Escola Politècnica Superior **Universitat de Lleida**
Grau en Enginyeria Informàtica

Àlgebra

Novembre de 2018

Problema 1 Sigui el conjunt de seqüències binàries $A = \{s = a_1a_2 \dots a_n : a_i \in \{0,1\}\}$. En aquest conjunt podem definir la relació d'ordre R següent:

$$a_1a_2 \dots a_n \;\; R \;\; b_1b_2 \dots b_m \iff \quad n \leq m \;\; \text{i} \;\; a_i \leq b_i, \forall i \leq n.$$

i) Determineu el conjunt $B = \{s \in A : s \not R\, 01 \;\; \text{i} \;\; s\, R\, 10001\}$.

ii) Proveu que aquesta relació és antisimètrica.

iii) Determineu si R és una relació d'ordre total o parcial.

iv) Considereu el conjunt

$$S = \{001, 010, 1000, 01001, 11000, 000100, 111000\} \subseteq A.$$

Doneu el diagrama de Hasse de S, explicant el procediment que seguiu. Determineu, si existeixen, el suprem i l'ínfim, el màxim i el mínim, i els elements maximals i minimals.

(*Puntuació*: 2 punts: i) 0.4, ii) 0.3, iii) 0.3, iv) 1)

Problema 2 Considereu un conjunt format per les n persones que formen part d'un equip de desenvolupament de software de l'empresa Gúguel, $P = \{1, 2, \dots, n\}$. L'empresa vol monitoritzar les interaccions entre els diferents membres de l'equip mentre dura el desenvolupament de cada projecte (cada interacció representa una tasca que una persona ha encomanat a una altra; una persona només pot encomanar una tasca com a molt a una altra; també es té en compte que cada persona pot encomanar-se una tasca a si mateixa). Aquestes interaccions es poden representar com a elements del conjunt

$$\mathcal{M} = \{R : \;\; R \text{ és una relació en } P\}.$$

Per tal de poder emmagatzemar aquesta informació en els seus sistemes, utilitza la següent aplicació:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M} & \longrightarrow & T \\ R & \mapsto & t = (a_{ij}) \;\; \text{tal que} \;\; a_{ij} = 1 \;\; \text{si} \;\; i\,R\,j \;\; \text{i} \;\; a_{ij} = 0 \;\; \text{si} \;\; i \not R\, j, \end{array}$$

on T és el conjunt de taules bidimensionals de n files i n columnes, on a_{ij} designa la cel·la que ocupa la fila i i la columna j i cada element $t \in T$ es denota per $t = (a_{ij})$.

i) Considereu $R \in \mathcal{M}$ tal que $i\,R\,j \iff j = i + k, k \in \{1, 2\}$. Doneu la taula $t = f(R)$.

ii) Doneu, si $n = 5$, el diagrama que representa la relació $R = f^{-1}(t)$ on t és la taula següent:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

iii) Determineu $f^{-1}(D)$ on $D = \{t = (a_{ij}) \in T : a_{ii} = 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Considereu l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} g : T & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ t = (a_{ij}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \end{array}$$

iv) Determineu si g és injectiva.

v) Determineu si g és exhaustiva.

vi) Doneu $g \circ f(R)$, on R és la relació de l'apartat ii).

(*Puntuació*: 2 punts: i) 0.3, ii) 0.3, iii) 0.3, iv) 0.4 , v) 0.4, vi) 0.3)