

## Problema 11: Sales de Joc

Víctor Alcázar      Kosmas Palios      Albert Ribes

30 d'abril de 2017

### 11. Sales de Joc

La societat d'Amics dels Videojocs (SAV) té una col·lecció de  $m$  locals a la ciutat de Barcelona i un total de  $n$  socis. Volen determinar en quins locals els hi convé obrir una sala de joc juntament amb una assignació de socis a les sales de joc.

La SAV per una part ha fet una estimació del cost d'adequar un local com a sala de joc i així, per cada local  $i$  té una estimació del cost  $l_i$ . Per una altre part, la SAV vol tenir en compte el cost que té per als socis desplaçar-se fins el local assignat. Així disposa dels valors  $c(i, j)$  que indiquen la distancia que habitualment el soci  $i$  ha de recorre per arribar al local  $j$ .

L'objectiu de la SAV és trobar una solució en la que es minimitzi la suma dels costos d'adequació dels locals seleccionats més al suma de les distancies dels desplaçaments dels socis a les sales assignades.

**Q1** Doneu una formalització com problema de programació entera d'aquest problema. Feu servir una variable  $x_j$  per la selecció del local  $j$  i una variable  $y_{ij}$  per la possible assignació del soci  $i$  al local  $j$ .

**La respuesta a Q1 empieza aquí**

Para simplificar la notación, definimos  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  (para referirnos a los locales) y  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  (para referirnos a los socios).

Objetivo: minimizar

$$\sum_{j \in M} l_j x_j + \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} c(i, j) y_{ij} \quad (1)$$

Cumpliendo las siguientes restricciones:

$$\forall i \in N \sum_{j \in M} y_{ij} \geq 1 \quad (2)$$

$$\forall i \in N, j \in M - y_{ij} + x_j \geq 0 \quad (3)$$

$$\forall i \in N, j \in M, x_j \in \{0, 1\} \wedge y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (4)$$

La restricció 2 indica que todo socio debe estar asignado a algún local. La restricció 3 indica que si un socio está asignado a un local, entonces en ese local hay que abrir una sala de juegos. La restricció 4 es para asegurar que la solución es entera

**La respuesta a Q1 termina aquí**

Considereu el problema de programació lineal obtingut després de relaxar les condicions d'integritat. Sigui  $x^*$ ,  $y^*$  una solució òptima del programa relaxat.

Considereu el següent procés:

- (a) Per cada soci  $i$ , sigui  $\tilde{c}_i = \sum_j c(i, j) y_{ij}^*$  la distancia mitjana del soci  $i$  a les sales assignades en  $y^*$ .
- (b) Per cada soci  $i$ , sigui  $S_i = \{j | c(i, j) \leq 2\tilde{c}_i\}$ .
- (c) Per  $i, j$ , if  $j \notin S_i$ , sigui  $\tilde{y}_{ij} = 0$ , en cas contrari  $\tilde{y}_{ij} = y_{ij}^* / \sum_{j \in S_i} y_{ij}^*$ .
- (d) Per cada local  $j$ , sigui  $\tilde{x}_j = \min(2x_j^*, 1)$ .

**Q2** Demostreu que, per tot  $i$  i tot  $j$ ,  $\tilde{y}_{ij} \leq 2y_{ij}^*$ .

«««< HEAD La respuesta a Q2 empieza aquí

===== La respuesta a Q2 empieza aquí »»»> f87786cdac186b5648f9d7bc8ee9d7750a66e22b

En los casos en los que  $j \notin S_i$ ,  $\tilde{y}_{ij} = 0$ , y eso siempre es menor o igual. Para el resto de casos, podemos sustituir  $\tilde{y}_{ij}$  por el valor indicado y la demostración se transforma de la siguiente manera:

$$\frac{y_{ij}^*}{\sum_{j \in S_i} y_{ij}^*} \leq 2y_{ij}^* \quad (5)$$

$$\frac{y_{ij}^*}{2y_{ij}^*} \leq \sum_{j \in S_i} y_{ij}^* \quad (6)$$

$$0.5 \leq \sum_{j \in S_i} y_{ij}^* \quad (7)$$

$$0.5 > \sum_{j \notin S_i} y_{ij}^* \quad (8)$$

El ultimo paso es valido porque  $\sum_j y_{ij}^* = 1$ . Ahora, vamos a demostrar que la última relación es cierta. Primero, es verdad que:

$$\sum_{j \notin S_i} c(i, j) y_{ij}^* \leq \sum_{j \in M} c(i, j) y_{ij}^* = \tilde{c}_i \quad (9)$$

Pero también tenemos que  $\sum_{j \notin S_i} c(i, j) y_{ij}^* > \sum_{j \notin S_i} 2\tilde{c}_i y_{ij}^*$ . Entonces:

$$2 * \tilde{c}_i * \sum_{j \notin S_i} y_{ij}^* < \tilde{c}_i \quad (10)$$

$$\sum_{j \notin S_i} y_{ij}^* < \frac{1}{2} \quad (11)$$

**La respuesta a Q2 termina aquí**

**Q3** Demostreu que  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  és una solució factible del problema de programació lineal i que  $\sum_{i,j} c(i, j) \tilde{y}_{ij} \leq 2 \sum_{i,j} c(i, j) y_{ij}^*$ .

**La respuesta a Q3 empieza aquí**

**Proving that the approximation is feasible**

To say this approximation is feasible is equivalent to say that all the previous restrictions stated in Q1 are still true.

Let us start with the proof.

The restrictions that we have to prove still true are the ones in Q2: the inequations 2, 3 and 4.

Let us prove that 2 is true for  $\tilde{x}$   $\tilde{y}$ .

This can be easily proven to be true. Let us see that in fact this approximation

$$\tilde{y}_{ij} = y_{ij}^* / \sum_{j \in S_i} y_{ij}^*$$

Is dividing an element of a set between the sum of all the elements of a set and it is doing it so for every element in the set. This makes it so the sum is always going to give 1. This makes the previous restriction true.

Let us now prove 3 true.

Let us be reminded that by the approximation done previously we have:

$$\tilde{x}_j \leq 2x_j$$

or

$$\tilde{x}_j = 1$$

and, by Q2:

$$\tilde{y}_{ij} \leq 2y_{ij}^*$$

Applying transformations to 3 we have:

$$-y_{ij} + x_j \geq 0$$

$$x_j \geq y_{ij}$$

That means that the formula implies that for a feasible solution, for all  $ij$  the holds true. Specifically, for the optimal solution:

$$x_j^* \geq y_{ij}^*$$

and:

$$x_j^* \geq 2y_{ij}^*$$

if we join them:

$$\tilde{y}_{ij} \leq 2y_{ij}^* \leq 2x_j^* \leq \tilde{x}_j$$

And, by transitivity:

$$\tilde{y}_{ij} \leq \tilde{x}_j$$

**Proving that the approximation 2-approximates the cost of the optimal solution**

We have to prove

$$c_{ij} * \tilde{y}_{ij} \leq c_{ij} * 2y_{ij}^*$$

This is easy. We can see that

$$\tilde{y}_{ij} \leq 2y_{ij}^*$$

Is true. Then, for each  $ij$  we can say the inequation holds true.

**La respuesta a Q3 acaba aquí**

Ara, donats  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ , considereu el següent procés, mentre quedin socis sense assignar a una sala:

- (a) Seleccioneu el soci  $i$  no assignat amb  $\tilde{c}_i$  mínim
- (b) Obrim una sala de joc al local  $j$  que minimitzi el valor  $\min_{j \in S_i} l_i$
- (c) Assignem el soci  $i$  a la sala  $j$ .
- (d) Tots els socis  $i'$  tals que  $S_i \cap S_{i'} \neq \emptyset$  s'assignen a la sala  $j$ .

**Q4** Demostreu que la solució així obtinguda és una 6 aproximació per al problema plantejat.

**La respuesta a Q4 empieza aquí**

Puesto que se trata de un problema de minimización, hemos de demostrar que para cualquier entrada  $I$ ,  $\text{sol}(I) \leq 6\text{opt}(I)$ , es decir, que

$$\sum_{\forall j \in M} l_j x_j + \sum_{\forall i \in N} \sum_{\forall j \in M} c(i, j) y_{ij} \tag{12}$$

**La respuesta a Q4 termina aquí**