Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología

Material de Apoyo
Cálculo II

| EDICIÓN 2024

Instituto de Matemáticas y Ciencias Básicas
Prof. Jordy Alfaro Brenes

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO

1 SUCESIONES

1.1 Preliminares

1.1.1. Derivadas directas

Quizás este es un buen momento para repasar algunas derivadas directas que debieron ser aprendidas en cursos anteriores, pero siempre es bueno recordarlas.

Definición 1

Si se tiene una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$ entonces:

$$f'(x) = m$$

Ejemplo 1

$$f(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'(x) = -2$$

Definición 2

Dada una función de la forma $f(x) = x^n$ entonces:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ejemplo 2

$$f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot x^6$$

Definición 3

Si la función es $f(x) = e^x$ entonces:

$$f'(x) = e^x$$

Definición 4

Dada la función $f(x) = \ln(x)$ entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Definición 5

Si se tiene $f(x) = a^x$ entonces:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

Ejemplo 3

$$f(x) = 5^x \Rightarrow f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$$

Definición 6

La derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es:

$$f'(x) = \cos(x)$$

Definición 7

La derivada de $f(x) = \cos(x)$ es:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

Definición 8

La derivada de $f(x) = \tan(x)$ es:

$$f'(x) = \sec^2(x)$$

1.1.2. Reglas de derivación

Cuando se habla de derivadas, aparte de conocer las derivadas directas, es necesario dominar ciertas reglas de derivación que se definirán a continuación.

Definición 9: Regla del producto escalar-función

Si se tiene que $h(x) = k \cdot f(x)$, en donde k es un escalar (un número), entonces:

$$h'(x) = k \cdot f'(x)$$

Ejemplo 4

$$f(x) = 5 \cdot \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$$

Definición 10: Regla de la suma

Si se tiene que $h(x) = f(x) + g(x)$ entonces:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Ejemplo 5

$$f(x) = \cos(x) + \ln(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{x}$$

Definición 11: Regla de la resta

Si se tiene que $h(x) = f(x) - g(x)$ entonces:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Ejemplo 6

$$f(x) = \cos(x) - \ln(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{x}$$

Definición 12: Regla del producto

Si se tiene que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ entonces:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 7

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \tan(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x) \cdot \tan(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot \sec^2(x)$$

Definición 13: Regla del cociente

Si se tiene que $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ entonces:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Ejemplo 8

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \cos(x) - \ln(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)}$$

Definición 14: Regla de la cadena

Si se tiene que $h(x) = f(g(x))$ entonces:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 9

$$f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

1.1.3. La regla de L'Hopital

Muchas veces es necesario calcular límites algo incómodos mediante métodos tradicionales como factorización, racionalización, sustitución u otras, por dicha, al saber de derivadas, habrán ocasiones donde podemos disponer de la regla de L'Hopital.

Definición 15: Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota

La regla de L'Hopital tiene ciertas condiciones y formalidades para su uso, en el curso no entraremos mucho en detalle al respecto, y nos limitaremos a decir que solo podremos usar la regla cuando al

> *evaluar el límite dado, este nos resulte en forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$.*

Ejemplo 10

Resuelva el siguiente límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 + \cos(\pi x)}$$

Solución:

Primero, evaluando se tiene:

$$\frac{1 - 1 + \ln(1)}{1 + \cos(\pi \cdot 1)}$$

Lo cuál es $\frac{0}{0}$, es decir, una forma indeterminada que permite usar L'Hopital. Así se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \to 1} \frac{0 - 1 + \frac{1}{x}}{0 + -\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \pi}$$

Si volvemos a evaluar se tiene:

$$\frac{0 - 1 + \frac{1}{1}}{0 + -\operatorname{sen}(\pi \cdot 1) \cdot \pi}$$

Lo cuál aún es $\frac{0}{0}$, es decir, una forma indeterminada que permite usar L'Hopital. Así, se debe hacer otro L'Hopital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \pi} = \lim_{x \to 1} \frac{0 + \frac{-1}{x^2}}{\pi \cdot -\cos(\pi x) \cdot \pi}$$

Así se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{-1}{x^2}}{-\pi^2 \cos(\pi x)}$$

Y evaluando se obtiene:

$$\frac{\frac{-1}{1^2}}{-\pi^2 \cos(\pi \cdot 1)} = \frac{-1}{\pi^2}$$

Ejemplo 11

Resuelva el siguiente límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5}{x^4 + 2x - 1}$$

Solución:

Primero, evaluando se tiene:

$$\frac{\infty^3 - 5}{\infty^4 + 2\infty - 1}$$

Lo cual es $\dfrac{\infty}{\infty}$, es decir, podemos utilizar la regla de L'Hopital. Se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5}{x^4 + 2x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 0}{4x^3 + 2 - 0}$$

Si volvemos a evaluar, se seguiría estando en forma indeterminada, entonces, haciendo otro L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x^3 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 \cdot 2x}{4 \cdot 3x^2 + 0} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{12x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\infty} = 0$$

A pesar de que la solución del ejemplo anterior ha sido sencilla utilizando L'Hopital, esta pudo haber sido directa sabiendo el siguiente teorema:

Teorema 1: De los grados del polinomio

Se tenemos dos funciones polinómicas $f(x)$ y $g(x)$, donde sus grados son n y m respectivamente, entonces se tiene:

- Si $n = m$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ será el cociente (división) de los coefiecientes junto a las variables de grado n y m respectivamente.
- Si $n > m$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$
- Si $m > n$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Nota

El teorema anterior solo funciona para funciones polinómicas y que la tendencia del límite sea a $\pm\infty$.

Ejemplo 12

Resuelva el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{x^4+2x-1}$$

Solución:

Como el límite tiende a infinito, son funciones polinómicas, y además, el grado del numerador es 3 y el del denominador es 4, es decir, el grado del denominador es mayor que el del numerador. Entonces, por el teorema de los grados del polinomio, el límite es 0.

Ejemplo 13

Resuelva el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-3x^2}{-6x^3+5x^4-x}$$

Solución:

Como el límite tiende a infinito, son funciones polinómicas, y además, el grado del numerador es 4, igual al grado del denominador, es decir, el grado del denominador es igual que el del numerador (4). Entonces, por el teorema de los grados del polinomio, el límite es $\frac{2}{5}$.

1.2 Sucesiones

1.2.1. Concepto de sucesión

Definición 16: Sucesión

Una sucesión se define como una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos. Por lo general, las denotaremos con a_n.

Ejemplo 14

Para la sucesión $a_n = (-1)^n$ se tiene:

- $a_1 = (-1)^1 = -1$
- $a_2 = (-1)^2 = 1$
- $a_3 = (-1)^3 = -1$

Y así sucesivamente...

Ejemplo 15

Para la sucesión $a_n = \dfrac{n+2}{n+3}$ se tiene:

- $a_1 = \dfrac{1+2}{1+3} = \dfrac{3}{4}$
- $a_2 = \dfrac{2+2}{2+3} = \dfrac{4}{5}$
- $a_3 = \dfrac{3+2}{3+3} = \dfrac{5}{6}$

Y así sucesivamente...

1.2.2. Convergencia de una sucesión

Definición 17: Sucesión convergente

Se dirá que una sucesión a_n es convergente a L si:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Definición 18: Sucesión divergente

Se dirá que una sucesión a_n es divergente si:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

O bien, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe.

Ejemplo 16

Determine la convergencia de la siguiente sucesión:

$$a_n = \frac{3n^3 + 2n}{6n^2 + 2n^3}$$

Solución:

Note que lo que habría que plantear es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 2n}{6n^2 + 2n^3}$$

Y por el teorema de los grados del polinomio, es fácil darse cuenta que el resultado de ese límite es $\frac{3}{2}$. Por ende, se puede concluir que la sucesión dada es convergente, y converge a $\frac{3}{2}$.

Ejemplo 17

Determine la convergencia de la siguiente sucesión:

$$b_n = \frac{2n^5 + 2n^2 + 3n^3}{2n^2 - 5n}$$

Solución:

Note que lo que habría que plantear es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n^2 + 3n^3}{2n^2 - 5n}$$

Y por el teorema de los grados del polinomio, es fácil darse cuenta que el resultado de ese límite es ∞, pues el grado del numerador es mayor al del denominador. Por ende, se puede concluir que la sucesión dada es divergente.

Ejemplo 18

Determine la convergencia de la siguiente sucesión:

$$c_n = \frac{\ln(n)}{n}$$

Solución:

Lo que se debe plantear es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

Evaluando, se tiene:

$$\frac{\ln(\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Esto nos permite aplicar L'Hopital, así se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por ende, se puede con concluir que la sucesión dada es convergente y además, se puede garantizar que converge a 0.

1.2.3. Sucesiones monótonas

Definición 19: Sucesión creciente

Se dice que una sucesión a_n es creciente si se cumple que:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

Esto, en palabras más simples significa que una sucesión es creciente si al calcular los términos de la sucesión, los valores van subiendo.

Definición 20: Sucesión decreciente

Se dice que una sucesión a_n es decreciente si se cumple que:

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Esto, en palabras más simples significa que una sucesión es decreciente si al calcular los términos de la sucesión, los valores van bajando.

Ejemplo 19

Determine si la siguiente sucesión es decreciente o creciente:

$$a_n = \ln(n) + n^2$$

Solución:

Notemos que:

- $a_1 = \ln(1) + 1^2 = 1$
- $a_2 = \ln(2) + 2^2 \approx 4,69$
- $a_3 = \ln(3) + 3^2 \approx 10,09$
- $a_4 = \ln(4) + 4^2 \approx 17,38$

Podríamos continuar obteniendo términos, sin embargo, ya con esos 4 términos obtenidos se puede notar que los valores van subiendo, es decir, la sucesión es creciente.

Ejemplo 20

Determine si la siguiente sucesión es decreciente o creciente:

$$a_n = \cos(n) - e^n$$

Solución:

Notemos que:

- $a_1 = \cos(1) - e^1 \approx -2,17$
- $a_2 = \cos(2) - e^2 \approx -7,80$
- $a_3 = \cos(3) - e^3 \approx -21,07$
- $a_4 = \cos(4) - e^4 \approx -55,25$

Podríamos continuar obteniendo términos, sin embargo, ya con esos 4 términos obtenidos se puede notar que los valores van bajando (recuerde que un número entre más negativo sea, más pequeño es), es decir, la sucesión es decreciente.

1.2.4. Sucesiones acotadas

Definición 21: Sucesión acotada inferiormente

Se dice que una sucesión a_n es acotada inferiormente si se cumple que:

$$a_n \geq K$$

Donde K es un número, en palabras más sencillas, una sucesión es acotada inferiormente si todos sus términos son mayores que ese número K.

Definición 22: Sucesión acotada superiormente

Se dice que una sucesión a_n es acotada superiormente si se cumple que:

$$a_n \leq K$$

Donde K es un número, en palabras más sencillas, una sucesión es acotada superiormente si todos sus términos son menores que ese número K.

Ejemplo 21

Determine si la siguiente sucesión es acotada:

$$a_n = 4 - \frac{2}{n} - \frac{1}{3n^2}$$

Solución:

Notemos que:

- $a_1 = 4 - \frac{2}{1} - \frac{1}{3 \cdot 1^2} = \frac{5}{3} \approx 1,6$
- $a_2 = 4 - \frac{2}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{35}{12} \approx 2,91$
- $a_{30} = 4 - \frac{2}{30} - \frac{1}{3 \cdot 30^2} \approx 3,93$
- $a_{250} = 4 - \frac{2}{250} - \frac{1}{3 \cdot 250^2} \approx 3,99$

Esto lo que quiere mostrar es que por mayor que sea el término que calculemos, su valor nunca superará a 4. Por ende, la sucesión dada está acotada superiormente por 4, note que este valor funciona como una especie de barrera para los términos, es decir, nunca subirán más de ahí. De igual manera, usted podría decir que la sucesión está acotada inferiormente por $\frac{5}{3}$, pues nunca habrá un término que de menor a ese valor.

1.3 Ejercicios

Ejercicio 1

Halle la primera derivada de:

$$\frac{\operatorname{sen}(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)}{7^x}$$

Ejercicio 2

Determine la convergencia para:

$$a_n = \frac{10n^2 + 3n + 7}{2n^2 - 6}$$

Ejercicio 3

Determine la convergencia para:

$$a_n = \frac{\ln(n^3)}{2n}$$

Ejercicio 4

Determine la convergencia para:

$$a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$$

Ejercicio 5

Determine si la siguiente sucesión es monótona y/o acotada:

$$a_n = \frac{3n}{n+2}$$

Ejercicio 6

Determine si la siguiente sucesión es monótona y/o acotada:

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

CAPÍTULO

2

SERIES

2.1 Series comunes

2.1.1. Concepto de serie

Definición 23: Serie infinita

Sea a_n una sucesión, si formamos otra sucesión S_n de la forma:

- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Si seguimos de esa manera, se tendría que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

A esa sucesión S_n de sumas parciales se le llamará serie infinita. Y además, a lo largo del curso, denotaremos a S_n como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

Ejemplo 22

Considere $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}}$. Calcule los primeros 3 términos de la serie.

Solución:

Observe que:

- $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{2}{5^{k-1}} = \frac{2}{5^{1-1}} = 2$
- $S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{2}{5^{k-1}} = \frac{2}{5^{1-1}} + \frac{2}{5^{2-1}} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$
- $S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{2}{5^{k-1}} = \frac{2}{5^{1-1}} + \frac{2}{5^{2-1}} + \frac{2}{5^{3-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} = \frac{62}{25}$

2.1.2. Serie geométrica

Definición 24: Serie geométrica

Se define la serie geométrica como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n$$

Donde a y r son números reales, a debe ser distinto de 0 y a r se le conoce como razón o radio.

Teorema 2: Convergencia de una serie geométrica

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ converge a $S = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$.

Nota

Una serie geométrica no necesariamente debe iniciar en 1, de hecho, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

Pero, en general, si la serie inicia en $k = p$, es decir:

$$\sum_{k=p}^{\infty} ar^k$$

Se tiene:

- *Converge a* $\dfrac{ar^p}{1-r}$ *si* $|r| < 1$
- *Diverge si* $|r| \geq 1$

Ejemplo 23

Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{-2}{3}\right)^{k-1}$$

Solución:

Lo primero es notar que la serie es geométrica, acá $a = 5$ y $r = \dfrac{-2}{3}$. Procedemos a analizar que $|r| = \left|\dfrac{-2}{3}\right| \approx 0,66 < 1$, por ende, por el teorema de convergencia para una serie geométrica, esta es convergente. Finalmente, recuerde que cuando una serie geométrica es convergente se tiene:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1 - -\dfrac{2}{3}} = 3$$

Por lo tanto, la serie dada es convergente, y lo hace al valor de 3.

Ejemplo 24

Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{7^{k+3}}$$

Solución:

Inicialmente, la serie dada no tiene mucha pinta de ser geométrica, pero observe lo siguiente:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{7^{k+3}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{((-2)^3)^k}{7^k \cdot 7^3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-8)^k}{7^k} \cdot \frac{1}{7^3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{7^3}\left(\frac{-8}{7}\right)^k$$

Note que ya la última serie obtenida si se puede ver como una serie geométrica, donde $p = 2$, $a = \dfrac{1}{7^3}$ y $r = \dfrac{-8}{7}$. Ahora, analicemos su convergencia, note que $|r| = \left|\dfrac{-8}{7}\right| \approx 1,14 > 1$, por ende, por el teorema de convergencia para una serie geométrica, esta es divergente.

2.1.3. Serie telescópica

Definición 25: Serie telescópica

Se definen las series telescópicas como aquellas que tengan la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1}$$

Teorema 3: Convergencia de una serie telescópica

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1}$ una serie telescópica, la serie converge únicamente si $\lim_{k\to\infty} b_{k+1}$ existe y es finito. Si converge, se tiene que la suma es:

$$S = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$$

Nota

Una serie telescópica no necesariamente debe iniciar en 1, en general, si la serie inicia en $k = p$, es decir:

$$\sum_{k=p}^{\infty} b_k - b_{k+1}$$

Se tiene:

- *Converge a $S = b_p - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$*
- *Diverge si $\lim_{k\to\infty} b_{k+1}$ no existe o es infinito.*

Ejemplo 25

Analice la convergencia de $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, sabiendo que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Solución:

Dado que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, entonces tenemos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

La cual claramente es una serie telescópica, donde $b_k = \dfrac{1}{k}$ Ahora, para analizar la convergencia, debemos analizar $\lim\limits_{k\to\infty} b_{k+1}$, como $b_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

Por ende la serie dada si converge, ahora, para calcular su suma:

$$S = b_2 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Así, la serie dada converge, y lo hace a $\dfrac{1}{2}$.

2.1.4. Propiedades de las series

Definición 26: Propiedades de las series

- Si c es un número, distinto de cero, entonces se tiene:

$$\sum_{k=p}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=p}^{\infty} a_k$$

- Se tiene que:

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k + b_k = \sum_{k=p}^{\infty} a_k + \sum_{k=p}^{\infty} b_k$$

Ejemplo 26

- La primera de las propiedades anteriores se puede ejemplificar de la siguiente manera:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2k}{ln(k)} = 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{ln(k)}$$

- La segunda de las propiedades anteriores se puede ejemplificar de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{\infty} cos(k) + k^3 = \sum_{k=1}^{\infty} cos(k) + \sum_{k=1}^{\infty} k^3$$

2.2 Criterios de convergencia

Hasta el momento se ha hablado del concepto de serie, las series geométricas, las telescópicas y un par de propiedades. Cuando se habló de las series geométricas y telescópicas, se dijo cuando estas convergen y cuando divergen, el detalle es que no todas las series son geométricas o telescópicas, hay más variedad, entonces, veamos algunos criterios de convergencia para otras series.

2.2.1. Criterio de divergencia

Definición 27: Criterio de divergencia

Si tenemos $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k$ y se cumple que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ entonces con toda certeza $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k$ es divergente.

Nota

Un error muy común con el criterio anterior es pensar que si $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ *entonces con certeza* $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k$ *es convergente, pero no, esto no siempre es cierto. Por ejemplo, hay una serie muy famosa, que se llama la serie armónica, esta es:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Si se calcula el límite en el infinito se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Sin embargo, la serie armónica no es convergente (como se podría pensar por el error típico que se menciona en esta nota), la serie armónica diverge.

Ejemplo 27

Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{3k+2k^5}{7k^5+6k^2}$$

Solución:

Basta con utilizar el criterio de divergencia, note que si calculamos el límite al infinito se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3k+2k^5}{7k^5+6k^2} = \frac{2}{7} \neq 0$$

Por el teorema de los grados del polinomio, el límite da $\frac{2}{7}$, aquí lo importante es que no da 0, por ende, por el criterio de divergencia, con toda seguridad $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{3k+2k^5}{7k^5+6k^2}$ diverge.

2.2.2. Criterio de las p-series

Definición 28: Criterio de las p-series

Se denomina p-serie, a aquellas de la forma $\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, se tiene que:

- Si $p > 1$, entonces $\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ es convergente.
- Si $p \leq 1$, entonces $\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ es divergente.

Ejemplo 28

Observe lo siguiente:

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^5}$, es una p serie, con $p = 5 > 1$, por ende es convergente.
- $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \sqrt{k}$, es equivalente a $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} k^{1/2} = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k^{-1/2}}$, esta última es una p serie, con $p = -\dfrac{1}{2} < 1$, por ende es divergente.
- $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-2)^6}$, con un ajuste de índices es equivalente a $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^6}$, esta última es una p-serie, con $p = 6 > 1$, por ende es convergente.

2.2.3. Criterio de la integral

Definición 29: Criterio de la integral

Dada una serie $\displaystyle\sum_{k=a}^{\infty} f(k)$, la podemos convertir a la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. Si $f(x)$ satisface el ser decreciente y positiva en el intervalo $[a, \infty[$ entonces la serie y la integral tienen el mismo comportamiento, es decir o ambas convergen o ambas divergen.

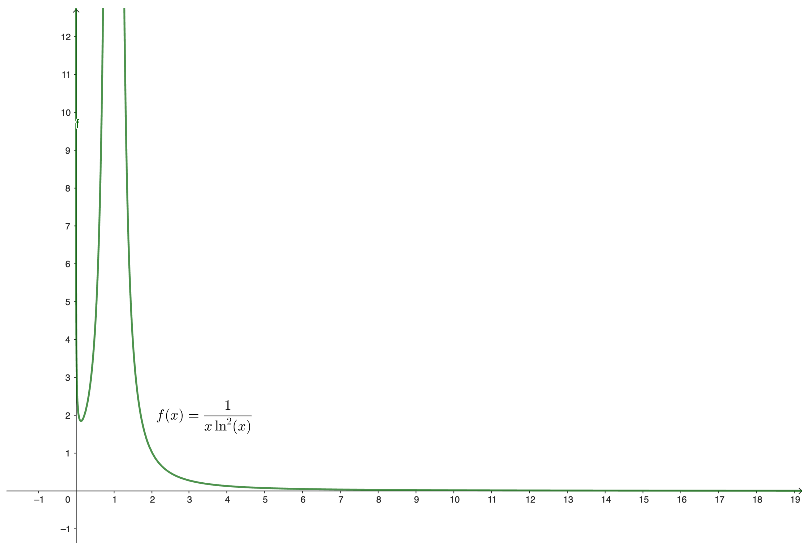
Ejemplo 29

Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)}$$

Solución:

La serie dada la podemos expresar como $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)}\,dx$, luego graficando en geogebra la función $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2(x)}$ se tiene:



En la imagen anterior podemos ver que en el intervalo de $[2, \infty[$ la función es positiva y decreciente, por ende basta calcular la integral para ver la convergencia de la serie. Con ayuda de un software se tiene que:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \frac{1}{\ln 2}$$

Por ende, como la integral converge (da como resultado un número finito), entonces la serie dada es convergente.

2.2.4. Criterio de comparación directa

Definición 30: Criterio de comparación directa

Sean a_k y b_k dos sucesiones numéricas. Considere que se satisface que $0 \leq a_k \leq b_k$, entonces:

- Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también converge.
- Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también diverge.

Nota

Un error muy común con el criterio anterior es pensar que:

- *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también converge.*

- *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *también diverge.*

Cualquiera de los dos razonamientos anteriores es incorrecto, el criterio en ningún momento dice eso. Por esa razón, de manera informal se suele decir que el criterio solo garantiza convergencia de derecha a izquierda, y garantiza divergencia de izquierda a derecha.

Ejemplo 30

Analice el comportamiento de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen(k^2)+1}{7^k}$.

Solución:

Primero, es importante recordar que siempre las funciones seno y coseno están acotadas entre -1 y 1. Entonces podemos iniciar así:

$$-1 \leq sen(k^2) \leq 1$$

$$\Rightarrow -1+1 \leq sen(k^2)+1 \leq 1+1$$

$$\Rightarrow 0 \leq sen(k^2)+1 \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{0}{7^k} \leq \frac{sen(k^2)+1}{7^k} \leq \frac{2}{7^k}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{sen(k^2)+1}{7^k} \leq \frac{2}{7^k}$$

Ahora, ya esto se parece un poco más al criterio de comparación directa, donde $a_k = \frac{sen(k^2)+1}{7^k}$ y $b_k = \frac{2}{7^k}$. Pero hablemos en particular de $b_k = \frac{2}{7^k}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{1}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{7}\right)^k$$

Lo anterior es una serie geométrica, dónde $r = \frac{1}{7}$, note que $\left|\frac{1}{7}\right| < 1$, por ende, por el criterio de las series geométricas, la serie converge. Ahora bien, como $b_k = \frac{2}{7^k}$ converge, entonces por criterio de comparación directa, con toda certeza $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen(k^2)+1}{7^k}$ también converge.

2.2.5. Criterio de comparación al límite

Definición 31: Criterio de comparación al límite

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos entonces:

- Si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$, donde L es finito y positivo, entonces ambas series convergen o ambas divergen.
- Si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también converge.
- Si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también diverge.

Ejemplo 31

Analice el comportamiento de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}}$

Solución:

Vamos a intentar llegar a una conclusión usando el criterio de comparación al límite, para ello tendremos una sucesión principal, que es la de nuestra serie de interés, $a_k = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}}$. Luego, deberemos elegir una sucesión auxiliar, esto es lo interesante, en este ejemplo usaremos a $b_k = \frac{1}{k}$. Ahora, debemos calcular:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{3/2}}{\sqrt{k^3+1}}$$

Luego, por el teorema de los grados del polinomio, tanto el grado del numerador como el del denominador son $\frac{3}{2}$, es decir, coinciden, entonces el resultado del límite es el cociente de los coeficientes de la variable de grado mayor, en este caso, $\frac{1}{1} = 1$. Es decir:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}}}{\frac{1}{k}} = 1$$

Como el límite da 1, que es un finito positivo, entonces según el criterio de comparación al límite, ambas series se comportan igual. El detalle acá es que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, que fue la utilizada como auxiliar, es una p-serie divergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}}$ también diverge.

2.2.6. Criterio de las series alternadas

Definición 32: Criterio de las series alternadas

Definiremos una serie alternada como aquella que tiene la forma $\sum_{k=p}^{\infty}(-1)^k b_k$ o $\sum_{k=p}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k$. Si b_k satisface que:

- Es decreciente.
- $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

Entonces la serie será convergente.

Ejemplo 32

Analice la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{ln(2k)}$

Solución:

Primero que todo, es importante notar que la serie efectivamente es alternada, esto se ve por la presencia del $(-1)^k$. Ahora, debemos tener en cuenta que $b_k = \frac{k}{ln(2k)}$. Veamos si se cumplen las condiciones, para ello primero calculemos el límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{ln(2k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2k} \cdot 2} = \lim_{k\to\infty} k = \infty$$

Como el límite da infinito y no cero, entonces, ya no satisface una de las condiciones, por ende el criterio no es aplicable en este caso.

Ejemplo 33

Analice la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\dfrac{3k+2}{4k^2-3}\right)$

Solución:

Primero que todo, es importante notar que la serie efectivamente es alternada, esto se ve por la presencia del $(-1)^{k+1}$. Ahora, debemos tener en cuenta que $b_k = \dfrac{3k+2}{4k^2-3}$. Veamos si se cumplen las condiciones, para ello primero calculemos el límite:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{3k+2}{4k^2-3}$$

Por el teorema de los grados del polinomio, es sencillo ver que el grado del denominador es mayor al del numerador, por ende, el límite da 0. Ahora bien, calculemos unos términos de b_k:

- $b_1 = \dfrac{3(1)+2}{4(1)^2-3} = \dfrac{5}{1} = 5$
- $b_2 = \dfrac{3(2)+2}{4(2)^2-3} = \dfrac{8}{13} \approx 0,6153$
- $b_3 = \dfrac{3(3)+2}{4(3)^2-3} = \dfrac{11}{33} \approx 0,33$

Quizás con esos 3 términos es suficiente para ver que efectivamente b_k es decreciente. Como b_k cumple las dos condiciones del criterio, entonces la serie alternante dada es convergente.

2.2.7. Criterio de la razón

Definición 33: Criterio de la razón

Sea a_k una sucesión de números reales, no nulos, se tiene:

- Si $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L < 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente.
- Si $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L > 1$ o $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \pm\infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Ejemplo 34

Analice la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$

Solución:

Es importante recalcar que a pesar de que efectivamente la serie dada es alternada, no la trabajaremos bajo ese criterio, lo haremos por el criterio de la razón. Lo primero es saber que aquí:

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} \cdot k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

Entonces, se puede decir que:

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1+1} \cdot (k+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2(k+1)+1)}$$

Note que lo que hicimos fue cambiar todas las k por $k+1$, simplificando la expresión se tiene:

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+3)}$$

Ahora, calculamos el límite que el criterio de la razón indica:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+3)}}{\frac{(-1)^{k+1} \cdot k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+3) \cdot (-1)^{k+1} \cdot k!} \right|$$

Cancelando un poco en la expresión anterior, y el valor absoluto cumpliendo su función, nos queda:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)!}{(2k+3) \cdot k!} = \lim_{k \to \infty} \frac{(k+1) \cdot k!}{(2k+3) \cdot k!} = \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{2k+3} = \frac{1}{2} < 1$$

Por ende, por el criterio de la razón, como el límite es menor a 1, entonces la serie dada es absolutamente convergente.

2.2.8. Criterio de la raíz

Definición 34: Criterio de la raíz

Sea a_k una sucesión de números reales, no nulos, se tiene:

- Si $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L < 1$, entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente.
- Si $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L > 1$ o $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \pm\infty$, entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Ejemplo 35

Analice el comportamiento de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln^k k}{k^k}$

Solución:

Procedamos a calcular el límite que el criterio de la raíz propone:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{\ln^k k}{k^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\ln^k k}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}$$

Ese último límite lo podemos calcular con L'Hopital, de manera que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1$$

Luego, como el límite da 0, que obviamente es menor que 1, por lo indicado en le criterio de la raíz, la serie dada converge absolutamente.

Nota

Es importante resaltar, que tanto en el criterio de la razón, como en el criterio de la raíz, si los límites respectivos dieran 1, no se puede llegar a una conclusión, es decir, en estos casos el criterio no aplica, y para esas series en particular se necesitaría de algún criterio adicional.

2.3 Polinomios de Taylor y Maclaurin

2.3.1. Polinomios de Taylor

Definición 35: Polinomio de Taylor

Para una función $f(x)$ se define el polinomio de Taylor de orden n y centrado en c como:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)(x-c)^3}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

Ejemplo 36

Halle el polinomio de Taylor para la función $f(x) = ln(x)$, centrado en 1 y de orden 4.

Solución:

Lo primero es obtener derivadas y evaluarlas en el centro dado, para ello:

- $f(x) = ln(x) \Rightarrow f(1) = ln(1) = 0$
- $f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$
- $f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = \dfrac{-1}{1^2} = -1$
- $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2$
- $f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = \dfrac{-6}{1^4} = -6$

Luego, entonces el polinomio será:

$$P_n(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(1)(x-1)^4}{4!}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{-1(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{-6(x-1)^4}{4!}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

2.3.2. Polinomios de Maclaurin

Definición 36: Polinomio de Maclaurin

Para una función $f(x)$ se define el polinomio de Maclaurin como un polinomio de Taylor pero centrado en $c = 0$, es decir:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Ejemplo 37

Halle el polinomio de Maclaurin de orden 3 para la función $f(x) = sen(x)$.

Solución:

Lo primero es obtener derivadas y evaluarlas en el centro dado, que en este caso por ser de Maclaurin, es $c = 0$, para ello:

- $f(x) = sen(x) \Rightarrow f(0) = sen(0) = 0$
- $f'(x) = cos(x) \Rightarrow f'(0) = cos(0) = 1$
- $f''(x) = -sen(x) \Rightarrow f''(0) = -sen(0) = 0$
- $f'''(x) = -cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -cos(0) = -1$

Luego, entonces el polinomio será:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = 0 + 1x + \frac{0x^2}{2!} + \frac{-1x^3}{3!}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

2.4 Series de potencias

Definición 37: Serie de potencia

Una serie de potencia alrededor de un centro c es de la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^K$$

Teorema 4

Para una serie de potencia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ hay tres posibilidades:

- La serie converge cuando $x = c$ y diverge para $x \neq c$. En esos casos se dice que $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ y $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ dan como resultado infinito. Además, en este caso su radio es 0.
- La serie converge para todo número real. En estos casos se dice que $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ y $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ dan como resultado cero. Además, en este caso su radio es ∞.
- Existe un radio R, positivo, para el cual la serie converge en el intervalo $]c-R, c+R[$.

Ejemplo 38

Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}$

Solución:

Primero note que la serie dada es de centro $c = 0$, para obtener el intervalo de convergencia se puede utilizar criterio de la razón o de la raíz, en este caso usaremos el de la raíz:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k|x|^k}{\sqrt{k+1}}} = 3|x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} = 3|x|$$

Ahora, recordemos que en el criterio de la raíz, para que haya convergencia se debe cumplir que el límite sea menor a 1, entonces se puede plantear:

$$3|x| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Entonces, en este caso, se puede garantizar que la serie converge en el intervalo $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$. Es posible, que también haya convergencia justo en los extremos, pero en este curso y folleto no profundizaremos en ellos, nos conformaremos con encontrar el intervalo abierto.

Finalmente, para hallar el radio de convergencia, al extremo derecho hallado se le resta el extremo izquierdo, y esto, se divide entre dos:

$$R = \frac{1/3 - -1/3}{2} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 39

Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$

Solución:

Primero note que la serie dada es de centro $c = 0$, para obtener el intervalo de convergencia se puede utilizar criterio de la razón o de la raíz, en este caso usaremos el de la razón:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{k+1} x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2}}{\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{|x^{2k}||x^2|}{2^{2k}2^2((k+1)k!)^2}}{\dfrac{|x^{2k}|}{2^{2k}(k!)^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x^{2k}||x^2|2^{2k}(k!)^2}{2^{2k}2^2((k+1)k!)^2|x^{2k}|}$$

Luego de simplificar un poco lo anterior, se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^2|}{2^2(k+1)^2} = |x^2| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4(k+1)^2} = |x^2| \cdot 0 = 0$$

Luego, por el teorema mencionado antes, cuando el límite calculado es 0, se puede concluir que la serie converge para todo número real, además, su radio es ∞.

Ejemplo 40

Determine el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k(x-1)^k}{k}$

Solución:

Primero note que la serie dada es de centro $c = 1$, para obtener el intervalo de convergencia se puede utilizar criterio de la razón o de la raíz, en este caso usaremos el de la raíz:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{3^k(x-1)^k}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k|x-1|^k}{k}} = 3|x-1| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 3|x-1|$$

Ahora, recordemos que en el criterio de la raíz, para que haya convergencia se debe cumplir que el límite sea menor a 1, entonces se puede plantear:

$$3|x-1| < 1$$

$$\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x-1 < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < x < \frac{1}{3} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$$

Entonces, en este caso, se puede garantizar que la serie converge en el intervalo $\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$.

Finalmente, para hallar el radio de convergencia, al extremo derecho hallado se le resta el extremo izquierdo, y esto, se divide entre dos:

$$R = \frac{4/3 - 2/3}{2} = \frac{1}{3}$$

2.5 Series de Taylor y Maclaurin

La idea de esta sección es principalmente aproximar integrales usando series de Maclaurin, para ello necesitaremos de una tabla de series de Maclaurin que aparecen frecuentemente:

Definición 38: Series de Maclaurin para funciones frecuentes

- $\dfrac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - ... + (-1)^n(x-1)^n + ...$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... + (-1)^n x^n + ...$
- $ln(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + ...$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + ...$
- $sen(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$
- $cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...$
- $arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + ... + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + ...$
- $arcsen(x) = x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + ... + \dfrac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + ...$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^4}{4!} + ...$

Ejemplo 41

Aproxime el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{x}dx$.

Solución:

La serie frecuente más similar a la de la integral sería la de $ln(x)$, así que comencemos por ahí, utilizaremos 4 términos, se sabe:

$$ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

$$\Rightarrow ln(1+x) = (1+x-1) - \frac{(1+x-1)^2}{2} + \frac{(1+x-1)^3}{3} - \frac{(1+x-1)^4}{4}$$

$$\Rightarrow ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$$

Ahora, calculemos la integral, así se tiene:

$$\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16}\right)\Big|_0^1 = \frac{115}{144}$$

2.6 Ejercicios

Ejercicio 7

Dada la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k-1}}$, determine los primeros 5 términos.

Ejercicio 8

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$, en caso de que converja, calcule su suma.

Ejercicio 9

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$, puede ser conveniente saber que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} [\log k - \log(k+1)]$$

Ejercicio 10

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^7-4k^9}{2k^3-7k^2+3k^9}$

Ejercicio 11

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^{5/3}}$

Ejercicio 12

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(k)}{k^2+1}$ con el criterio de la integral.

Ejercicio 13

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5+7^k}$ con el criterio de comparación directa.

Ejercicio 14

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5+7^k}$ con el criterio de comparación al límite.

Ejercicio 15

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{ln(k)}{k}$.

Ejercicio 16

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ usando el criterio de la razón.

Ejercicio 17

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4k+3}{3k-5}\right)^k$.

Ejercicio 18

Determine el polinomio de Taylor de orden 3 y centrado en 1 para $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ejercicio 19

Halle el polinomio de Maclaurin de orden 6 para la función $f(x) = cos(x)$

Ejercicio 20

Halle el intervalo de convergencia abierto (no hace falta analizar los extremos) y el radio de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-5)^k}{k5^k}$

Ejercicio 21

Aproxime el valor de la integral $\int_0^{0,1} e^{-x^2} dx$, utilice 4 términos de e^x.

CAPÍTULO

3 SECCIONES CÓNICAS

3.1 Preliminares

3.1.1. Cónicas

Definición 39: Ecuación general

Se define la ecuación general de una cónica como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Definición 40: Discriminante

Se define el discriminante de una cónica como:

$$\Delta = 4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - CD^2$$

Teorema 5

Se tiene que:

- Si $B^2 - 4AC = 0$ y $\Delta \neq 0$, la cónica es una parábola.
- Si $B^2 - 4AC < 0$ y $\Delta \neq 0$, la cónica es una elipse.
- Si $B^2 - 4AC > 0$ y $\Delta \neq 0$, la cónica es una hipérbola.

3.1.2. Completación de cuadrados

Definición 41: Fórmula

Una manera de completar cuadrados mediante fórmula es:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Ejemplo 42

Completar el cuadrado para $y^2 + 4y - 8$.

Solución:

Note que acá, $a = 1$, $b = 4$ y $c = -8$. Así se tiene:

$$y^2 + 4y - 8 = 1\left(y + \frac{4}{2 \cdot 1}\right)^2 - \frac{4^2}{4 \cdot 1} - 8 = (y+2)^2 - 12$$

3.2 Parábola

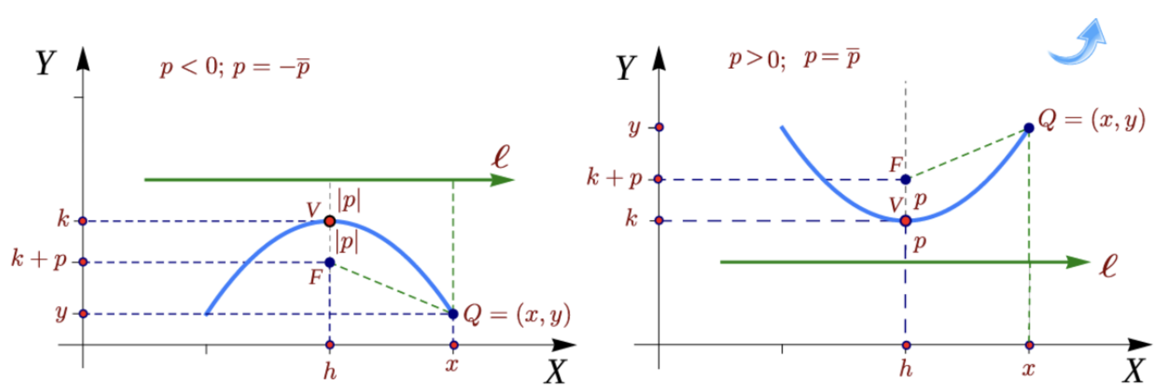
Definición 42: Parábola

Es un lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un foco y de la directriz.

Definición 43: Parábola paralela al eje x

La ecuación canónica de una parábola con directriz horizontal es:

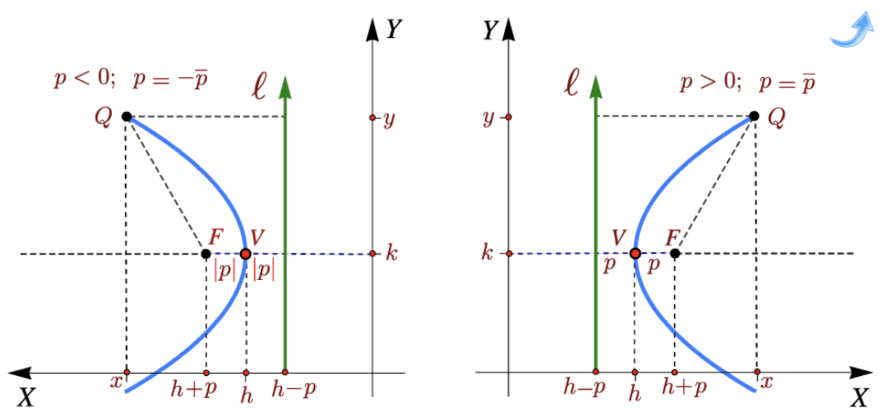
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



Definición 44: Parábola paralela al eje y

La ecuación canónica de una parábola con directriz vertical es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$



Ejemplo 43

Halle la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2-4y-8x-4=0$.

Solución:

Primero debemos completar cuadrados, la parábola dada se puede ver como:

$$y^2-4y-4-8x=0$$

Aplicando completación de cuadrados se tiene:

$$1\left(y+\frac{-4}{2\cdot 1}\right)^2-\frac{(-4)^2}{4\cdot 1}-4-8x=0$$

$$\Rightarrow (y-2)^2-8-8x=0$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=8x+8$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=8(x+1)$$

$$\Rightarrow (y-2)^2=4\cdot 2(x+1)$$

Es decir, es una parábola paralela al eje y, donde $k = 2$, $p = 2$ y $h = -1$, de hecho, la parábola abre hacia la derecha pues $p > 0$. Luego:

- El vértice es $(h, k) = (-1, 2)$
- El foco es $(h + p, k) = (1, 2)$
- La directriz es $x = h - p$, es decir, $x = -3$

3.3 Elipse

Definición 45: Elipse

Es un lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Esos puntos fijos se llaman focos.

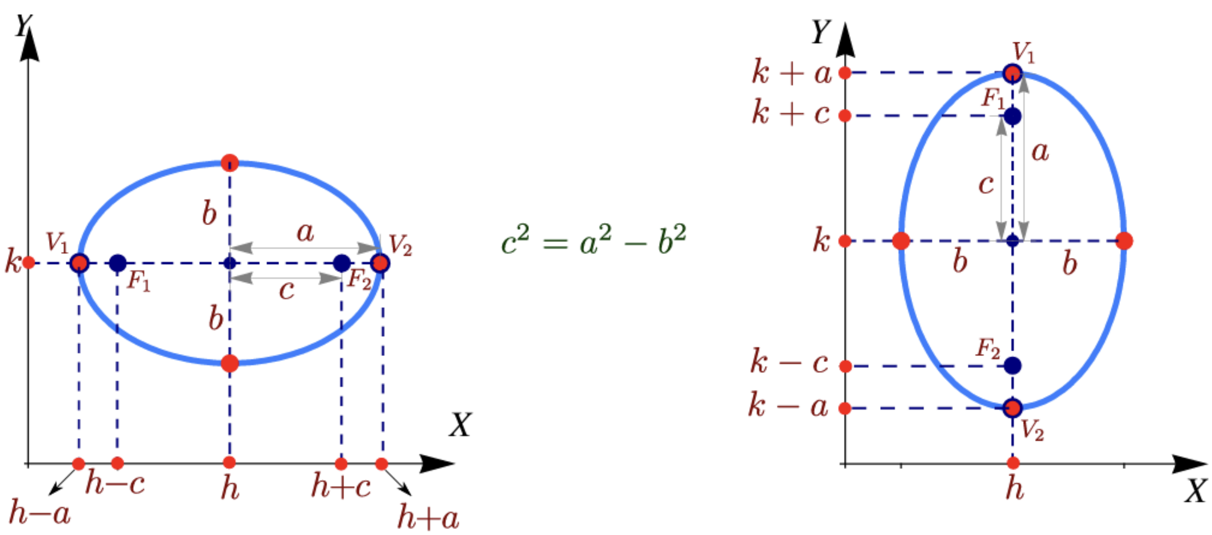
Definición 46: Ecuación canónica de la elipse

La ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Luego:

- Si $a > b$, la elipse es horizontal.
- Si $b > a$, la elipse es vertical.



Ejemplo 44

Determine la ecuación canónica, el centro y los focos de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$.

Solución:

Note que se puede convertir lo dado en:

$$(4x^2 - 16x) + (9y^2 + 18y) = 11$$

Aplicando completación de cuadrados a cada paréntesis se obtiene:

$$4(x-2)^2 - 16 + 9(y+1)^2 - 9 = 11$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Así entonces, se tiene que $a = 3$, $b = 2$, por ende, la elipse es horizontal, y además, se tiene que $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Finalmente:

- En este caso, $h = 2$ y $k = -1$, por ende el centro de la elipse es $(2, -1)$.
- Los focos son $(h - c, k)$ y $(h + c, k)$, es decir, $(2 - \sqrt{5}, -1)$ y $(2 + \sqrt{5}, -1)$.

3.4 Hipérbola

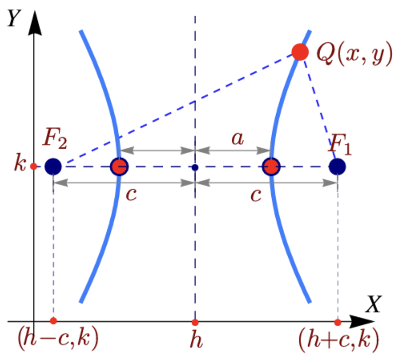
Definición 47: Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias hacia dos puntos fijos siempre es constante.

Definición 48: Hipérbola horizontal

La ecuación canónica de una hipérbola horizontal es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



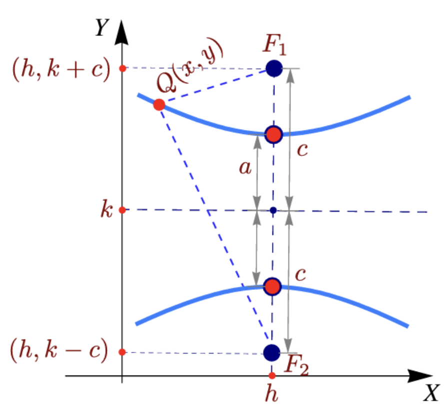
Además, sus asíntotas tienen ecuación:

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$

Definición 49: Hipérbola vertical

La ecuación canónica de una hipérbola vertical es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Además, sus asíntotas tienen ecuación:

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$$

Ejemplo 45

Determine la ecuación canónica, el centro, los focos y las asíntotas de la hipérbola $9y^2 + 18y - x^2 + 6x - 9 = 0$.

Solución:

Lo dado es lo mismo que:

$$(9y^2 + 18y) + (-x^2 + 6x) = 9$$

Aplicando completación de cuadrados a cada paréntesis se tiene:

$$9(y+1)^2 - 9 - (x-3)^2 + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 9(y+1)^2 - (x-3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{9(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$$

Con lo obtenido anteriormente, se evidencia que la hipérbola es vertical, donde $a = 1$ y $b = 3$, por ende, se tiene que $c = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Finalmente:

- En este caso, $h = 3$, $k = -1$, por ende el centro es $(3, -1)$.
- Los focos son $(h, k - c)$ y $(h, k + c)$, es decir, $(3, -1 - \sqrt{10})$ y $(3, -1 + \sqrt{10})$.
- Las asíntotas son $y = k + \frac{a}{b}(x - h)$ y $y = k - \frac{a}{b}(x - h)$. Por ende, son $y = -1 + \frac{1}{3}(x - 3)$ y $y = -1 - \frac{1}{3}(x - 3)$.

3.5 Ejercicios

Ejercicio 22

Dada la ecuación general $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$, indique que cónica representa.

Ejercicio 23

Dada la ecuación general $y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$, indique que cónica representa.

Ejercicio 24

Dada la ecuación general $2x^2 - 6x - y^2 + y - 1 = 0$, indique que cónica representa.

Ejercicio 25

Halle la ecuación canónica de la parábola $-9y^2 - 8x - 3 = 0$

Ejercicio 26

Halle la ecuación canónica de la elipse $9y^2 + 16x^2 + 54y - 64x + 1 = 0$

Ejercicio 27

Determine la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(3, 1)$, $(3, 9)$ y eje menor de longitud 6. Realizar la gráfica.

Ejercicio 28

Determine las asíntotas de la hipérbola $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

Ejercicio 29

Determine la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(0, 2)$ y $(6, 2)$ y asíntotas $y = \dfrac{2}{3}x$ y $y = 4 - \dfrac{2}{3}x$.

CAPÍTULO

DERIVACIÓN EN VARIAS VARIABLES 4

4.1 Funciones en varias variables

4.1.1. Funciones en dos variables

Definición 50: Función en dos variables

Una función de dos variables $z = f(x, y)$ mapea cada par ordenado (x, y) en un subconjunto D del plano real $\mathbb{R}^2$ a un número real único z. El conjunto D se llama el dominio de la función.

Ejemplo 46

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcular $f(2, 3)$ y $f(-3, 2)$.

Solución:

Note que:

- $f(2, 3) = 2^2 + 3^2 = 13$
- $f(-3, 2) = (-3)^2 + 2^2 = 13$

4.1.2. Funciones en tres variables

Definición 51: Función en tres variables

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ mapea cada tripleta (x, y, z) en un subconjunto D del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ a un número real único w. El conjunto D se llama el dominio de la función.

Ejemplo 47

Sea $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x+y)\cdot(x+\ln(z))$. Calcular $f(5,3,e)$ y $f(-\pi,2\pi,1)$.

Solución:

Note que:

- $f(5,3,e) = \operatorname{sen}(5+3)\cdot(5+\ln(e)) = \operatorname{sen}(8)\cdot(5+1) = 6\operatorname{sen}(8) \approx 5{,}93$
- $f(-\pi,2\pi,1) = \operatorname{sen}(-\pi+2\pi)\cdot(-\pi+\ln(1)) = \operatorname{sen}(\pi)\cdot(-\pi+0) = -\pi\operatorname{sen}(\pi) = 0$

4.1.3. Dominio máximo

Definición 52: Dominio máximo

Se define el dominio máximo de una función (D_f), como el conjunto de todos aquellos puntos P para los que tiene sentido en $\mathbb{R}$ la evaluación de $f(P)$.

Ejemplo 48

Halle el dominio máximo para $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Solución:

Note que en la función anterior, hay dos cosas que **no** pueden ocurrir: que el denominador sea 0 o que el interior de la raíz cuadrada sea negativo. Eso se puede compactar en:

$$1 - x^2 - y^2 > 0$$

$$\Rightarrow 1 > x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 1$$

Por ende, el dominio de la función son todos aquellos puntos (x,y) en $\mathbb{R}^2$ que satisfagan que $x^2+y^2 < 1$, o matemáticamente escrito:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Es importante comprender que lo anterior, lo que significa es que el dominio serán los puntos que estén en el interior del círculo de ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo 49

Halle el dominio máximo para $w = \dfrac{x - y}{1 - x - y - z}$.

Solución:

Note que en la función anterior, **no** puede ocurrir que el denominador sea 0. Es decir:

$$1 - x - y - z \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 \neq x + y + z$$

Por ende, el dominio de la función son todos aquellos puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfagan que $x + y + z \neq 1$, o matemáticamente escrito:

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\}$$

Es importante comprender que lo anterior, lo que significa es que el dominio serán los puntos que no se encuentren en el plano:

$$x + y + z = 1$$

4.2 Derivadas parciales

4.2.1. Primeras derivadas parciales

Definición 53: Primeras derivadas parciales

Se definen las primeras derivadas parciales de una función f en dos variables como:

- f_x

- f_y

Se definen las primeras derivadas parciales de una función f en tres variables como:

- f_x
- f_y
- f_z

El cálculo de las derivadas parciales aprovecha lo estudiado para funciones de una variable, si se requiere derivar respecto a una variable, se asume que todas las otras variables son cantidades constantes y se les trata como tal en el proceso de derivación.

Ejemplo 50

Determine las primeras derivadas parciales de $f(x, y, z) = x^3 + xyz + z^3$. Luego, halle $f_z(1, 1, 1)$.

Solución:

Primero obtengamos las derivadas parciales:

- $f_x = (x^3 + xyz + z^3)_x = (x^3)_x + (xyz)_x + (z^3)_x = 3x^2 + yz + 0 = 3x^2 + yz$
- $f_y = (x^3 + xyz + z^3)_y = (x^3)_y + (xyz)_y + (z^3)_y = 0 + xz + 0 = xz$
- $f_z = (x^3 + xyz + z^3)_z = (x^3)_z + (xyz)_z + (z^3)_z = 0 + xy + 3z^2 = xy + 3z^2$

Finalmente, hagamos el cálculo solicitado:

$$f_z(1, 1, 1) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

Ejemplo 51

Determine las primeras derivadas parciales de $f(x, y) = x^4 + \operatorname{sen}(x)\cos(y) + y^4$. Luego, halle $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

Solución:

Primero obtengamos las derivadas parciales:

- $f_x = (x^4 + \operatorname{sen}(x)\cos(y) + y^4)_x = (x^4)_x + (\operatorname{sen}(x)\cos(y))_x + (y^4)_x$
  $= 4x^3 + \cos(y)\cos(x) + 0 = 4x^3 + \cos(y)\cos(x)$
- $f_y = (x^4 + \operatorname{sen}(x)\cos(y) + y^4)_y = (x^4)_y + (\operatorname{sen}(x)\cos(y))_y + (y^4)_y$
  $= 0 + \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(y)) + 4y^3 = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) + 4y^3$

Finalmente, hagamos los cálculos solicitados:

- $f_x(0,0) = 4 \cdot 0^3 + \cos(0)\cos(0) = 1$
- $f_y(0,0) = -\operatorname{sen}(0)\operatorname{sen}(0) + 4 \cdot 0^3 = 0$

4.2.2. Derivadas parciales de orden superior

Definición 54: Derivadas parciales de orden superior

Se definen las derivadas parciales de orden superior de una función f en dos variables como:

- f_{xx}
- f_{yy}
- $f_{xy} = f_{yx}$ (Se le llama derivada parcial mixta)

Se definen las derivadas parciales de orden superior de una función f en tres variables como:

- f_{xx}
- f_{yy}
- f_{zz}
- $f_{xy} = f_{yx}$ (Derivada parcial mixta)
- $f_{xz} = f_{zx}$ (Derivada parcial mixta)
- $f_{yz} = f_{zy}$ (Derivada parcial mixta)

Para obtener a las derivadas de orden superior se deben derivar las primeras derivadas parciales.

> **Nota**
>
> *En este curso, cuando hablemos de obtener todas las derivadas parciales, nos estaremos refiriendo a obtener tanto las primeras derivadas parciales como las derivadas de orden superior.*

Ejemplo 52

Determine las derivadas parciales de orden superior para $f(x,y,z) = x^3 + xyz + z^3$.

Solución:

Ya sabíamos (pues lo hicimos en el ejemplo 5) que las primeras derivadas de esta función son:

- $f_x = 3x^2 + yz$
- $f_y = xz$
- $f_z = xy + 3z^2$

Luego, se tiene:

- $f_{xx} = (f_x)_x = (3x^2 + yz)_x = 6x$
- $f_{yy} = (f_y)_y = (xz)_y = 0$
- $f_{zz} = (f_z)_z = (xy + 3z^2)_z = 6z$
- $f_{xy} = (f_x)_y = (3x^2 + yz)_y = z$
- $f_{xz} = (f_x)_z = (3x^2 + yz)_z = y$
- $f_{yz} = (f_y)_z = (xz)_z = x$

4.3 Regla de la cadena

4.3.1. Regla de la cadena para funciones en dos variables

Definición 55: Regla de la cadena para funciones en dos variables

Si $f = f(u, v)$, en la cual $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$, entonces se tiene:

- $f_x = f_u u_x + f_v v_x$
- $f_y = f_u u_y + f_v v_y$

Ejemplo 53

Sea $f = u^3 + v^5$, donde $u = x^2y^3$ y $v = x^2 + y^3$. Calcular f_x, f_y y $f_x(1, 2) \cdot f_y(2, 1)$.

Solución:

Primero, obtengamos todas las derivadas que podemos:

- $f_u = 3u^2$
- $f_v = 5v^4$
- $u_x = 2xy^3$
- $u_y = 3x^2y^2$
- $v_x = 2x$
- $v_y = 3y^2$

Así, entonces, siguiendo la fórmulas:

- $f_x = f_u u_x + f_v v_x = 3u^2 \cdot 2xy^3 + 5v^4 \cdot 2x = 3(x^2y^3)^2 \cdot 2xy^3 + 5(x^2 + y^3)^4 \cdot 2x$
- $f_y = f_u u_y + f_v v_y = 3u^2 \cdot 3x^2y^2 + 5v^4 \cdot 3y^2 = 3(x^2y^3)^2 \cdot 3x^2y^2 + 5(x^2 + y^3)^4 \cdot 3y^2$

Luego para obtener el cálculo solicitado:

- $f_x(1, 2) = 3(1^2 \cdot 2^3)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2^3 + 5(1^2 + 2^3)^4 \cdot 2 \cdot 1 = 68682$

- $f_y(2,1) = 3(2^2 \cdot 1^3)^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 + 5(2^2 + 1^3)^4 \cdot 3 \cdot 1^2 = 9951$ Finalmente:

$$f_x(1,2) \cdot f_y(2,1) = 68682 \cdot 9951 = 683454582$$

4.3.2. Regla de la cadena para funciones en tres variables

Definición 56: Regla de la cadena para funciones en tres variables

Si $f = f(u,v,w)$, en la cual $u = g_1(x,y,z)$, $v = g_2(x,y,z)$ y $w = g_3(x,y,z)$, entonces se tiene:

- $f_x = f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x$
- $f_y = f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y$
- $f_z = f_u u_z + f_v v_z + f_w w_z$

Ejemplo 54

Sea $f = u^2 + v^5 w^2 + w^3$, donde $u = x^2 + y$, $v = x^2 + y^3$, $w = x + y + z$. Hallar f_z.

Solución:

Recuerde que por fórmula, se tiene:

$$f_z = f_u u_z + f_v v_z + f_w w_z$$

Entonces, calculemos lo necesario:

- $f_u = 2u$
- $f_v = 5v^4 w^2$
- $f_w = 2v^5 w + 3w^2$
- $u_z = 0$
- $v_z = 0$
- $w_z = 1$

Así, entonces:

$$f_z = 2u \cdot 0 + 5v^4w^2 \cdot 0 + 2v^5w + 3w^2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow f_z = 2v^5w + 3w^2$$

$$\Rightarrow f_z = 2(x^2 + y^3)^5 \cdot (x + y + z) + 3(x + y + z)^2$$

4.4 Vector gradiente

4.4.1. Vector gradiente en dos variables

Definición 57: Vector gradiente en dos variables

Sea f una función de variables x e y, se define el gradiente de f como:

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$$

4.4.2. Vector gradiente en tres variables

Definición 58: Vector gradiente en tres variables

Sea f una función de variables x, y y z, se define el gradiente de f como:

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

4.5 Derivadas direccionales

4.5.1. Derivada direccional en funciones de dos variables

Definición 59: Derivada direccional en funciones de dos variables

La derivada direccional de f en el punto (x, y), en la dirección del vector unitario $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ se define como:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \langle u_1, u_2 \rangle$$

Ejemplo 55

Sea $f(x,y) = x^4 + xy + y^2$. Calcular la derivada direccional de f en el punto $P(2,0)$ en la dirección del vector $v = \langle 3, -4 \rangle$.

Solución:

Primero, note que:

- $f_x = 4x^3 + y$
- $f_y = x + 2y$

Por ende, se tiene que: $\nabla f = \langle 4x^3 + y, x + 2y \rangle$, y así: $\nabla f(P) = \langle 32, 2 \rangle$.

Luego, ocupamos hacer al vector v dado en unitario:

$$u = \frac{v}{||v||} = \frac{\langle 3, -4 \rangle}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right\rangle$$

Finalmente se tiene:

$$D_u f(2,0) = \langle 32, 2 \rangle \cdot \left\langle \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right\rangle = \frac{88}{5}$$

4.5.2. Derivada direccional en funciones de tres variables

Definición 60: Derivada direccional en funciones de tres variables

La derivada direccional de f en el punto (x, y, z), en la dirección del vector unitario $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ se define como:

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

Ejemplo 56

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^3$. Calcular la derivada direccional de f en el punto $P(1,2,3)$ en la dirección del vector $v = \langle 6, 4, -7 \rangle$.

Solución:

Primero, note que:

- $f_x = 2x$
- $f_y = 2y$
- $f_z = 3z^2$

Por ende, se tiene que: $\nabla f = \langle 2x, 2y, 3z^2 \rangle$, y así: $\nabla f(P) = \langle 2, 4, 27 \rangle$.

Luego, ocupamos hacer al vector v dado en unitario:

$$u = \frac{v}{||v||} = \frac{\langle 6, 4, -7 \rangle}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-7)^2}} = \left\langle \frac{6}{\sqrt{101}}, \frac{4}{\sqrt{101}}, \frac{-7}{\sqrt{101}} \right\rangle$$

Finalmente se tiene:

$$D_u f(1, 2, 3) = \langle 2, 4, 27 \rangle \cdot \left\langle \frac{6}{\sqrt{101}}, \frac{4}{\sqrt{101}}, \frac{-7}{\sqrt{101}} \right\rangle = \frac{-161}{\sqrt{101}}$$

4.6 Optimización en varias variables

4.6.1. Optimización sin restricciones

Definición 61: Punto crítico

Se dice que P es un punto crítico de la función f si $\nabla f(P) = 0$ o bien $\nabla f(P) = 0$ se indefine.

Ejemplo 57

Sea $f = -35 + 8x - x^2 - 8y - y^2$. Hallar sus puntos críticos.

Solución:

Note que:

- $f_x = 8 - 2x$
- $f_y = -8 - 2y$

Así se tiene:

$$\nabla f = \langle 8 - 2x, -8 - 2y \rangle$$

Luego:

$$\langle 8-2x, -8-2y\rangle = \langle 0,0\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-2x=0 \\ -8-2y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$$

Por ende, esta función solo tiene un punto crítico y es $P=(4,-4)$.

Teorema 6: Criterio de la segunda derivada

Supóngase que (a,b) es un punto crítico de f, si al hacer:

$$f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

El resultado es:

- Positivo y $f_{xx}(a,b)$ es negativo, entonces f posee un máximo local en (a,b).
- Positivo y $f_{xx}(a,b)$ es positivo, entonces f posee un mínimo local en (a,b).
- Negativo, entonces f posee un punto silla en (a,b).
- Cero, entonces la naturaleza de (a,b) no puede ser determinada por este criterio.

Ejemplo 58

Sea $f=-35+8x-x^2-8y-y^2$, donde $(4,-4)$ es su único punto crítico, determine la naturaleza de este.

Solución:

Primero note que:

- $f_x = 8-2x$
- $f_y = -8-2y$

- $f_{xx} = -2$
- $f_{yy} = -2$
- $f_{xy} = 0$

Entonces:

$$f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

$$= (-2) \cdot (-2) - 0^2$$

$$= 4$$

Entonces, como el resultado anterior es positivo, y además $f_{xx} = -2$, es decir, negativa, se concluye que el punto $(4, -4)$ es un máximo local de f, para hallar el valor máximo basta con hacer $f(4, -4) = -3$.

4.6.2. Optimización con restricción

Definición 62: Lagrangiano

Sea $z = f(x, y)$ la función objetivo y $g(x, y) = 0$ una restricción. Se define el Lagrangiano como:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Teorema 7: Hessiana del lagrangiano

Si tenememos $L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, entonces se define la matriz hessiana del lagrangiano como:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -g_x & -g_y \\ -g_x & f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ -g_y & f_{xy} - \lambda g_{xy} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{pmatrix}$$

Sea d el determinante de H y (x, y, λ) un punto crítico del lagrangiano, entonces:

- Si $d < 0$, en el punto (x, y) hay un mínimo local ligado.
- Si $d > 0$, en el punto (x, y) hay un máximo local ligado.

- Si $d = 0$, en el punto (x, y) hay un punto silla.

Ejemplo 59

Sea $f = x^2 - y$, sujeta a la restricción $x + y = 1$. Determine los extremos.

Solución:

Lo primero es notar que el lagrangiano sería:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y - \lambda(x + y - 1)$$

Luego:

- $L_x = 2x - \lambda$
- $L_y = -1 - \lambda$
- $L_\lambda = -(x + y - 1)$

Así se tiene:

$$\nabla L = \langle 2x - \lambda, -1 - \lambda, -x - y + 1) \rangle$$

Por ende:

$$\nabla L = \langle 2x - \lambda, -1 - \lambda, -x - y + 1) \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ -1 - \lambda = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Por ende $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, -1)$ es punto crítico del Lagrangiano. Ahora, recuerde que en este ejemplo $f(x, y) = x^2 - y$ y $g(x, y) = x + y - 1$, así:

- $f_x = 2x$
- $f_{xx} = 2$
- $f_{xy} = 0$
- $g_y = 1$
- $g_{yy} = 0$
- $f_y = -1$
- $f_{yy} = 0$
- $g_x = 1$
- $g_{xx} = 0$
- $g_{xy} = 0$

Luego entonces se tiene:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \cdot 0 & 0 - \lambda \cdot 0 \\ -1 & 0 - \lambda \cdot 0 & 0 - \lambda \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, con ayuda de un software, el determinante de H es -2, es decir, negativo. Por ende en el punto $\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ hay un mínimo local ligado.

4.6.3. Programación lineal

Definición 63: Programa lineal en dos variables

En la programación lineal, tanto la función objetivo como las restricciones dependen linealmente de las variables, se define una maximización de una función con dos variables y m restriciones como:

$$\max f(x, y) = c_1 x + c_2 y \quad \text{sujeta a:} \quad \begin{cases} g_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y \leq b_1 \\ \dots \\ g_m(x, y) = a_{m1}x + a_{m2}y \leq b_m \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 60: Problema del pastelero

Analice la siguiente información:

- Un pastelero tiene 150 kilos de harina, 22 de azúcar y $27,5$ de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles.
- Supongamos que se necesitan 3 kilos de harina, 1 de azúcar y 1 de mantequilla para hacer

una docena de pasteles del tipo A, mientras que las cantidades para una docena del tipo B son, respectivamente, 6 kilos, $0,5$ kilos y 1 kilo.

- Supongamos que el beneficio que se obtiene por la venta de una docena de pasteles del tipo A es 20 y por una docena del tipo B es 30.

Hallar el número x de docenas de pasteles del tipo A y el número y de docenas del tipo B que hay que hacer para maximizar el beneficio del pastelero.

Solución:
Acá lo primero es notar que se tiene una restricción para la harina, una para la azúcar y una para la mantequilla.
Para la harina, nota que los pasteles tipo A requieren 3 kilos, los tipo B requieren 6 kilos. Además, se debe ver que el pastelero solo dispone de 150 kilos, por ende, se puede plantear:

$$3x + 6y \leq 150$$

Usando un razonamiento análogo, se puede plantear la restricción para la azúcar, se obtiene:

$$x + 0,5y \leq 22$$

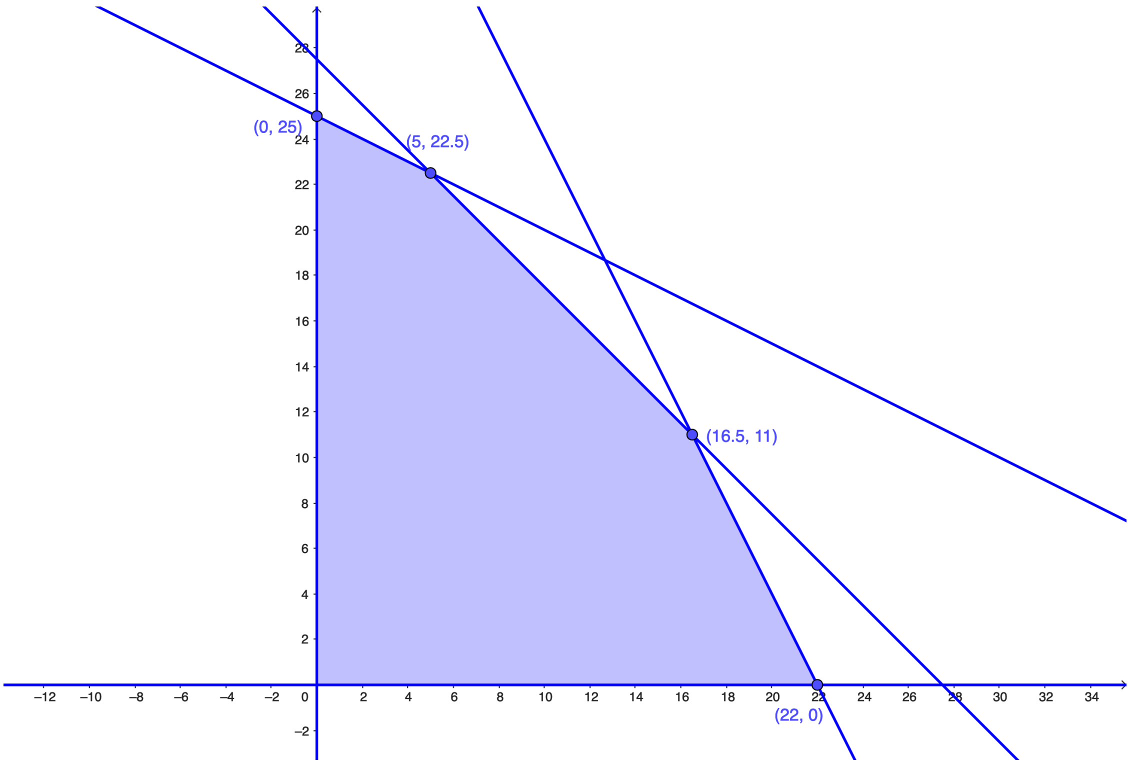
Finalmente, para la mantequilla:

$$x + y \leq 27,5$$

Lo que resta es notar que la función a maximizar es el beneficio, como los pasteles tipo A generan 20 y los tipo B generan 30, entonces el problema se define:

$$\text{máx}\, 20x + 30y \quad \text{sujeta a:} \quad \begin{cases} 3x + 6y \leq 150 \\ x + 0,5y \leq 22 \\ x + y \leq 27,5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Para resolver, se procede a graficar la región factible, esto es graficar las restricciones:



Note que en lo graficado anteriormente se tiene la región que satisface todas las inecuaciones, y los puntos que son vértices de dicha región. Para terminar, solo resta evaluar en la función objetivo cada punto de estos:

- $20 \cdot 0 + 30 \cdot 25 = 750$
- $20 \cdot 5 + 30 \cdot 22,5 = 775$
- $20 \cdot 16,5 + 30 \cdot 11 = 660$
- $20 \cdot 22 + 30 \cdot 0 = 440$

De lo anterior, el valor más alto es 775, y lo genera el punto $(5, 22.5)$, por ende, si el pastelero quiere maximizar su beneficio (775), debe hacer 5 docenas de pasteles tipo A y $22,5$ docenas de pasteles tipo B.

Definición 64: Programa lineal en varias variables

El programa lineal se puede generalizar a n variables:

$$\text{máx}\, c_1x_1 + ... + c_nx_n \quad \text{sujeta a:} \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Definición 65: Problema dual

Si se tiene:

$$\text{máx}\, c_1x_1 + ... + c_nx_n \quad \text{sujeta a:} \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Se define el problema dual como:

$$\text{mín}\, b_1u_1 + ... + b_mu_m \quad \text{sujeta a:} \begin{cases} a_{11}u_1 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1 \\ ... \\ a_{1n}u_1 + ... + a_{mn}u_m \geq c_n \\ u_1 \geq 0, ..., u_m \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 61: Problema dual del pastelero

Plantee el problema dual para el ejemplo 60 (el problema del pastelero).

Solución:

En el ejemplo 60 se planteó:

$$\text{máx}\, 20x + 30y \quad \text{sujeta a:} \begin{cases} 3x + 6y \leq 150 \\ x + 0,5y \leq 22 \\ x + y \leq 27,5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Entonces el problema dual será:

$$\text{mín}\, 150u + 22v + 27,5w \quad \text{sujeta a:} \begin{cases} 3u + v + w \geq 20 \\ 6u + 0,5v + w \geq 30 \\ u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Nota

Para entender mejor el problema dual del pastelero, suponga que el pastelero desea deshacerse del negocio y vender todos los ingredientes. Sean u, v, w los precios por kilo a los que debe vender la harina, la mantequilla y el azúcar, respectivamente.

- *La docena de pasteles tipo A necesita 3 kilos de harina, 1 kilo de mantequilla y 1 kilo de azúcar.*
- *De cada docena, se generan 20 unidades de ganancia.*
- *Para que el negocio sea rentable para el pastelero, el debe exigir que $3u + v + w \geq 20$.*

Con un razonamiento análogo al anterior, también puede exigir que $6u + 0,5v + w \geq 30$.
El precio de todos los ingredientes sería:

$$150u + 22v + 27,5w$$

Cualquier comprador racional aceptará comprar todos los ingredientes al menor precio posible.

Teorema 8

Supongamos que el problema primal (P) tiene una solución óptima (finita). Entonces el problema dual (D) tiene también una solución óptima (finita), y los correspondientes valores de las funciones objetivo son iguales.

Nota

En el problema del pastelero, como se vio que el problema primal tiene solución finita: $(5, 22.5)$ y el valor asociado es 775, entonces, por el teorema anterior, con certeza, el problema dual tendrá solución finita, y al evaluar esa solución en su función objetivo, se debe obtener como valor 775.

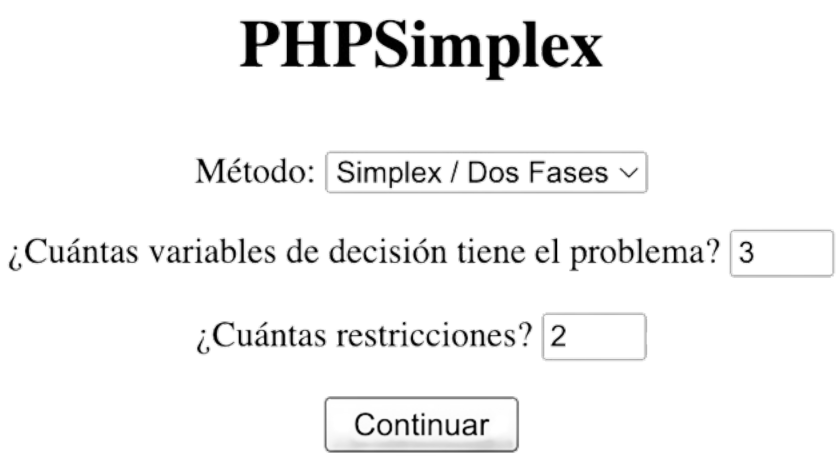
Ejemplo 62

Resuelva el problema dual del pastelero, es decir:

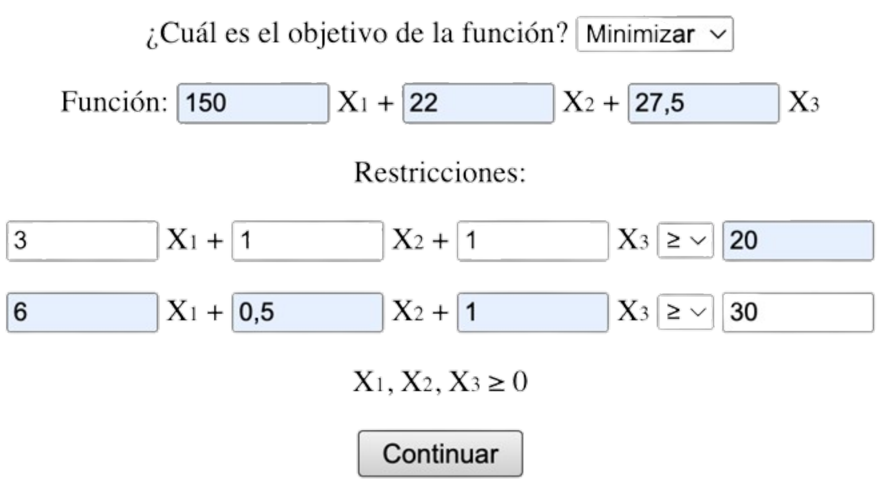
$$\text{mín } 150u + 22v + 27,5w \quad \text{sujeta a: } \begin{cases} 3u + v + w \geq 20 \\ 6u + 0,5v + w \geq 30 \\ u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Note que este es un problema en 3 variables, por ende la solución gráfica no es buen camino, por ende, se utilizará software, hay gran variedad de opciones, MATLAB, Desmos, Excel y otros, acá se usará una opción en línea: PHPSimplex.

Acá lo primero, es elegir como método el Simplex pues se tienen más de dos variables de decisión (el método gráfico será solo para 2 variables de decisión), de hecho, se tienen 3 variables de decisión y dos restricciones.



Se procede a seleccionar la opción de minimizar y digitar los coeficientes del problema.



Ya solo resta darle clic al botón de continuar y luego al de solución directa, obteniendo:

La solución óptima es Z = 775
$X_1 = 3.333333333333$
$X_2 = 0$
$X_3 = 10$

Es interesante notar, que en efecto, el valor objetivo coincide con el valor objetivo obtenido en el primal (775). Además, en este problema en particular, el regalar el segundo ingrediente (la mantequilla), hace que el precio para el comprador sea mínimo, pero también cumpliría las exigencias del pastelero, esto en un contexto real a lo mejor no tiene mucho sentido.

4.7 Ejercicios

Ejercicio 30

Para la función $f(x,y) = 4 - x^2 - 4y^2$, halle:

- $f(0,0)$
- $f(0,1)$
- $f(2,3)$

Ejercicio 31

Para la función $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$, halle:

- $f(0,5,4)$
- $f(6,8,-3)$
- $f(4,6,2)$

Ejercicio 32

Determine el dominio máximo de la función $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$.

Ejercicio 33

Determine el dominio máximo de la función $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

Ejercicio 34

Halle todas las derivadas parciales de la función $f(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2$.

Ejercicio 35

Halle todas las derivadas parciales de la función $f(x,y,z) = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2$.

Ejercicio 36

Sea $f = u^3v + uv^5w^2 + v^2w^3$, donde $u = x + y$, $v = y^2 + z^2$, $w = 2x + 3y - 5z$. Hallar f_x, f_y, f_z.

Ejercicio 37

Halle la derivada direccional de $w = xy + yz + xz$ en el punto $P = (1, 2, -1)$ y en la dirección $v = (2, 1, -1)$.

Ejercicio 38

Sea la función $f = 13 + 6x + x^2 + 4y + y^2$, determine sus puntos críticos, luego, clasifíquelos en máximos, mínimos o puntos silla.

Ejercicio 39

Sea la función $f = xy^2$, sujeta a la restricción $x+y = 1$, determine los puntos críticos del lagrangiano, luego, clasifíquelos usando la matriz hessiana.

Ejercicio 40

Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo L_1 y de 10 minutos para L_2.
Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 euros para L_1 y L_2, respectivamente.

1. Planificar la producción para obtener el máximo beneficio (resolver el problema primal con método gráfico).
2. Plantear y resolver el problema dual con el método gráfico.

Ejercicio 41

Con el comienzo del curso se va a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán $6{,}5$ y 7 \$, respectivamente.

- ¿Cuántos paquetes le conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio (resolver el problema primal con método gráfico)?
- Plantear el problema dual y resolver con un software.

CAPÍTULO

INTEGRACIÓN EN VARIAS VARIABLES 5

5.1 Integral en varias variables

El proceso de calcular una integral en varias variables es similar al aprendido en Cálculo I. Las integrales conservan su propiedad de linealidad, lo que significa que podemos separar sumas y restas, así como sacar constantes fuera de la integral. Sin embargo, es importante tener en cuenta que cualquier variable diferente de la que aparece en el diferencial debe tratarse como una constante. Además, en lugar de la constante de integración típica de Cálculo I, ahora introducimos una función que depende de las variables que no están en el diferencial.

Ejemplo 63

Calcule:

$$\int (x^2y - 3y^2 + 2xy)dx$$

Solución:

Se tiene:

$$\begin{aligned}
&\int (x^2y - 3y^2 + 2xy)dx \\
&= \int x^2ydx - \int 3y^2dx + \int 2xydx \\
&= y\int x^2dx - 3y^2\int dx + 2y\int xdx \\
&= y\frac{x^3}{3} - 3y^2x + 2y\frac{x^2}{2} + f(y) \\
&= \frac{yx^3}{3} - 3y^2x + yx^2 + f(y)
\end{aligned}$$

Ejemplo 64

Calcule:

$$\int (x^2y - 3y^2 + 2xy)dy$$

Solución:

Se tiene:

$$\int (x^2y - 3y^2 + 2xy)dy$$

$$= \int x^2ydy - \int 3y^2dy + \int 2xydy$$

$$= x^2 \int ydy - 3 \int y^2dy + 2x \int ydy$$

$$= x^2\frac{y^2}{2} - 3\frac{y^3}{3} + 2x\frac{y^2}{2} + f(x)$$

$$= \frac{x^2y^2}{2} - y^3 + xy^2 + f(x)$$

Se procede a analizar ahora un ejemplo de integral definida:

Ejemplo 65

Calcule:

$$\int_1^2 (x^3 + 4x^2y)dy$$

Solución:

Se tiene:

$$\int_1^2 (x^3 + 4x^2y)dy$$

$$= \int_1^2 x^3dy + \int_1^2 4x^2ydy$$

$$= x^3 \int_1^2 dy + 4x^2 \int_1^2 ydy$$

$$= x^3y\Big|_1^2 + 4x^2\frac{y^2}{2}\Big|_1^2$$

$$= x^3(2-1) + 4x^2\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= x^3 + 6x^2$$

5.2 Integrales dobles

Teniendo en cuenta lo anterior, es muy fácil calcular las integrales dobles, pues es realizar dicho proceso dos veces, yendo del interior hacia el exterior, veamos un ejemplo:

Ejemplo 66

Calcule:

$$\int_2^3 \int_5^7 (x+y^2)dydx$$

Solución:

Primero se toma la integral y el diferencial interior, es decir:

$$\int_5^7 (x+y^2)dy$$

$$= \int_5^7 xdy + \int_5^7 y^2dy$$

$$= x\int_5^7 dy + \int_5^7 y^2dy$$

$$= xy\Big|_5^7 + \frac{y^3}{3}\Big|_5^7$$

$$= x(7-5) + \left(\frac{7^3}{3} - \frac{5^3}{3}\right)$$

$$= 2x + \frac{218}{3}$$

Ahora, se procede a calcular la integral restante, con el diferencial restante, donde el integrando es lo que se acaba de obtener:

$$\int_2^3 \left(2x + \frac{218}{3}\right) dx$$

$$= \int_2^3 2xdx + \int_2^3 \frac{218}{3}dx$$

$$= 2\int_2^3 xdx + \frac{218}{3}\int_2^3 dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + \frac{218}{3}x\Big|_2^3$$

$$= 2\left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) + \frac{218}{3}(3-2)$$

$$= \frac{233}{3}$$

Observemos otro ejemplo para evidenciar que no siempre los límites de las integrales serán constantes:

Ejemplo 67

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2-3}^{2x}(x+y)dydx$$

Solución:

Primero se toma la integral y el diferencial interior, es decir:

$$\int_{x^2-3}^{2x}(x+y)dy$$

$$= \int_{x^2-3}^{2x} xdy + \int_{x^2-3}^{2x} ydy$$

$$= x\int_{x^2-3}^{2x} dy + \int_{x^2-3}^{2x} ydy$$

$$= xy\Big|_{x^2-3}^{2x} + \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2-3}^{2x}$$

$$= x(2x-(x^2-3)) + \left(\frac{(2x)^2}{2} - \frac{(x^2-3)^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{x^4}{2} - x^3 + 7x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

Ahora, se procede a calcular la integral restante, con el diferencial restante, donde el integrando es lo que se acaba de obtener:

$$\int_{-1}^{3}\left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + 7x^2 + 3x - \frac{9}{2}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int_{-1}^{3} x^4dx - \int_{-1}^{3} x^3dx + 7\int_{-1}^{3} x^2dx + 3\int_{-1}^{3} xdx - \frac{9}{2}\int_{-1}^{3} dx$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} + 7\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} + 3\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{3} - \frac{9}{2}x\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5}\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) + 7\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + 3\left(\frac{3^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) - \frac{9}{2}(3 - -1)$$

$$= \frac{224}{15}$$

5.2.1. Orden de integración

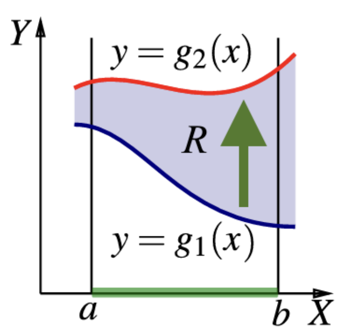
Muchas veces el problema de una integral doble no es calcularla, sino plantearla, dependiendo de su región de integración. Definiremos dos tipos de regiones:

Definición 66: Región dydx

En este tipo de regiones se tiene:

- $a \leq x \leq b$
- $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

En palabras simples, diríamos que x estará en un intervalo numérico, mientras que y estará entre dos funciones x-dependientes. La siguiente imagen ilustra mejor lo anterior:

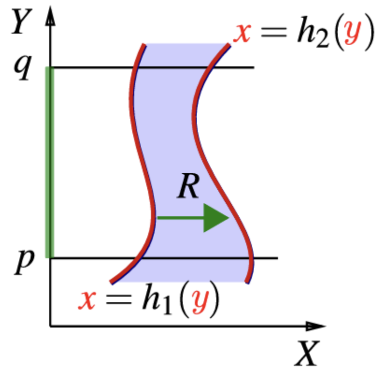


Definición 67: Región dxdy

En este tipo de regiones se tiene:

- $p \leq y \leq q$
- $h_1(y) \leq y \leq h_2(y)$

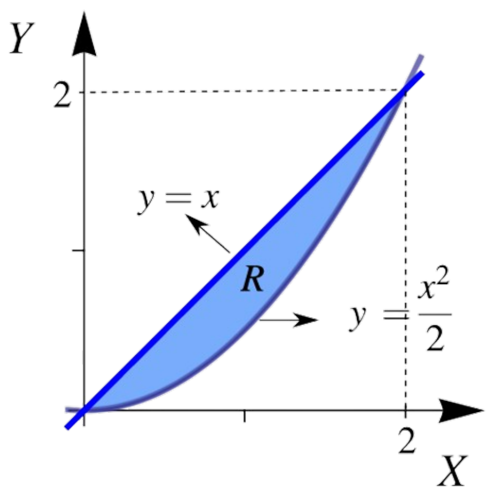
En palabras simples, diríamos que y estará en un intervalo numérico, mientras que x estará entre dos funciones y-dependientes. La siguiente imagen ilustra mejor lo anterior:



Ejemplifiquemos lo anterior:

Ejemplo 68

Sea R la región de la siguiente imagen:



Calcule $\iint_R xydA$ usando el orden de integración dydx y dxdy.

Solución:

No hay duda que por la imagen, como y está despejada, si solo se debiera calcular un orden, el ideal sería dydx. Iniciemos por ahí, note que:

$$0 \leq x \leq 2$$

$$\frac{x^2}{2} \leq y \leq x$$

Observe que para el acotamiento de y, se coloca la curva inferior primero y la superior segunda. Luego, solo resta calcular:

$$\int_0^2 \int_{x^2/2}^{x} xydydx = \frac{2}{3}$$

Ahora, para el orden dxdy, se observa fácil en la imagen que:

$$0 \leq y \leq 2$$

Para x, solo se despeja x en cada curva, obteniendo: $x = y$ y $x = \pm\sqrt{2y}$. En el acotamiento se colocará primero la curva más izquierda y luego, para saber que elegir entre $x = \pm\sqrt{2y}$ se nota que estamos en el primer cuadrante, por lo que se toma $x = \sqrt{2y}$, así:

$$y \leq x \leq \sqrt{2y}$$

Solo basta calcular:

$$\int_0^2 \int_{y}^{\sqrt{2y}} xydxdy = \frac{2}{3}$$

Note que independientemente del orden de integración elegido, mientras se haga bien, el resultado de la integral será el mismo.

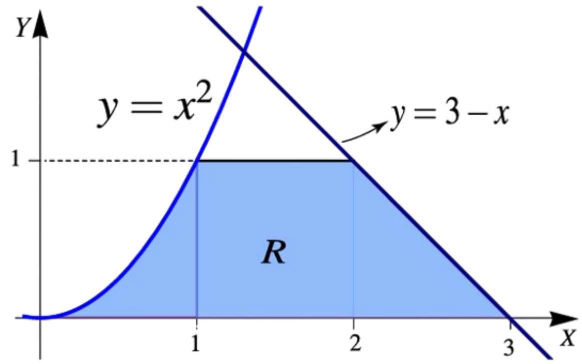
Una muy buena pregunta sería: ¿Cuál es la importancia del orden de integración si en ambos casos el resultado será el mismo? Bueno, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 69

Calcule:

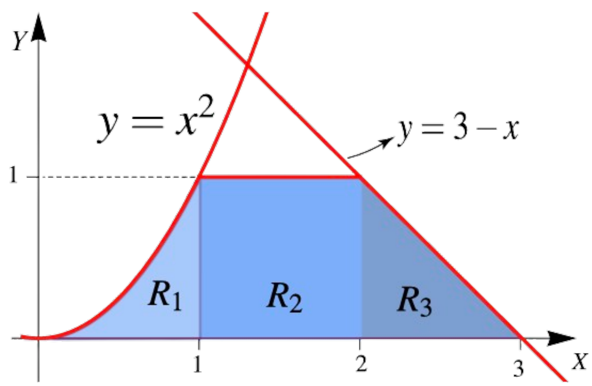
$$\iint_R (x^2 + y^2)dA$$

Donde R es:



Solución:

En este ejemplo, calcular la integral en orden dydx no es rentable, pues generaría 3 nuevas regiones, de la siguiente manera:



El problema acá es que la curva inferior es la misma para todas las nuevas regiones, pero la curva superior no es la misma.

Por ende, conviene calcular la integral con orden dxdy, es fácil ver por la imagen que:

$$0 \leq y \leq 1$$

Luego, debemos despejar de las curvas a x, obteniendo $x = \pm\sqrt{y}$ y $x = 3 - y$. Se elige $x = \sqrt{y}$ pues estamos en el primer cuadrante, así se tiene:

$$\sqrt{y} \leq x \leq 3 - y$$

Así, basta calcular:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-y} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1207}{210}$$

5.2.2. Área de una región

Definición 68: Área de una región

Se puede calcular el área de una región R con:

$$\iint_R dA$$

Ejemplo 70

Halle el área de:

- Región del ejemplo 68
- Región del ejemplo 69

Solución:

Para el ejemplo 6 se tenía:

$$0 \leq x \leq 2$$

$$\frac{x^2}{2} \leq y \leq x$$

Basta calcular:

$$\int_0^2 \int_{x^2/2}^{x} dy dx = \frac{2}{3}$$

Para el ejemplo 7 se tenía:

$$0 \leq y \leq 1$$

$$\sqrt{y} \leq x \leq 3 - y$$

Basta calcular:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-y} dx dy = \frac{11}{6}$$

5.2.3. Volumen de un sólido con integral doble

Definición 69: Volumen de un sólido con integral doble

Sea $f(x,y) \geq 0$ y continua en una región cerrada R. Sea V_Q el volumen del sólido Q que tiene a R como base y una altura de medida $f(x,y)$ en cada punto de la región, entonces:

$$V_Q = \iint_R f(x,y)dA$$

Ejemplo 71

Halle el volumen del sólido bajo la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y sobre el rectángulo R del plano xy que consta de los puntos (x,y) para los cuales $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 1$.

Solución:

Dada que la región es un rectángulo, es sencillo plantear la integral necesaria, es importante notar que la función dada se coloca como integrando:

$$V_Q = \int_0^2 \int_0^1 (1 + x^2y^2)dydx = \frac{26}{9}$$

Ejemplo 72

Hallar el volumen del sólido Q limitado por los planos coordenados y el plano $6x + 2y + 3z = 6$.

Solución:

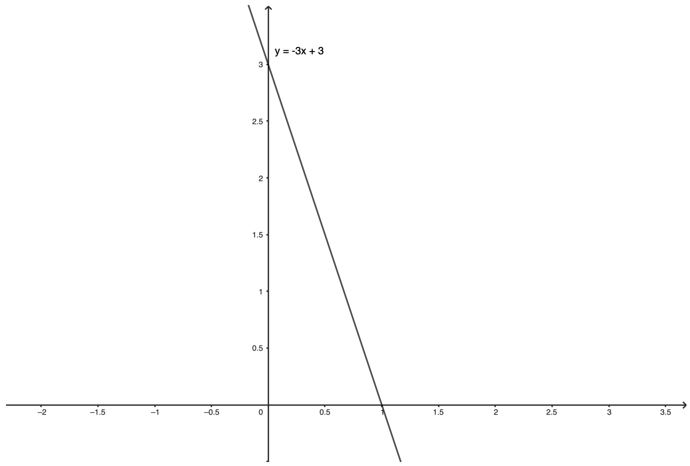
Algo importante a rescatar de este ejercicio es que al sólido estar limitado por los planos coordenados, todo ocurrirá en el primer octantes, es decir, todo será positivo. Ahora bien, en este tipo de ejercicio lo que interesa es analizar el comportamiento en el suelo, es decir, cuando $z = 0$, para ello note que si sustituimos z por 0 se tiene:

$$6x + 2y + 3 \cdot 0 = 6$$

$$\Rightarrow 2y = 6 - 6x$$

$$\Rightarrow y = 3 - 3x$$

Graficando en GeoGebra se tiene:



Acá dado que y está despejada, lo mejor es plantear R en el tipo $dydx$, por la imagen es sencillo ver que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 3 - 3x$. Luego, para el integrando se despeja a z del plano dado:

$$6x + 2y + 3z = 6$$

$$\Rightarrow z = \frac{6 - 6x - 2y}{3}$$

Así, finalmente:

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{3-3x} \left(\frac{6 - 6x - 2y}{3} \right) dydx = 1$$

5.3 Integrales triples

Calcular una integral triple es análogo a calcular una integral doble, solo hay una integral de más ahora.

Ejemplo 73

Calcule la siguiente integral triple:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_x^y (1 + x + y + z) dzdydx$$

Solución:

Primero se calcula:

$$\int_x^y (1 + x + y + z) dz = y + \frac{3}{2} y^2 - x - \frac{3}{2} x^2$$

Ahora se calcula:

$$\int_0^{x^2}\left(y+\frac{3}{2}y^2-x-\frac{3}{2}x^2\right)dy=-x^4+\frac{1}{2}x^6-x^3$$

Finalmente, basta calcular:

$$\int_0^1\left(-x^4+\frac{1}{2}x^6-x^3\right)dx=-\frac{53}{140}$$

5.3.1. Volumen de un sólido con integral triple

Definición 70: Volumen de un sólido con integral triple

El volumen de un sólido Q está dado por:

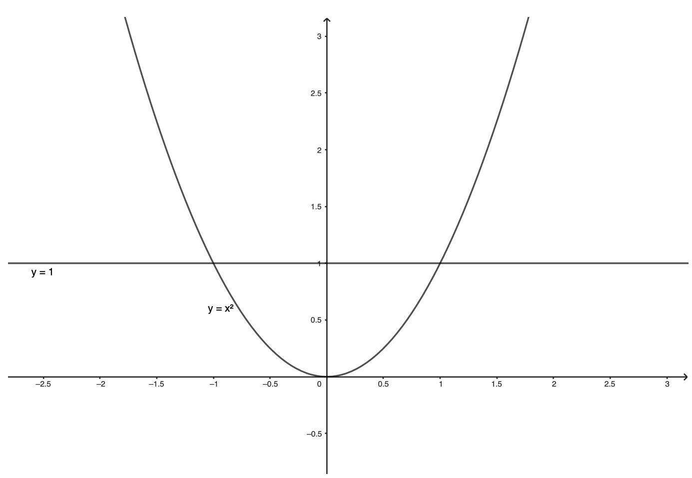
$$V_Q=\iiint_R dV$$

Ejemplo 74

Calcular el volumen del sólido Q acotado por el cilindro $y=x^2$ y los planos $y+z=1$ y $z=0$.

Solución:

Lo primero que se necesita es ver la proyección del sólido en el suelo, es decir, que ocurre cuando $z=0$, entonces se tienen dos curvas de interés: $y=x^2$ y $y=1$ (salió de sustituir z por 0 en $y+z=1$), graficando:



Con lo anterior, se puede notar que $-1 \leq x \leq 1$ y $x^2 \leq y \leq 1$. Luego, para z, por lo dado, se tiene $z = 0$ y $z = 1 - y$ (despejando de $y + z = 1$). Así:

$$0 \leq z \leq 1 - y$$

Por ende, para hallar el volumen, basta plantear:

$$V_Q = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} dzdydx = \frac{8}{15}$$

5.4 Aplicaciones de las integrales

5.4.1. Aplicaciones de integrales dobles

Definición 71: Aplicaciones de integrales dobles

Suponga que una lámina se representa por una región R y que la densidad en un punto (x, y) de tal lámina, está dada por la función continua $z = \rho(x, y)$.

1. La masa M y los momentos M_x y M_y se calculan con las siguientes fórmulas:
   - $M = \iint_R \rho(x, y)dA$
   - $M_x = \iint_R y\rho(x, y)dA$
   - $M_y = \iint_R x\rho(x, y)dA$
2. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide o centro de masa de la lámina R se calculan con las fórmulas:
   - $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M}$
   - $\bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$
3. El momento polar de inercia I_0 de R con respecto al origen se calcula por la fórmula:

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA$$

4. El momento de inercia de la lámina R con respecto al eje x (respectivamente eje de las y) se denota con I_x (respectivamente I_y). Estas cantidades se calculan mediante las fórmulas:
   - $I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)dA$
   - $I_y = \iint_R x^2 \rho(x,y)dA$
5. Se debe notar que:
$$I_0 = I_x + I_y$$

Ejemplo 75

Una lámina tiene la forma de la región R limitada por la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$. Suponga que la densidad de la lámina en el punto $P(x,y)$ es $\rho(x,y) = x^2$. Hallar para esta lámina R, la masa M, los momentos M_x, M_y, el centroide y los momentos I_0, I_x e I_y.

Solución:

Graficando en GeoGebra se puede ver que $-1 \leq x \leq 2$ y $x^2 \leq y \leq x+2$. Los cálculos solicitados son los siguientes:

1. Masa:
$$M = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} x^2 dydx = \frac{63}{20}$$
2. Momento M_x:
$$M_x = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} yx^2 dydx = \frac{531}{70}$$
3. Momento M_y:
$$M_x = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} x \cdot x^2 dydx = \frac{18}{5}$$
4. Centroide:
$$\left(\frac{8}{7}, \frac{118}{49}\right)$$
5. Momento I_0:
$$I_0 = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} (x^2+y^2)x^2 dydx = \frac{909}{35}$$

6. Momento I_x:
$$I_x = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} y^2x^2dydx = \frac{207}{10}$$

7. Momento I_y:
$$I_y = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} x^2x^2dydx = \frac{369}{70}$$

5.4.2. Aplicaciones de integrales triples

Definición 72: Aplicaciones de integrales triples

Suponga que R es un sólido y que la densidad en cada punto (x, y, z) está dada por la función $\rho(x, y, z)$ entonces:

1. La masa M se calcula con la siguiente fórmula:
$$M = \iiint_R \rho(x, y, z)dV$$

2. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centroide son:
$$\left(\frac{1}{M}\iiint_R x\rho(x, y, z)dV, \frac{1}{M}\iiint_R y\rho(x, y, z)dV, \frac{1}{M}\iiint_R z\rho(x, y, z)dV\right)$$

3. Los momento de inercia de R con respecto a los tres ejes coordenados se calculan mediante las fórmulas:
   - $I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$
   - $I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$
   - $I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV$

Ejemplo 76

Sea R el tetraedro ubicado en el primer octante que forman el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados. Si la densidad en cada punto (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x$, determinar la masa, el centroide y los momentos de inercia.

Solución:

Se puede definir a R como: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$ y $0 \leq z \leq -x-y+1$. Los cálculos solicitados son los siguientes:

1. Masa:
$$M = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{-x-y+1} x dz dy dx = \frac{1}{24}$$

2. Para el centroide:
$$\left(\frac{1}{M} \iiint_R x\rho(x,y,z)dV, \frac{1}{M} \iiint_R y\rho(x,y,z)dV, \frac{1}{M} \iiint_R z\rho(x,y,z)dV \right)$$
$$\Rightarrow \left(24 \iiint_R x \cdot x dV, 24 \iiint_R yx dV, 24 \iiint_R zx dV \right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

3. Momento I_x:
$$I_x = \iiint_R (y^2+z^2) x dV = \frac{1}{180}$$

4. Momento I_y:
$$I_y = \iiint_R (x^2+z^2) x dV = \frac{1}{90}$$

5. Momento I_z:
$$I_z = \iiint_R (x^2+y^2) x dV = \frac{1}{90}$$

5.5 Ejercicios

Ejercicio 42

Calcule las siguientes integrales dobles:

1. $$\int_{-\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{\pi}(-3x+\cos(x)-y)dxdy$$

2. $$\int_{-2}^{1}\int_{-3}^{0}(8x^2+2y^2-4)dxdy$$

Ejercicio 43

Calcule las siguientes integrales dobles:

1. $$\int_{0}^{2}\int_{y}^{y^2}(x+y)dxdy$$

2. $$\int_{-2}^{2}\int_{y/2}^{y^2+1}(1+x+y)dxdy$$

Ejercicio 44

Invierta el orden de integración para las siguientes integrales dobles:

1. $$\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}1dydx$$

2. $$\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln(x)}1dydx$$

Ejercicio 45

Determine las áreas de las regiones R utilizando integrales dobles:

1. R es la región limitada por las curvas $x=y/2$, $x=2$, $y=0$.

2. R es la región encerrada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por las rectas $x = -3$ y $x = 3$.

Ejercicio 46

Determine el volumen de los siguientes sólidos V utilizando integrales dobles:

1. V es la parte del primer octante acotada por el plano $x + y + z = 1$.
2. V está limitado por los planos $z = x + 2y + 1$, $y = 0$, $x = 1$ y $y = 2x$.

Ejercicio 47

Calcule las siguientes integrales triples:

1. $$\int_5^6 \int_{-3}^1 \int_0^3 (15x + 6y + 12) dzdydx$$
2. $$\int_2^5 \int_2^5 \int_5^7 (-10x^2 + 5y + 5z^2) dzdydx$$

Ejercicio 48

Calcule las siguientes integrales triples:

1. $$\int_0^1 \int_{x^2-1}^{2x+1} \int_0^{1-x-y} 1dzdydx$$
2. $$\int_0^1 \int_y^{2y+1} \int_0^{1-x-y} (2x + 3y + z) dzdxdy$$

Ejercicio 49

Determine el volumen de los siguientes sólidos utilizando integrales triples:

1. El sólido se encuentra en el primer octante, limitado por $z^2 + x^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 9$.
2. El sólido está limitado por $z = 9 - x^2$, $z = 5 - y$, $y = 0$, $y = 5$.

Ejercicio 50

Dado que se tiene:

$$\int_0^2 \int_0^\alpha (x^2y^2+1)dydx = \frac{26}{9}$$

Determine el valor de α.

Ejercicio 51

Dado que se tiene:

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} 1dzdxdy = \frac{14}{15}$$

Determine el/los valor/es de a.

Ejercicio 52

Demuestre lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dxdy = 0$$

Ejercicio 53

Sea la lámina R tal que:

$$R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Sea $\rho(x,y) = 1$ la función densidad. Determine la masa M, los momentos M_x, M_y, el centroide C y los momentos I_0, I_x e I_y.

Ejercicio 54

Sea V el sólido tal que:

$$v = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

Sea $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ la función densidad. Determine la masa M, el centroide C y los momentos de inercia I_x, I_y e I_z.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ávila, J. (2017).*Cálculo en varias variables: una guía para estudiante*. Editorial UCR.

[2] Larson, R. y Edwards, B.(2017). *Matemáticas II. Cálculo Integral*. CENGAGE.

[3] Larson, R. y Edwards, B.(2017). *Matemáticas III. Cálculo en varias variables*. CENGAGE.

[4] Mora, W. (2019). *Cálculo en Varias Variables. Visualización interactiva*. Revista digital Matemática Educación e Internet.