 = 0 + 1 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$ . Ahora minimizamos:

$$L(x, y, -\frac{2}{3}, 1) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{2}{3}x + y^2 - 2y$$

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 5x + 2y - \frac{2}{3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $x_2 = \left(\frac{-4}{9}, \frac{13}{9}\right)$ . Actualizamos nuevamente  $\lambda_3 = -\frac{2}{3} + 1 \cdot \left(\frac{-4}{9}\right) = \frac{-10}{9}$ .

Finalmente minimizamos:

$$L(x, y, -\frac{10}{9}, 1) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{10}{9}x + y^2 - 2y$$

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 5x + 2y - \frac{10}{9} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos  $x_3 = \left(\frac{-8}{27}, \frac{35}{27}\right)$ . Notemos que  $-38/27 \approx -1.407$  y cada vez se acerca más a la solución  $\lambda^* = -2$  mientras que  $x_k$  se acerca a  $x^* = (0, 1)$ .  $\square$

### Ejercicio 6. OPTATIVO

**Ejercicio 7.** Considere el problema de minimizar  $f(x) = 2x^2 + 9y$  sujeto a  $x + y \geq 4$ . Mostrar que si se utiliza el método de barrera inversa, entonces  $(x_k, y_k) \rightarrow x^*$  si  $\mu_k \rightarrow 0$ .

*Proof.* TODO  $\square$

**Ejercicio 8.** Considere el problema de minimizar  $f(x) = -30x + 3x^2 - 8y + 2y^2$  sujeto a  $3x + 2y \leq 6$ . Calcular la solución mediante la aplicación del método de barrera logarítmica. Calcular el multiplicador de Lagrange asociado.

*Proof.*  $\square$