

Egzamin licencjacki 2022 / 2023 - II termin

Rozwiązania zadań

Zadanie 4

Niech $I := \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$, gdzie $R > 0$. Zauważmy, że naszym obszarem całkowania jest koło o promieniu równym R oraz w wykładniku w funkcji podcałkowej mamy wyrażenie x^2+y^2 , co sugeruje, aby skorzystać z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Połóżmy zatem $\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$.

Wówczas:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}{2}} dr d\phi \left| \frac{d(x,y)}{d(r,\phi)} \right|$$

, gdzie:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d(x,y)}{d(r,\phi)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dr} r \cos \phi & \frac{d}{d\phi} r \cos \phi \\ \frac{d}{dr} r \sin \phi & \frac{d}{d\phi} r \sin \phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r \cos^2 \phi - (-r \sin^2 \phi) = \\ &= r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r(1) = r \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}{2}} r dr d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\frac{r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{2}} r dr d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\frac{r^2 (1)}{2}} r dr d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\phi = \left| dt = -r dr \implies dr = -\frac{1}{r} dt \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{-\frac{R^2}{2}} e^{-t} \left(-\frac{1}{r} \right) dt d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{-\frac{R^2}{2}} -e^{-t} dt d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} - \int_0^{-\frac{R^2}{2}} e^{-t} dt d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{R^2}{2}}^0 e^{-t} dt d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-t} + C]_{t=-\frac{R^2}{2}}^{t=0} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((e^0 + \emptyset) - \left(e^{-\frac{R^2}{2}} + \emptyset \right) \right) d\phi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 - e^{-\frac{R^2}{2}} d\phi = \frac{1}{2\pi} \left[\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right) \phi + C \right] \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right) 2\pi + \mathcal{C} \right) - \left(\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right) 0 + \mathcal{C} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right) 2\pi - 0 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right) 2\pi \right) = \\
&= 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}
\end{aligned}$$

, skąd dostajemy natychmiast:

$$\iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}$$

□

Sposób oceniania zadania:

- (2p) - za poprawną zamianę zmiennych całkowania na współrzędne biegunowe;
- (1p) - za częściowo poprawną zamianę zmiennych całkowania na współrzędne biegunowe;

Zadanie 7

- Powyższy harmonogram **nie jest** szeregowalny. Z definicji harmonogram jest harmonogramem szeregowalnym, jeżeli wynik działania tego harmonogramu jest równoważny wynikowi otrzymanemu za pomocą pewnego harmonogramu sekwencyjnego (czyli takiego, w którym poszczególne transakcje wykonują się w sposób sekwencyjny, tzn. najpierw wszystkie instrukcje pierwszej transakcji, następnie drugiej, itd., przy czym porządek poszczególnych transakcji może być różny). W tym przypadku nie jest to możliwe, ponieważ instrukcja numer 4 transakcji Tr2 powoduje, że obydwie instrukcje SELECT w transakcji Tr1, która nie dokonuje modyfikacji żadnych danych, dają różne odczyty, co nie może zajść w momencie, gdy transakcja tego typu wykonuje się w sposób sekwencyjny.
- Harmonogram ten **nie jest** możliwy na podanym poziomie izolacji transakcji z racji tego, że poziom izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ** podobnie jak o jeden poziom niższy poziom izolacji transakcji **locking READ COMMITTED** zapewnia ochronę przed tzw. anomalią brudnego odczytu, która zachodzi w momencie, gdy pewna transakcja dokonuje odczytu danych zmodyfikowanych ale nie zatwierdzonych przez

inną transakcję. Mimo tego, że aż do instrukcji nr 4 transakcje mogą zostać wykonane według harmonogramu (poziom izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ** nie zapewnia ochrony przed tzw. anomalią fantomów), to w przypadku instrukcji nr 5 transakcja Tr1 próbuje dokonać tzw. brudnego odczytu danych zmodyfikowanych z wykorzystaniem zdania INSERT w transakcji Tr2, która nie została jeszcze zatwierdzona. Z racji tego, że poziom izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ** również zapewnia ochronę przed tzw. anomalią brudnego odczytu, instrukcja nr 5 w transakcji Tr1 oczekuje do momentu, gdy transakcja Tr2 zostanie zatwierdzona za pomocą polecenia COMMIT, wycofana za pomocą polecenia ROLLBACK lub przerwana w wyniku błędu.

Sposób oceniania zadania:

- (1p) - za poprawne stwierdzenie, że podany harmonogram nie jest szeregowalny;
- (1p) - za poprawne stwierdzenie, że podany harmonogram nie jest możliwy na poziomie izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ**;
- (1p) - za poprawne wypisanie tabeli stanowiącej wynik działania ostatniej instrukcji SELECT w transakcji Tr1;
- (1p) - za poprawne stwierdzenie, że na poziomie izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ** zakładane są blokady współdzielone (typu S) na wszystkie dane odczytywane przez każde polecenie transakcji i utrzymywane są do zakończenia transakcji oraz że ostatnia instrukcja SELECT w transakcji Tr1 nie zostanie wykonana w porządku zadanym przez podany harmonogram, gdyż uzyskanie blokady współdzielonej (typu S) do odczytu danych nie jest możliwe w sytuacji, gdy na dane nałożona jest blokada wyłączna (typu X), która zostaje zwolniona dopiero wraz z zatwierdzeniem transakcji Tr2.

Gdy idzie o wypisanie tabeli stanowiącej wynik działania ostatniej instrukcji SELECT w transakcji Tr1 możliwe były dwie interpretacje treści polecenia:

- Skoro podany harmonogram nie jest możliwy na poziomie izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ** można było pozostawić odpowiedź na pytanie o tabelę **pustą** (1p);
- Można było również stwierdzić, że mimo, iż podany harmonogram nie jest możliwy na poziomie izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ**, to w momencie, gdy ostatnia instrukcja SELECT w transakcji Tr1 w końcu wykona się po zatwierdzeniu transakcji Tr2, to wówczas z racji tego, że poziom izolacji transakcji **locking REPEATABLE READ** nie zapewnia ochrony przed tzw. anomalią fantomów i transakcje wykonywały się zgodnie z harmonogramem aż do instrukcji nr 4 włącznie (dodającej wiersz to tabeli Konta, w wyniku jej działania zostanie zwrócona tabela, która posiada 3 wiersze (1p);