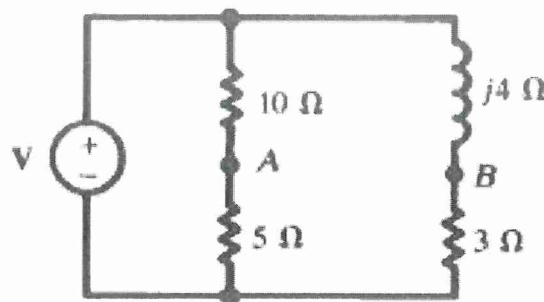


1. En el circuit que mostra la figura, la diferència de potencial en A-B és $V_{AB}=36.1\angle 3.18^\circ$ (V). Determineu:

- El voltatge V en els terminals de la font [1]
- La impedància equivalent del circuit [1]
- La intensitat de corrent a través de la branca purament resistiva [0.5]
- La intensitat màxima de corrent a través de l'element inductiu [0.5]



2. Volem disposar d'un circuit R-C que actuï com a filtre

passa baixos, de manera que quan a l'entrada s'hi aplica una tensió alterna $V_{in}(t)=V_0\sin(\omega t)$, a la sortida tinguem una tensió nul·la per freqüències altes. Determineu de forma raonada:

- Quin seria el disseny del circuit, en quins terminals prendríem la sortida per a tenir el comportament de passa baixos? [0.5]
- La relació entre el voltatge (màxim o eficaç) d'entrada i de sortida $V_{out}(\omega)/V_{in}(\omega)$ s'anomena funció de transferència que caracteritza el filtre. Deduïu la funció de transferència del filtre RC proposat. [1]
- Si posem $R=150\ \Omega$ i $C=2.5\ \mu\text{F}$, a quina freqüència tindrem una transferència del 50%? [0.5]

3. Una ona electromagnètica harmònica plana de 10 cm de longitud d'ona es propaga pel buit en el sentit positiu de l'eix y. Sabem que el camp elèctric està orientat en la direcció z, i la intensitat mitjana de l'ona és de $0.2\ \text{W/m}^2$. Determineu de forma raonada:

- La freqüència d'aquesta ona. [0.5]
- Les expressions dels camps elèctric i magnètic en funció del temps. [2]
- La potència incident en una superfície circular de 0.4 m de radi, col·locada perpendicularment a l'eix y. [0.5]

4. Pel funcionament correcte d'una fibra òptica cal que la llum que es propaga pel nucli es reflecteixi totalment en la interfície de separació entre nucli i recobriment. Volem construir una fibra òptica usant un quars d'índex de refracció 1.46 i un altre material d'índex 1.4454. Es demana, de forma justificada:

- Quin material utilitzaríeu com a nucli (digueu-li índex n_1) i quin empraríeu com a recobriment (digueu-li índex n_2)? [0.5]
- Quin és l'angle crític per tal que es produeixi la reflexió total interna? [0.75]
- Si a l'entrada de la fibra el medi exterior és aire (índex de refracció igual a 1), quin serà l'angle màxim que podrà formar un raig de llum amb l'eix de la fibra per tal que, un cop dins de la fibra, reboti totalment en les parets interiors? [0.75]

Fórmules i constants:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \quad \epsilon_0 = 8.84 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2 \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Tm/A}$$

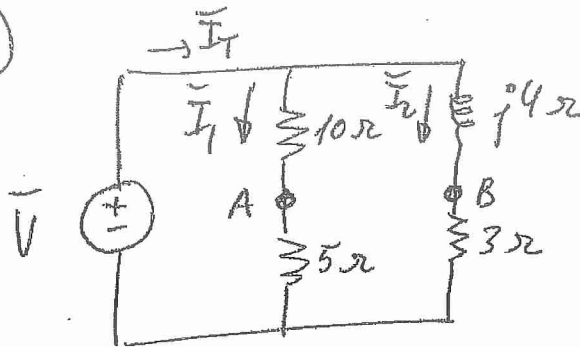
$$c = 3 \times 10^8\ \text{m/s} \quad h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js} \quad e = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \Delta V = -\int \vec{E} d\vec{r} \quad C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} \quad \bar{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad X_L = L\omega \quad X_C = \frac{1}{C\omega}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad n = \frac{c}{v}$$

①



$$\bar{V}_{AB} = 36.1 \angle 3.18^\circ \text{ (V)}$$

1 a) \bar{V} ?

$$\bar{Z}_1 = 10 + 5 = 15 = 15 \angle 0^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 3 + j4 = 5 \angle 53.13^\circ \Omega$$

$$\text{Parallel: } \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} \quad \bar{I}_T = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{eq}}$$

\bar{V}_{AB} implique a les 2 branches:

$$\bar{V}_{AB} = (5\Omega) \cdot \bar{I}_1 - (3\Omega) \cdot \bar{I}_2 = 36.1 \angle 3.18^\circ \text{ V}$$

$$5 \angle 0^\circ \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} - 3 \angle 0^\circ \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = 36.1 \angle 3.18^\circ \rightarrow \text{trouvons } \bar{V}$$

$$\bar{V} \left(\frac{5 \angle 0^\circ}{15 \angle 0^\circ} - \frac{3 \angle 0^\circ}{5 \angle 53.13^\circ} \right) = 36.1 \angle 3.18^\circ$$

$$\frac{1 \angle 0^\circ}{3} - \frac{3 \angle -53.13^\circ}{5} = \frac{1}{3} - (0.36 - j0.48) = -0.03 + j0.48 = 0.48 \angle 96^\circ$$

$$\bar{V} = \frac{36.1 \angle 3.18^\circ}{0.48 \angle 96^\circ} = 75.2 \angle -92^\circ \text{ (V)}$$

0,5 d) Element inductif: branche 2 $\bar{Z}_2 = 3 + j4 = 5 \angle 53.13^\circ \Omega$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = \frac{75.2 \angle -92^\circ}{5 \angle 53.13^\circ} = 15.04 \angle -145.13^\circ \text{ (A)}$$

0,5 c) Brancha rezistivă : $\bar{Z}_1 = 15 = 15 \angle 0^\circ (\Omega)$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} = \frac{75.2 \angle -92^\circ}{15 \angle 0^\circ} = 5.01 \angle -92^\circ (A)$$

1 b) Impedanță echivalent :

$$\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}$$

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{15 \angle 0^\circ \cdot 5 \angle 53.13^\circ}{18.44 \angle 12.53^\circ} = \frac{75 \angle 53.13^\circ}{18.44 \angle 12.53^\circ} = 4.07 \angle 40.6^\circ (\Omega)$$

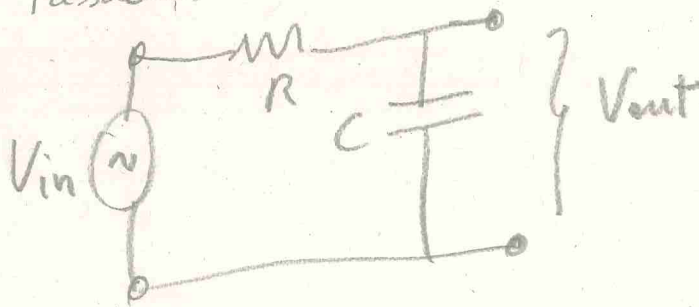
$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = 15 + 3 + j4 = 18 + j4 = 18.44 \angle 12.53^\circ (\Omega)$$

② R-C com a filtre passa baixos

$$R = 150 \Omega$$

$$C = 2.5 \mu F$$

a-b) $V_{in}(t) = V_o \sin(\omega t) \rightarrow V_{out}?$
 Passabaixos: saída em el condensador



$$V_{in} = ZI = \sqrt{R^2 + X_C^2} \cdot I$$

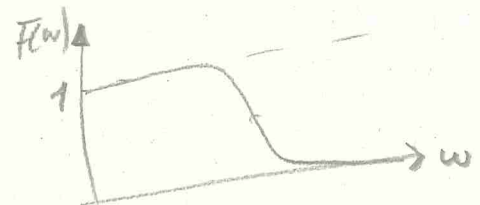
$$V_{out} = X_C I$$

$$F(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} = \frac{1/\omega C}{\frac{1}{\omega C} \sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$$

$$\omega \rightarrow 0 : F(\omega) \rightarrow 1$$

$$\omega \rightarrow \infty : F(\omega) \rightarrow 0$$



c) $F(\omega) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$ ($F(\omega) = 0.5$, 50%)

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2 + 1} \quad " \quad R^2 C^2 \omega^2 + 1 = 4$$

$$\omega = \left[\frac{3}{R^2 C^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{3}{150^2 (2.5 \times 10^{-6})^2} \right]^{1/2} =$$

$$= 4618.8 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi \nu \quad \parallel \quad \boxed{\nu = 735 \text{ Hz}}$$

3) $d = 10 \text{ cm}$
 propagació: $y > 0$ (\hat{j})
 $\vec{E} // \text{eix } z: \hat{k}$
 $I_m = 0.2 \text{ W/m}^2$

a) $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{0.1} = \underline{3 \times 10^9 \text{ Hz}}$

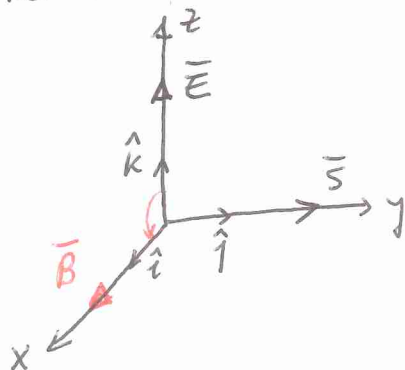
b) \vec{E}, \vec{B} ?

Relació vectorial:

condició

$\vec{E} \perp \vec{B} // \vec{s} \Rightarrow \vec{B} = B_x(y, t) \cdot \hat{i}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\hat{k} \quad \hat{i} \quad \hat{j}$



Funció d'ona:

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t) = E_0 \sin(Ky - \omega t) \cdot \hat{k} \\ \vec{B}(y, t) = B_0 \sin(Ky - \omega t) \cdot \hat{i} \end{cases}$$

Paràmetres: $d = 10 \text{ cm} : K = \frac{2\pi}{d} = 62.83 \text{ m}^{-1}$

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 = 1.88 \times 10^{10} \text{ rad/s}$

Amplituds:

$I_m = |\vec{s}|_m = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0}$

$\frac{E_0}{B_0} = c$

$E_0 = (2c\mu_0 I_m)^{1/2} = 12.28 \text{ V/m}$

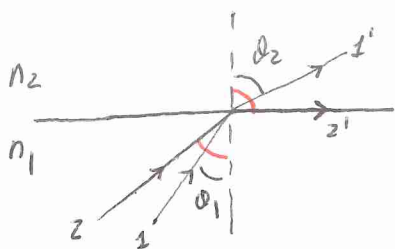
$B_0 = 4.1 \times 10^{-8} \text{ T}$

$$\begin{aligned} \vec{E}(y, t) &= \left(12.28 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \sin(62.83 y - 1.88 \times 10^{10} t) \hat{k} \\ \vec{B}(y, t) &= (4.1 \times 10^{-8} \text{ T}) \sin(62.83 y - 1.88 \times 10^{10} t) \hat{i} \end{aligned}$$

c) $I = \frac{P}{S}$ (S superfície \perp direcció propagació)

$P = I \cdot S = I \pi R^2 = 0.2 \pi (0.4)^2 = \underline{0.1 \text{ W}}$

4) a) Llei de refracció o Llei de Snell : $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$



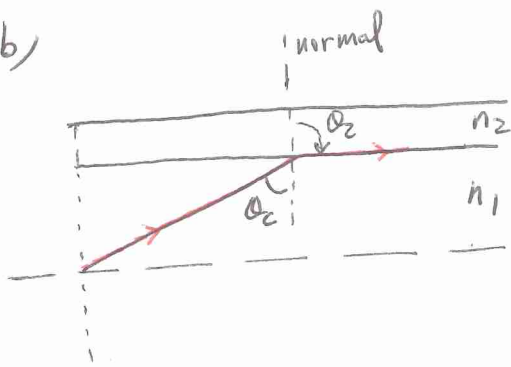
per a tenir reflexió total interna :

$$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow n_2 < n_1$$

Per tant :

Fibra } Nuclei : guars $n_1 = 1.46$
 Recobrint : material $n_2 = 1.4454$

b)



Angle crític θ_c : condició $\theta_2 = 90^\circ$

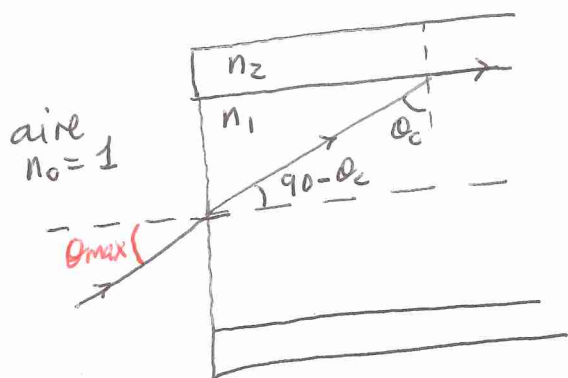
$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ = n_2$$

$$\boxed{\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}}$$

$$\sin \theta_c = \frac{1.4454}{1.46}$$

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 81.89^\circ}$$

c) Entrada de la fibra : interfície aire $n_0 = 1$, nucle n_1



Aplicant Snell , amb θ_c determinat :

$$n_0 \sin \theta_{\max} = n_1 \sin (90 - \theta_c)$$

$$\sin \theta_{\max} = n_1 \sin (90 - \theta_c)$$

$$\sin \theta_{\max} = 1.46 \sin (8.11^\circ)$$

$$\boxed{\theta_{\max} = 11.886^\circ}$$

També , usant el concepte d'apertura numérica :

$$AN = \underbrace{n_0}_{1} \sin \theta_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\sin \theta_{\max} = \sqrt{(1.46)^2 - (1.4454)^2} = 0.20596$$

$$\theta_{\max} = 11.88^\circ$$