

Àlgebra

Gener de 2019. Recuperació Parcial II

Problema 1 En el conjunt $G = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \neq 0\}$ es defineix la següent operació:

$$(a, b) * (a', b') = (a \cdot a', \lambda \cdot a' \cdot b + b'),$$

on $\lambda \in \mathbb{Z}$.

- i) Proveu que $*$ una operació interna a G .
- ii) Determineu per a quins valors de λ l'operació té element neutre?

Considerem ara $\lambda = 1$.

- iii) Trobeu els elements invertibles de $(G, *)$ i, per aquells que ho siguin, doneu el seu invers.
- iv) És $(G, *)$ un grup? És un grup abelià? Justifiqueu-ho.
- v) Determineu $(1, b)^n = (1, b) * \dots * (1, b)$.

(Puntuació: 2 punts i) 0.2, ii) 0.4, iii) 0.6, iv) 0.5, v) 0.3)

Problema 2

- i) Un proveïdor de la marca *Microtxof* deixa en un establiment 325 unitats del seu producte estrella *Windontrun* i 185 unitats del producte *Macacosoft*. El preu d'ambdós productes és un nombre enter d'euros (sense cèntims) i l'import total de la factura és de 1900 euros. Determineu tots els possibles preus d'aquests productes.
- ii) Demostreu que $10!$ es congruent a 10 mòdul 11.
- iii) Uns amics volen fer un sorteig per recaptar diners pel viatge de fi de curs. Cada participant paga 1 euro per reservar-se un nombre entre 0 i 99. El dia del sorteig busquen un voluntari que escolleixi un nombre a de 4 xifres. Guanyarà el sorteig el participant que hagi encertat les dues darreres xifres del nombre a^a . Com ho han de fer per calcular aquestes dues últimes xifres?
- iv) Calculeu $2019^{2019} \pmod{100}$ emprant adequadament el teorema d'Euler i l'algorisme del camperol rus.

(Puntuació: 2 punts: i) 0.7, ii) 0.3, iii) 0.3, iv) 0.7))