Universitat de Lleida
Departament de Matemàtica

ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR
UNIVERSITAT DE LLEIDA

Matemàtica Discreta

GEI i GEIADE

Parcial I **04.11.2019**

Problema 1. Un llenguatge de programació considera vàlida una cadena formada per un o més digits del conjunt $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ si conté un nombre parell de zeros. Així, per exemple, la cadena 1203567043 és vàlida mentre que la cadena 103503502 no ho és. Sigui a_n el nombre de cadenes vàlides de longitud n.

(i) Calculeu a_1 i a_2 de forma directa. Determineu una equació de recurrència per a_n i utilitzeu-la per a calcular a_5 (no cal que doneu una fórmula tancada per a_n).

(ii) Resoleu la recurrència
$$8b_n - 2^n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$$
amb les condicions inicials $b_1 = 0$ i $b_2 = 1$.

(*Puntuació*: 2 punts: (i) 1, (ii) 1)

Problema 2.

(i) Digueu si el graf H (que té per matriu d'adjacència la representada en la Figura 2) és o no isomorf al graf G representat en la Figura 1.

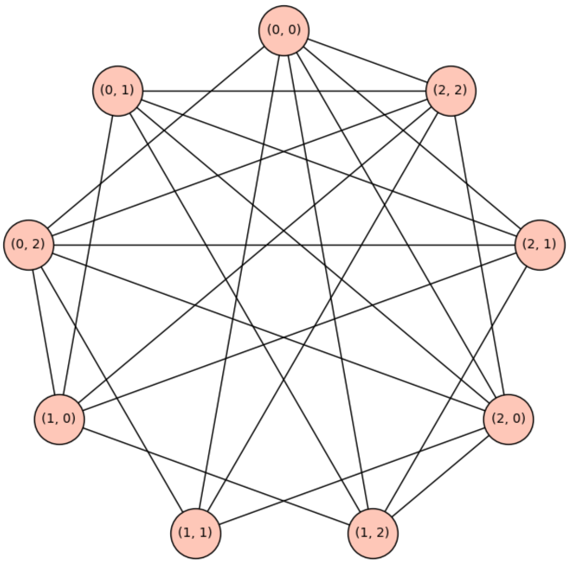

Figura 1: Graf G.

$$M_A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2: Matriu d'adjacència del graf H.

Donat un nombre enter $n \geq 2$, considereu el graf G_n que té per conjunt de vèrtexs $V_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq x_i \leq 2\}$ i on les arestes uneixen vèrtexs amb totes les coordenades iguals excepte una que s'ha de diferenciar amb una unitat, és a dir, si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i $v = (y_1, \ldots, y_n)$ són dos vèrtexs qualsevol de V_n, llavors $u \sim v$ (hi ha una aresta entre ells) si,

Existeix un únic $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|x_k - y_k| = 1$ i $x_j = y_j$ per a tot $j \neq k$.

D'aquesta manera, el graf G_n modelitza els moviments d'un personatge en un videojoc que es desplaça d'una casella a un altra casella que està al seu costat, dintre un tauler de joc semblant als escacs, però n-dimensional. Per exemple, el graf G_2 és el graf complementari del graf representat en la Figura 3.

(ii) Dibuixeu G_2 i doneu el seu ordre i mida. Podeu eliminar un vèrtex de G_2 de forma que s'obtingui un graf regular? Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida de G_3.

(iii) Determineu l'ordre del graf G_n, per a tot $n \geq 2$. Calculeu el grau màxim de G_n, és a dir, el grau del vèrtex amb més adjacències de G_n. És en general G_n un graf bipartit?

(*Puntuació*: 2 punts: (i) 0.5, (ii) 0.6 (iii) 0.9)

Solució:

Problema 1

(i) Clarament $a_1 = 9$ ja que qualsevol dígit que no sigui el 0 és una cadena de longitud 1 que conté un nombre parell de zeros. D'altra banda $a_2 = 9^2 + 1$ ja que en una cadena de longitud 2 amb un nombre parell de zeros, només podem utilitzar els digits $1, 2, \ldots, 9$ en cada posició, el que dóna un total de 9^2 cadenes, més la cadena 00. Per tal de raonar una equació de recurrència per a_n observem que per a tota cadena de longitud $n-1$ amb un nombre parell de zeros, podem afegir-hi qualsevol digit que no sigui un zero i obtenim una cadena de longitud n amb un nombre parell de zeros. Això afegeix $9a_{n-1}$ al nostre recompte. Ara falta per comptar aquelles cadenes de longitud n amb un nombre parell de zeros que acaben en zero: Però en aquest cas, la cadena fins la posició $n-1$ contindrà un nombre senar de zeros, i d'aquestes n'hi ha $10^{n-1} - a_{n-1}$ ja que seràn totes les cadenes sense restriccions menys aquelles que contenen un nombre parell de zeros. Així doncs,

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}.$$

Ara, a partir de $a_1 = 9$ podem calcular $a_2 = 8 \cdot 9 + 10 = 82$, $a_3 = 8 \cdot 82 + 100 = 756$, $a_4 = 8 \cdot 756 + 1000 = 7048$ i $a_5 = 8 \cdot 7048 + 10000 = 66384$.

Observació: Algú pot interpretar que 'un nombre parell de zeros' exclou el cas de les cadenes on no hi ha cap zero. En aquest cas, $a_1 = 0$ i $a_2 = 1$ ja que només la cadena 00 serìa valida en aquest darrer cas. També podem raonar una relació de recurrència per aquest cas de forma semblant a l'anterior. De fet, podeu veure fàcilment que en aquest cas,

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1} - 9^{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1} - 9^{n-1},$$

ja que en el cas de les cadenes que acaben en zero haurem de treure aquelles cadenes de longitud $n-1$ formades unicament per dígits distints a zero. De nou, a partir de $a_2 = 1$, podem calcular

$a_3 = 27$, $a_4 = 487$ i $a_5 = 7335$.

(ii) La recurrència $8b_n - 2^n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$ és linial d'ordre 2 amb coeficiens constants i no homogènea. Per a resoldre-la, primer resolem $8b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$. L'equació característica d'aquesta recurrència és $8x^2 - 6x + 1 = 0$. Aquesta equació té per solucions $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Així doncs, la solució de la recurrència original serà del tipus:

$$b_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{4}\right)^n + p(n).$$

on $p(n)$ és una solució particular. Per cercar una solució particular, posem $p(n) = C2^n$ i calculem C saben que ha de complir la recurrència original, és a dir, $8p(n) - 2^n = 6p(n-1) - p(n-2)$. Substituint tenim que $8C2^n - 2^n = 6C2^{n-1} - C2^{n-2}$, és a dir, $(8C-1)2^n = (12C - C)2^{n-2}$. Això és equivalent a $(8C-1)4 = 11C$, d'on obtenim $C = \frac{4}{21}$. Per tant,

$$b_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{4}{21}2^n.$$

Per a calcular A i B només tenim que substituir les condicions inicials en aquesta solució, així obtenim el sistema linial:

$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{21}2 & = & 0 \\ A\left(\frac{1}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{4}{21}2^2 & = & 1 \end{cases}$$

La solució del qual és $B = -\frac{48}{7}$ i $A = \frac{8}{3}$. Així doncs, la solució final és:

$$b_n = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{48}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{4}{21}2^n = \frac{1}{21}\left(\frac{7}{2^{n-3}} - \frac{9}{4^{n-2}} + 2^{n+2}\right).$$

Problema 2

(i) Tots dos grafs tenen el mateix ordre $n = 9$, la mateixa mida $m = 24$ i la mateixa seqüència de graus $S : 6^4, 5^4, 4^1$. No obstant G i H no son isomorfs ja que, per exemple, tots els veins de l'únic vèrtex de grau 4 tenen grau 6 a G, mentre que a H aquest mateix vèrtex de grau 4 és adjacent a un vèrtex de grau 5.

(ii) Com el graf G_2 és el complementari del que teniu representat a l'examen, resulta molt fàcil dibuixar-ho. El seu ordre és $n = 9$, la seva mida $m = 12$ i la seqüència de graus és $S : 4^1, 3^4, 2^4$. Observeu que podeu obtenir un graf regular si elimineu el vèrtex de grau 4. En aquest cas obtenim un graf isomorf a C_8 (graf cicle de 8 vèrtexs) que és 2-regular. Segons l'enunciat, el graf G_3 té per conjunt de vèrtexs $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq x_i \leq 2\}$, és a dir, $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), \ldots, (2,2,2)\}$. Hi ha un total de $3^3 = 27$ vèrtexs (paraules ordenades de longitud 3 en l'alfabet $\Sigma = \{0,1,2\}$. Respecte al grau dels vèrtexs, observeu que segons l'enunciat un vèrtex qualsevol (x_1, x_2, x_3) serà adjacent a tots els vèrtexs de la forma $(x_1 \pm 1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2 \pm 1, x_3)$ i $(x_1, x_2, x_3 \pm 1)$, això vol dir grau 6. Però de fet això només val pel vèrtex $(1,1,1)$ ja que per la resta de casos no podeu sumar i restar 1 en totes les components. Per exemple, el vèrtex $(1,0,2)$ té grau 4 ja que és adjacent a $(1 \pm 1, 0, 2)$, $(1, 0+1, 2)$ i $(1, 0, 2-1)$. Així, el grau d'un vèrtex està en funció del nombre d'uns que conté. Per tant, el vèrtex $(1,1,1)$ té grau 6. Els vèrtexs que tenen dos 1's tenen grau 5 (n'hi ha $3 \cdot 2^1 = 6$). Els vèrtexs amb un 1 tenen grau 4 (n'hi ha $3 \cdot 2^2 = 12$). Finalment, els vèrtex sense cap 1 tenen grau 3 (n'hi ha $2^3 = 8$).

Per tant, la seqüència de graus és $S : 6^1, 5^6, 4^{12}, 3^8$ i per tant $m = 1/2(6{\cdot}1+6{\cdot}5+12{\cdot}4+3{\cdot}8) = 54$.

(iii) Com $V_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \le x_i \le 2\}$, llavors cada vèrtex és una paraula de longitud n en l'alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. N'hi ha 3^n d'aquestes paraules. Per la raó explicada en l'anterior apartat, el vèrtex $(1, 1, \ldots, 1)$ és el vèrtex amb més grau, ja que serà adjacent a $(1 \pm 1, 1, \ldots, 1), (1, 1{\pm}1, \ldots, 1), \ldots, (1, 1, \ldots, 1{\pm}1)$. Això són $2n$ adjacències des d'aquest vèrtex. Per a veure si G_n és bipartit, suposem que $V_n = V_n^1 {\cup} V_n^2$ i posem el vèrtex $(0, 0, \ldots, 0)$ a V_n^1. Llavors tots els seus veins han d'anar al conjunt V_n^2, és a dir, $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) \in V_n^2$. Observeu que no hi ha cap adjacència entre ells i que tots aquests vèrtexs tenen exàctament un 1. Els vèrtexs adjacents a qualsevol d'aquests vèrtexs tendràn dos uns i els colocarem a V_n^1. Així doncs, podem definir,

$$V_n^1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \text{conté un nombre parell de uns i } 0 \le x_i \le 2\},$$

$$V_n^2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \text{conté un nombre senar de uns i } 0 \le x_i \le 2\}.$$

Clarament $V_n = V_n^1 \cup V_n^2$ i queda per veure que no hi ha cap aresta entre vèrtexs de la mateixa partició. Però això és evident, ja que hi ha una aresta entre dos vèrtexs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ quan totes les components son iguals excepte una que es diferència amb una unitat, i per tant, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ té $k \ge 1$ uns, llavors $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ té $k \pm 1$ uns, i per tant vèrtexs adjacents viuran en particions diferents.

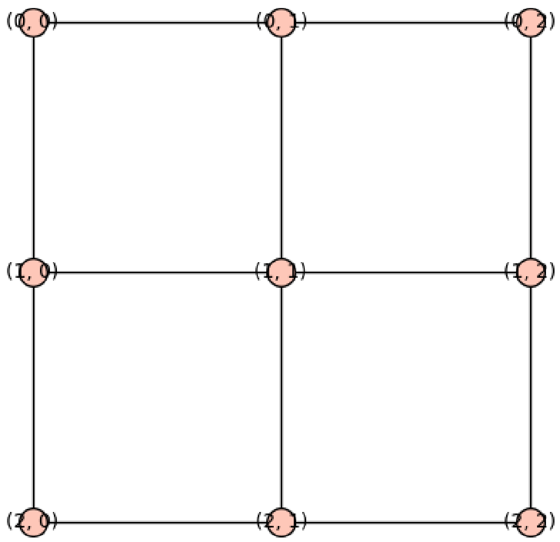

Figura 3: Graf G_2 vist com a moviments en un tauler de joc.

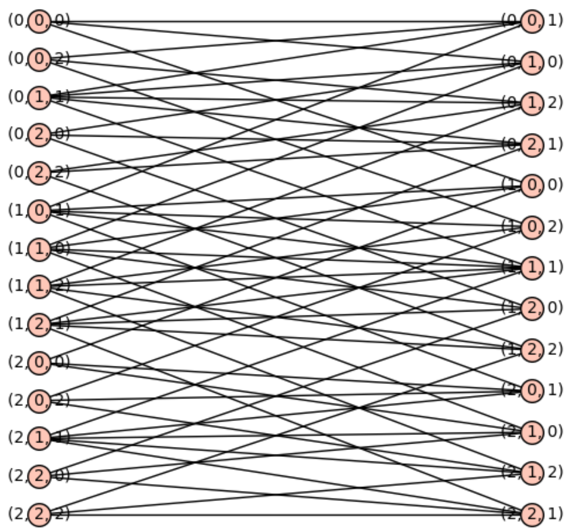

Figura 4: Graf G_3 representat de forma bipartida.