

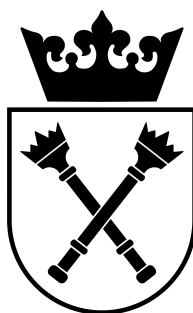
UNIWERYSTET JAGIELLOŃSKI

PYTANIA DO EGZAMINU LICENCJACKIEGO

NA KIERUNKU INFORMATYKA

PRAKTYKA

Karol CHRZĄSTEK
Małgorzata DYMEK
Michał PIOTROWSKI
Dominik WOŁEK
Dagmara ZDYBAŁ



Rok akademicki 2019/2020

Spis treści

1	Zasada indukcji matematycznej.	9
2	Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.	10
3	Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.	12
4	Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.	13
5	Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.	15
6	Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidla.	17
6.1	Metoda eliminacji Gaussa	17
6.2	Metoda iteracyjna Jacobiego	18
6.2.1	Algebraicznie	18
6.2.2	Macierzowo	18
6.3	Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla	18
6.3.1	Algebraicznie	18
6.3.2	Macierzowo	18
7	Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.	19
7.1	Metoda potęgowa.	19
7.2	Odwrotna metoda potęgowa.	20
7.3	Metoda QR.	20
8	Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange’a i Hermite’a. Efekt Rungego.	22
8.1	Wzór interpolacyjny Lagrange’a	22
8.2	Interpolacja Hermite’a	22
9	Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.	25
9.1	Rozkład dwumianowy	25
9.2	Rozkład geometryczny	25
9.3	Rozkład Poissona	25

10 Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.	27
10.1 Rozkład jednostajny	27
10.2 Rozkład wykładniczy	27
10.3 Rozkład normalny	28
10.4 Rozkład Gamma, Wzór Gamma-Poisona	29
11 Łącuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.	30
12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.	32
12.1 Z-test	32
12.2 T-testy	34
12.3 Testy Chi-kwadrat	36
13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.	38
14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(Zm, +, *)$ w zależności od liczby naturalnej m. Rozszerzony algorytm Euklidesa.	39
15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni R_n; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.	41
16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.	43
16.1 Liczby Stirlinga I rodzaju	43
16.2 Liczby Stirlinga II rodzaju	43
17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.	44
17.1 Funkcja Eulera	44
17.2 Twierdzenie Fermata	44
17.3 Twierdzenie Eulera	44
18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.	45
19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chromatyczna - definicje i twierdzenia.	47
20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.	50

21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.	55
21.1 Funkcja tworząca.	55
21.2 Równanie charakterystyczne.	56
22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.	58
22.1 Obliczanie granicy ciągu	58
22.2 Twierdzenie o dwóch ciągach	58
22.3 Twierdzenie o trzech ciągach	59
22.4 Funkcje	59
23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.	61
23.1 Ciągłość funkcji	61
23.2 Pochodna	62
24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.	64
25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.	66
26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych; różniczkowalność i różniczka funkcji.	68
27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.	71
28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.	73
29 Metody dowodzenia poprawności pętli.	77
30 Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.	77
30.1 Obliczanie wartości wyrażenia w ONP	77
30.2 Zamiana wyrażenia infiksowego na ONP	78
31 Modele obliczeń: maszyna Turinga.	79
32 Modele obliczeń: automat skończony, automat ze stosem.	81
32.1 Automat skończeniostanowy deterministyczny	81
32.2 Automat ze stosem	83

33	Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: O, Ω, Θ.	84
34	Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.	85
35	Metoda "dziel i zwyciężaj": zalety i wady.	87
35.1	Binary search	87
35.2	Otoczka wypukła	88
36	Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.	94
37	Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.	94
38	Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort: metody wyboru pivota w QS; złożoności.	94
39	Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).	94
40	Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).	95
40.1	Odtworzenie drzewa z preordera i inordera.	95
41	Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.	99
41.1	Wyszukiwanie następnika i poprzednika w BST.	99
41.2	Usuwanie węzła z BST.	100
42	B-drzewa: operacje i ich złożoność.	102
42.1	Wyszukiwanie	102
42.2	Wstawianie	103
42.3	Usuwanie	107
43	Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.	113
43.1	Wstawianie	113
43.2	Usuwanie	115
44	Algorytmy przeszukiwania wszerz i włąb w grafach.	116
44.1	Przeszukiwanie wszerz	116

44.2	Przeszukiwanie wgłąb	121
44.2.1	Sortowanie topologiczne z użyciem DFS	123
45	Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstry oraz Bellmana-Forda).	127
45.1	Algorytm Dijkstry	127
45.2	Algorytm Bellmana-Forda	130
46	Programowanie dynamiczne: podział na podproblemy, porównanie z metodą "dziel i zwyciężaj".	131
47	Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.	131
48	Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.	131
49	Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.	132
49.1	Algorytm Boruvki	132
49.2	Algorytm Prima	133
49.3	Algorytm Kruskala	134
50	Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).	137
50.1	Algorytm Grahama	137
50.2	Algorytm Jarvisa.	144
50.3	QuickHull	144
51	Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.	145
52	Automat minimalny, wybrany algorytm minimalizacji.	146
52.1	Automat minimalny	146
52.2	Minimalizacja automatu	146
53	Lemat o pompowaniu dla języków regularnych.	149

54	Warunki równoważne definicji języka regularnego: automat, prawa kongruencja syntaktyczna, wyrażenia regularne.	150
55	Automaty niedeterministyczne i deterministyczne (w tym ze stosem); determinizacja.	151
55.1	Determinizacja automatu niedeterministycznego	151
55.2	Determinizm automatu ze stosem	152
56	Problemy rozstrzygalne i nierozstrzygalne w teorii języków.	153
57	Klasy języków w hierarchii Chomsky’ego oraz ich zamkniętość ze względu na operacje boolowskie, homomorfizmy, itp.	154
58	Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.	157
59	Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.	157
60	Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.	157
61	Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.	157
62	Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.	157
63	Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.	157
64	Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.	157
65	Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.	157
66	Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.	157
67	Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.	157
68	Obsługa plików w języku C.	157

69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.	157
70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.	157
71 Klasyfikacja testów.	157
72 Model Scrum: struktura zespołu, proces wytwarzania oprogramowania, korzyści modelu.	157
73 Wymagania w projekcie informatycznym: klasyfikacja, źródła, specyfikacja, analiza.	157
74 Analiza obiektowa: modele obiektowe i dynamiczne, obiekty encjowe, brzegowe i sterujące.	157
75 Wzorce architektury systemów.	157
76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce’a-Codda), przykłady.	158
77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.	158
78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.	158
79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.	158
80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.	159
80.1 Szeregowalność konfliktowa.	162
80.2 Szeregowalność perspektywiczna.	163
81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.	166
82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.	167
83 Minimalizacja funkcji logicznych.	168
83.1 Minimalizacja z wykorzystaniem algebry Boole’a	168
83.2 Minimalizacja z wykorzystaniem tablic Karnaugh’a	169

84	Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).	171
85	Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).	171
86	Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.	171
87	Muteks, semafor, monitor jako narzędzia synchronizacji procesów.	171
88	Pamięć wirtualna i mechanizm stronicowania.	171
89	Systemy plikowe - organizacja fizyczna i logiczna (na przykładzie wybranego systemu uniksopodobnego).	171
90	Model ISO OSI. Przykłady protokołów w poszczególnych warstwach.	171
91	Adresowanie w protokołach IPv4 i IPv6.	172
91.1	Adresowanie w IPv4.	172
92	Najważniejsze procesy zachodzące w sieci komputerowej od momen- tu wpisania adresu strony WWW do wyświetlenia strony w prze- glądarce (komunikat HTTP, segment TCP, system DNS, pakiet IP, ARP, ramka).	176
93	Działanie przełączników Ethernet, sieci VLAN, protokół STP.	176
94	Rola routerów i podstawowe protokoły routingu (RIP, OSPF).	176
95	Szyfrowanie z kluczem publicznym, podpis cyfrowy, certyfikaty.	176
96	Wirtualne sieci prywatne, protokół IPsec.	176

Matematyczne podstawy informatyki

1 Zasada indukcji matematycznej.

Zadanie 1.1 *Teza:*

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Pierwszy krok indukcyjny zachodzi.

2. (A) **Założenie indukcyjne:** $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(B) **Teza indukcyjna:** $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Z założenia indukcyjnego:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Zatem $(A) \Rightarrow (B)$. Na mocy zasady indukcji matematycznej **teza jest prawdziwa**.

2 Porządki częściowe i liniowe. Elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.

Zadanie 2.1 *Relacja częściowego porządku. Sprawdź, czy relacja podzielności*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$$

jest relacją częściowego porządku.

1. **Zwrotność:** $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x|x$

2. **Przechodność:**

$$\left. \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y \Leftrightarrow x * k = y, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y|z \Leftrightarrow y * l = z, \quad l \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} x * (k * l) = z, \quad (k * l) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

3. **Antysymetryczność:**

$$\left. \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y \Leftrightarrow x \leq y \\ y\mathcal{R}x \Leftrightarrow y|x \Leftrightarrow y \leq x \end{array} \right\} x = y$$

Zadanie 2.2 *Relacja liniowego porządku. Sprawdź, czy relacja słabej nierówności*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$$

jest relacją liniowego porządku.

1. **Zwrotność:** $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x = x \Rightarrow x \leq x$

2. **Przechodność:**

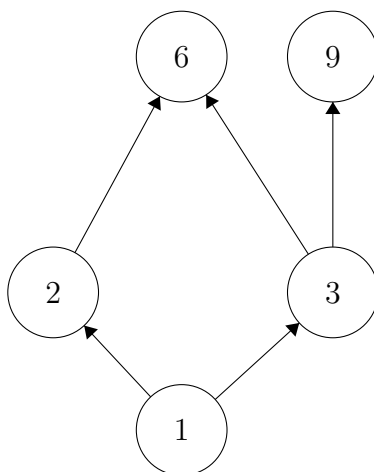
$$\left. \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y \\ y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y \leq z \end{array} \right\} x \leq z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

3. **Antysymetryczność:**

$$\left. \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y \\ y\mathcal{R}x \Leftrightarrow y \leq x \end{array} \right\} x = y$$

4. **Spójność:** $\forall x, y : x \leq y \vee y \leq x$

Zadanie 2.3 Wyznacz elementy maskymalne, minimalne, najmiejszy, największy w relacji podzielności dla zbioru $\{1, 2, 3, 6, 9\}$.



Element największy: brak

Element najmniejszy: 1

Elementy maksymalne: 6,9

Element minimalny: 1

3 Relacja równoważności i zbiór ilorazowy.

Zadanie 3.1 Sprawdź, czy relacja modulo trzy:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv_3 y$$

jest relacją równoważności. Jeśli tak, wyznacz klasy abstrakcji.

1. **Zwrotność:** $x \equiv_3 x$
2. **Symetryczność:** $x \equiv_3 y \Rightarrow y \equiv_3 x$
3. **Przechodność:**

$$x = 3k + r_x, \quad y = 3l + r_y, \quad z = 3m + r_z, \quad k, l, m \in \mathbb{Z}$$
$$\left. \begin{array}{l} x \equiv_3 y \Rightarrow r_x = r_y \\ y \equiv_3 z \Rightarrow r_y = r_z \end{array} \right\} r_x = r_z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

Klasy abstrakcji:

$$\begin{aligned} [0]_{\mathcal{R}} &= \{0, 3, 6, 9, \dots\} = 3 * k, k \in \mathbb{N}_0 \\ [1]_{\mathcal{R}} &= \{1, 4, 7, 10, \dots\} = 3 * k + 1, k \in \mathbb{N}_0 \\ [2]_{\mathcal{R}} &= \{2, 5, 8, 11, \dots\} = 3 * k + 2, k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Zbiór ilorazowy: $X/\mathcal{R} = \{[0]_{\mathcal{R}}, [1]_{\mathcal{R}}, [2]_{\mathcal{R}}\}$

4 Metody dowodzenia twierdzeń: wprost, nie wprost, przez kontrapozycję.

Zadanie 4.1 Dowód wprost. Udowodnij, że liczba $6^{100} - 2 * 6^{99} + 10 * 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Dowód wprost ma postać:

Jeżeli ... założenie ..., to ... teza

W naszym przypadku:

Jeżeli liczba ma postać $6^{100} - 2 * 6^{99} + 10 * 6^{98}$, to jest podzielna przez 17.

Rozpisujemy z założenia:

$$6^{100} - 2 * 6^{99} + 10 * 6^{98} = 6^{98}(6^2 - 2 * 6 + 10)6^{98}(36 - 12 + 10) = 6^{98}(34) = 6^{98} * 2 * 17$$

Teza jest prawdziwa.

Zadanie 4.2 Dowód nie wprost. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Zakładamy, że teza jest fałszywa, to znaczy że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna. Zatem z definicja można ją zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, to znaczy **nieskracalnego** ułamka $\frac{p}{q}, q \neq 0$.

Skoro $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, to $2 = \frac{p^2}{q^2}$, a zatem:

$$2q^2 = p^2$$

Z czego wynika, że p^2 , a tym samym p , jest liczbą parzystą. Możemy zatem zapisać $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$\begin{aligned} p^2 &= 4k^2 \\ 2q^2 &= 4k^2 \\ q^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Z czego wynika, że q^2 oraz q są liczbami parzystymi. Tak więc obie liczby p i q są parzyste, co **przeczy założeniu, że iloraz $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym** - można go skrócić przez 2. Otrzymaliśmy sprzeczność, co oznacza, że nasze początkowe przypuszczenie jest fałszywe - $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

5 Metody numeryczne rozwiązywania równań nieliniowych: bisekcji, siecznych, Newtona.

Zadanie 5.1 Obliczyć metodą bisekcji 3 kolejne przybliżenia rozwiązania równania $x^3 + x + 1 = 0$ w przedziale $[-2, 2]$.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + x + 1, \quad a_0 = -2, b_0 = 2 \\c_0 &= \frac{-2 + 2}{2} = 0, \quad f(0) = 1, \quad a_1 = -2, b_1 = 0 \\c_1 &= \frac{-2 + 0}{2} = -1, \quad f(-1) = -1, \quad a_2 = -1, b_2 = 0 \\c_2 &= \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$c_2 = -\frac{1}{2}$ stanowi trzecie przybliżenie rozwiązania (x_0).

Zadanie 5.2 Obliczyć metodą siecznych 3 kolejne przybliżenia rozwiązania równania $2x^2 - 3x - 10$ w przedziale $[2, 4]$.

$$\begin{aligned}x_0 &= 2, \quad x_1 = 4 \\f(2) &= 2 * 4 - 3 * 2 - 10 = 8 - 6 - 10 = -8, \quad f(4) = 2 * 16 - 3 * 4 - 10 = 32 - 12 - 10 = 10 \\x_2 &= 2 - \frac{f(4)(4 - 2)}{f(4) - f(2)} = 2 - \frac{10 * 2}{10 + 8} = 2 - \frac{20}{18} = \frac{8}{9}\end{aligned}$$

itd.

Zadanie 5.3 Wykonać dwie iteracje metody Newtona dla wielomianu $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - 2$ i punktu początkowego $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned}
p(x) &= 4x^3 - 2x^2 - 2, \quad p'(x) = 12x^2 - 4x, \quad x_0 = 1 \\
x_1 &= -1 - \frac{p(-1)}{p'(-1)} = -1 - \frac{-4 - 2 - 2}{12 + 4} = -1 + \frac{8}{16} = -\frac{1}{2} \\
x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\frac{-1}{2} - \frac{1}{2} - 2}{3 + 2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

6 Rozwiązywanie układów równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa, metody iteracyjne Jacobiiego i Gaussa-Seidla.

6.1 Metoda eliminacji Gaussa

Obliczając rząd macierzy metodą Gaussa należy za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzić macierz do macierzy schodkowej. Wtedy wszystkie niezerowe wiersze są liniowo niezależne i można łatwo odczytać rząd macierzy.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-2w_1, w_3+w_1, w_4-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{w_4-w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4-w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metody iteracyjne

Ogólna postać metody iteracyjnej:

$$Ax = b$$

$$Qx^{n+1} = (Q - A)x^n + b = \tilde{b}$$

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + (-2)x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (-1)x_2 + (-4)x_3 = 0 \end{cases}$$

6.2 Metoda iteracyjna Jacobiego

6.2.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^N) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^N - 2x_1^N) \end{cases}$$

6.2.2 Macierzowo

$$Q = D \quad (\text{diagonalna})$$

6.3 Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

6.3.1 Algebraicznie

$$\begin{cases} x_1^{N+1} = \frac{1}{5}(10 + 2x_2^N - 3x_3^N) \\ x_2^{N+1} = \frac{1}{4}(-2x_1^N - 2x_3^{N+1}) \\ x_3^{N+1} = -\frac{1}{4}(x_2^{N+1} - 2x_1^{N+1}) \end{cases}$$

6.3.2 Macierzowo

$$Q = L + D \quad (\text{diagonalna i dolnotrójkątna})$$

7 Wartości i wektory własne macierzy: numeryczne algorytmy ich wyznaczania.

7.1 Metoda potęgowa.

Zadanie 7.1 Wykonaj dwa kroki metody potęgowej i wskaż przybliżoną największą wartość własną macierzy A przyjmując wektor startowy $x_0 = (011)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 30 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 30 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2} = \frac{x_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = Ay_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_2} = \frac{x_1}{\sqrt{313}} = \frac{1}{\sqrt{626}} \begin{bmatrix} -1 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ay_1 = \frac{1}{\sqrt{626}} \begin{bmatrix} -30 \\ 749 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Pierwsze przybliżenie:

$$\lambda_1 = \frac{\langle x_1, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (-1 * 0 + 1 * 25 + 0 * 1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (0 * 0 + 1 * 1 + 1 * 1)} = \frac{25}{2} = 12.5$$

Drugie przybliżenie:

$$\lambda_2 = \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{626}}\right)^2 (30 + 749 * 25 + 25 * 0)}{\left(\frac{1}{\sqrt{626}}\right)^2 (1 + 25 * 25)} = \frac{18755}{626} \approx 29.96$$

Fakt, że drugie przybliżenie jest dobre, możemy zweryfikować za pomocą **Koła Geszgorina** - własności własne macierzy powinny znajdować się wewnątrz okręgów o środkach wyznaczonych na osi x wartościami przekątnej w macierzy, o promieniach danych sumą modułów pozostałych elementów wierszy. Koło drugiego wiersza u nas: środek (30, 0), promień 6.

7.2 Odwrotna metoda potęgowa.

Zadanie 7.2 Dla macierzy z poprzedniego zadania wykonaj dwie iteracje odwrotnej metody potęgowej.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 30 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 30 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 26 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} \frac{24197}{4844155} \\ \frac{2758}{13833} \\ \frac{1516}{1113} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{\langle x_1, x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} = \frac{31}{42}, \quad \frac{1}{\lambda_2} \approx 1.9$$

Przybliżenia należą do koła Geszgorina wyznaczonego przez trzeci wiersz - środek (1, 0), promień 1.

7.3 Metoda QR.

Zadanie 7.3 Dla macierzy B wykonaj jeden krok metody QR wyznaczania wartości własnych. Jakie przybliżone wartości własne w ten sposób otrzymujemy?

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 30 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 30 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = [b_1 \ b_2], \quad Q = [q_1 \ q_2]$$

$$q_1 = \frac{b_1}{||b_1||_2} = \frac{b_1}{\sqrt{1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = b_2 - r_{12}q_1 = b_2 - \frac{\langle b_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{-4}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{||\tilde{q}_2||_2} = \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = [q_1 \ q_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = Q_1 R_1, \quad A_2 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \approx 4, \quad \lambda_2 \approx 0$$

8 Interpolacja wielomianowa: metody Lagrange'a i Hermite'a. Efekt Rungego.

8.1 Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Zadanie 8.1 Znaleźć wielomiany l_i i wzór Lagrange'a dla $n = 3$ i punktów

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

Rozwiązanie: Wielomiany l_i wyrażają się przez węzły tak:

1.

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6) \cdot 5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$

2. Stąd wynika, że

$$p(x) = l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 954l_3(x).$$

8.2 Interpolacja Hermite'a

Zadanie 8.2 Należy znaleźć wielomian interpolacyjny, przybliżający funkcję o

zadanych węzłach dwukrotnych: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
 $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 5$
 $f'(x_1) = 2$, $f'(x_2) = 6$

Rozwiązanie: Zapisuje się wartości w tabeli:

x_i	$f(x_i)$
1	3
1	3
3	5
3	5

Następnie w miejsce powtarzającego się wężła wstawia się wartości pochodnej, a w pozostałe miejsca (w tym przypadku jedno) wstawia się odpowiednią różnicę dzieloną:

x_i	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$
1	3	—
1	3	2
3	5	1
3	5	6

Następnie uzupełnia się do końca tabelę:

x_i	$f(x_i)$	$R_2(x_i)$	$R_3(x_i)$	$R_4(x_i)$
1	3	—	—	—
1	3	2	—	—
3	5	1	$-\frac{1}{2}$	—
3	5	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$

Zatem otrzymuje się wielomian:

$$w(x) = 3 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^2(x-3) = \frac{3}{2}x^3 - 8x^2 + \frac{27}{2}x - 4.$$

Łatwo sprawdzić, że interpoluje on dane punkty:

$$w(1) = \frac{3}{2} - 8 + \frac{27}{2} - 4 = 3$$

$$w'(1) = \frac{9}{2} - 16 + \frac{27}{2} = 2$$

$$w(3) = \frac{3}{2} \cdot 27 - 8 \cdot 9 + \frac{27}{2} \cdot 3 - 4 = 5$$

$$w'(3) = \frac{9}{2} \cdot 9 - 16 \cdot 3 + \frac{27}{2} = 6.$$

9 Zmienne losowe dyskretne. Definicje i najważniejsze rozkłady.

9.1 Rozkład dwumianowy

Zadanie 9.1 Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy ($X \sim \text{Bin}(n, p)$) gdzie n - ilość prób, p - prawdopodobieństwo sukcesu. Ponadto wiemy, że $E(X) = np$ oraz $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Rozwiązanie: Mamy $X \sim \text{Bin}(n = 4, p = \frac{1}{2})$ oraz $k = 2$, więc

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \text{Var}(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

9.2 Rozkład geometryczny

Zadanie 9.2 Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z $p = \frac{1}{2}$. Wzór na prawdopodobieństwo $P(X = k) = (1-p)^{(k-1)} p$ oraz mamy $E(X) = \frac{1}{p}$, $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$. Prawdopodobieństwo że pierwszy orzeł wypadnie w 4 rzucie:

$$P(X = 4) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(4-1)} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

9.3 Rozkład Poissona

Zadanie 9.3 Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 2, 4$. Prawdopodobieństwo, że student będzie nieobecny w ciągu semestru:

1. mniej niż 2 razy:

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \\ &= e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^0}{0!} + e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^1}{1!} = e^{-2,4} + 2,4 \cdot e^{-2,4}. \end{aligned}$$

2. więcej niż 5 razy (jedenminus prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego):

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5) = \\ &= 1 - e^{-2,4} - e^{-2,4} \cdot 2,4 - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^2}{2} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^3}{6} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^4}{24} - \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^5}{120}. \end{aligned}$$

10 Zmienne losowe ciągłe. Definicje i najważniejsze rozkłady.

10.1 Rozkład jednostajny

Zadanie 10.1 Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[2, 6]$. Wykonaj polecenia:

1. zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej X
2. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [3, 3.5]$
3. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in (3, 3.5)$

Rozwiązanie:

1. wzór na gęstość zmiennej losowej X to

$$\chi_{[2,6]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [2, 6] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [2, 6] \end{cases}$$

2. prawdopodobieństwo zdarzenia, że $X \in [3, 3.5]$ to

$$P(X \in [3, 3.5]) = \int_3^{3.5} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}(3.5 - 3) = \frac{1}{8}$$

3. prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in (3, 3.5)$ to

$$P(X \in (3, 3.5)) = P(X \in [3, 3.5]) = \frac{1}{8}$$

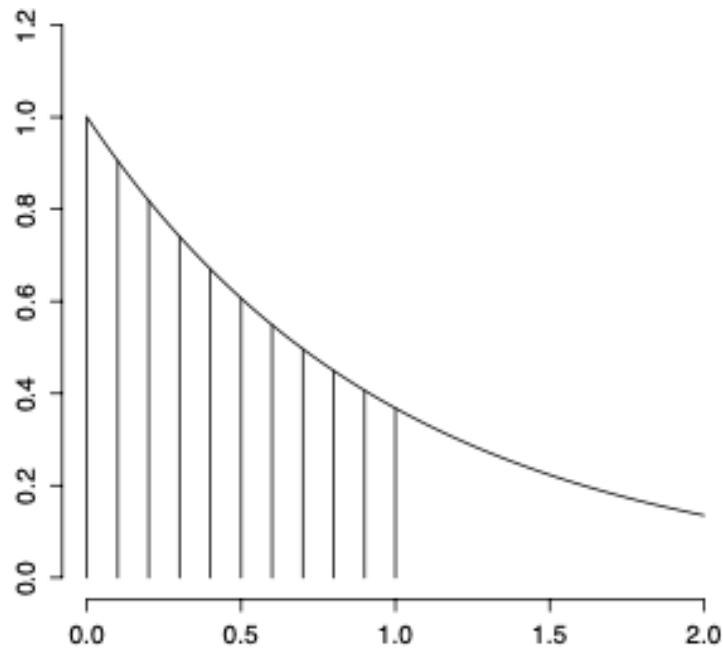
10.2 Rozkład wykładniczy

Zadanie 10.2 Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Wykonaj polecenia:

1. narysuj gęstość/ zapisz wzór na gęstość zmiennej losowej X
2. na powyższym rysunku przedstaw prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$
3. oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$

Rozwiązanie:

Punkty 1 i 2:



Punkt 3 - prawdopodobieństwo zdarzenia że $X \in [0, 1]$ wynosi

$$P(X \in [0, 1]) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-1}$$

10.3 Rozkład normalny

Zadanie 10.3 Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach $\mu = 0$ oraz $\sigma = 1$. Podaj prawdopodobieństwo, że X osiąga wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

Wykres tej funkcji jest parzysty, a pole całego wykresu wynosi 1 więc z połowy jest $\frac{1}{2}$.

$$P(X > 0) = \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

10.4 Rozkład Gamma, Wzór Gamma-Poisona

Zadanie 10.4 *Kompilacja programu składa się z 3 części przetwarzanych przez kompilator sekwencyjnie, jedna po drugiej. Czas przetwarzania każdej z części ma rozkład wykładniczy ze średnim czasem 5 minut, niezależnym od czasu przetwarzania pozostałych części.*

1. oblicz wartość oczekiwaną i wariancję całkowitego czasu kompilacji
2. oblicz prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut.

Rozwiązanie:

Całkowity czas kompilacji opisuje zmienna losowa o rozkładzie *Gamma* ($T \sim \Gamma(\alpha = 3, \lambda = \frac{1}{5})$). Wartość oczekiwana i wariancja całkowitego czasu kompilacji to

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{3}{\frac{1}{5}} = 15$$

$$Var(x) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{3}{\frac{1}{25}} = 75$$

Prawdopodobieństwo, że cały proces kompilacji zostanie przeprowadzony w czasie mniejszym niż 12 minut liczymy korzystając z formuły Gamma-Poisona.

$$P(T < t) = P(X \geq \alpha),$$

gdzie $X \sim Poisson(\lambda * t = \frac{1}{5} * 12 = 2.4)$ oraz $\alpha = 3$, $t = 12$. Mamy więc:

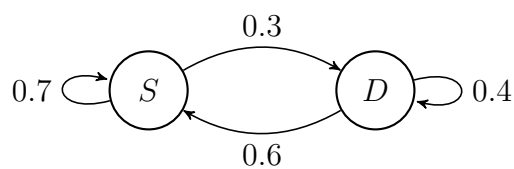
$$P(T < 12) = P(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - F_X(2) = 1 - 0.5697 = 0.43$$

11 Łącuchy Markowa. Rozkład stacjonarny.

Zadanie 11.1 W pewnym mieście każdy dzień jest słoneczny albo deszczowy. Po dniu słonecznym dzień słoneczny następuje z prawdopodobieństwem 0.7, a po dniu deszczowym z prawdopodobieństwem 0.4.

1. Narysuj łańcuch markowa oraz wyznacz macierz przejścia dla niego.
2. W poniedziałek padało. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.
3. Meteorolodzy przewidują 80% szans na deszcz w poniedziałek. Stwórz prognozę na wtorek, środę i czwartek.
4. Znajdź rozkład stacjonarny.

1. Łańcuch Markowa:



Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

2.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}$$

3.

Wtorek:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix}$$

Środa:

$$\begin{bmatrix} 0.46 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix}$$

Czwartek:

$$\begin{bmatrix} 0.538 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5614 & 0.4386 \end{bmatrix}$$

4. Macierz przejść:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi P = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 & 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

12 Testy statystyczne: test z, test t-Studenta, test chi-kwadrat.

Generalnie:

- Z-testów używamy do sprawdzenia czy testowana próba pasuje do zadanej populacji lub do porównywania dwóch **dużych** ($n > 30$) prób
- T-testów używamy do porównywania dwóch **małych** ($n < 30$) prób testowych ze sobą
 - Próby mogą być niezależne - np. wyniki sprawdzianów w dwóch grupach
 - Mogą być również zależne (dotyczyć jednej i tej samej grupy) - np. waga przed zastosowaniem diety i po
 - Może również służyć do porównywania próby do zadanej wartości (np. średniej) - podobnie jak Z-testy
- Chi-kwadrat używamy do ustalania **goodness of fit** dla próbki względem populacji lub do zbadania niezależności

12.1 Z-test

Zadanie 12.1 Inżynier jakości znajduje 10 wadliwych produktów w próbie 500 egzemplarzy pewnego komponentu od wytwórcy A. Wśród 400 egzemplarzy od wytwórcy B znajduje 12 wadliwych. Firma komputerowa, korzystająca z tych komponentów twierdzi, że jakość wyrobów od obu producentów jest taka sama. Sprawdź, czy na 5% poziomie istotności istnieją wystarczające dowody do odrzucenia tego twierdzenia.

H_0 : Jakość wyrobów obu producentów jest taka sama

H_a : Jakość wyrobów obu producentów jest różna

Obliczamy proporcje dla obu prób:

$$p_1 = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

$$p_2 = \frac{12}{400} = \frac{3}{100}$$

oraz proporcję dla próby połączonej:

$$\bar{p} = \frac{10 + 12}{500 + 400} = \frac{11}{450}$$

Następnie używamy wzoru:

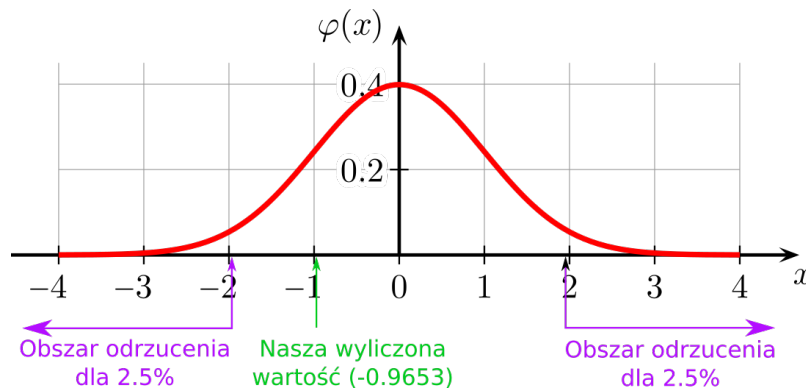
$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$Z = \frac{\frac{1}{50} - \frac{3}{100}}{\sqrt{\frac{11}{450}(1 - \frac{11}{450})(\frac{1}{500} + \frac{1}{400})}} = \frac{-\frac{1}{100}}{\sqrt{\frac{4829}{45000000}}} \approx \textbf{-0.9653}$$

W naszej hipotezie mamy pytanie o równość, więc bierzemy pod uwagę obie końcówki przedziału. Mamy sprawdzić prawdziwość naszej hipotezy na 5% poziomie istotności, więc na każdą końcówkę mamy po 2.5%.

Odczytujemy z tablic dla Z-testów (tablica rozkładu normalnego) wartość dla $1 - 0.025 = 0.975$ i jest to **1.959964**

Następnie odczytujemy z tablic (lub wyliczamy, jeżeli nie mamy tablic z wartościami dla $x < 0.5$) wartość dla 0.025 i jest to **-1.959964** (po prostu wartość przeciwna do poprzedniej, ponieważ funkcja gęstości rozkładu normalnego jest symetryczna względem środka)



Ponieważ nasza wartość nie mieści się w obszarze odrzucenia, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

12.2 T-testy

Zadanie 12.2 Posiadacz konta internetowego, w długim okresie czasu, w trakcie logowania pisze swój login i hasło z przerwami pomiędzy kolejnymi wciśnięciami klawiszy wynoszącymi 0.2s. Pewnego dnia zarejestrowane logowanie na to konto z prawidłowym hasłem, przy czym czasy odstępów pomiędzy wciśnięciami kolejnych klawiszy wynosiły:

.24, .22, .26, .34, .35, .32, .33, .29, .19, .36, .30, .15, .17, .20, .28, .40, .37, .27 sekund

Na 5% poziomie ufności zweryfikuj, czy dane te mogą być dowodem na nieautoryzowany dostęp do konta?

H_0 : Dostęp do konta jest autoryzowany

H_a : Dostęp do konta jest nieautoryzowany

Korzystamy ze wzoru:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

gdzie:

- \bar{x} - średnia z badanej próby
- μ_0 - zakładana średnia
- σ - odchylenie standardowe z próby
- n - wielkość próby

W naszym przypadku:

$$\bar{x} \approx 0.28 \tag{1}$$

$$\mu_0 = 0.2 \tag{2}$$

$$\sigma \approx 0.07324 \tag{3}$$

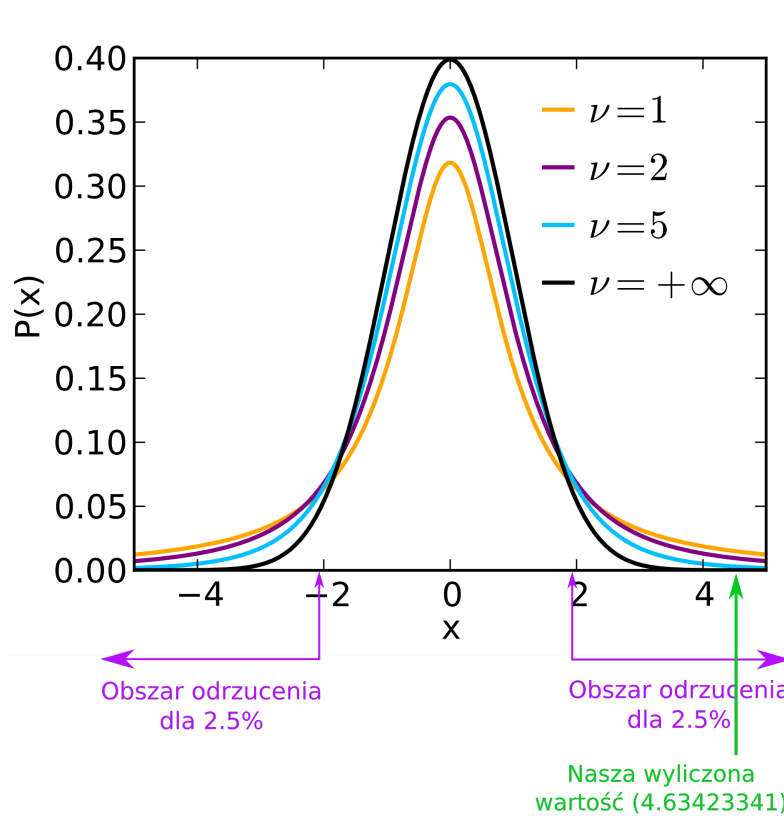
$$n = 18 \tag{4}$$

Podstawiając do wzoru mamy:

$$T = \frac{0.28 - 0.2}{0.07324} \sqrt{18} \approx \mathbf{4.63423341}$$

Ilość naszych stopni swobody to $n-1$ więc w naszym przypadku 17

Odczytujemy z tablic rozkładu t-studenta wartość odpowiadającą 2.5% poziomu ufności ($5\%/2$) oraz 17 stopniom swobody i jest to **2.11** oraz wyliczamy tę wartość dla drugiego krańca przedziału (podobnie jak w poprzednim przypadku rozkład t-studenta ma symetryczny wykres względem środka), która jest równa **-2.11**



Ponieważ $4.63423341 > 2.11$ mamy podstawy, aby odrzucić hipotezę zerową i przyjąć hipotezę alternatywną

12.3 Testy Chi-kwadrat

Zadanie 12.3 *Producent kostki do gry deklaruje, że oczka na jego niesprawiedliwej kostce wypadają z następującym prawdopodobieństwem:*

- 1 oczko - $\frac{1}{2}$
- 2 oczka - $\frac{1}{4}$
- 3 oczka - $\frac{1}{25}$
- 4 oczka - $\frac{1}{50}$
- 5 oczek - $\frac{1}{25}$
- 6 oczek - $\frac{3}{20}$

Dla 100 rzutów zaobserwowano natomiast następujące wyniki:

- 1 oczko - 55 razy
- 2 oczka - 20 razy
- 3 oczka - 6 razy
- 4 oczka - 3 razy
- 5 oczek - 2 razy
- 6 oczek - 14 razy

*Przeprowadź test zgodności (*goodness of fit*) χ^2 i rozstrzygnij na poziomie 5% istotności, czy producent ma rację*

Wyliczamy wartości oczekiwane dla każdego przedziału i zgodnie z **rule of thumb** w razie potrzeby je łączymy tak, aby dla każdego z nich wartość była ≥ 5

n	Obs_n	Exp_n	x	Obs_x	Exp_x
1	55	50	1	55	50
2	20	25	2	20	25
3	6	4	3	11	10
4	3	2			
5	2	4			
6	14	15	4	14	15

Następnie, aby obliczyć χ^2 stosujemy następujący wzór (N to liczba naszych x):

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^N \frac{(Obs_x - Exp_x)^2}{Exp_x}$$

W naszym przypadku $\chi^2 \approx 1.6666$

Stopnie swobody obliczamy ze wzoru **N - 1**, gdzie N to liczba naszych x-ów. W naszym przypadku liczba stopni swobody jest więc równa **3**.

Następnie odczytujemy z tablicy χ^2 wartość dla 5% istotności przy 3 stopniach swobody. Jest ona równa **7.82**

$1.6666 < 7.82$ stąd nie mamy więc podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej

13 Wzór Bayesa i jego interpretacja.

Zadanie 13.1 W firmie IT 20% wytwarzanych modułów przechodzi specjalny proces inspekcji. Z danych historycznych wiadomo, że każdy moduł poddany inspekcji nie ma defektów z prawdopodobieństwem 0.95. Dla modułu nie poddanego procesowi inspekcji prawdopodobieństwo to wynosi jedynie 0.7. Klient znalazł defekt w module. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moduł ten przeszedł przez proces inspekcji?

Korzystamy oczywiście ze wzoru Bayesa:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad \text{przy } P(B) > 0$$

I - moduł przeszedł przez inspekcję

D - moduł ma defekt

$$P(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad P(\bar{I}) = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{D}|I) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \quad P(D|I) = \frac{1}{20}$$

$$P(\bar{D}|\bar{I}) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad P(D|\bar{I}) = \frac{3}{10}$$

$$P(I|D) = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D)} = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot P(\bar{I})} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{1}{25}$$

Prawdopodobieństwo, że moduł, w którym znalazł się defekt przeszedł proces inspekcji wynosi $\frac{1}{25}$.

14 Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(Z_m, +, *)$ w zależności od liczby naturalnej m . Rozszerzony algorytm Euklidesa.

Zadanie 14.1 *Oblicz element odwrotny do 7 w Z_{19} .*

$NWD(7, 19) = 1$, zatem element odwrotny istnieje

$$19/7 = 2 \text{ r } 5$$

$$7/5 = 1 \text{ r } 2$$

$$5/2 = 2 \text{ r } 1$$

Zatem:

$$5 = 19 - 2 * 7$$

$$2 = 7 - 5 = 7 - (19 - 2 * 7) = -19 + 3 * 7$$

$$1 = 5 - 2 * 2 = 19 - 2 * 7 - 2 * (-19 + 3 * 7) = 3 * 19 - 8 * 7$$

Współczynnik przy 7: -8 . $-8 \bmod 19 = 11$

Liczbą odwrotną do 7 w Z_{19} jest 11

Zadanie 14.2 *Oblicz współczynniki Bézouta dla 240 i 46.*

$$240/46 = 5 \text{ r } 10$$

$$46/10 = 4 \text{ r } 6$$

$$10/6 = 1 \text{ r } 4$$

$$6/4 = 1 \text{ r } 2$$

$$4/2 = 2 \text{ r } 0$$

i	r_i	d_i	x_i	y_i
0	240	-	1	0
1	46	5	0	1
2	10	4	$1 - 5 * 0 = 1$	$0 - 5 * 1 = -5$
3	6	1	$0 - 4 * 1 = -4$	$1 - 4 * -5 = 21$
4	4	1	$1 - 1 * -4 = 5$	$-5 - 1 * 21 = -26$
5	2	2	$-4 - 1 * 5 = -9$	$21 - 1 * -26 = 47$

$$-9 * 240 + 47 * 46 = 2 = NWD(240, 46)$$

Współczynniki Bézouta wynoszą -9 i 47.

Zadanie 14.3 Pokaż, że jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ i $d = NWD(a, b)$ to $\exists m, n : d = ma + nb$.

Mamy zbiór $S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\}$. S nie jest puste, zatem (z zasady dobrego uporządkowania) istnieje jego najmniejszy element d .

Pokażmy, że d jest dzielnikiem a .

$$\begin{aligned} a &= dq + r \\ r &= a - dq \\ r &= a - q(ma + nb) \\ r &= (1 - qm)a - qnb \\ r &= am' + bn' \end{aligned}$$

Zatem $r = 0$ lub $r \in S$. Skoro r jest resztą z dzielenia a przez d , to $r < d$. d jest najmniejszym elementem S , zatem $r = 0$, zatem $d|a$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla b .

Pokażmy, że $d = NWD(a, b)$. Niech c będzie wspólnym dzielnikiem a i b . Zatem $a = cq_1$ i $b = cq_2$.

$$\begin{aligned} d &= ma + nb \\ d &= cq_1a + cq_2b \\ d &= c(q_1a + q_2b) \end{aligned}$$

Zatem $c|d$, zatem $c \leq d$, zatem $d = NWD(a, b)$

15 Ortogonalność wektorów w przestrzeni R_n ; związki z liniową niezależnością. Metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.

Zadanie 15.1 *Udowodnij, że każdy ortogonalny układ wektorów jest liniowo niezależny.*

Mamy układ wektorów ortogonalnych x_1, x_2, \dots, x_n . Zatem

$$\forall i, j : i \neq j \quad x_i \cdot x_j = 0$$

oraz

$$\forall i \quad x_i \cdot x_i > 0$$

Istnieją skalary a_1, a_2, \dots, a_n , takie, że:

$$a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \dots + a_n * x_n = 0$$

Powyższe równanie pomnożmy skalarnie przez x_1 .

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 + a_2 * x_2 \cdot x_1 + \dots + a_n * x_n \cdot x_1 = 0$$

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$a_1 * x_1 \cdot x_1 = 0$$

Skoro $x_1 \cdot x_1 > 0$, to $a_1 = 0$. Powyższe działania powtórzmy dla pozostałych wektorów.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Zatem układ wektorów jest liniowo niezależny.

Zadanie 15.2 *Dokonaj ortonormalizacji wektorów w \mathbb{R}_3 :*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymane wektory podzielmy przez ich długość:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

16 Liczby Stirlinga I i II rodzaju i ich interpretacja.

16.1 Liczby Stirlinga I rodzaju

Uzasadnij, że $C(4,2)=11$

Mamy następujące permutacje dwucykłowe zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} &(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3) \\ &(1)(2\ 3\ 4), (1)(2\ 4\ 3), (2)(1\ 3\ 4) \\ &(2)(1\ 4\ 3), (3)(1\ 2\ 4), (3)(1\ 4\ 2) \\ &(4)(1\ 2\ 3), (4)(1\ 3\ 2) \end{aligned}$$

16.2 Liczby Stirlinga II rodzaju

Uzasadnij, że $S(4,2) = 7$

Zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ możemy podzielić na dwa bloki w następujący sposób

$$\begin{aligned} &\{1\}, \{2, 3, 4\} ; \{2\}, \{1, 3, 4\} ; \{3\}, \{1, 2, 4\} \\ &\{4\}, \{1, 2, 3\} ; \{1, 2\}, \{3, 4\} ; \{1, 3\}, \{2, 4\} \\ &\{1, 4\}, \{2, 3\} \end{aligned}$$

17 Twierdzenia Eulera i Fermata; funkcja Eulera.

17.1 Funkcja Eulera

- $\varphi(2025) = \varphi(3^4 \cdot 5^2) = \varphi(3^4) \cdot \varphi(5^2) = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 1080$
- $\varphi(1001) = \varphi(7 \cdot 11 \cdot 13) = \varphi(7) \cdot \varphi(11) \cdot \varphi(13) = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 660$
- $\varphi(1980) = \varphi(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(11) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 480$

17.2 Twierdzenie Fermata

17.3 Twierdzenie Eulera

- Oblicz $2^{64} \pmod{99}$
NWD(2,99)=1 zatem możemy stosować Twierdzenie Eulera
 $\varphi(99) = \varphi(11 \cdot 3^2) = \varphi(11) \cdot \varphi(3^2) = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$
Zatem z Twierdzenia Eulera
 $2^{60} \equiv 1 \pmod{99}$
 $2^{64} = 2^{60} \cdot 2^4 \equiv 2^4 \pmod{99} = 16$
- Oblicz $99^{400} \pmod{10^3}$
NWD(99,1000)=1 zatem możemy stosować Twierdzenie Eulera
 $\varphi(10^3) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^3) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 4 = 400$
Zatem z Twierdzenia Eulera
 $99^{400} \equiv 1 \pmod{10^3}$

18 Konfiguracje i t-konfiguracje kombinatoryczne.

Zadanie 18.1 Mamy dziewięć różnych 8-elementowych podzbiorów zbioru \mathbb{N}_{12} . Każdy element ze zbioru \mathbb{N}_{12} należy do tej samej liczby r podzbiorów zbioru \mathbb{N}_{12} .

1. Ile wynosi r ?
2. Czy jest to możliwe dla dziewięciu 7-elementowych podzbiorów?

Rozwiązanie:

1. $k = 8 \quad n = 12$

b - liczba k -elementowych podzbiorów $X \quad b = 9$

Szukamy ile wynosi liczba takich podzbiorów korzystając ze wzoru $b = \frac{n \cdot r}{k}$

$$r = \frac{9 \cdot 8}{12} = 6$$

2. $k = 7 \quad b = 9 \quad n = 12$

Czy zachodzi $k | n \cdot r$?

$$r = \frac{b \cdot k}{n} = \frac{9 \cdot 7}{12} = \frac{21}{4} \notin \mathbb{N}$$

Zatem nie jest to możliwe.

Zadanie 18.2 Dana jest 5-konfiguracja z parametrami $n=12$, $k=6$, $r_5 = 1$. Wyznacz wartości r_i , dla i -konfiguracji o tym samym n i k oraz $i=1,2,3,4$.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru: $r_{t-1} = r_t \cdot \frac{n-t+1}{k-t+1}$

$$\begin{aligned} r_4 &= r_5 \cdot \frac{12-5+1}{6-5+1} = \frac{8}{2} = 4 \\ r_3 &= r_4 \cdot \frac{12-4+1}{6-4+1} = 4 \cdot \frac{9}{3} = 12 \\ r_2 &= r_3 \cdot \frac{12-3+1}{6-3+1} = 12 \cdot \frac{10}{4} = 30 \\ r_1 &= r_2 \cdot \frac{12-2+1}{6-2+1} = 30 \cdot \frac{11}{5} = 66 \end{aligned}$$

$$r_1 : (12, 6, 66)$$

$$r_2 : (12, 6, 30)$$

$$r_3 : (12, 6, 12)$$

$$r_4 : (12, 6, 4)$$

Zadanie 18.3 *Czy może istnieć 3-konfiguracja o parametrach $n=15$, $k=6$ i $r_3=2$?*

$$r_2 = r_3 \cdot \frac{n-3+1}{k-3+1} = 2 \cdot \frac{15-3+1}{6-3+1} = 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$$

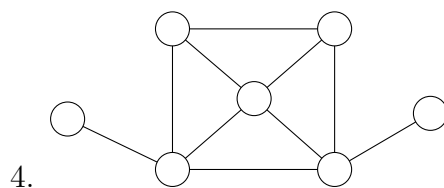
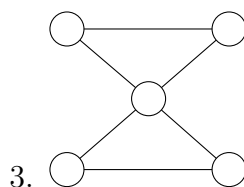
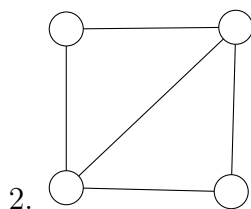
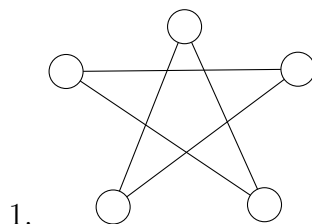
Zatem nie może istnieć taka konfiguracja.

19 Cykl Hamiltona, obwód Eulera, liczba chroma- tyczna - definicje i twierdzenia.

Zadanie 19.1 *Podaj przykład grafu, który:*

1. *Ma obwód eulera i cykl Hamiltona*
2. *ma cykl Hamiltona, ale nie ma obwodu Eulera*
3. *ma obwód Eulera, ale nie ma cyklu Hamiltona*
4. *nie ma ani cyklu Hamiltona, ani obwodu Eulera*

Rozwiązanie:

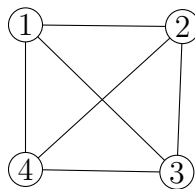


Zadanie 19.2 Określ liczbę chromatyczną:

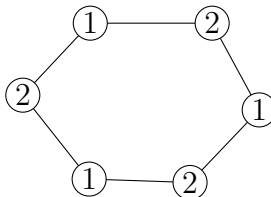
1. grafu zupełnego K_n
2. grafu cyklicznego C_{2r}
3. grafu cyklicznego C_{2kr+1}
4. drzewa

Rozwiązanie:

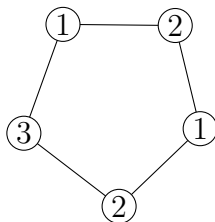
1. $\chi(X) = n$



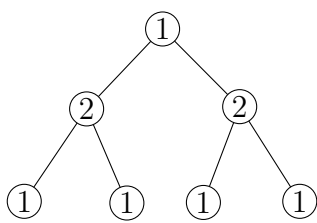
2. $\chi(X) = 2$



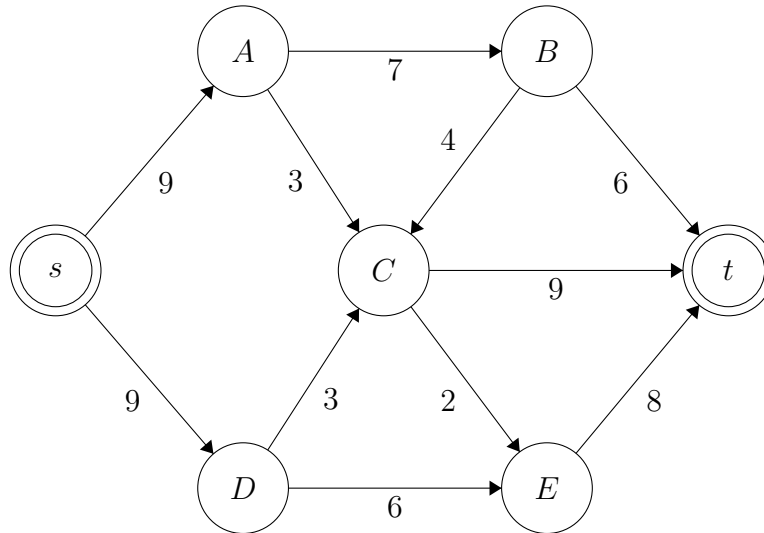
3. $\chi(X) = 3$



4. $\chi(X) = 2$



20 Algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu.



Weźmy sobie taką sieć przepływową. Chcemy wyznaczyć jej maksymalny przepływ. Musimy zacząć od jakiegoś (dowolnego) przepływu. Szukamy ścieżki roszerszającej, która połączy źródło s z ujściem t .

Na przykład może to być ścieżka: $P = \{s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t\}$.

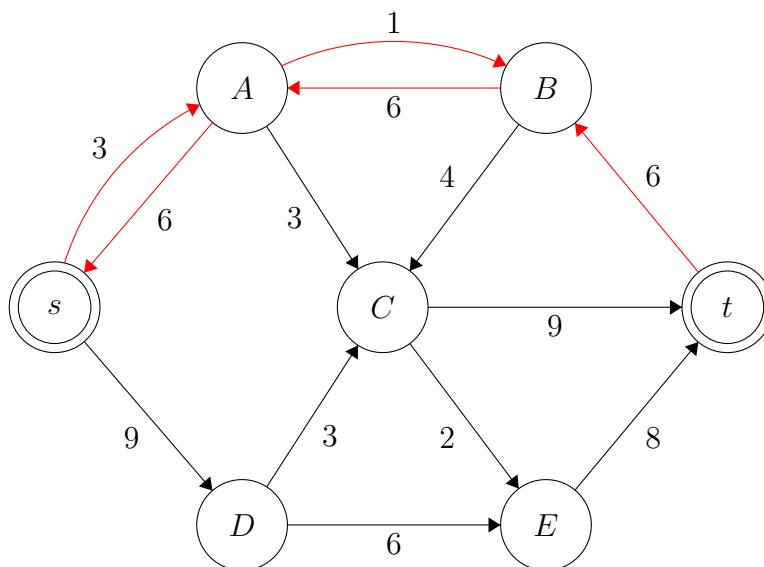
Na ścieżce p znajdują się trzy kanały sieci rezydualnej: (s, A) , (A, B) i (B, t) . Przepustowość rezydualna $c_f(p)$ ścieżki jest równa najmniejszej przepustowości rezydualnej jej kanałów, czyli przepustowości kanału $(B \rightarrow t)$, dla którego $c_f(B, t) = 6$. Zatem wzdłuż krawędzi ścieżki przepływ można zwiększyć o 6 jednostek, o tyle rośnie również przepływ sieciowy, czyli $|f_{nowy}| = |f_{stary}| + c_f(p) = 0 + 6 = 6$.

Budujemy sieć rezydualną. Zwiększenie przepływu w kanale sieci pierwotnej o $c_f(p)$ odpowiada zmniejszeniu przepustowości rezydualnej tego kanału. Jednocześnie wraz z pojawieniem się przepływu w kanale sieci pierwotnej powstaje kanał przeciwny w sieci rezydualnej o przepustowości rezydualnej równej przepływowi.

Przepustowość rezydualna kanału (s, A) wynosi 3 – oznacza to, iż kanałem tym można wciąż jeszcze przesłać trzy dodatkowe jednostki przepływu. W sieci rezydualnej pojawia się kanał przeciwny (A, s) o przepustowości rezydualnej $c_f(A, s) = 6$.

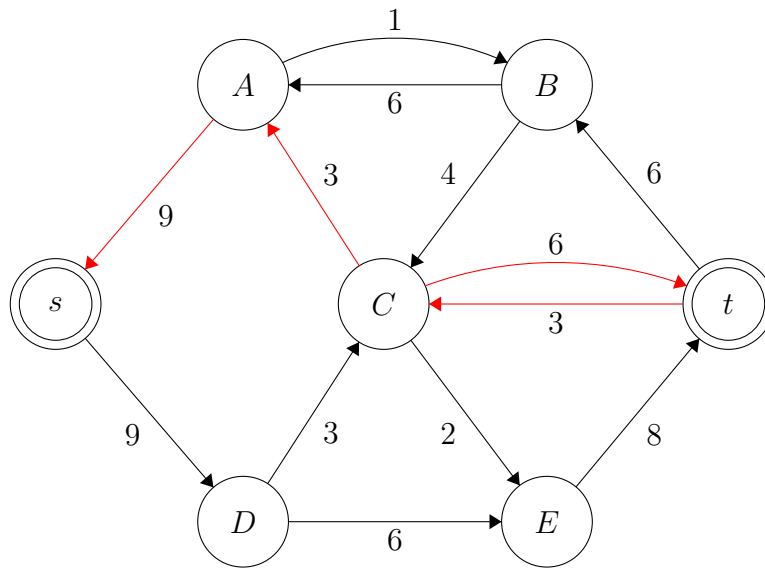
Kanał (A, B) może jeszcze przesłać 1 dodatkową jednostkę przepływu. Również tutaj pojawił się kanał przeciwny o przepustowości rezydualnej równej 6.

Kanał (B, t) przestał istnieć w sieci rezydualnej, ponieważ osiągnął już swoją maksymalną przepustowość – 6 jednostek przepływu. Nie może on być dalej wykorzystywany do powiększania przepływu. Na jego miejscu mamy jednak kanał przeciwny z przepustowością rezydualną równą 6.



W nowej sieci rezydualnej szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 3.$$



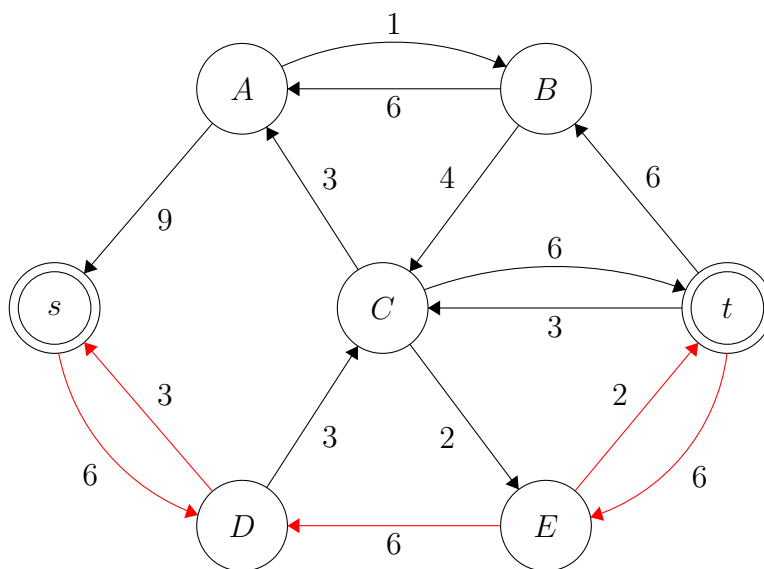
Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 6 + 3 = 9$$

i modyfikujemy przepustowości rezydualne krawędzi ścieżki rozszerzającej otrzymując nową sieć rezydualną. Znikają z niej kanały (s, A) i (A, C) – wykorzystały już swój potencjał zwiększania przepływu.

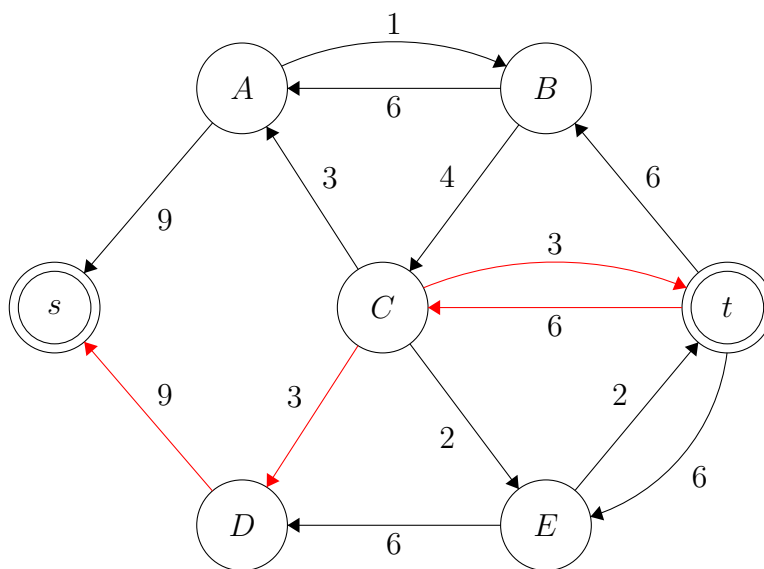
Szukamy kolejnej ścieżki rozszerzającej:

$$P = \{s \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 6$$



W nowej sieci rezydualnej zniknął kanał (D, E) .
 Wciąż jednakże możemy znaleźć nową ścieżkę rozszerzającą:

$$P = \{s \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow t\}, \quad c_f(p) = 3$$

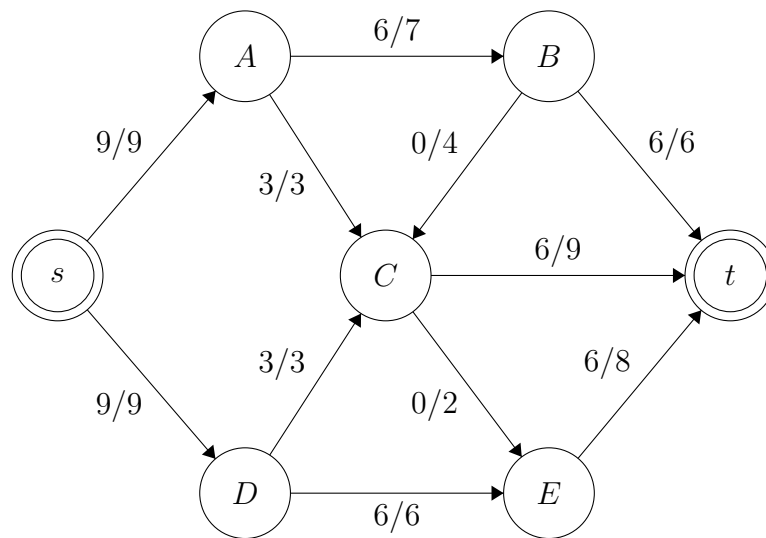


Przepływ zwiększamy:

$$|f| = 15 + 3 = 18.$$

Po zmodyfikowaniu sieci rezydualnej otrzymujemy nową sieć rezydualną. W tej sieci rezydualnej **nie znajdziemy już żadnej nowej ścieżki rozszerzającej** – ze źródła s nie wychodzi żaden kanał. Oznacza to zakończenie algorytmu, zatem znaleźliśmy przepływ maksymalny. Aby otrzymać sieć przepływową wystarczy od przepustowości kanałów odjąć otrzymane przepustowości rezydualne – dla nieistniejących kanałów ich przepustowość rezydualna wynosi 0.

Poniżej nasza sieć przepływowa z uzyskanym maksymalnym przepływem:



$$|f| = 18$$

21 Rozwiązywanie równan rekurencyjnych przy użyciu funkcji tworzących (generujących) oraz przy użyciu równania charakterystycznego.

21.1 Funkcja tworząca.

Przykład

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

$$u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n &= 1 + 1 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} (4u_{n-1} - 4u_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4u_{n-2} x^n = \\ &= 1 + x + 4x \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2} x^{n-2} = \\ &= 1 + x + 4x \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \\ &= 1 + x + 4x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - u_0 \right) - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \\ &= 1 + x - (4x) \cdot 1 + 4x \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 1 - 3x + (4x - 4x^2) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1 - 4x + 4x^2) = 1 - 3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1 - 4x + 4x^2) = 1 - 3x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{1 - 3x}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{1 - 3x}{(1 - 2x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste:

$$1 - 3x = A(1 - 2x) + B, \quad 1 = A + B, \quad -3 = -2A, \quad A = \frac{3}{2}, B = \frac{-1}{2}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n &= \frac{3}{2} * \frac{1}{1 - 2x} - \frac{1}{2} * \frac{1}{(1 - 2x)^2} = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1-1}{n} (2x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2-1}{n} (2x)^n = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 2^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1) \right) 2^n x^n \end{aligned}$$

Więc

$$u_n = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(n+1) \right) 2^n$$

21.2 Równanie charakterystyczne.

Przykład 1:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$$

Założmy, że istnieje rozwiązanie takie, że $a_n = t^n$.

$$t^{n+2} + t^{n+1} - 2t^n = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Nie jest to pierwiastek podwójny ($r_1 \neq r_2$), zatem wiemy, że:

$$\exists C, D : \quad a_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

Podstawiając:

$$a_n = C + D(-2)^n$$

Wyliczamy C i D na podstawie znanych pierwszych wyrazów ciągu:

$$a_0 = C + (-2)^0 D = C + D = 0$$

$$a_1 = C + (-2)^1 D = C - 2 * D = 1$$

$$C = \frac{1}{3}, \quad D = \frac{-1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3} = \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

Przykład 2.

$$a_0 = -2, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$r = r_1 = r_2 = 1$$

$$a_n = (C + Dn)r^n$$

$$a_0 = (C + D * 0) * 1^0 = C = -2$$

$$a_1 = (C + D * 1) * 1^1 = C + D = D - 2 = 1$$

$$C = -2, \quad D = 3$$

$$a_n = -2 + 3n$$

22 Ciąg i granica ciągu liczbowego, granica funkcji.

22.1 Obliczanie granicy ciągu

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ - mianownik dąży do ∞ więc całość dąży do 0

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[n]{10}$ - pierwiastek o coraz wyższym stopniu z jakiejś stałej dąży do 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{n^2+2n-5}{2n^2-n}$ - w przypadku takich ułamków dzielimy licznik i mianownik przez n w największej potęgze, który znajduje się w mianowniku $\frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{5}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}}$ co po skróceniu daje nam $\frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}}$. Teraz widzimy, że $\frac{2}{n}$, $\frac{5}{n^2}$ oraz $\frac{1}{n}$ zmierzają do 0, więc ostatecznie otrzymujemy $\frac{1}{2}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{n^2-2n}{13n+1}$ - na początku robimy tak jak w poprzednim przykładzie, czyli dzielimy licznik i mianownik przez n w największej potęgze z mianownika $\frac{\frac{n^2}{n} - \frac{2n}{n}}{\frac{13n}{n} + \frac{1}{n}}$ co po skróceniu daje $\frac{n-2}{13+\frac{1}{n}}$. Widzimy, że $\frac{1}{n}$ dąży do 0, więc całość możemy zapisać już jako $\frac{n-2}{13}$. Ponieważ licznik cały czas rośnie, a mianownik pozostaje stały to całość dąży do $+\infty$

22.2 Twierdzenie o dwóch ciągach

Używane aby wykazać zbieżność pewnego ciągu do granicy niewłaściwej wykorzystując inny (prostszy) ciąg

Zadanie 22.1 Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 \sin n - 5) \cdot n^3$

Korzystamy z faktu, że $\sin n \leq 1$ wtedy

$$(3 \sin n - 5) \cdot n^3 \leq (3 \cdot 1 - 5) \cdot n^3 \leq -2n^3 \leq -n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Więc zgodnie z twierdzeniem o 2 ciągach również $(3 \sin n - 5) \cdot n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

22.3 Twierdzenie o trzech ciągach

Używane aby wyznaczyć granicę właściwą pewnego ciągu korzystając z dwóch innych ciągów

Zadanie 22.2 Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-\cos n^2}{2+n \sin \sqrt{n+3n^2}}$

Podobnie jak poprzednio korzystamy z faktu, że $-1 \leq \sin x \leq 1$ oraz $-1 \leq \cos x \leq 1$ dla każdego naturalnego x

Wtedy $\frac{n^2+n-1}{2+n+3n^2} \leq \frac{n^2+n-\cos n^2}{2+n \sin \sqrt{n+3n^2}} \leq \frac{n^2+n+1}{2-n+3n^2}$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-1}{2+n+3n^2} = \frac{1}{3}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{2-n+3n^2} = \frac{1}{3}$ więc z twierdzenia o trzech ciągach wiemy również, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-\cos n^2}{2+n \sin \sqrt{n+3n^2}} = \frac{1}{3}$

22.4 Funkcje

Zadanie 22.3 Oblicz granice funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x+2} \right| & \text{dla } x \text{ mniejszego od } 0 \\ \sin x & \text{dla } x \text{ większego bądź równego } 0 \end{cases}$$

w punktach $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$ oraz w $+\infty$ i $-\infty$

Liczymy granice prawo i lewo stronne dla punktów, w których funkcja jest nie ciągła:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left| \frac{1}{x+2} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left| \frac{1}{x+2} \right| = +\infty$$

Ponieważ granice prawo i lewo stronne są sobie równe to granica w punkcie -2 istnieje i jest równa $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{1}{x+2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$$

Ponieważ granice prawo i lewo stronne nie są sobie równe to granica w punkcie 0 nie istnieje

W punkcie π nasza funkcja jest ciągła, więc jej granicę możemy obliczyć podstawiając π bezpośrednio do wzoru:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x+2} \right| = 0$ - mianownik jest coraz większy (biorąc pod uwagę jego wartość bezwzględną) więc funkcja dąży do 0

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ - nie istnieje, ponieważ $\sin x$ jest funkcją okresową i nie dąży do żadnej konkretnej wartości

Granice specjalne

Zadanie 22.4 Oblicz granicę funkcji $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5) + \ln(x+6)}{x+5}$

Skorzystamy z granic specjalnych $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5) + \ln(x+6)}{x+5} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sin(x+5)}{x+5} + \frac{\ln((x+5)+1)}{x+5}$$

Ponieważ granica dąży do -5 to wyrażenia w nawiasach dążą do 0 więc możemy zastosować wspomniane granice specjalne. Możemy to zapisać również jako:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \text{ z granic specjalnych } = 1 + 1 = 2$$

Reguła de L'Hospitala

Zadanie 22.5 Oblicz granicę funkcji $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 5x}$

Spróbujemy zastosować regułę de L'Hospitala. Aby to zrobić musimy sprawdzić czy granice funkcji z licznika i mianownika z osobna są równe 0 oraz czy funkcja z mianownika w otoczeniu x_0 nie jest równa 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x = 0$$

Możemy do tego zauważyć, że $x^2 + 5x$ w okolicach $x_0 \neq 0$ więc możemy zastosować regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x^2 + 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x + 5} = \frac{1}{5}$$

23 Ciągłość i pochodna funkcji. Definicja i podstawowe twierdzenia.

23.1 Ciągłość funkcji

Zad 1

Zadanie 23.1 Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Interesuje nas oczywiście punkt 0 i to dla niego musimy policzyć granicę (funkcja w pozostałych punktach jest ciągła, jako że składa się z funkcji elementarnych):

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ - możemy to zrobić z twierdzenia o 3 funkcjach:

Korzystając tradycyjnie z warunku $-1 \leq \sin x \leq 1$ możemy zauważyć, że:

$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ a z kolei $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ więc i $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Mamy więc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ więc ta funkcja jest ciągła

Zad 2

Zadanie 23.2 Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -x + 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Oczywiście tak jak i poprzednio interesuje nas punkt 0. Musimy policzyć granice lewo i prawo stronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2 = 2$$

Granice prawo i lewo stronne są sobie więc równe, ale nie są one równe wartości funkcji w badanym punkcie. Stąd też ta funkcja nie jest ciągła w punkcie 0.

Twierdzenie Darboux

Zadanie 23.3 Pokaż, że równanie $2^x = 4x$ ma dwa rozwiązania

Łatwo zauważyć oczywiście, że jednym z nich jest 4, ponieważ $2^4 = 16 = 4 \cdot 4$

Do pokazania, że funkcja ma jeszcze inny pierwiastek użyjemy twierdzenia Darboux. Przyjmijmy za $f(x) = 2^x - 4x$, która jak widać będzie się zerować w miejscach, które są rozwiązaniami naszego pierwotnego równania.

Zauważmy, że nasza funkcja jest ciągła. Teraz zbadajmy jakie ma wartości w punktach 0 i 1: $f(0) = 1$ i $f(1) = -2$. Znaki wartości funkcji są różne co zgodnie z twierdzeniem Darboux oznacza, że nasza funkcja pomiędzy 0 a 1 zeruje się, więc nasze oryginalne równanie ma tam jeszcze jedno rozwiązanie.

23.2 Pochodna

Istnienie pochodnej w punkcie z definicji

Zadanie 23.4 Zbadaj istnienie pochodnej funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

dla punktu $x_0 = 0$

Aby stwierdzić czy funkcja ma pochodną w punkcie x_0 musimy obliczyć jej prawo i lewo stronną pochodną z definicji:

$$f'_-(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta x)^2 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$$

- można to pokazać z twierdzenia o 3 funkcjach

Analogiczny wywód możemy zrobić dla pochodnej prawostronnej - wynik również będzie 0

Ponieważ pochodne prawo i lewo stronne są równe to pochodna tej funkcji w punkcie x_0 istnieje

Obliczanie przybliżonej wartości funkcji za pomocą różniczki

Zadanie 23.5 Oblicz przybliżoną wartość liczby $\sqrt[3]{8.2}$

Korzystamy ze wzoru $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

W naszym przypadku:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$x_0 = 8$$

$$\Delta x = 0.2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Obliczamy więc:

$$f(8) = 2$$

$$f'(8) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Więc } \sqrt[3]{8.2} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0.2 = \frac{121}{60}$$

24 Ekstrema funkcji jednej zmiennej. Definicje i twierdzenia.

Zadanie 24.1 Korzystając z definicji uzasadnij, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.

$f(0) = 0$. Dla każdego punktu $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ $f(x) > 0$. Zatem x jest właściwym minimum lokalnym (sąsiedztwo $S(0, 1)$).

Zadanie 24.2 Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$ na przedziale $[-2, 5]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2 \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Wartość pochodnej jest ujemna na przedziale $[-2, 1)$ i dodatnia na przedziale $(1, 5]$, zatem istnieje minimum lokalne w punkcie 1.

x	-2	1	5
$f(x)$	3	2	18

Wartość najmniejsza funkcji $f(x)$ na przedziale $[-2, 5]$ wynosi 2, wartość największa: 18.

Zadanie 24.3 Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - x * 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$f'(x) = 0$ dla punktów w których $-x^2 + 4 = 0$, tzn. 2 i -2. Sprawdźmy znak pochodnej pomiędzy jej miejscami zerowymi:

x	$ $	$(-\infty, -2)$	$ $	$(-2, 2)$	$ $	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$ $	-	$ $	+	$ $	-

Widzimy, że pochodna zmienia znak zarówno w -2 jak i 2. Zatem funkcja $f'(x)$ ma minimum lokalne (równe $-\frac{1}{4}$) w punkcie -2, oraz maksimum lokalne (równe $\frac{1}{4}$) w punkcie 2.

25 Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej.

Zadanie 25.1 Korzystając z wzoru Newtona - Leibniza oblicz wartość całki

$$\int_0^2 \frac{3x+1}{3x-1} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{3x+1} dx &= \left| u = 3x+1 \quad u' = 3 \right| = \frac{1}{3} \int \frac{u-2}{u} du = \frac{1}{3} \int du - \frac{2}{3} \int \frac{1}{u} du = \\ &= \frac{u - 2\ln(u)}{3} + C = \frac{3x+1 - 2\ln(3x+1)}{3} + C = x - \frac{2\ln(3x+1)}{3} + C \\ \int_0^2 \frac{3x-1}{3x+1} dx &= \left[x - \frac{2\ln(3x+1)}{3} \right]_0^2 = 2 - \frac{2}{3}(\ln(7) + \ln(1)) = 2 - \frac{2\ln(7)}{3} \end{aligned}$$

Zadanie 25.2 Korzystając z definicji całki Riemanna uzasadnij równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

Korzystamy z definicji całki Riemanna ($[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \left[\arctg x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 25.3 Korzystając z definicji oblicz całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

Korzystając ze wzoru

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

uzyskujemy

$$\int_0^1 2^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{2}\right)^i$$

Suma n wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \frac{(\sqrt[n]{2})^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\frac{1}{n}}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{2^k}{k}} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \end{aligned}$$

26 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych; różniczkowalność i różniczka funkcji.

- Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji

$$f(x, y) = x \cdot \sin xy, (x_0, y_0) = (\pi, 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 1) &\stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\pi + \Delta x, 1) - f(\pi, 1)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\pi + \Delta x) \sin((\pi + \Delta x)) - \pi \sin(\pi)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[(\pi + \Delta x) \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} \right] = -\pi \end{aligned} \quad (5)$$

- Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji

$$f(x, y) = e^{x^2 \sin y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{x^2 \sin y}) = (e^{x^2 \sin y}) \cdot 2x \sin y \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{x^2 \sin y}) = (e^{x^2 \sin y}) \cdot x^2 \cos y \quad (7)$$

- Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji

$$f(x, y) = xy + \frac{x^2}{y^3}$$

Początkowo wyliczamy pochodne pierwszego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(xy + \frac{x^2}{y^3} \right) = y + \frac{2x}{y^3} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(xy + \frac{x^2}{y^3} \right) = x + \frac{3x^2}{y^4} \quad (9)$$

Następnie wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y + \frac{2x}{y^3} \right) = \frac{2}{y^3} \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x - \frac{3x^2}{y^4} \right) = 1 - \frac{6x}{y^4} \quad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(y + \frac{2x}{y^3} \right) = 1 - \frac{6x}{y^4} \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x - \frac{3x^2}{y^4} \right) = \frac{12x^2}{y^5} \quad (13)$$

- Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ w punkcie } (x_0, y_0) = (1, -2)$$

Korzystając z definicji, wiemy, że funkcja jest różniczkowalna jeżeli zachodzi poniższa równość

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \quad (14)$$

Najpierw policzymy potrzebne pochodne cząstkowe we wskazanych punktach

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 2x|_{(1,-2)} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 2y|_{(1,-2)} = 4$$

Następnie sprawdzimy równość z definicji

$$\begin{aligned} & \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 + \Delta x)^2 - (-2 + \Delta y)^2 - (1 - 4) - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - (4 - 4\Delta y + (\Delta y)^2) - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left[\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right] - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \end{aligned} \quad (15)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left[\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right] = 0$$

Oraz z twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Zatem cała granica wynosi 0 oraz funkcja jest różniczkowalna w punkcie (1,-2).

27 Ekstrema funkcji wielu zmiennych. Definicje i twierdzenia.

- Zbadać czy podana funkcja ma ekstrema lokalne oraz jeśli tak to podać je

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 3(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = \\ &= 3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4 \end{aligned}$$

Korzystamy z warunku wystarczającego na istnienie ekstremum lokalnego funkcji dwóch zmiennych

Najpierw liczymy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4) = 6x - 6 \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 6x + 3 + 4y^2 + 16y + 4) = 8y + 16$$

Funkcja f może mieć ekstrema tylko w miejscu zerowania się pochodnych

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} 6x_0 - 6 = 0 \\ 8y_0 + 16 = 0 \end{cases}$$

Zatem punkt zerowania się pochodnych, w którym funkcja może mieć ekstrema to $P(x_0, y_0) = P(1, -2)$

Wyliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz badamy znak macierzy Jacobi'ego

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (6x - 6) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (8y + 16) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (6x - 6) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (8y + 16) = 8$$

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 6 \cdot 8 = 48 > 0 \quad (19)$$

Zatem funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie $(1, -2)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ zatem jest to minimum lokalne właściwe.

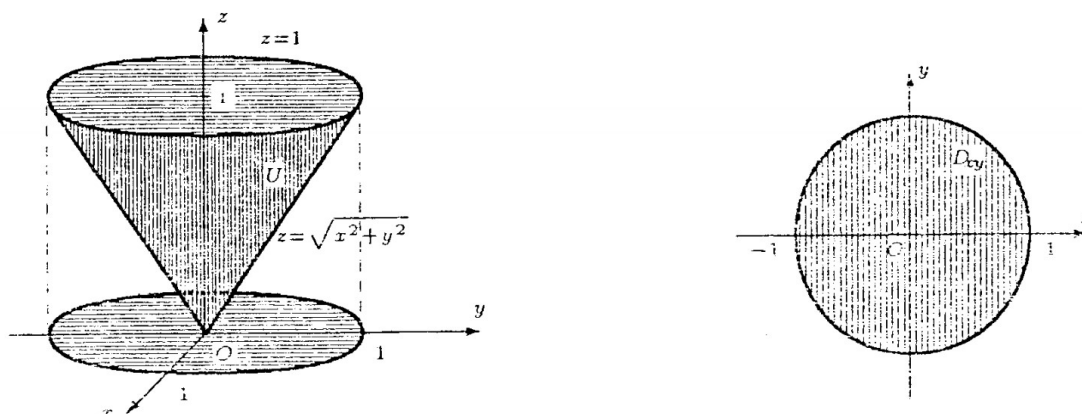
28 Twierdzenie o zmianie zmiennych w rachunku całkowym; współrzędne walcowe i sferyczne.

Zadanie 28.1 Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podaną całkę po wskazanych obszarach:

$$\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$$

Rozwiązanie:

Obszar całkowania U jest stożkiem o wysokości 1 i promieniu podstawy 1. Stożek U i jego rzut na płaszczyznę xOy przedstawiony na rysunkach:

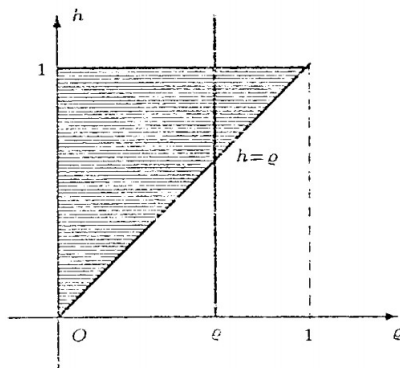


Obszar D_{xy} jest określony we współrzędnych biegunowych przez nierówności

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq 1.$$

Dla ustalonego kąta φ rysujemy przekrój obszaru U półpłaszczyzną przechodzącą przez oś Oz i przez ramię kąta φ (na rysunku). Z rysunku odczytujemy zakres zmienności h . Mamy $\varrho \leq h \leq 1$. Ostatecznie obszar U we współrzędnych walcowych jest określony nierównościami:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq 1, \quad \varrho \leq h \leq 1.$$



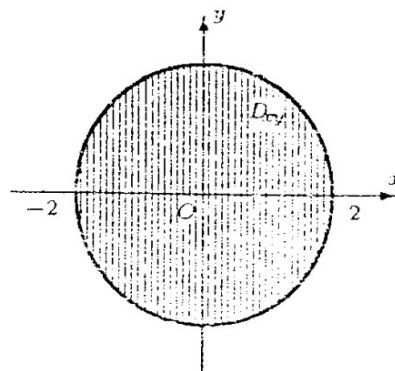
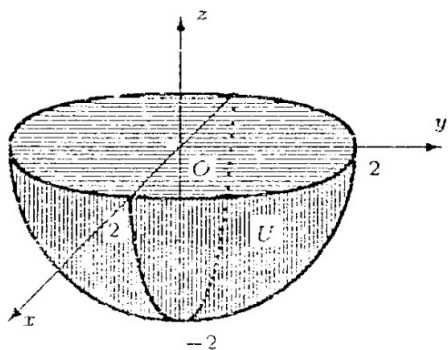
Dokonując teraz zamiany zmiennych w całce potrójnej na współrzędne walcowe otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) dh \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 \rho^2 dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d \left[\rho^2 h \right]_{h=\rho}^{h=1} d\rho \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho \right) \\
 &= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Zadanie 28.2 Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podaną całkę po wskazanych obszarach:

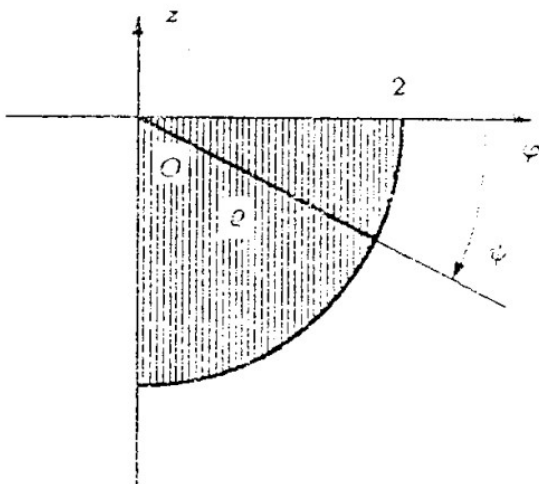
$$\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } U : -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0$$

Rozwiązanie: Obszar całkowania U jest dolną półkulą o promieniu $R = 2$. Półkulę U i jej rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy przedstawiony na rysunkach:



Na podstawie rzutu D obszaru U ustalamy zakres zmienności kąta φ we współrzędnych sferycznych (φ, ψ, ϱ) . Mamy $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Aby określić zakres zmienności kąta ψ i promienia wodzącego rysujemy (dla ustalonego kąta φ) przekrój obszaru U półpłaszczyzną przechodzącą przez oś Oz i przez ramię kąta φ . Z rysunku odczytujemy te zakresy:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 2.$$



Ostatecznie obszar U we współrzędnych sferycznych opisany jest układem nierówności postaci:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0, \quad 0 \leq \varrho \leq 2.$$

W rozważanej całce dokonujemy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne.
Mamy:

$$\begin{aligned}
 \iiint_U \mu(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\psi \int_0^2 (\varrho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \varrho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + \varrho^2 \sin^2 \psi) \varrho^2 \cos \psi d\varrho \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\psi \int_0^2 \varrho^4 \cos \psi d\varrho \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \psi d\psi \right) \cdot \left(\int_0^2 \varrho^4 d\varrho \right) \\
 &= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [\sin \psi]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cdot \left[\frac{\varrho^5}{5} \right]_0^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{5} \pi
 \end{aligned}$$

Teoretyczne podstawy informatyki

29 Metody dowodzenia poprawności pętli.

30 Odwrotna Notacja Polska: definicja, własności, zalety i wady, algorytmy.

30.1 Obliczanie wartości wyrażenia w ONP

Przykład:

$$x \ y \ z \ - \ * \ a \ b \ ^ \ c \ / \ +$$

Widok stosu:

x	y	z	—	*
		z		
	y	y	y-z	
x	x	x	x	$x^*(y-z)$

a	b	^	c	/
	b		c	
a	a	a^b	a^b	a^b / c
$x^*(y-z)$	$x^*(y-z)$	$x^*(y-z)$	$x^*(y-z)$	$x^*(y-z)$

+
$x^*(y-z) + a^b / c$

Wyjście:

$$x * (y - z) + a^b / c$$

30.2 Zamiana wyrażenia infiksowego na ONP

Przykład:

$$(a + b * c)^{(x/y - z)}$$

Wejście	Stos	Wyjście
$(a + b * c)^{(x/y - z)}$		
$a + b * c)^{(x/y - z)}$	(
$+ b * c)^{(x/y - z)}$	(a
$b * c)^{(x/y - z)}$	(+	a
$* c)^{(x/y - z)}$	(+	$a b$
$c)^{(x/y - z)}$	(+ *	$a b$
$)^{(x/y - z)}$	(+ *	$a b c$
$^{(x/y - z)}$		$a b c * +$
$(x/y - z)$	^	$a b c * +$
$x/y - z)$	^($a b c * +$
$/y - z)$	^($a b c * + x$
$y - z)$	^(/	$a b c * + x$
$-z)$	^(/	$a b c * + x y$
$z)$	^(-	$a b c * + x y /$
$)$	^(-	$a b c * + x y / z$
	^	$a b c * + x y / z -$
		$a b c * + x y / z - ^$

Wyjście:

$$a b c * + x y / z - ^$$

31 Modele obliczeń: maszyna Turinga.

Przykład: Inkrementacja liczby binarnej.

Idea algorytmu:

1. Przechodź w prawo pomijając wszystkie znaki aż do znaku pustego.
2. Przejdź w lewo drukując na znakach 1 znak 0 aż do odczytania znaku 0 lub znaku pustego.
3. Wydrukuj znak 1 i zakończ.

Przyjmujemy $b = _$ (znak pusty).

Zaczynamy od przechodzenia w prawo na koniec zapisu liczby:

$$(A, 0) \mapsto (0, \rightarrow, A)$$

$$(A, 1) \mapsto (1, \rightarrow, A)$$

Kiedy odczytamy znak pusty musimy zawrócić - tworzymy nowy stan (B), który będzie odpowiadał przejściu w lewo.

$$(A, _) \mapsto (_, \leftarrow, B)$$

W stanie B przechodzimy wszystkie jedyńki zastępując je zerami aż do natrafienia na 0 lub znak pusty:

$$(B, 1) \mapsto (0, \leftarrow, B)$$

$$(B, 0) \mapsto (1, \downarrow, Z)$$

$$(B, _) \mapsto (1, \downarrow, Z)$$

Gdzie Z jest stanem końcowym. Zatem nasza maszyna Turinga ma postać:

$$MT = \langle Q, q_0, F, \tau, b, \delta \rangle$$

$$Q = \{A, B, Z\}$$

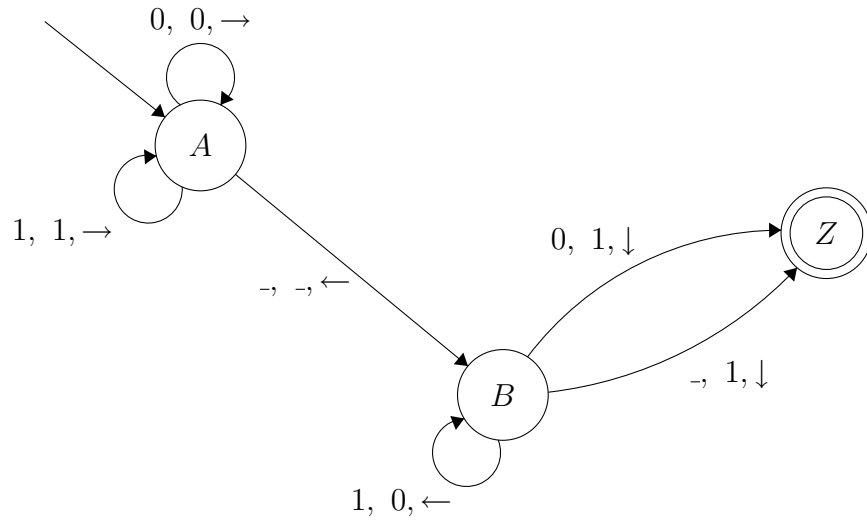
$$q_0 = A$$

$$F = \{Z\}$$

$$\tau = \{_, 0, 1\}$$

$$b = _$$

δ	A	B	Z
0	$(0, \rightarrow, A)$	$(1, \downarrow, Z)$	
1	$(1, \rightarrow, A)$	$(0, \leftarrow, B)$	
-	$(-, \leftarrow, B)$	$(1, \downarrow, Z)$	



32 Modele obliczeń: automat skończony, automat ze stosem.

32.1 Automat skończeniostanowy deterministyczny

Zad 1.

Wykorzystując pochodne Brzozowskiego skonstruuj automat minimalny rozpoznający język $L = a(a + b)^*b(a + b)^*$

Wyznaczamy pochodne:

$$a^{-1}L = (a + b)^*b(a + b)^* = M$$

$$b^{-1}L = \emptyset$$

$$(aa)^{-1}L = M$$

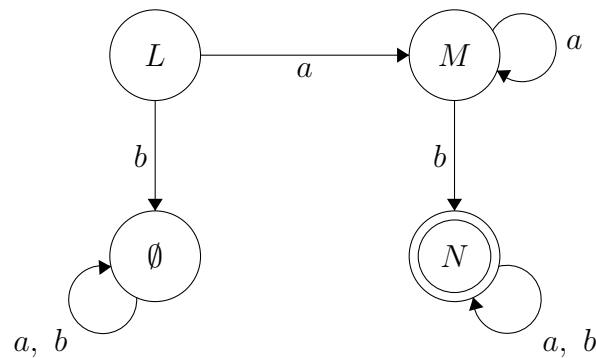
$$(ab)^{-1}L = (a + b)^*b(a + b)^* + (a + b)^* = N$$

$$(aba)^{-1}L = N$$

$$(abb)^{-1}L = N$$

Jak można zauważyć nie dostaniemy już innych pochodnych, więc nasz automat składa się z 4 stanów: L, \emptyset , M, N.

Stan N jest stanem akceptującym, ponieważ sotał uzyskany przez odjęcie słowa należącego do języka L. L jest stanem początkowym. Przejściami w tym automacie są przejścia między pochodnymi pod wpływem kolejnych liter.

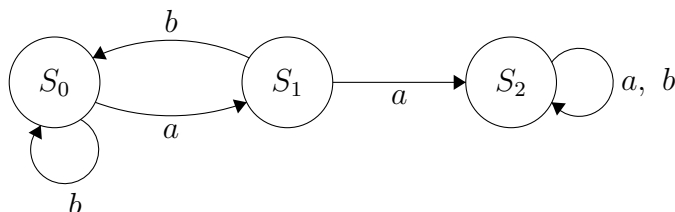


Zad 2.

Dany jest automat $alA = (S, f)$ nad alfabetem $A = \{a, b\}$, tak że $S = \{s_0, s_1, s_2\}$.

f	s_0	s_1	s_2
a	s_1	s_2	s_2
b	s_0	s_0	s_2

Określ dla tego automatu jego reprezentację oraz monoid przejść.



Określamy reprezentację uzupełniając tabelkę wpisując po lewej stronie kolejne słowa, a w kolejnych kolumnach stan w jakim się znajdziemy po przejściu pod wpływem tego słowa zaczynając od stanu z wiersza u samej góry:

	s_0	s_1	s_2
1	s_0	s_1	s_2
a	s_1	s_2	s_2
b	s_0	s_0	s_2
a^2	s_2	s_2	s_2
ab	s_0	s_2	s_2
ba	s_1	s_1	s_2

Powyższa tabelka przedstawia już wszystkie możliwe kombinacje stanów do uzyskania dla tego automatu (kolejne słowa dawałyby stan, który już jest w tabelce dla innego słowa) i jest ona reprezentacją naszego automatu.

Dodatkowo możemy podczas uzupełniania tabelki zauważyć m.in. że:

$$b^2 = b$$

$$a^3 = a^2$$

$$a^2b = a^2$$

co może nam ułatwić jej uzupełnianie.

Monoidem przejść nazywamy zbiór tych słów, które udało nam się uzyskać w naszej tabelce:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{1, a, b, a^2, ab, ba, b^2\} = \tau\mathcal{A}(A^*)$$

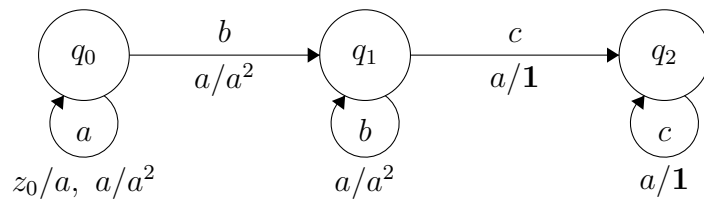
32.2 Automat ze stosem

Dany jest automat ze stosem gdzie:

$$A_S = \{z_0, a\} \quad A = \{a, b, c\}, \quad Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$P = \{z_0q_0a \rightarrow aq_0, aq_0a \rightarrow a^2q_0, aq_0b \rightarrow a^2q_1, aq_1b \rightarrow a^2q_1, aq_1c \rightarrow 1q_2, aq_2c \rightarrow 1q_2\}$$

Narysuj graf automatu i określ język akceptowany przez pusty stos:



Językiem akceptowanym przez ten automat jest język $a^N b^M c^{N+M}$, gdzie $N, M > 0$.

33 Złożoność obliczeniowa - definicja notacji: O , Ω , Θ .

34 Złożoność obliczeniowa - pesymistyczna i średnia.

Zadanie 34.1 Oblicz pesymistyczną i średnią złożoność obliczeniową algorytmu sortowania przez wstawianie.

Złożoność pesymistyczna

Przypadek pesymistyczny polega na otrzymaniu na wejściu odwrotnie posortowanej tablicy. Wówczas każdy element (oprócz pierwszego) zostanie porównany i zamieniony ze wszystkimi elementami uprzednio posortowanego fragmentu tablicy. Obliczmy złożoność zakładając, że zamiana elementów zajmuje czas równy stałej c .

$$\begin{aligned}W(c) &= \sum_{i=2}^n ic \\W(c) &= \frac{n^2 + n - 2}{2}c \\W(c) &= \theta(n^2)\end{aligned}$$

Złożoność średnia

Zauważmy, że ilość zamian elementów jest zależna od liczby inwersji w tablicy wejściowej. Aby obliczyć średnią złożoność algorytmu musimy obliczyć średnią liczbę inwersji.

Niech X_{ij} będzie zmienną losową oznaczającą, czy w tablicy wejściowej $A[i]$ jest w inwersji z $A[j]$. Ilość par i, j jest równa $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$A(n) = E\left(\sum X_{ij}\right) = \sum E(X_{ij}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

Zadanie 34.2 Oblicz średnią złożoność obliczeniową algorytmu quicksort.

Zakładamy, że tablica wejściowa nie posiada duplikatów, zaś operacją dominującą jest porównywanie. Przy każdym wyborze elementu rozdzielającego ilość elementów od niego mniejsza jest zmienną losową od 0 do $n-1$ o rozkładzie jednostajnym. Zatem po podziale otrzymujemy dwie tablice: o długości i oraz o długości $n-i-1$ gdzie i jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym od 0 do $n-1$. Zatem zakładając,

że ilość porównań przy każdym podziale wynosi $n - 1$, średnia ilość porównań dla wszystkich permutacji otrzymanej tablicy jest równa:

$$A(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (A(i) + A(n - i - 1)) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A(i)$$

$$nA(n) = n(n - 1) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} A(i)$$

$$\begin{aligned} nA(n) - (n - 1)A(n - 1) &= n(n - 1) - (n - 1)(n - 2) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} A(i) - 2 \sum_{i=0}^{n-2} A(i) = \\ &= 2(n - 1) + 2A(n - 1) \end{aligned}$$

$$nA(n) = (n + 1)A(n - 1) + 2n - 2$$

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{(n + 1)A(n - 1)}{n} + 2 - \frac{2}{n} \\ \frac{A(n)}{n + 1} &= \frac{A(n - 1)}{n} + \frac{2}{n + 1} - \frac{2}{n(n + 1)} = \frac{A(n - 2)}{n - 1} + \frac{2}{n} - \frac{2}{(n - 1)n} - \frac{2}{n(n + 1)} + \frac{2}{n + 1} = \\ &= \dots = \frac{A(1)}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{2}{i + 1} - \sum_{i=2}^n \frac{2}{i(i + 1)} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \frac{n - 1}{n + 1} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \approx \int_1^{n-1} \frac{dx}{x} = \ln(n - 1)$$

$$\begin{aligned} A(n) &= 2(n + 1) \ln(n - 1) - n + 1 = 2n \ln(n - 1) + 2\ln(n - 1) - n + 1 \leq \\ &\leq 2 \ln(n) \approx 1.39n \log_2 n = \theta(n \ln(n)) \end{aligned}$$

35 Metoda "dziel i zwyciężaj": zalety i wady.

35.1 Binary search

Problem: dla zadanej posortowanej tablicy A o długości n , znajdź indeks elementu równego x lub zwróć -1 w przypadku braku x w tablicy A .

Działamy na (zmniejszającym się) przedziale tablicy A . Indeks początku przedziału: $l = 0$, indeks końca przedziału: $r = n - 1$.

1. Dziel

Porównaj element $A[s]$ ($s = \frac{l+r}{2}$) z x .

- $A[s] = x$
Zwróć s .
- $A[s] > x$
Powtórz dla $A[l : s - 1]$, tzn $l = l, r = s - 1$
- $A[s] < x$
Powtórz rekurencyjnie dla $A[s + 1 : n - 1]$, tzn $l = s + 1, r = r$

Złożoność obliczeniowa: $\theta(1)$.

2. Zwyciężaj

Dla tablicy z $n = 1$ ($l = r$) porównaj $A[l]$ z x

- $A[l] = x$
zwróć l
- $A[l] \neq x$
 x nie znajduje się w A , zwróć -1

Złożoność obliczeniowa: $\theta(1)$.

3. Łącz

Zwróć wynik zwrócony z podproblemu.

Złożoność obliczeniowa: $\theta(1)$.

Złożoność obliczeniowa algorytmu: $O(\log(n))$.

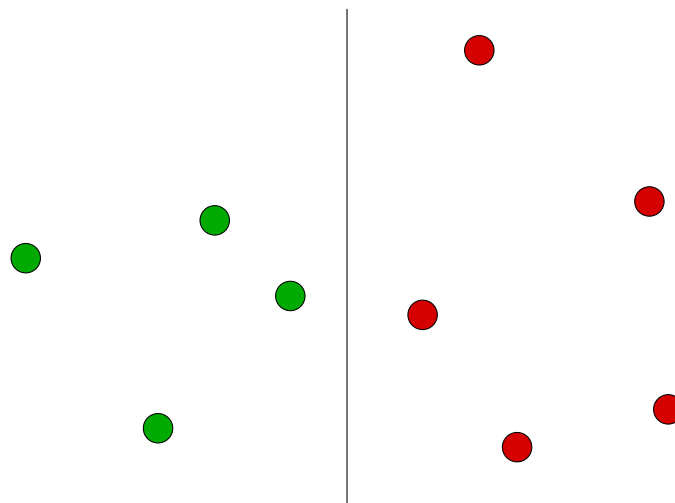
35.2 Otoczka wypukła

Dla zbioru punktów A na przestrzeni dwuwymiarowej znajdź listę punktów tworzących otoczkę wypukłą.

Działamy na zbiorze posortowanym względem osi x .

1. Dziel

Podziel A na dwa zbiory: lewy L i prawy R względem prostej równoległej do osi y .

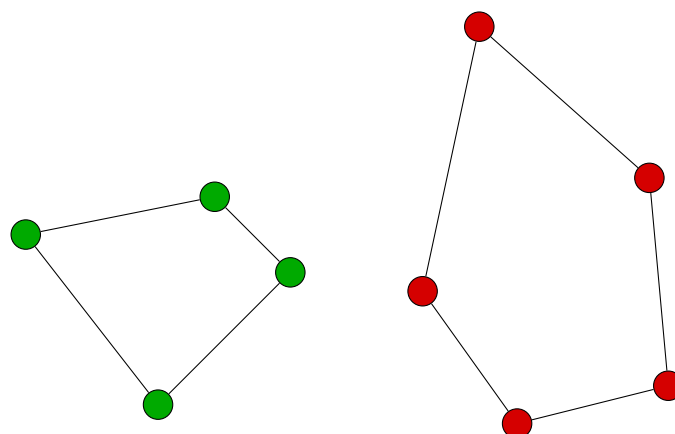


Złożoność obliczeniowa: $\theta(1)$.

2. Zwyciężaj

Dla zbioru A o mocy $|A| \leq 3$ otoczka wypukła jest listą wszystkich punktów.

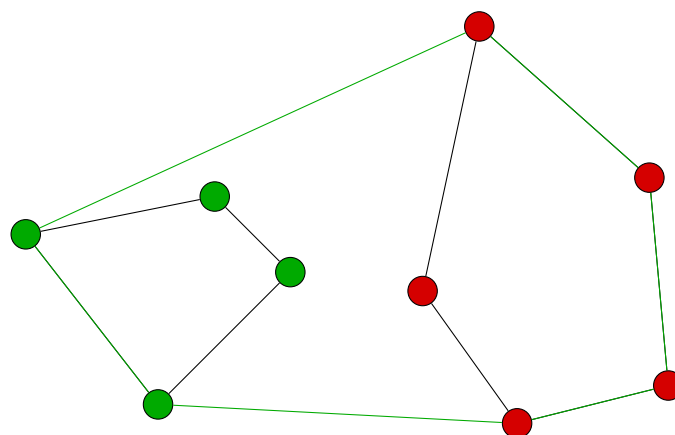
Złożoność obliczeniowa: $\theta(1)$.



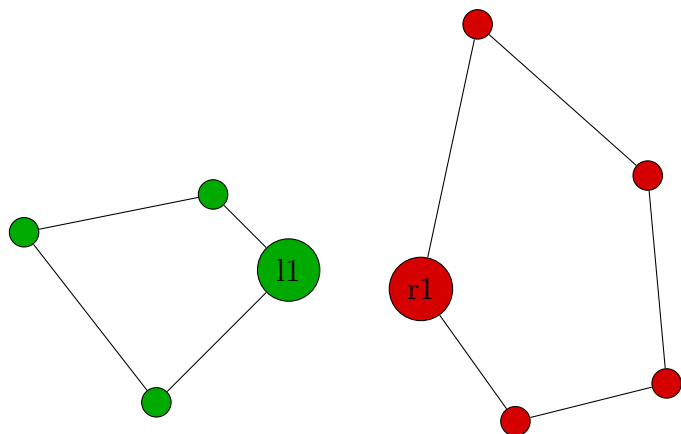
3. Łącz

Połącz wypukłe otoczki podzbiorów.

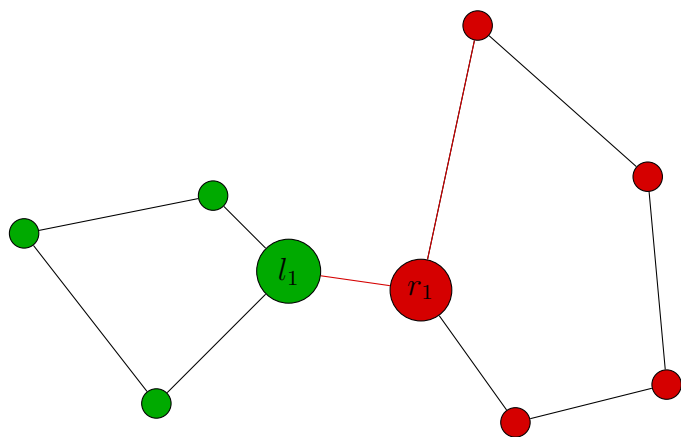
Złożoność obliczeniowa: $O(n)$.

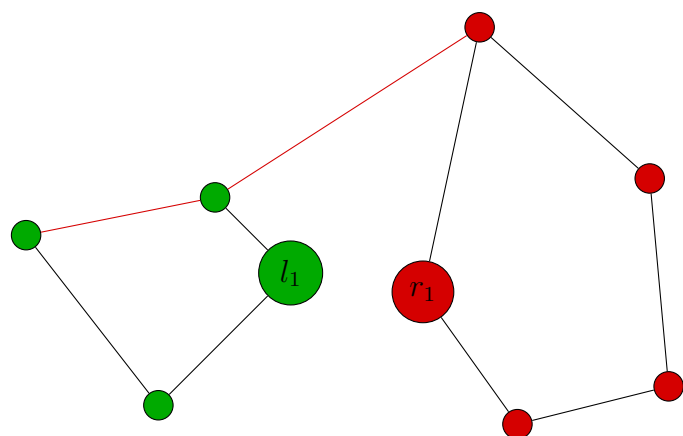
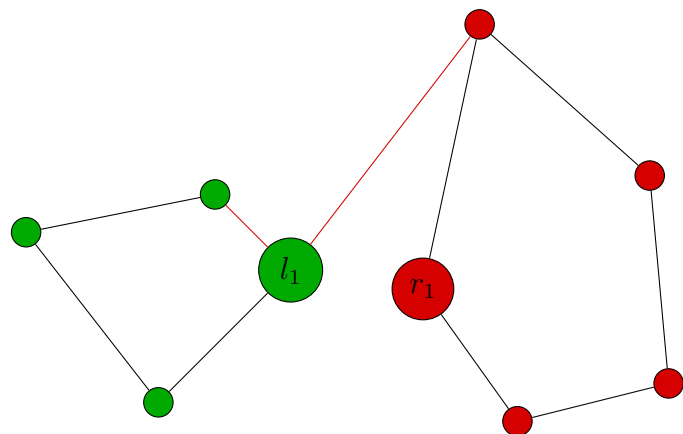


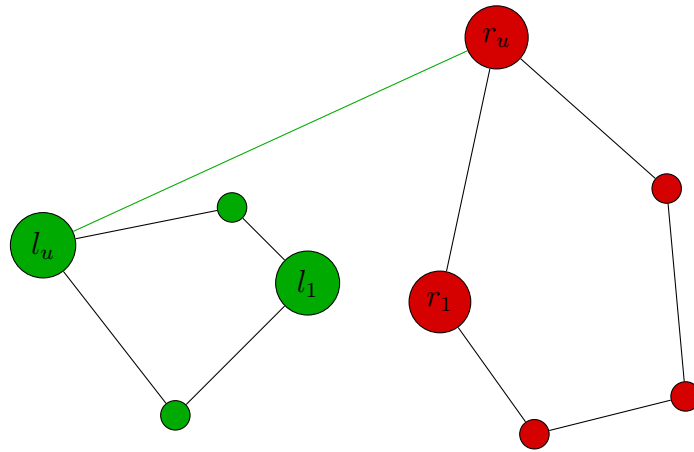
- (a) Znajdź element l_1 (r_1) będący elementem wysuniętym najbardziej na lewo (prawo) w zbiorze L (R)



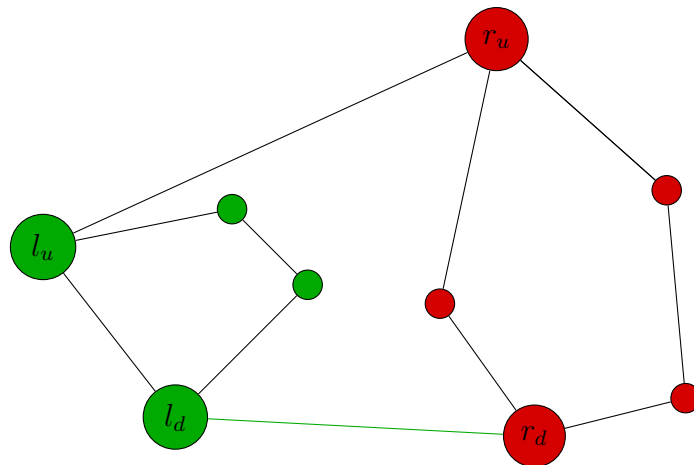
- (b) Znajdź elementy "górne" w L i R , tzn. l_u i r_u dające wypukłą otoczkę, zaczynając od l_1 (r_1) i idąc przeciwnie (zgodnie z) do wskazówek zegara.





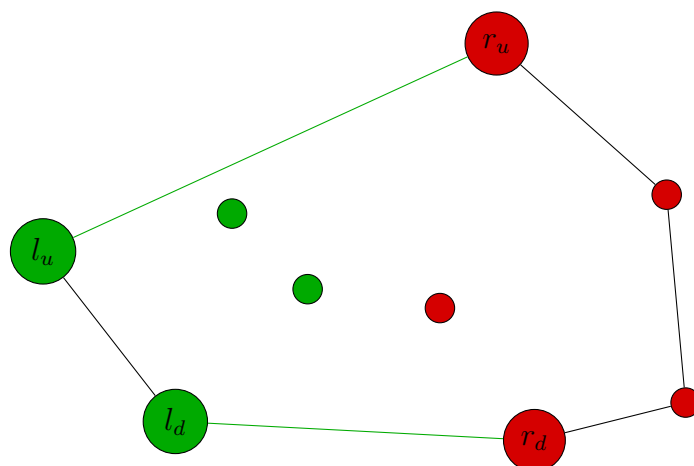


(c) Analogicznie znajdź l_d i r_d



(d) Zwróć otoczkę składającą się z:

- krawędzi $l_u - r_u$
- fragmentu otoczki R łączącej r_u z r_l
- krawędzi $r_d - l_d$
- fragmentu otoczki L łączącej l_d z l_u

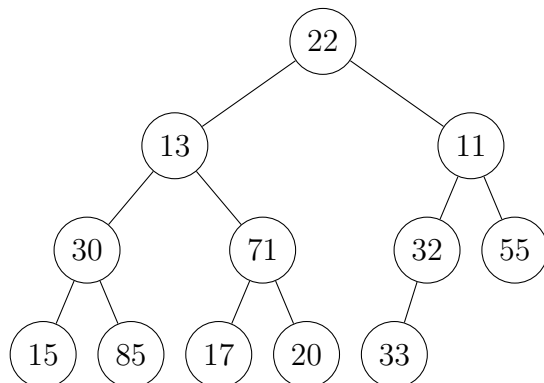


Złożoność algorytmu: $\theta(n \cdot \log(n))$.

Uzasadnienie: podział na 2 podproblemy (z podziałem i łączeniem zajmującym $O(n)$ czasu): $O(n \cdot \log(n))$ + złożoność sortowania punktów wg. osi x ($\theta(n \cdot \log(n))$), co daje razem $\theta(n \cdot \log(n))$.

- 36 Lista: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.
- 37 Kolejka i kolejka priorytetowa: ujęcie abstrakcyjne, możliwe implementacje i ich złożoności.
- 38 Algorytmy sortowania QuickSort i MergeSort: metody wyboru pivota w QS; złożoności.
- 39 Algorytm sortowania bez porównań (sortowanie przez zliczanie, sortowanie kubełkowe oraz sortowanie pozycyjne).

40 Reprezentacja drzewa binarnego za pomocą porządków (preorder, inorder, postorder).



Preorder: 22, 13, 30, 15, 85, 71, 17, 20, 11, 32, 33, 55

Inorder: 15, 30, 85, 13, 17, 71, 20, 22, 33, 32, 11, 55

Postorder: 15, 85, 30, 17, 20, 71, 13, 33, 32, 55, 11, 22

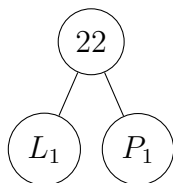
40.1 Odtworzenie drzewa z preordera i inordera.

Idea algorytmu:

1. Element pierwszy w preorderze to korzeń.
2. Znalezienie tego elementu w inorderze dzieli go na dwie części - elementy po lewej stanowią jego lewe poddrzewo, po prawej - prawe.
3. Rekurencyjnie budujemy kolejne poddrzewa.

Preorder: **22**, 13, 30, 15, 85, 71, 17, 20, 11, 32, 33, 55

Inorder: 15, 30, 85, 13, 17, 71, 20, **22**, 33, 32, 11, 55

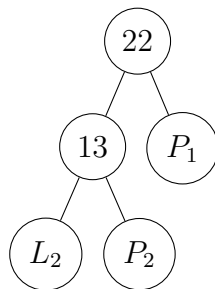


Gdzie L_1 = lewe poddrzewo zawierające elementy 15, 30, 85, 13, 17, 71, 20, P_1 -
 prawe poddrzewo zawierające 33, 32, 11, 55.

Budujemy rekurencyjnie L_1 .

Preorder: 13, 30, 15, 85, 71, 17, 20

Inorder: 15, 30, 85, 13, 17, 71, 20

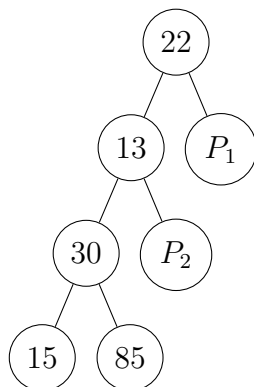


$L_2 = 15, 30, 85$; $P_2 = 17, 71, 20$.

Budujemy rekurencyjnie L_2 .

Preorder: 30, 15, 85

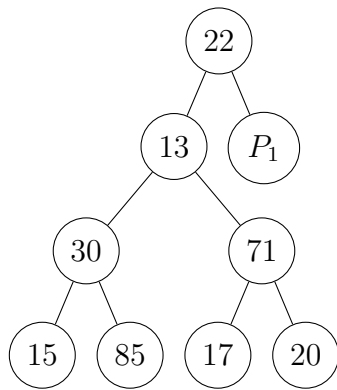
Inorder: 15, 30, 85



Budujemy rekurencyjnie P_2 .

Preorder: 71, 17, 20

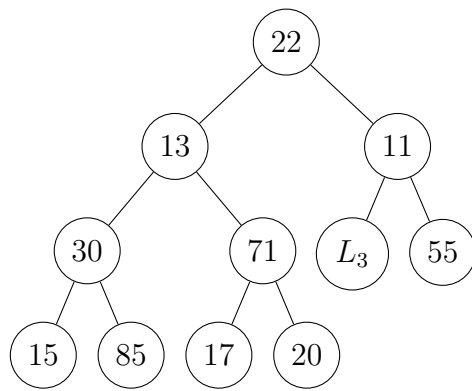
Inorder: 17, 71, 20



Budujemy rekurencyjnie P_1 .

Preorder: 11, 32, 33, 55

Inorder: 33, 32, 11, 55

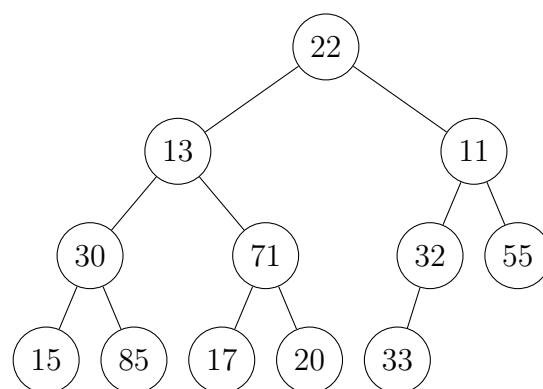


Gdzie $L_3 = 32, 33$.

Budujemy rekurencyjnie L_3 .

Preorder: 32, 33

Inorder: 33, 32

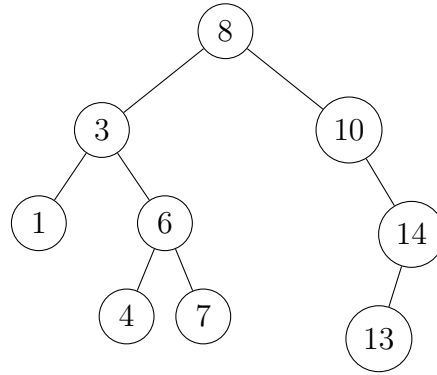


Odbudowaliśmy drzewo wyjściowe.

Odtworzenie drzewa z postordera i inordera jest kompletnie analogiczne, z dokładnością do przeglądania postordera od końca i budowania rekurencyjnie najpierw prawych, potem lewych poddrzew. Cała logika jest identyczna.

41 Algorytmy wyszukiwania następnika i poprzednika w drzewach BST; usuwanie węzła.

41.1 Wyszukiwanie następnika i poprzednika w BST.



Rodzaje następników:

1. skrajnie lewy element prawego poddrzewa węzła, jeśli posiada on prawe poddrzewo, np:
 - 4 jest następnikiem 3,
 - 10 jest następnikiem 8,
 - 13 jest następnikiem 10.
2. pierwszy napotkany przodek węzła, dla którego węzeł jest w lewym poddrzewie, np:
 - 3 jest następnikiem 1,
 - 8 jest następnikiem 7,
 - 14 jest następnikiem 13.

Rodzaje poprzedników:

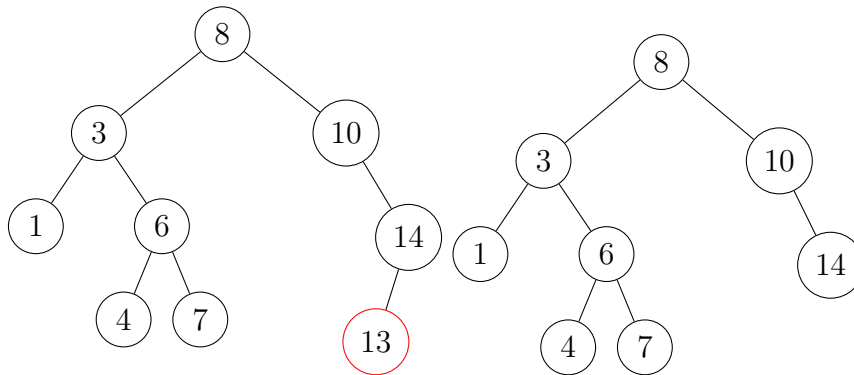
1. skrajnie prawy element lewego poddrzewa węzła, jeśli posiada on lewe poddrzewo, np:
 - 7 jest poprzednikiem 8,
 - 1 jest poprzednikiem 3,

- 13 jest poprzednikiem 14.
2. pierwszy napotkany przodek węzła, dla którego węzeł jest w prawym poddrzewie, np:
- 6 jest poprzednikiem 7,
 - 10 jest poprzednikiem 13,
 - 8 jest poprzednikiem 10.

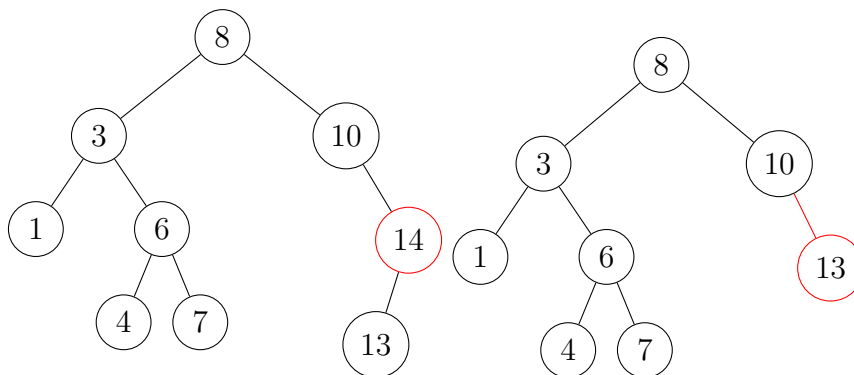
41.2 Usuwanie węzła z BST.

Przypadki usuwania węzła:

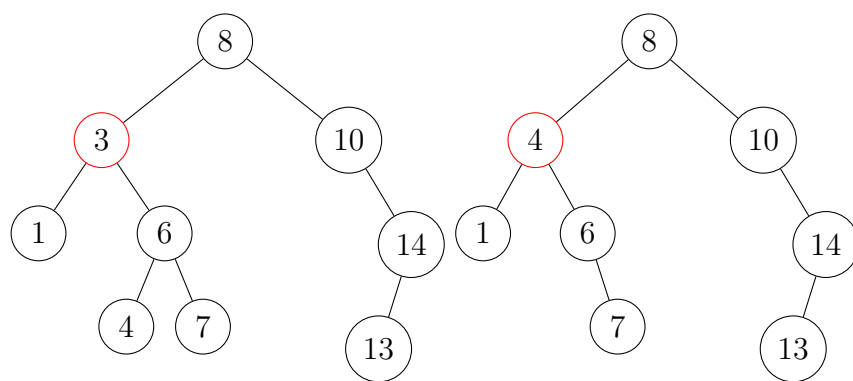
1. usuwanie liścia, np. 13:



2. usuwanie węzła z jednym synem, np. 14:



3. usuwanie węzła z dwoma synami, np 3 (następnikiem 3 jest 4):

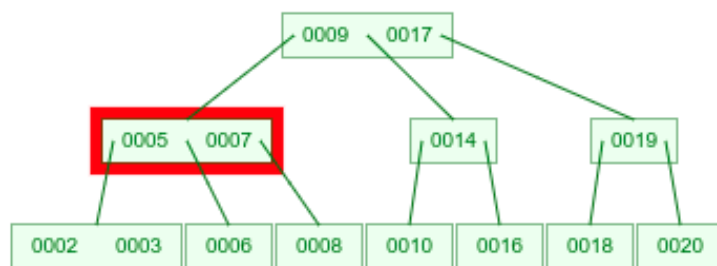
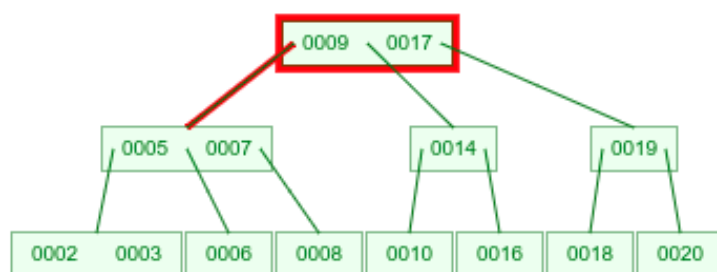
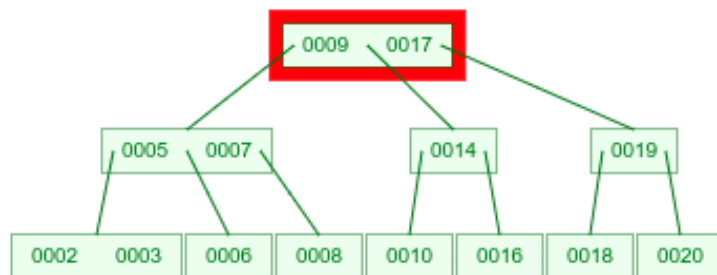


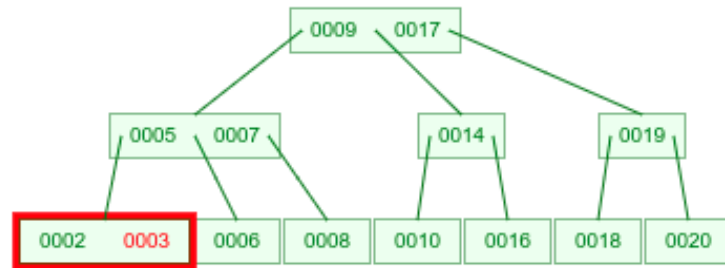
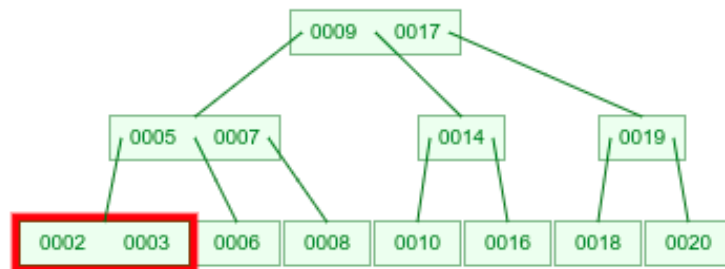
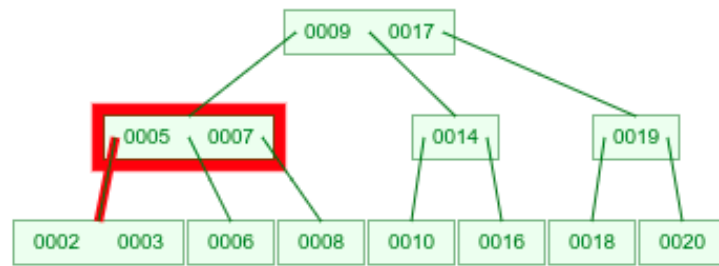
42 B-drzewa: operacje i ich złożoność.

Wszystkie operacje są przeprowadzane na drzewie rzędu 3.

42.1 Wyszukiwanie

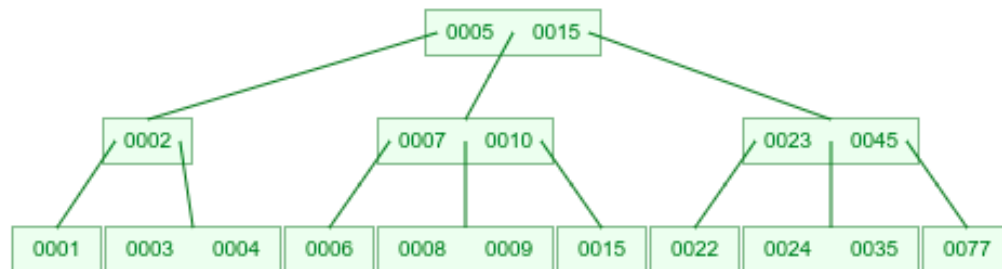
Wyszukanie elementu 0003 w drzewie.



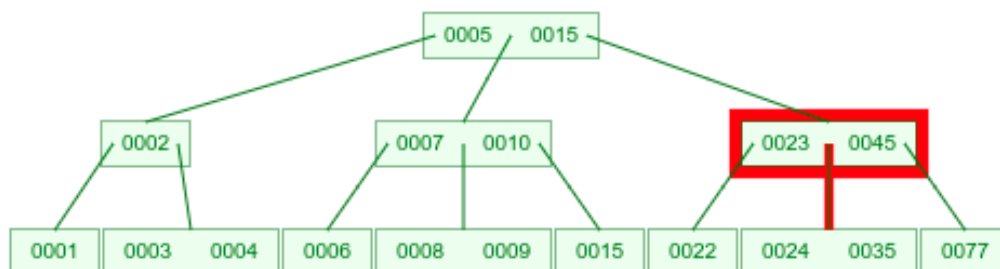
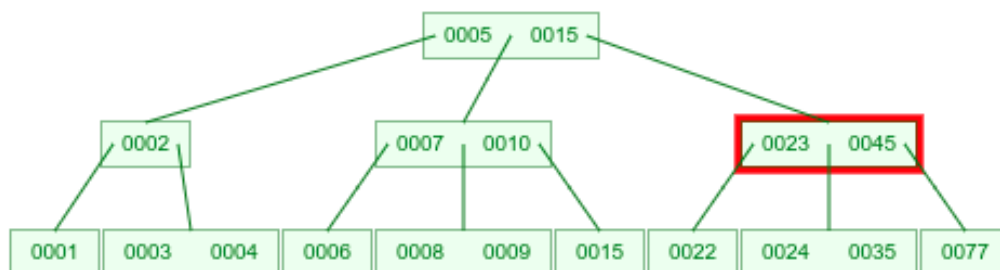
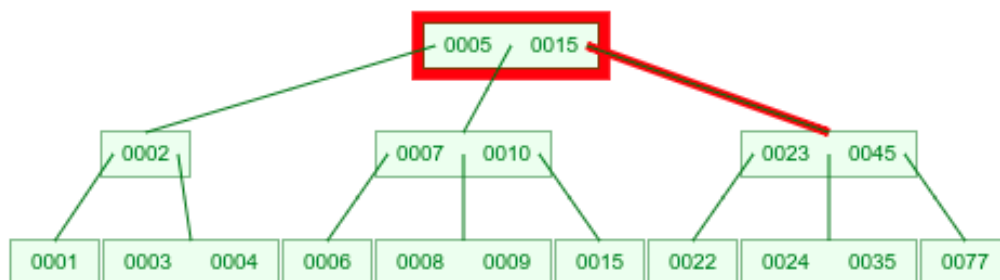
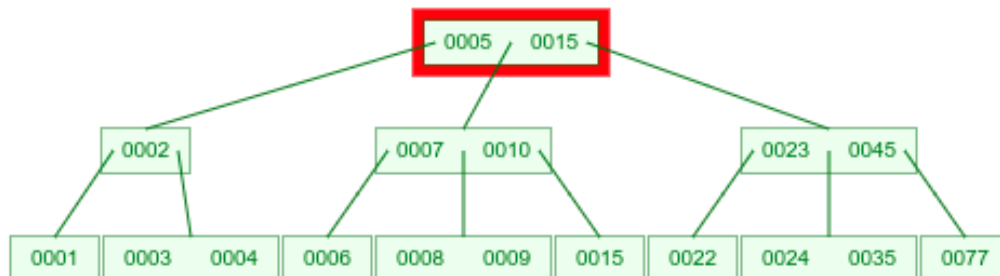


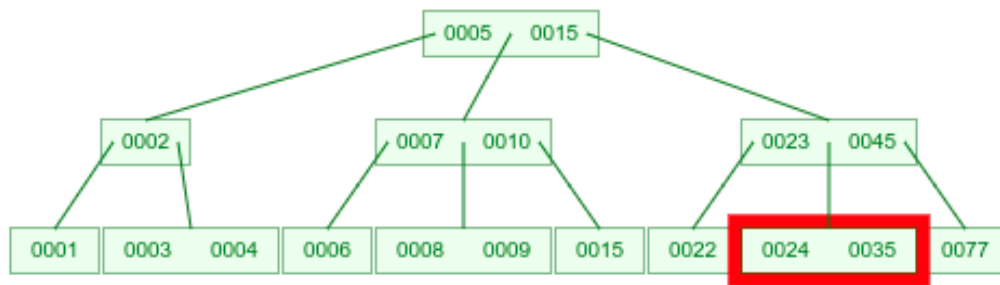
42.2 Wstawianie

Wstawianie elementu 0030 do poniższego drzewa:

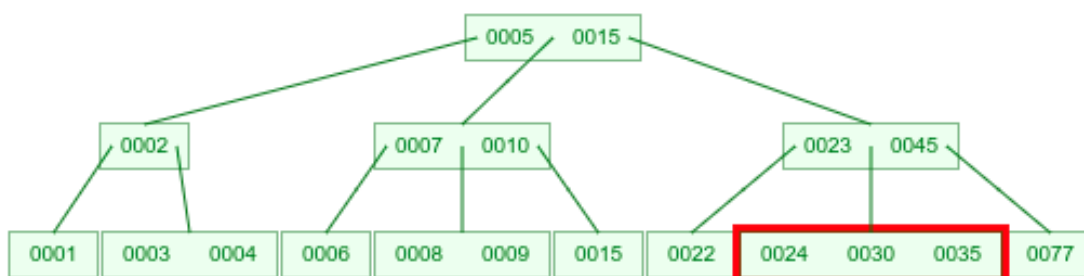


Wyszukujemy liść, do którego mamy wstawić element:

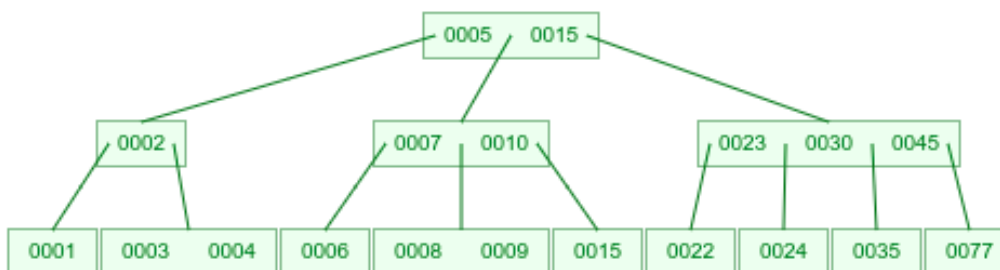




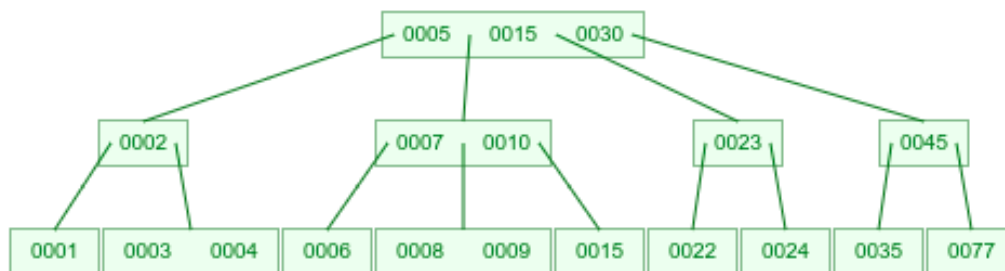
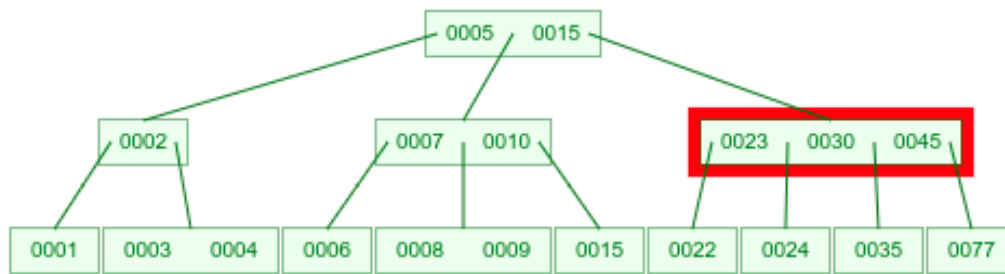
Następnie wstawiamy nasz element:



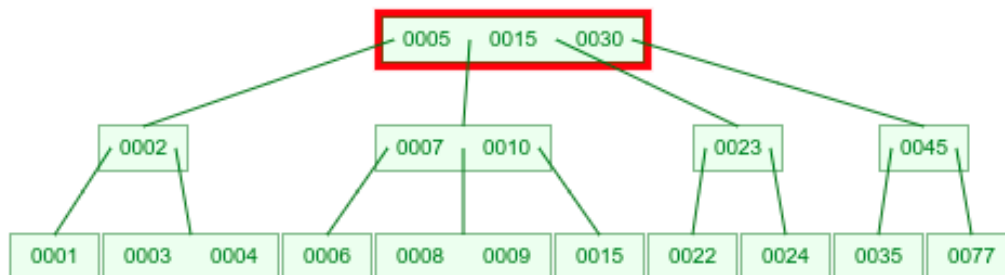
Ponieważ liść, do którego wstawiliśmy element nie spełnia warunków drzewa ($3 \geq K = 3$) musimy zbalansować drzewo. Bierzymy więc środkowy element z naszego liścia i przenosimy do rodzica, a jako jego potomków ustawiamy odpowiednio obie części podzielonego oryginalnego liścia:

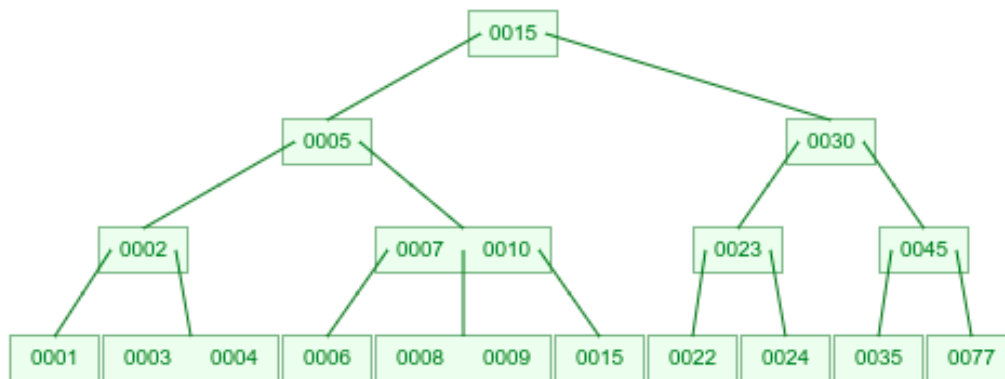


Okazuje się, że po tej operacji nasz rodzic nie spełnia założenia drzewa. Stosujemy więc wobec niego podobną operację:



Następnie okazuje się, że i w korzeniu warunki drzewa są zaburzone. Zwiększamy więc głębokość drzewa dzieląc dotychczasowy korzeń na dwa względem środkowego elementu i czyniąc z nich potomków środkowego elementu, który staje się teraz nowym korzeniem:

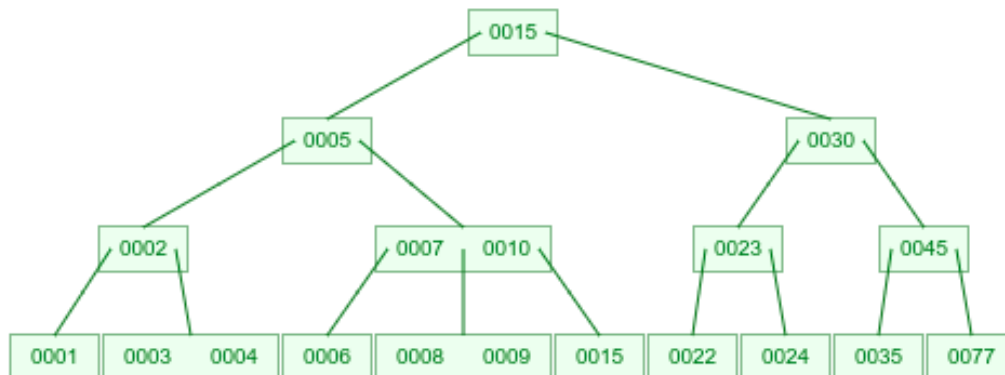




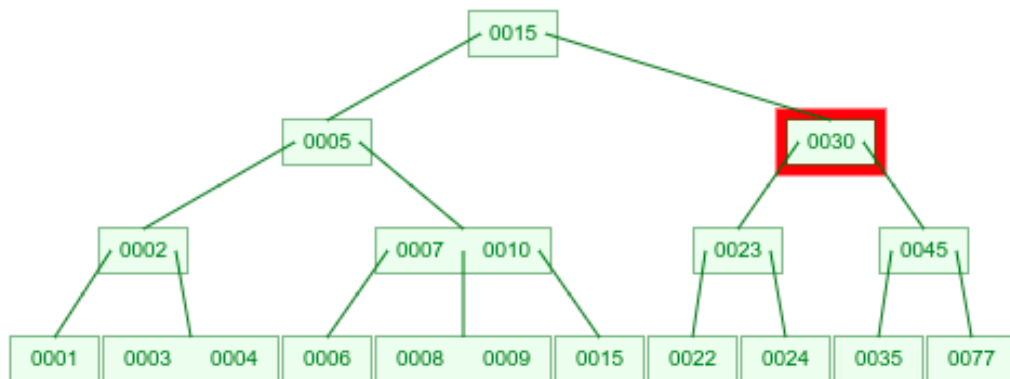
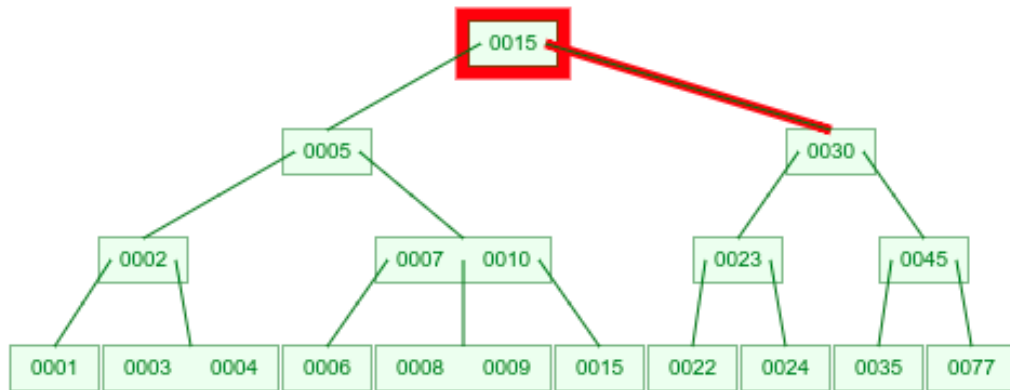
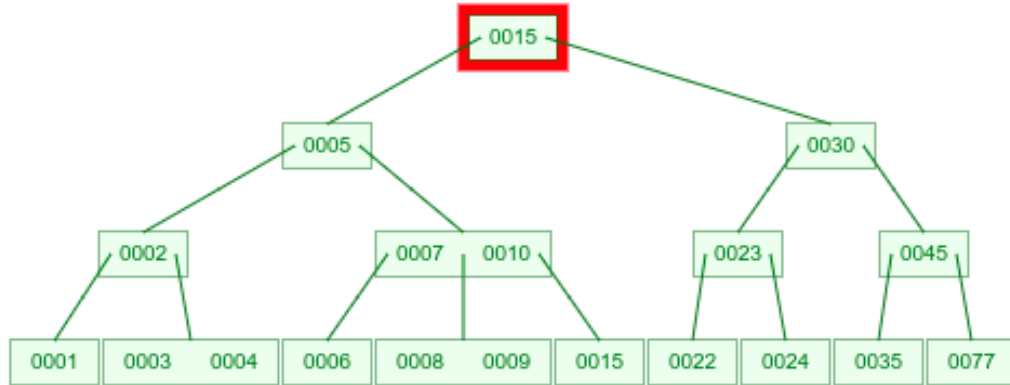
Teraz drzewo jest zbalansowane

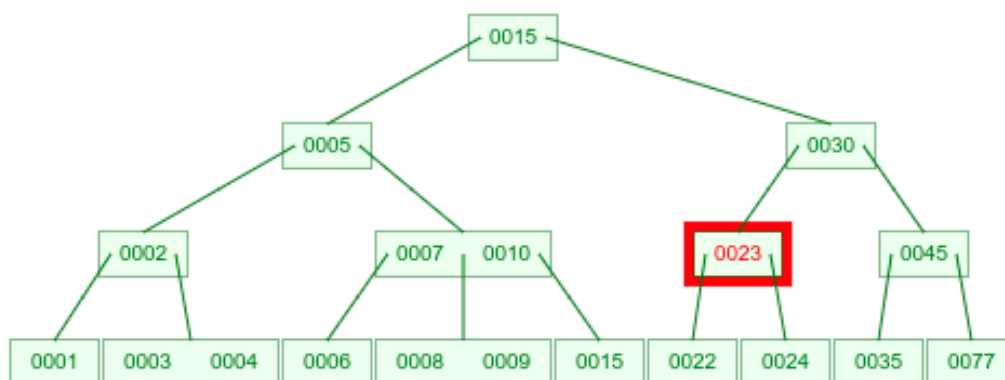
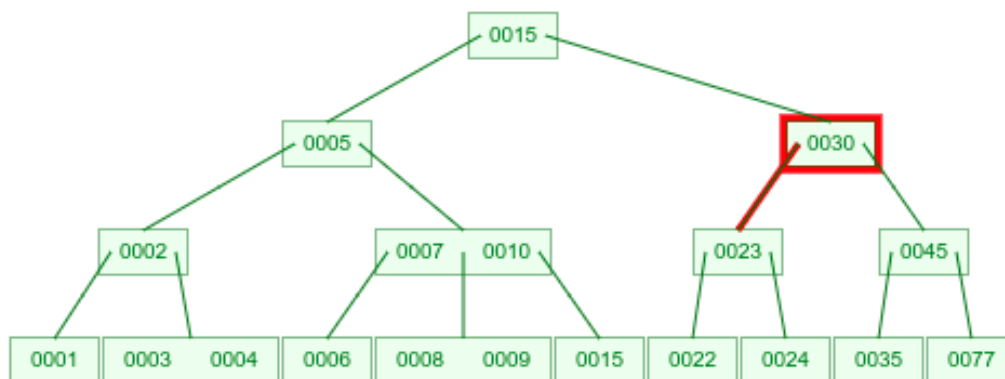
42.3 Usuwanie

Usuwanie elementu 0023 z drzewa:

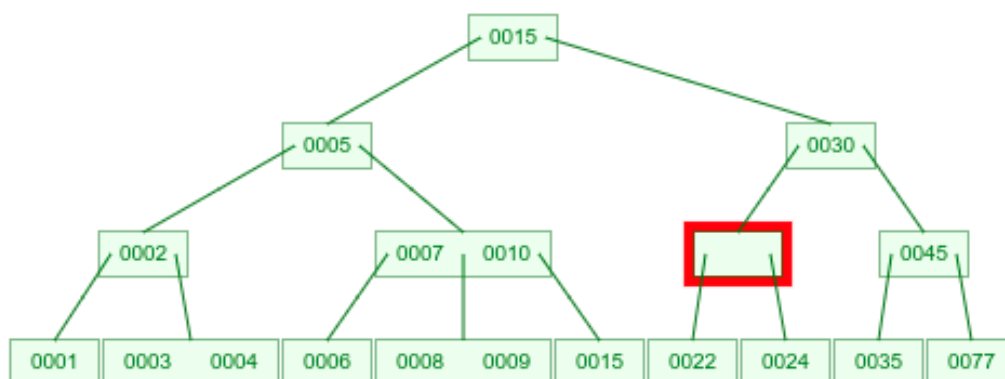


Wyszukujemy element do usunięcia:

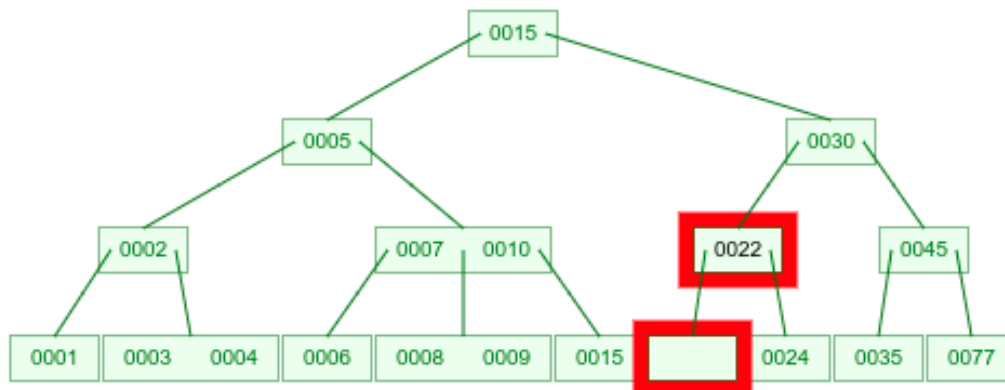




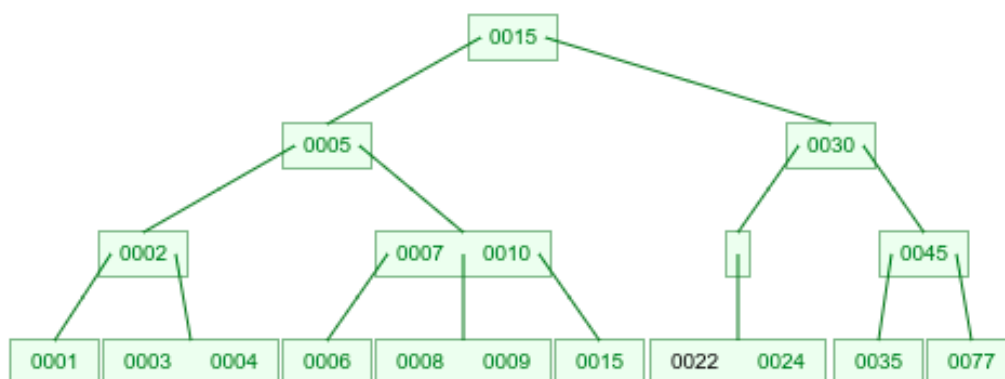
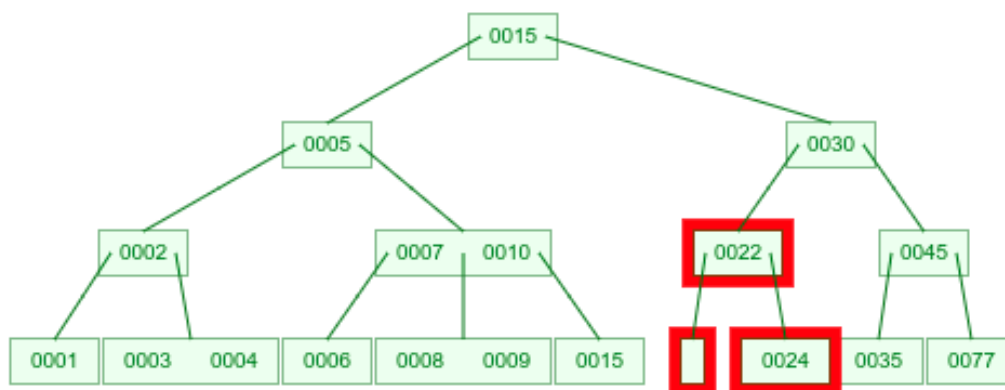
Usuujemy element:

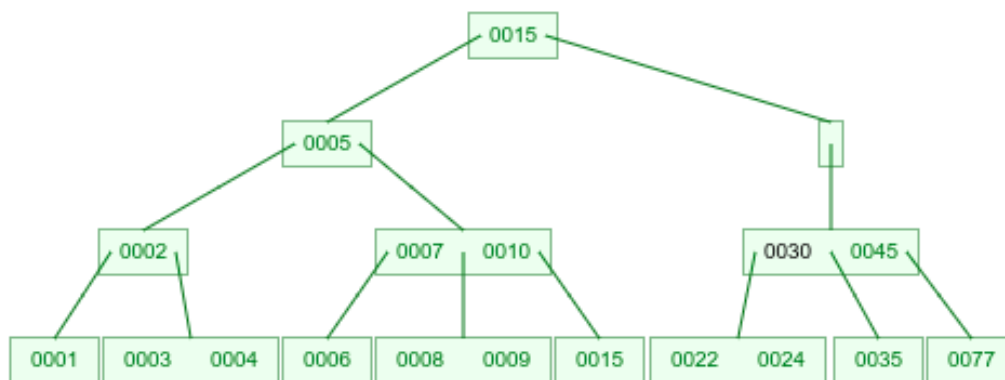
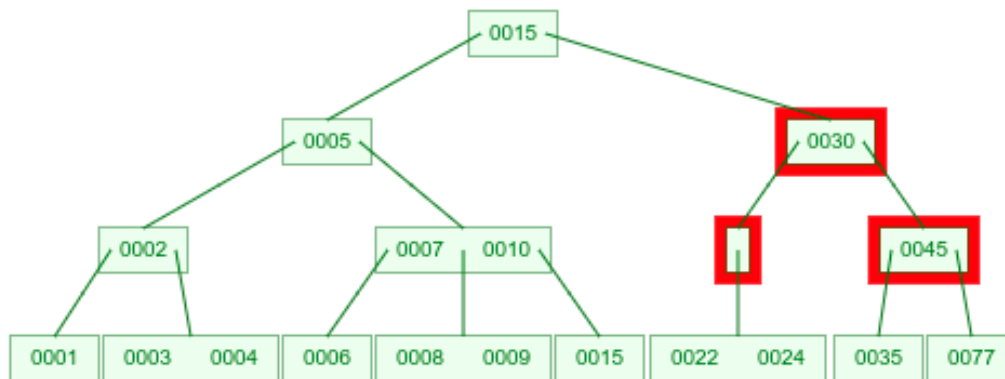


Usunięty element zastępujemy największym elementem z lewego poddrzewa:

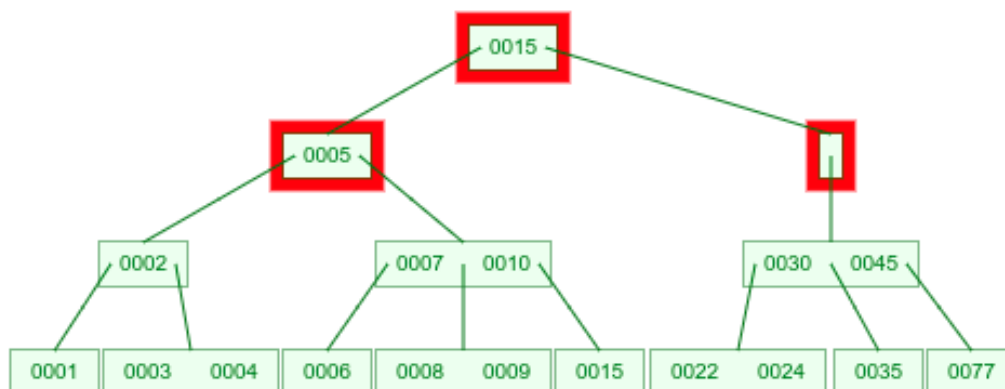


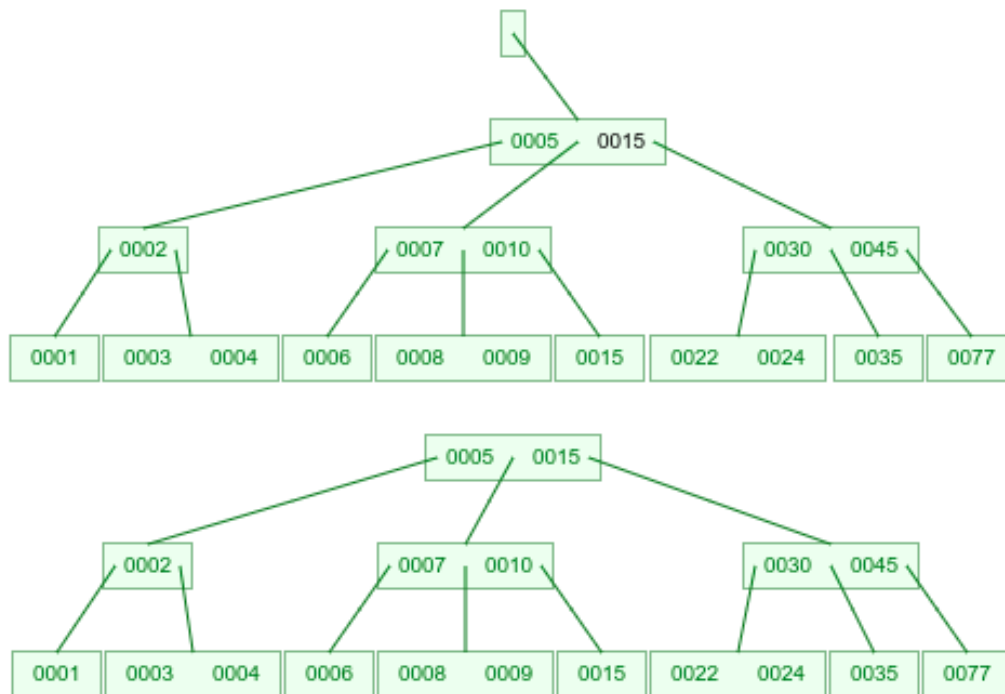
Ponieważ warunki drzewa nie są zachowane dla węzła z przedostatniego poziomu ($1 < \lceil K/2 \rceil = 2$ - minimalna ilość potomków - lewy liść w praktyce nie istnieje) musimy zbalansować drzewo:





To samo musimy przeprowadzić dla wyższego poziomu:





Teraz drzewo jest zbalansowane

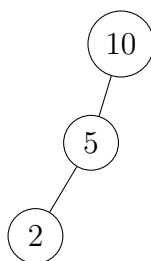
Link do symulatora: <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BTree.html>

43 Drzewa AVL: rotacje, operacje z wykorzystaniem rotacji i ich złożoność.

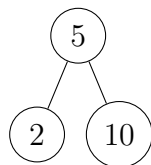
43.1 Wstawianie

Wstawiamy po kolei elementy: 10, 5, 2, 4, 3

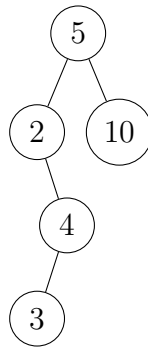
Wstawianie 2 pierwszych elementów przebiega dokładnie tak, jak dla zwykłego drzewa BST - równoważenie nie jest wymagane. Po wstawieniu 3 elementu tą samą metodą dostajemy następujące drzewo:



Ponieważ dla węzła 10 lewe poddrzewo jest o 2 głębsze niż prawe poddrzewo, musimy zastosować rotację. Na pierwszym poziomie mamy głębsze lewe poddrzewo, na drugim podobnie, musimy więc zastosować rotację LL:

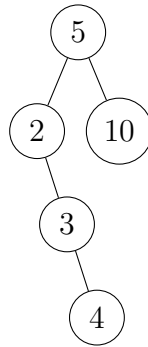


Następnie wstawiamy element 4 - równoważenie nie jest potrzebne. Wstawiamy element 3 i otrzymujemy następujące drzewo:

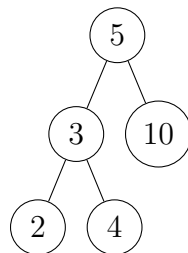


Jak widac dla węzła 2 prawe poddrzewo jest o 2 głębsze niż lewe. Ponieważ na pierwszym poziomie (względem elementu 2) mamy głębsze prawe poddrzewo, a na drugim lewe, musimy zastosować rotację RL:

Pierwszy krok rotacji RL (doprowadzamy do sytuacji dla rotacji RR):



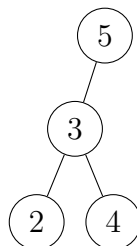
Drugi krok rotacji RL (taki sam jak przy rotacji RR):



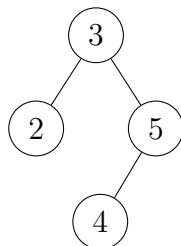
Drzewo znów jest zrównoważone

43.2 Usuwanie

Z drzewa z poprzedniego przykładu usuniemy element 10. Po jego usunięciu tak jak w przypadku zwykłego drzewa BST, otrzymujemy poniższe drzewo:



Widzimy że dla węzła 5 drzewo jest niezrównoważone. Na pierwszym poziomie lewe poddrzewo jest głębsze. Na drugim poziomie oba poddrzewa mają tę samą głębokość - możemy więc zastosować prostszą wersję algorytmu rotacji - rotację LL (a nie rotację LR):



Teraz drzewo jest znów zrównoważone.

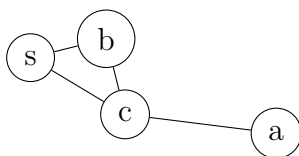
Link do symulatora: <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>

44 Algorytmy przeszukiwania wszerz i włąb w grafach.

44.1 Przeszukiwanie wszerz

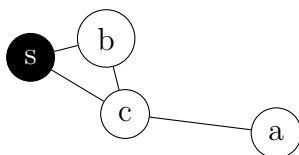
$$S = \{s\}$$

$$P = \{\}$$



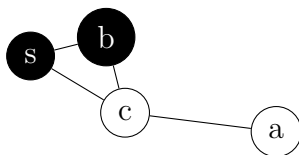
$$S = \{b, c\}$$

$$P = \{b : s, c : s\}$$



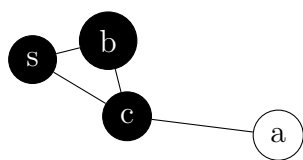
$$S = \{c\}$$

$$P = \{b : s, c : s\}$$



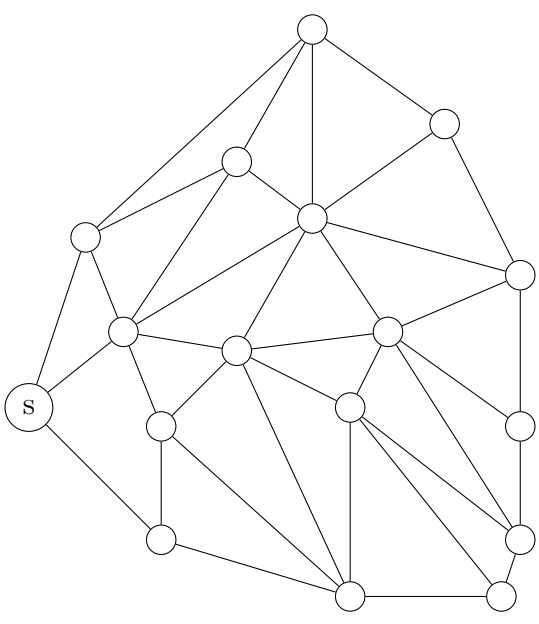
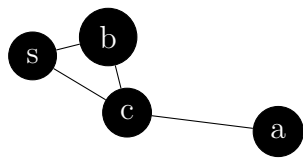
$$S = \{a\}$$

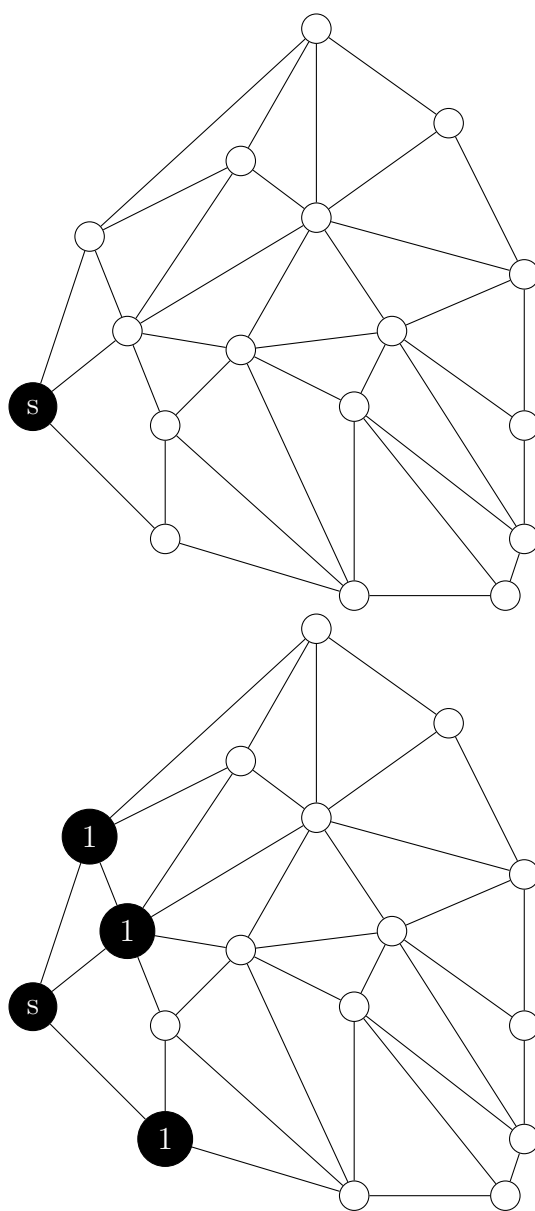
$$P = \{b : s, c : s, a : c\}$$

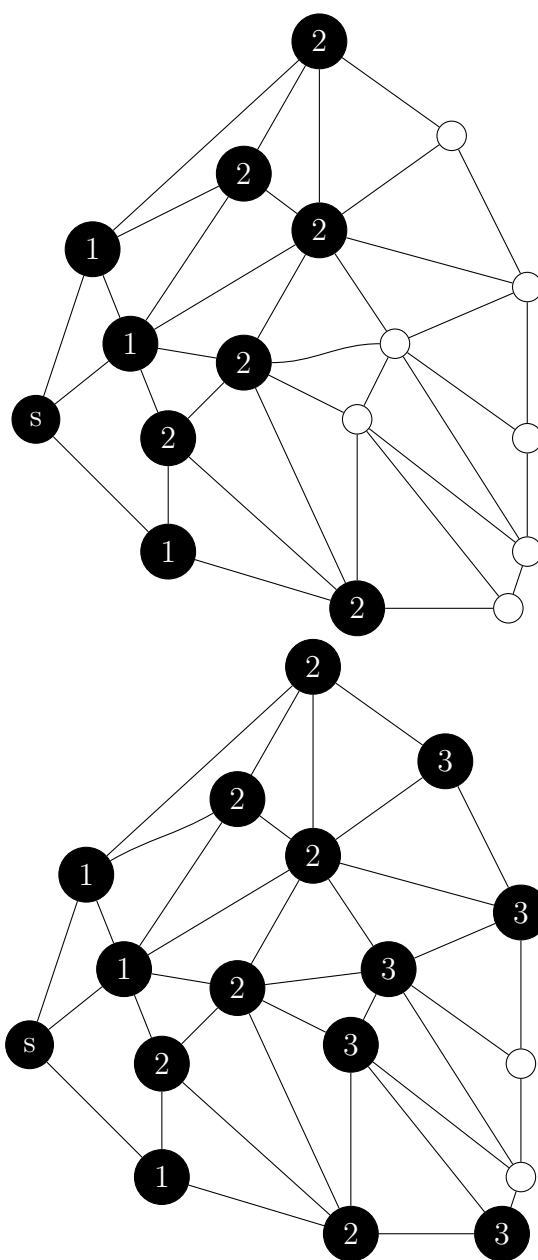


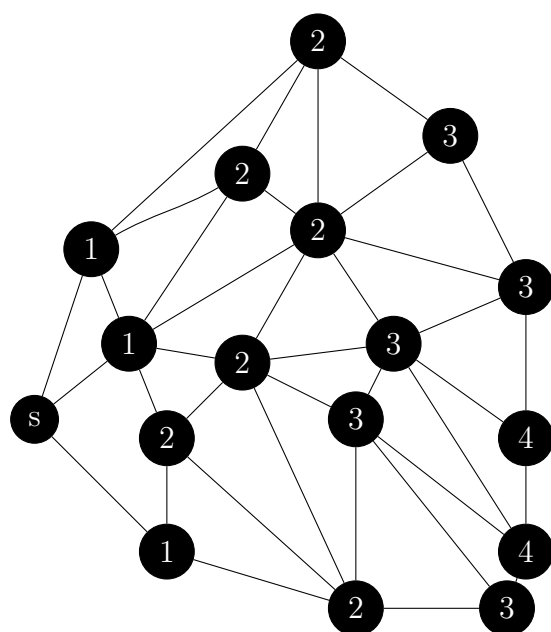
$$S = \{\}$$

$$P = \{b : s, c : s, a : c\}$$



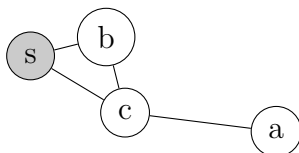




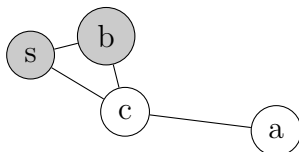


44.2 Przeszukiwanie wgłąb

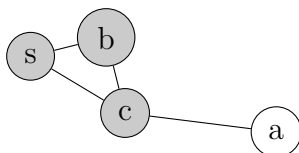
$$P = \{\}$$



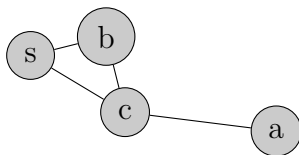
$$P = \{b : s\}$$



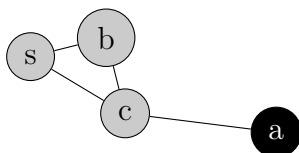
$$P = \{b : s, c : b\}$$



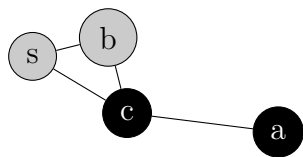
$$P = \{b : s, c : b, a : c\}$$



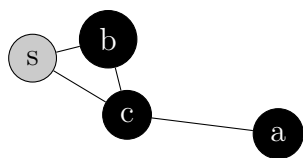
$$P = \{b : s, c : b, a : c\}$$



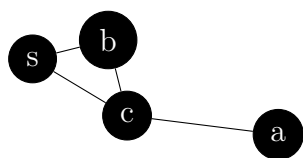
$$P = \{b : s, c : b, a : c\}$$



$$P = \{b : s, c : b, a : c\}$$



$$P = \{b : s, c : b, a : c\}$$



44.2.1 Sortowanie topologiczne z użyciem DFS

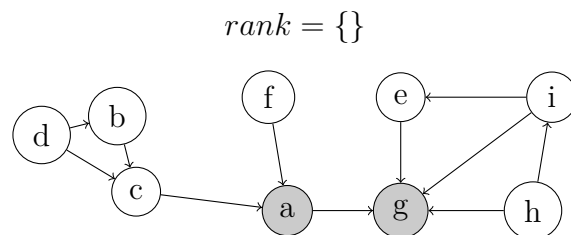
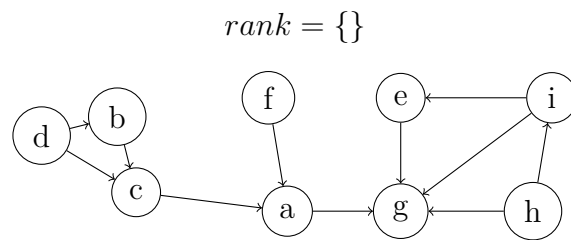
DAG (*directed acyclic graph*): graf skierowany bez cykli. Przykłady użycia: graf dziedziczenia, menadżer pakietów, drzewo technologii.

Problem: Dla DAG podaj listę wierzchołków w takiej kolejności, aby dla każdej krawędzi $u \rightarrow v$, u będzie występował przed v .

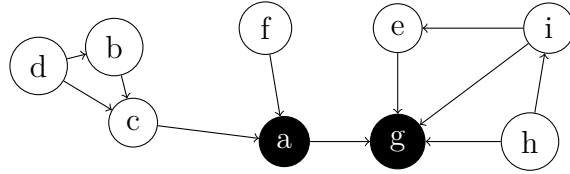
Algorytm:

1. Wykonaj DFS (zaczynając od dowolnego białego wierzchołka).
2. Przy kolorowaniu wierzchołka na czarno, przypisz mu rangę, zaczynając od 1.
3. Powtarzaj kroki 1., 2. aż do pomalowania całego grafu.
4. Zwróć listę wierzchołków posortowanych odwrotnie według rangi

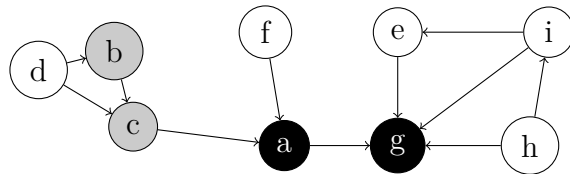
Złożoność: Taka sama jak dla DFS, tzn. $\theta(v + e)$



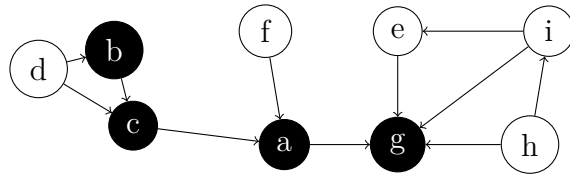
$$rank = \{a : 2, g : 1\}$$



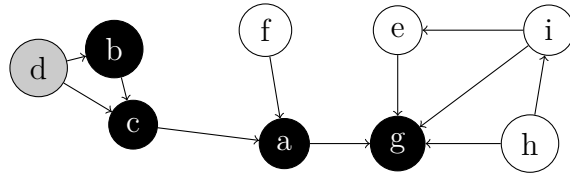
$$rank = \{a : 2, g : 1\}$$



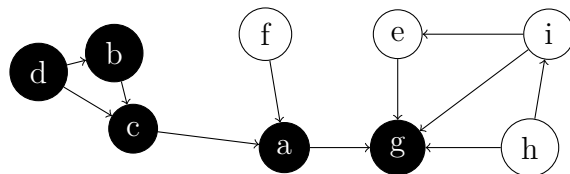
$$rank = \{b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



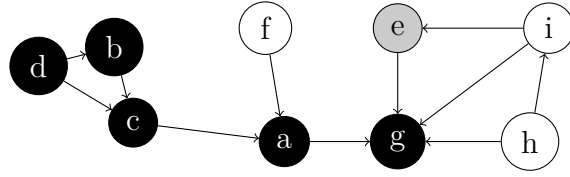
$$rank = \{b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



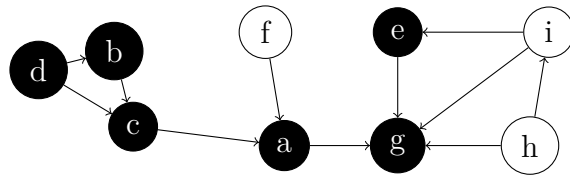
$$rank = \{d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



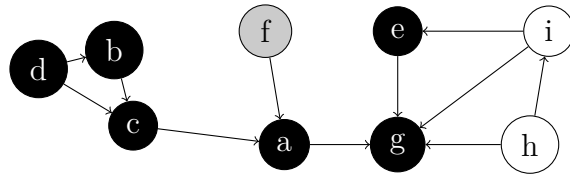
$$rank = \{d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



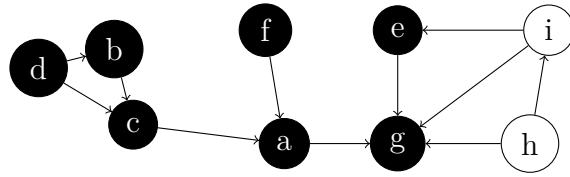
$$rank = \{e : 6, d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



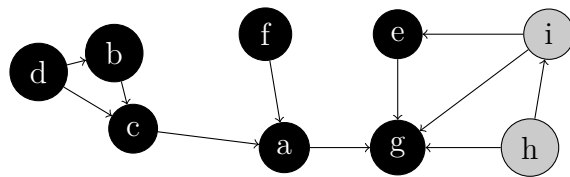
$$rank = \{e : 6, d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



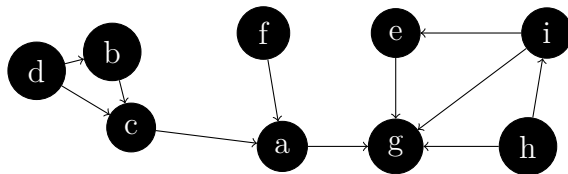
$$rank = \{f : 7, e : 6, d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



$$rank = \{f : 7, e : 6, d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



$$rank = \{h : 9, i : 8, f : 7, e : 6, d : 5, b : 4, c : 3, a : 2, g : 1\}$$



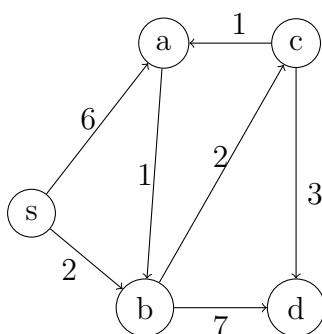
$$result = [h, i, f, e, d, b, c, a, g]$$

45 Algorytmy wyszukiwania najkrótszej ścieżki (Dijkstra oraz Bellmana-Forda).

45.1 Algorytm Dijkstra

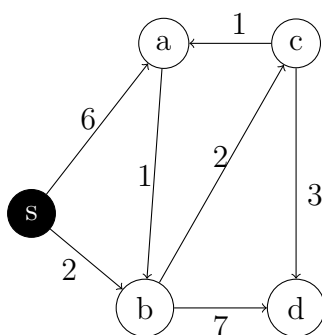
$$D = \{s : 0, a : \infty, b : \infty, c : \infty, d : \infty\}$$

$$P = \{\}$$



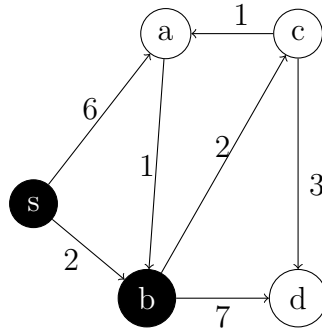
$$D = \{s : 0, \mathbf{a} : 6, \mathbf{b} : 2, c : \infty, d : \infty\}$$

$$P = \{\mathbf{a} : s, \mathbf{b} : s\}$$



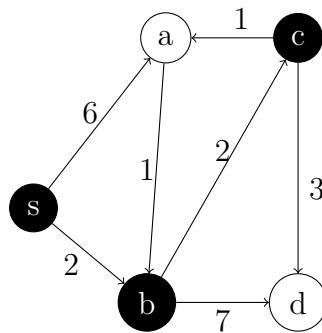
$$D = \{s : 0, a : 6, b : 2, c : 4, d : 9\}$$

$$P = \{a : s, b : s, c : b, d : b\}$$



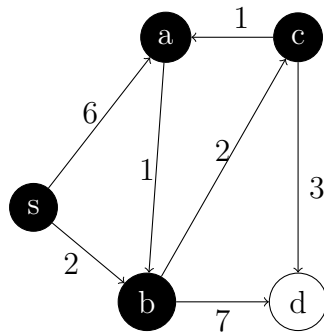
$$D = \{s : 0, \mathbf{a} : 5, b : 2, c : 4, \mathbf{d} : 7\}$$

$$P = \{\mathbf{a} : \mathbf{c}, b : s, c : b, \mathbf{d} : \mathbf{c}\}$$



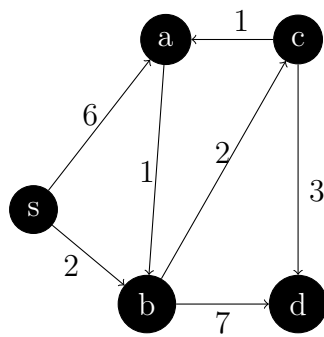
$$D = \{s : 0, a : 5, b : 2, c : 4, d : 7\}$$

$$P = \{a : c, b : s, c : b, d : c\}$$

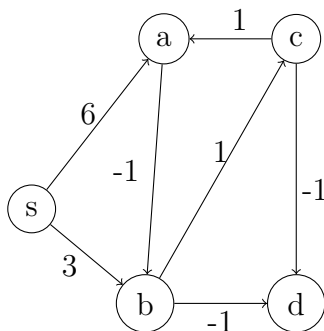


$$D = \{s : 0, a : 5, b : 2, c : 4, d : 7\}$$

$$P = \{a : c, b : s, c : b, d : c\}$$



45.2 Algorytm Bellmana-Forda



Wartości w D w zależności od iteracji:

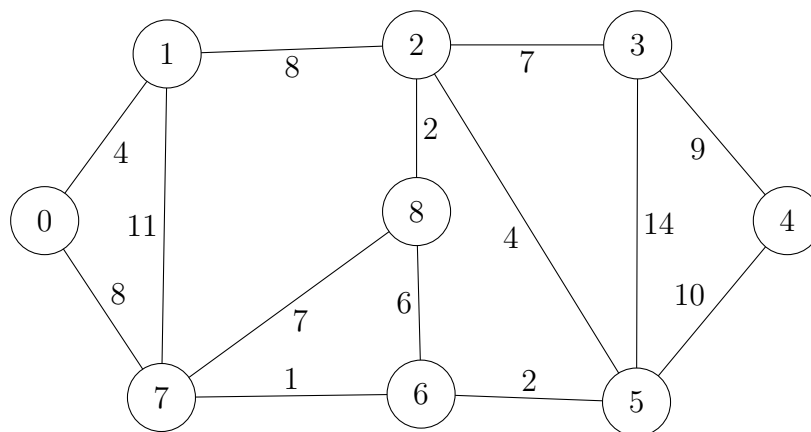
i	a	b	c	d
0	∞	∞	∞	∞
1	6	3	∞	∞
2	5	3	4	2
3	5	3	4	2

Wartości w P w zależności od iteracji:

i	a	b	c	d
0				
1	s	s		
2	c	s	b	b
3	c	s	b	b

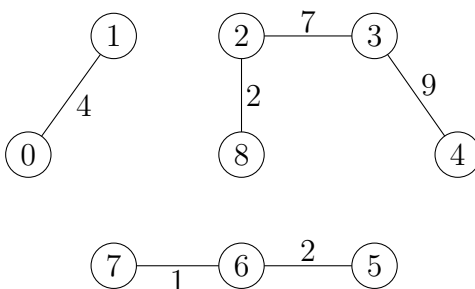
- 46 Programowanie dynamiczne: podział na pod-problemy, porównanie z metodą "dziel i zwyciężaj".
- 47 Algorytm zachłanny: przykład optymalnego i nieoptymalnego wykorzystania.
- 48 Kolorowania wierzchołkowe (grafów planarnych) i krawędziowe grafów, algorytmy i ich złożoności.

49 Algorytmy wyszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego: Boruvki, Prima i Kruskala.

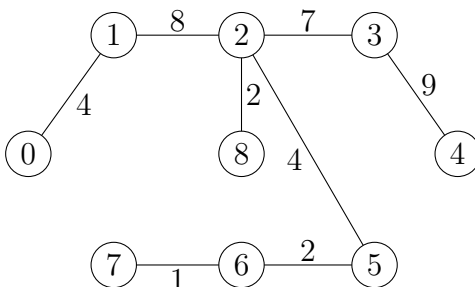


49.1 Algorytm Boruvki

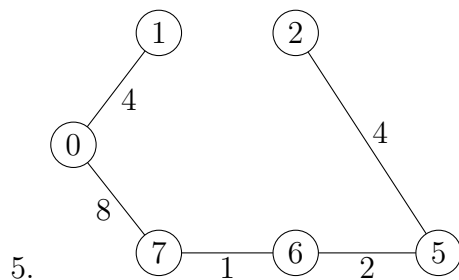
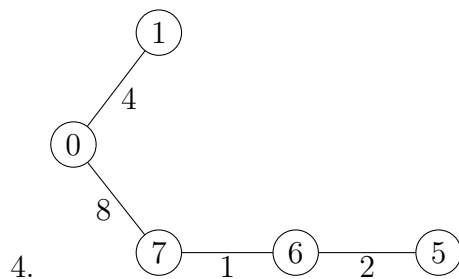
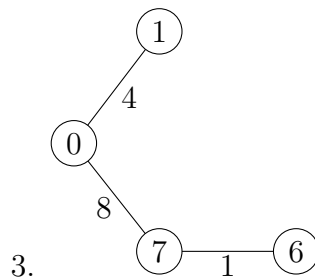
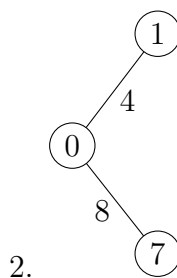
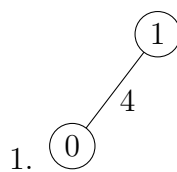
1. Wybrane krawędzie o najmniejszych wagach

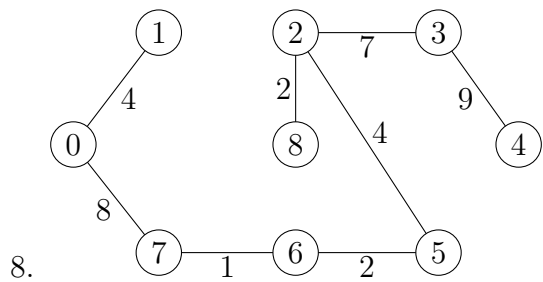
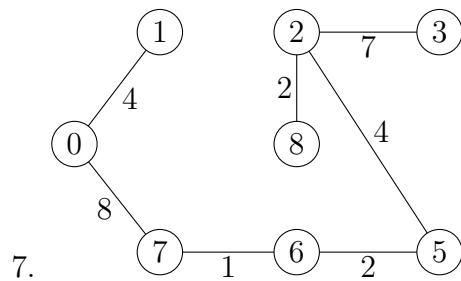
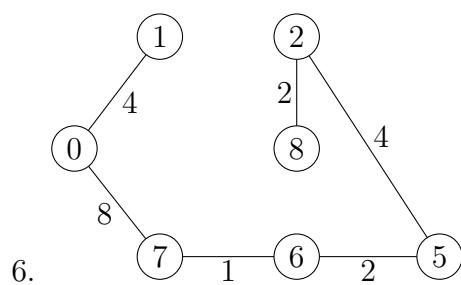


2. Powtarzamy wybór krawędzi o najmniejszych wagach dla nowo powstałych zbiorów.



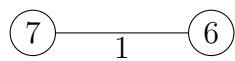
49.2 Algorytm Prima



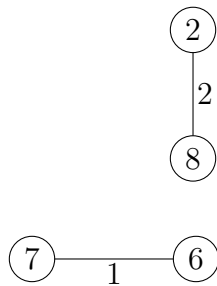


49.3 Algorytm Kruskala

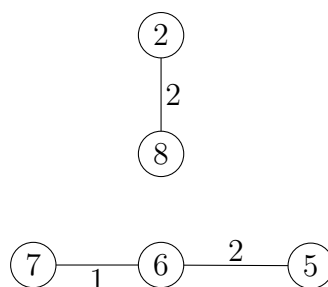
1. Wybierz krawędź 7–6: Brak cyklu, uwzględnij ją.



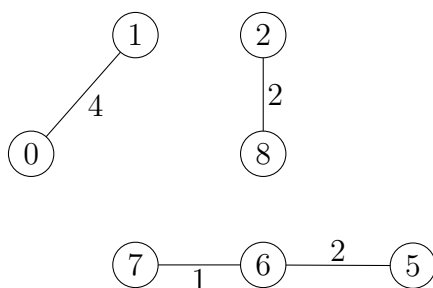
2. Wybierz krawędź 8–2: Brak cyklu, uwzględnij ją.



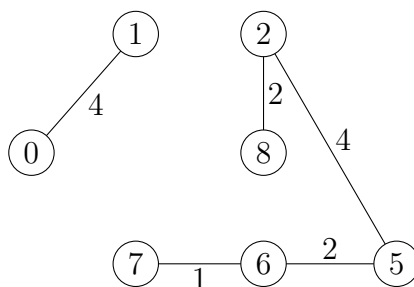
3. Wybierz krawędź 6–5: Brak cyklu, uwzględnij ją.



4. Wybierz krawędź 0–1: Brak cyklu, uwzględnij ją.

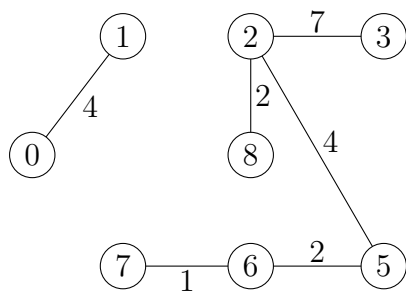


5. Wybierz krawędź 2–5: Brak cyklu, uwzględnij ją.



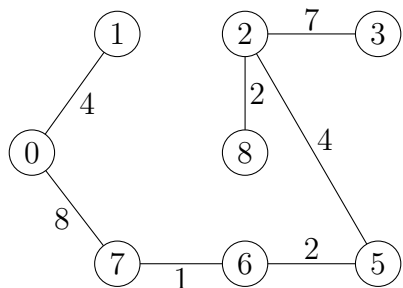
6. Wybierz krawędź 8–6: Cykl, odrzuć krawędź.

7. Wybierz krawędź 2–3: Brak cyklu, uwzględnij ją.



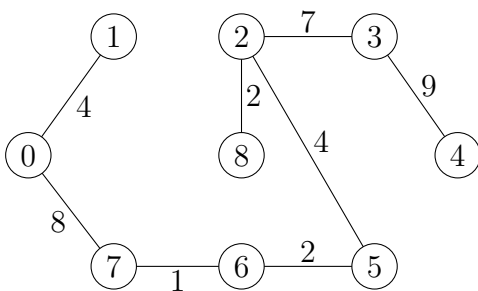
8. Wybierz krawędź 7–8: Cykl, odrzuć krawędź.

9. Wybierz krawędź 0–7: Brak cyklu, uwzględnij ją.



10. Wybierz krawędź 1–2: Cykl, odrzuć krawędź.

11. Wybierz krawędź 3–4: Brak cyklu, uwzględnij ją.

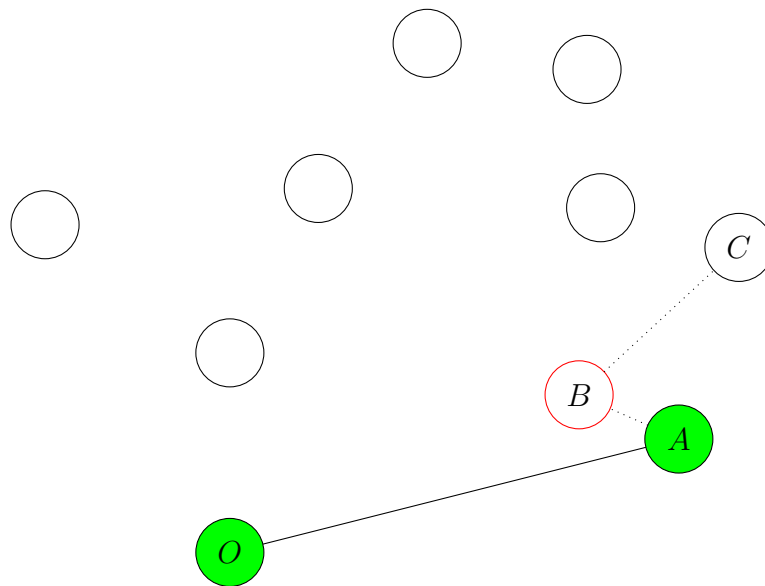


Liczba użytych krawędzi wynosi $(V - 1)$, algorytm kończy pracę.

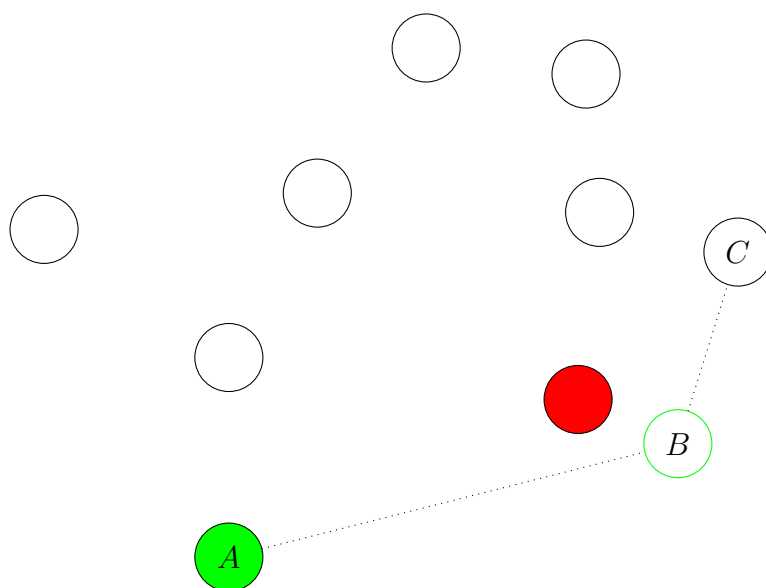
50 Najważniejsze algorytmy wyznaczania otoczki wypukłej zbioru punktów w układzie współrzędnych (Grahama, Jarvisa, algorytm przyrostowy (quickhull)).

50.1 Algorytm Grahama

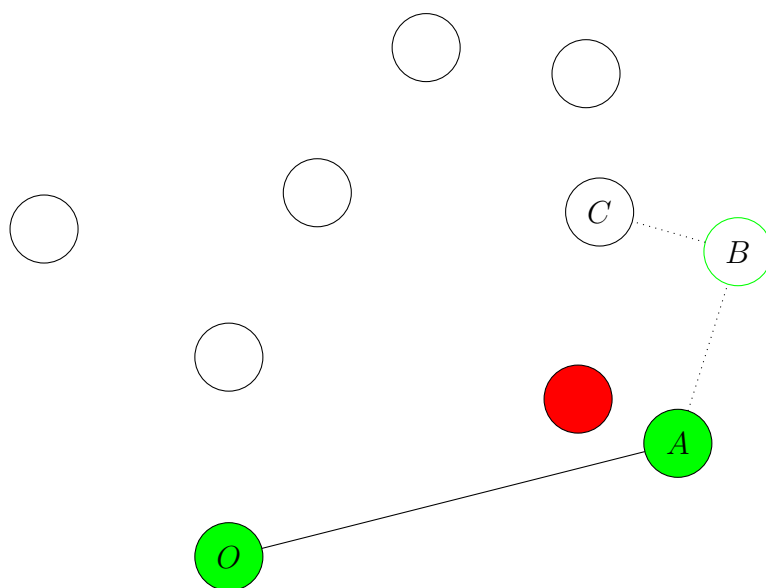
.



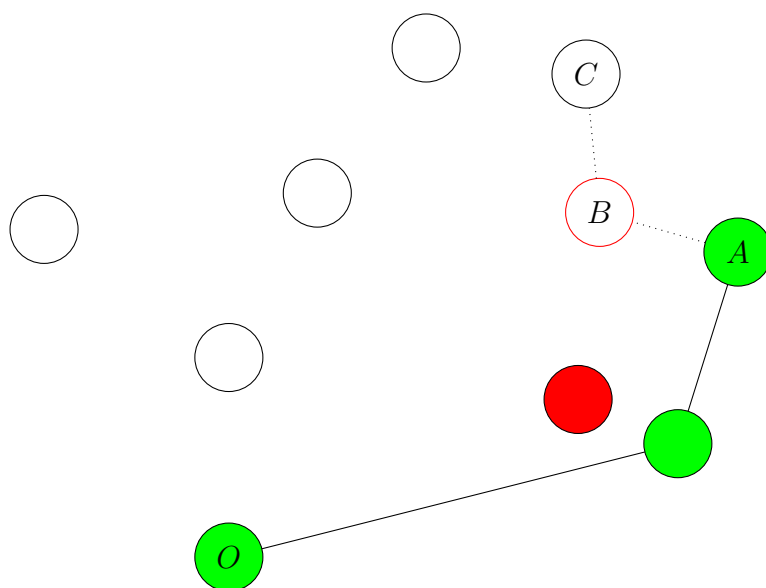
Bierzemy pierwsze trzy punkty A, B, C. Sprawdzamy, czy B należy do trójkąta AOC - należy, więc nie należy do otoczki wypukłej. Usuwamy go z listy, cofamy się o jeden (do O).



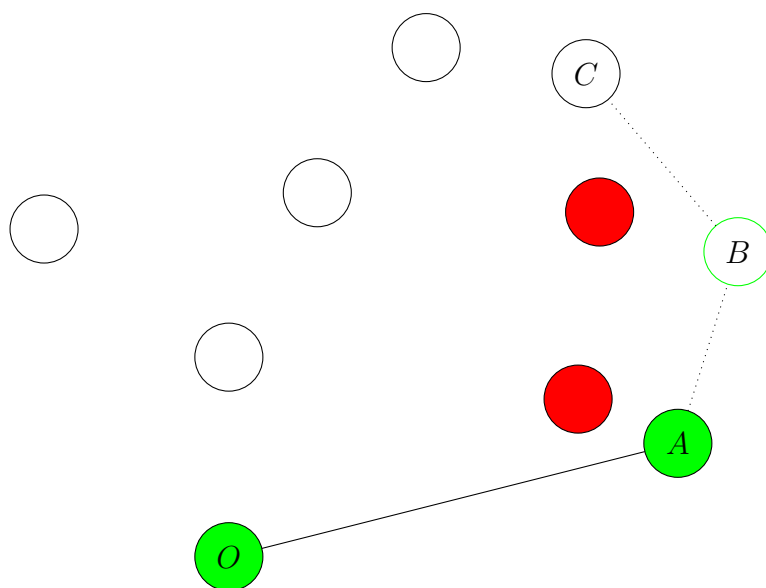
B nie należy do trójkąta AOC . Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



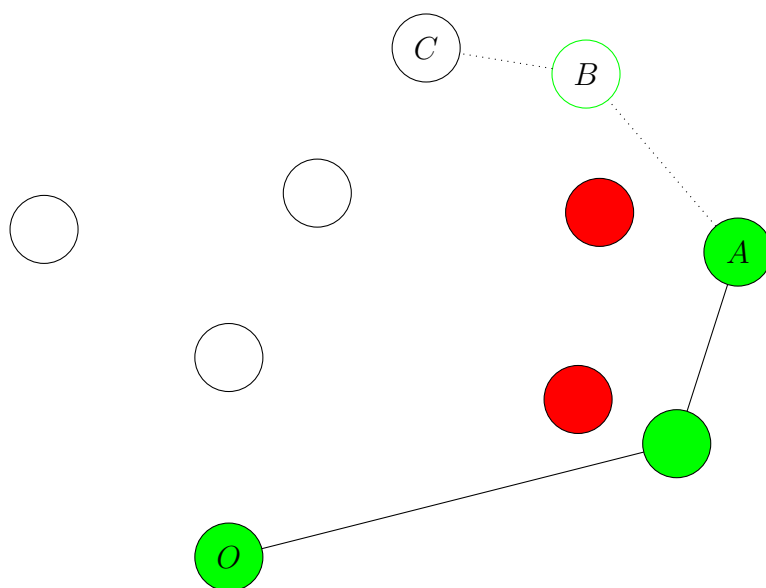
B nie należy do trójkąta AOC . Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



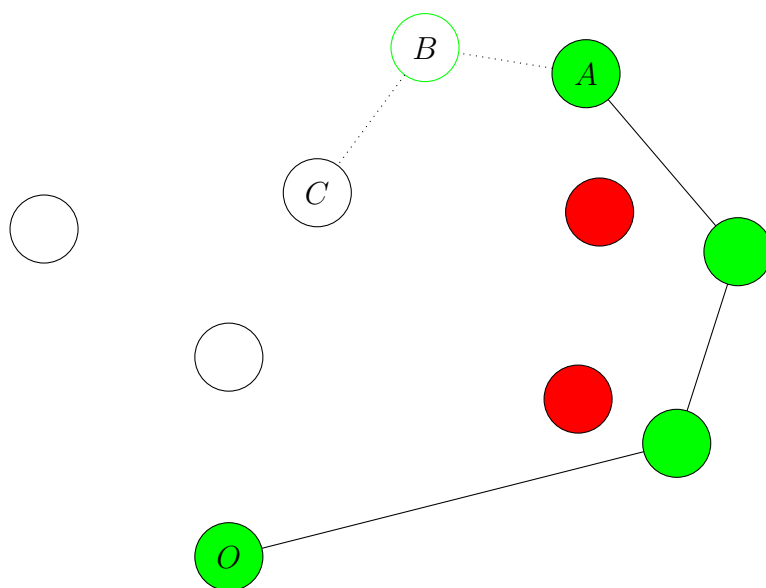
B należy do trójkąta AOC . Usuwamy go z listy i cofamy się na poprzednią pozycję.



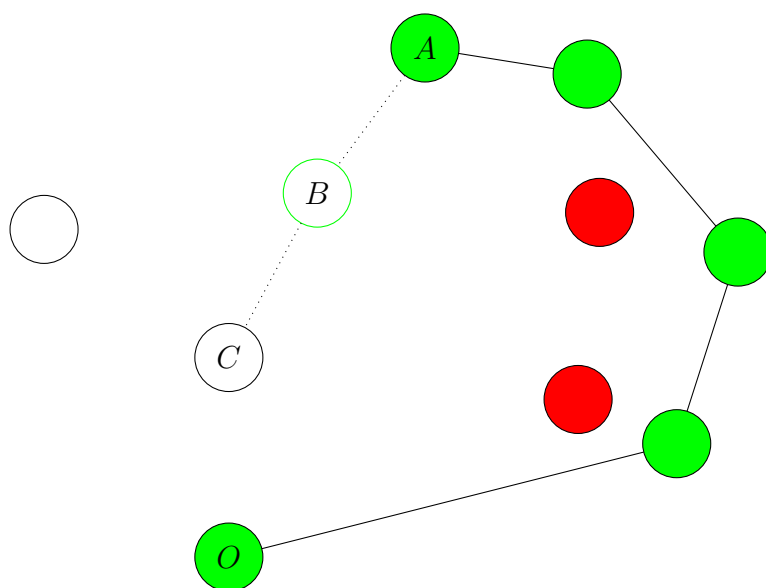
B nie należy do trójkąta AOC . Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



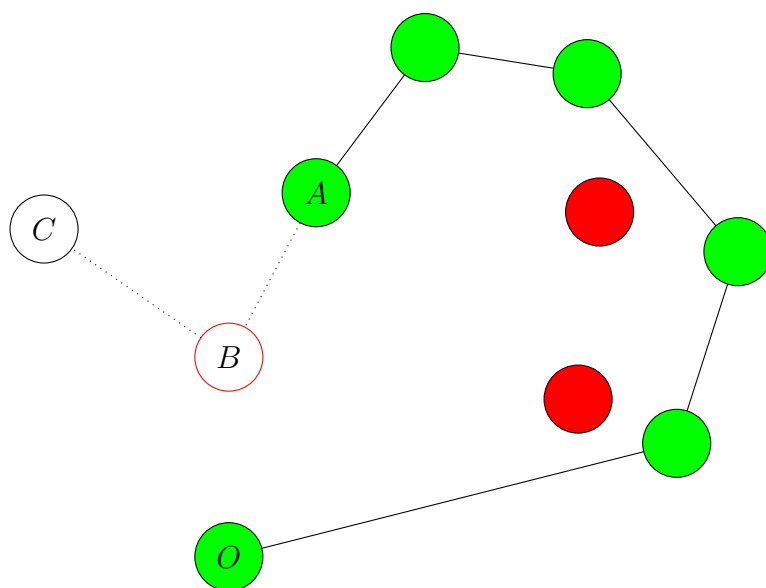
B nie należy do trójkąta AOC. Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



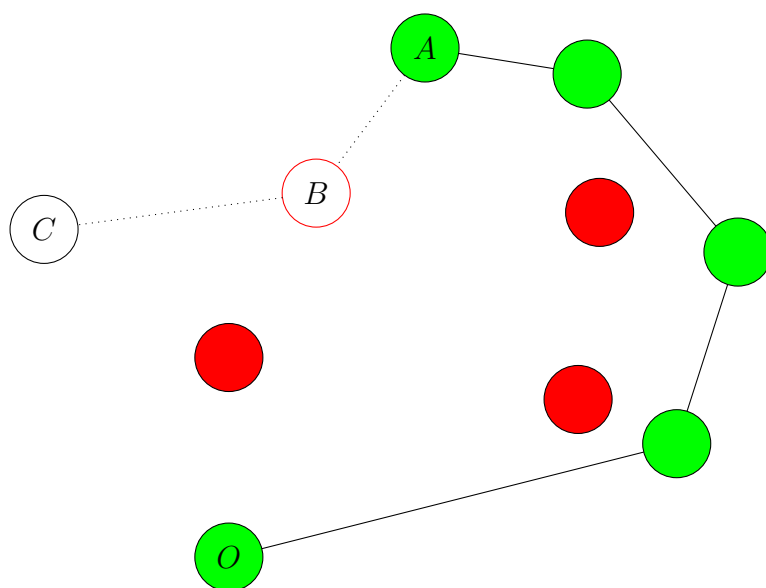
B nie należy do trójkąta AOC. Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



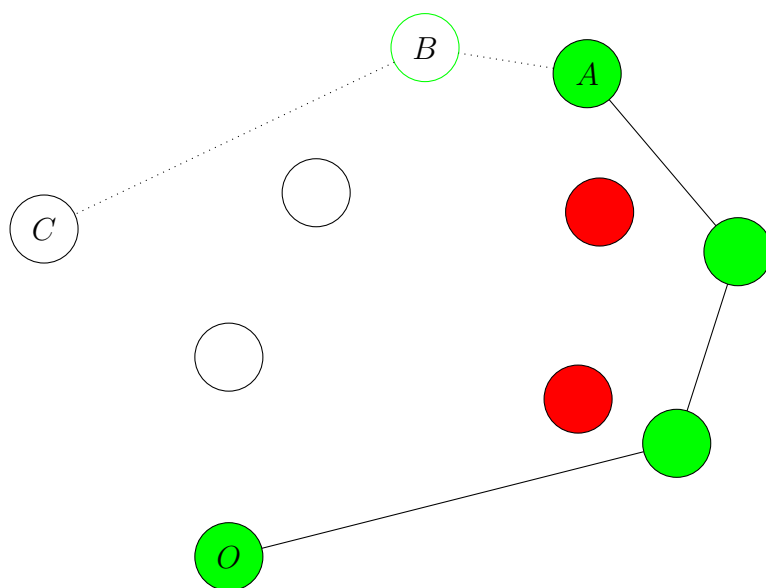
B nie należy do trójkąta AOC. Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



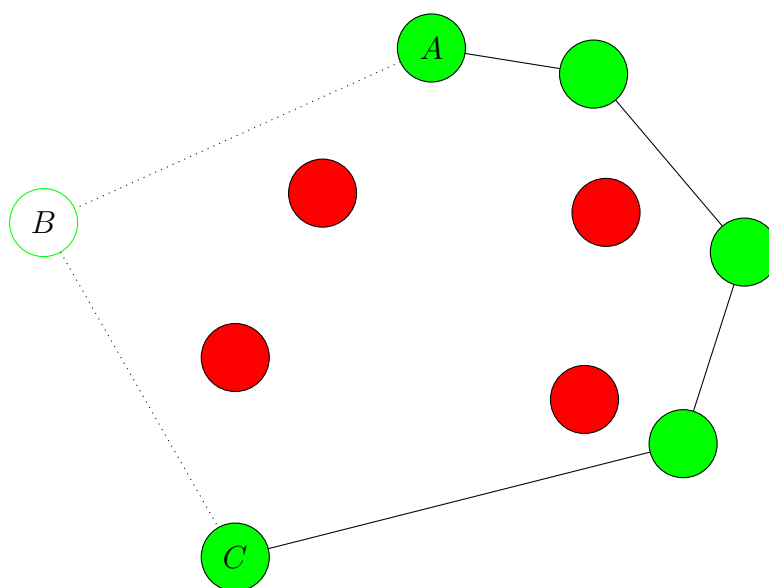
B należy do trójkąta AOC. Usuwamy go z listy i cofamy się na poprzednią pozycję.



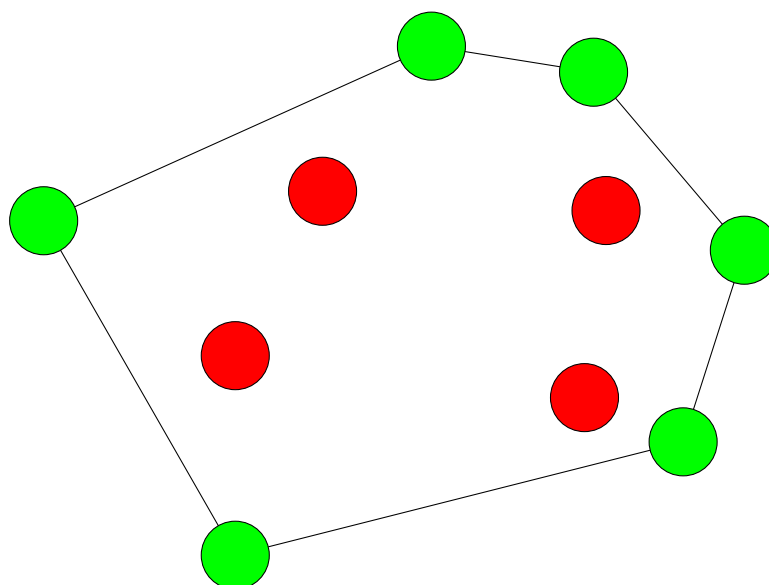
B należy do trójkąta AOC . Usuwamy go z listy i cofamy się na poprzednią pozycję.



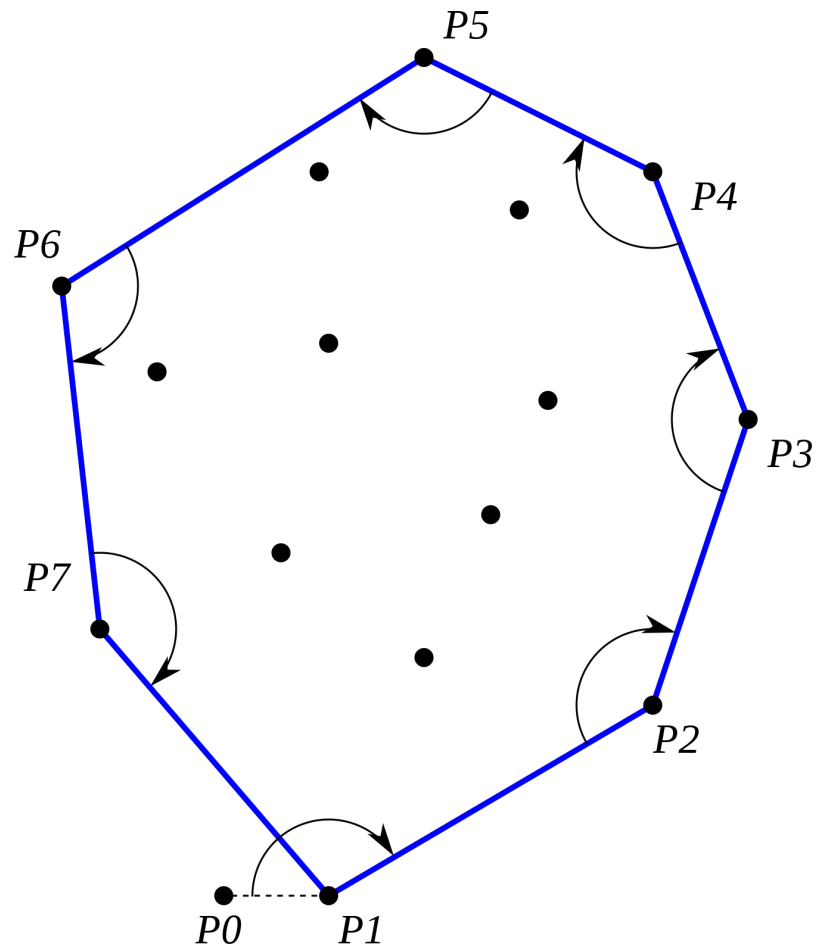
B nie należy do trójkąta AOC . Bierzemy kolejne wierzchołki z listy.



B nie należy do trójkąta AOC, więc należy do otoczki. Doszliśmy do punktu O - mamy otoczkę.



50.2 Algorytm Jarvis.



50.3 QuickHull

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Quickhull.gif>

51 Problemy P, NP, NP-zupełne i zależności między nimi. Hipoteza P vs. NP.

P vs NP - przykład:

Czy jakikolwiek podzbiór danego zbioru $-2, 6, -3, 72, 10, -11$ sumuje się do zera?

Trudno znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia w czasie wielomianowym. Nasuwający się algorytm sprawdzenia wszystkich możliwych podzbiorów ma złożoność wykładniczą ze względu na liczebność zbioru. **Nie wiadomo zatem czy problem ten jest klasy P.**

Na pewno natomiast uzyskawszy z zewnątrz kandydata na rozwiązanie (np. $-2, 6, -3, 10, -11$) można w liniowym, czyli również wielomianowym, czasie sprawdzić czy sumuje się do zera. **Jest to zatem problem NP.**

52 Automat minimalny, wybrany algorytm minimalizacji.

52.1 Automat minimalny

Konstrukcja automatu minimalnego oparta na pochodnych brzozowskiego opisana została w sekcji 32.1

52.2 Minimalizacja automatu

Zadanie 52.1 Niech $A = \{a, b\}$ będzie alfabetem.
 Zminimalizuj automat $\mathcal{A} = (S, A, f, s_0, T)$, gdzie $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $s_0 = 0$, $T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, a f to funkcja przejść zdefiniowana w tabeli poniżej

f	0	1	2	3	4	5	6
a	1	1	2	1	6	5	6
b	2	3	4	5	2	3	6

Zgodnie z algorytmem rozpoczynamy od dwóch zbiorów: stanów terminalnych i pozostałych:

I II
 $\{0, 1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Zbiory są ponumerowane. W następnych krokach będziemy sprawdzać do jakich zbiorów będziemy trafiać zaczynając od danego stanu pod wpływem wszystkich liter alfabetu, a następnie rozdzielać te zbiory na tej podstawie:

I II
 $\{0, 1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 I,II I,II II I,II II II II

Jak widac na powyższym przykładzie ze stanu 0 pod wpływem litery a przechodzimy do stanu 1, który jest aktualnie w zbiorze I, a pod wpływem litery b przechodzimy do stanu 2, który jest aktualnie w zbiorze II - stąd pod stanem 0 napisaliśmy I,II. Dla odmiany ze stanu 2 pod wpływem a przechodzimy do stanu 2, który aktualnie

znajduje się w zbiorze II, a pod wpływem b przechodzimy do stanu 4, który aktualnie również znajduje się w zbiorze II, stąd pod stanem 2 mamy napisane tylko II.

Jak widzimy wszystkie stany ze zbioru I trafiają do tych samych "grup" zbiorów - wszystkie trafiają do I,II (kolejność nie ma znaczenia), więc zbiór I nie wymaga na razie podziału. W przypadku zbioru II, stan 3 trafia do innego zestawu zbiorów niż pozostałe stany, więc musimy go wydzielić ze zbioru:

```
I II III
{0, 1}, {3}, {2, 4, 5, 6}
```

Całą procedurę powtarzamy, aż do ustabilizowania się zbiorów (braku nowych podziałów):

Wyliczenia dla 3 możemy pominąć - zbioru 1-elementowego już nie podzielimy

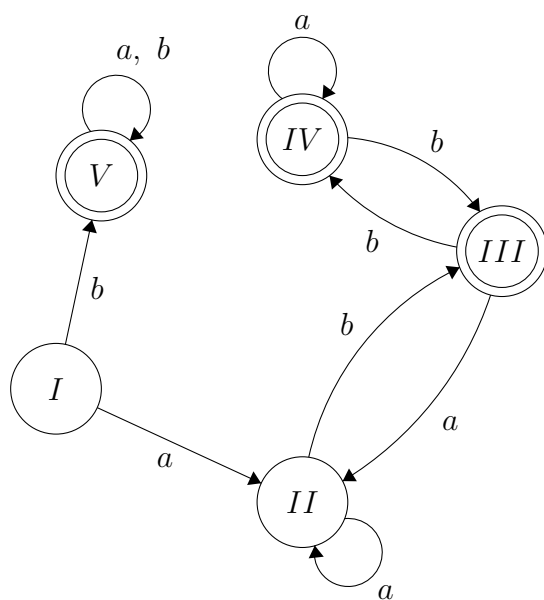
```
I II III
{ 0 , 1 }, { 3 }, { 2 , 4 , 5 , 6 }
I,III I,II III III II,III III
```

```
I II III IV V
{0}, {1}, {3}, {5}, { 2 , 4 , 6 }
V V V
```

```
I II III IV V
{0}, {1}, {3}, {5}, {2, 4, 6}
```

Jak widzimy zbiory się ustabilizowały. Te zbiory reprezentują stany naszego automatu minimalnego. Stanem początkowym jest ten zbiór, w którym znajduje się stan początkowy oryginalnego automatu. Stanami końcowymi są te zbiory, w których znajduje się przynajmniej jeden stan końcowy oryginalnego automatu.

Nasz zminimalizowany automat wygląda następująco:



53 Lemat o pompowaniu dla języków regularnych.

Zadanie 53.1 Wykorzystując lemat o pompowaniu udowodnij, że język $\{a^n b^m c^{n+m} | n, m > 0\} \subset \{a, b, c\}^*$ nie jest regularny

Założmy, że język ten jest regularny. Wtedy zgodnie z lematem o pompowaniu:

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}_1 : \forall w \in L : |w| \geq N \quad \exists v_1, v_2 \in A^* \quad \exists u \in A^+ \quad |v_1 u| < N \\ w = v_1 u v_2 \quad v_1 u^* v_2 \subset L \\ \forall i \geq 0 \quad v_1 u^i v_2 \in L \end{aligned}$$

Niech nasze $w = a^N b^N c^{2N}$. Rozważmy wszystkie możliwe podziały słowa w , takie że $|v_1 u| < N$. W przypadku tak dobranego słowa jest tylko jeden typ takiego podziału:

$$v_1 = a^{N-i}$$

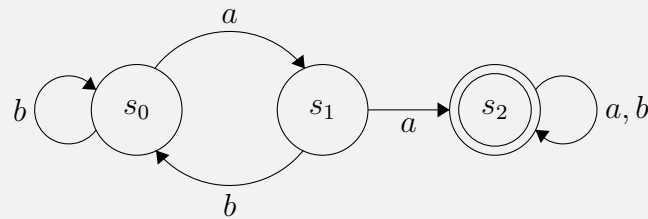
$$u = a^i$$

gdzie $1 \leq i \leq N - 1$

Musimy teraz znaleźć takie j dla którego słowo $v_1 u^j v_2 \notin L$. Takie j to np. 2 (choć tutaj zasadniczo każde $j \neq 1$ się nadaje). Dla $j = 2$ nasze słowo przyjmuje postać $a^{N+i} b^N c^{2N} \notin L$, więc ten język nie jest językiem regularnym.

54 Warunki równoważne definicji języka regularnego: automat, prawa kongruencja syntaktyczna, wyrażenia regularne.

Zadanie 54.1 Dla automatu \mathcal{A} zdefiniuj prawą kongruencję syntaktyczną oraz wyrażenie regularne opisujące język L akceptowany przez automat \mathcal{A} .



$$[1] = (b + ab)^*$$

$$[a] = (b + ab)^*a$$

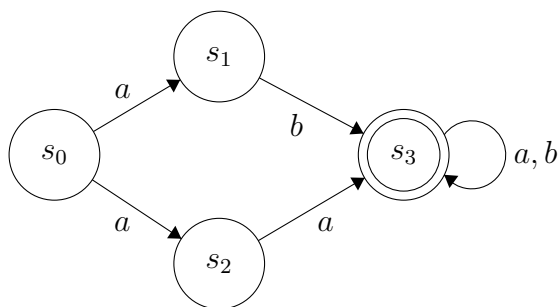
$$[a^2] = (b + ab)^*a^2(a + b)^*$$

$$\alpha = (b + ab)^*a^2(a + b)^*$$

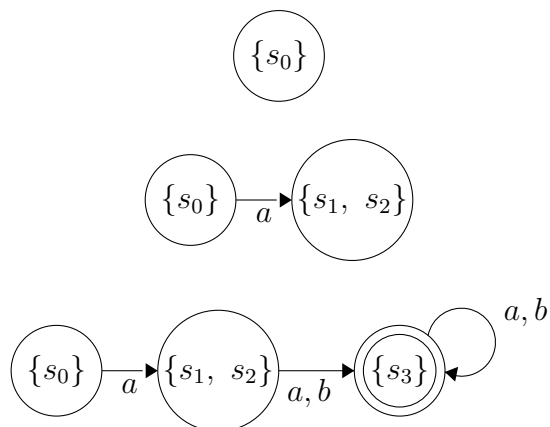
55 Automaty niedeterministyczne i deterministyczne (w tym ze stosem); determinizacja.

55.1 Determinizacja automatu niedeterministycznego

\mathcal{A}_{ND} :



Determinizacja \mathcal{A}_{ND} , krok po kroku:



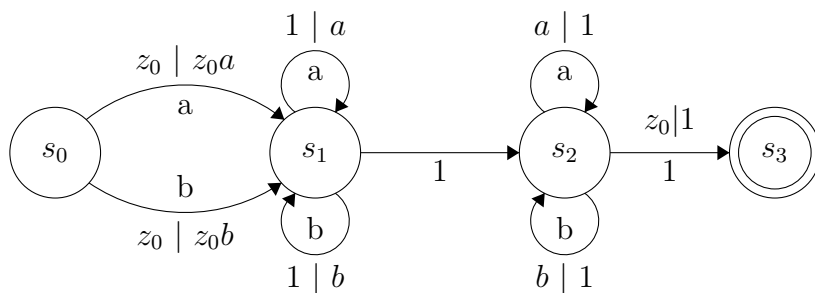
55.2 Determinizm automatu ze stosem

Zadanie 55.1 Określ, czy podane języki są deterministyczne

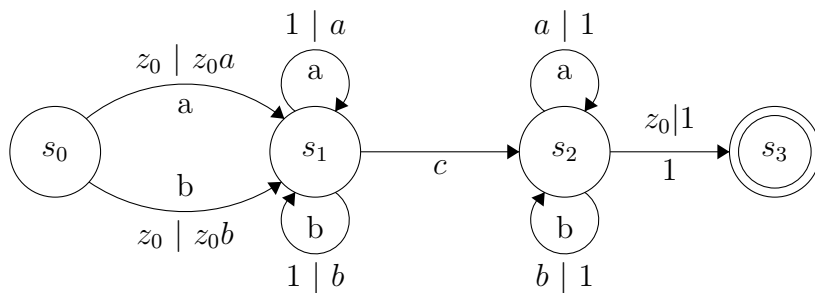
$$L_1 = \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

$$L_2 = \{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

- L_1 jest niedeterministyczny. Automat:



- L_2 jest deterministyczny. Automat:



56 Problemy rozstrzygalne i nierozstrzygalne w teorii języków.

57 Klasy języków w hierarchii Chomsky’ego oraz ich zamkniętość ze względu na operacje bołowskie, homomorfizmy, itp.

- Gramatyka $G_1 = (V_N, V_T, P, v_0)$ w której
 $V_N = \{v_0\}$, $V_T = \{a\}$, $P = \{v_0 \rightarrow v_0a, v_0 \rightarrow a\}$
generuje język
 $L(G_1) = \{a^n : n = 1, 2, \dots\}$
Gramatyka jest typu (3)
- Gramatyka $G_2 = (V_N, V_T, P, v_0)$, w której
 $V_N = \{v_0\}$, $V_T = \{a\}$, $P = \{v_0 \rightarrow v_0v_0, v_0 \rightarrow a\}$
generuje język
 $L(G_2) = \{a^n : n = 1, 2, \dots\}$
Gramatyka jest typu (2)
- Gramatyka $G_3 = (V_N, V_T, P, v_0)$, w której
 $V_N = \{v_0, v_1, v_2\}$, $V_T = \{a, b, c\}$
 $P = \{v_0 \rightarrow abc, v_0 \rightarrow av_1bc, v_1b \rightarrow bv_1, v_1c \rightarrow v_2bcc, bv_2 \rightarrow v_2b,$
 $av_2 \rightarrow aav_1, av_2 \rightarrow aa\}$
generuje język
 $L(G_3) = \{a^n b^n c^n : n = 1, 2, \dots\}$. Gramatyka jest typu (0)

Gramatyki G_1 i G_2 są równoważne.

Wytwarzanie oprogramowania

- 58 Reprezentacja liczb całkowitych; arytmetyka.
- 59 Reprezentacja liczb rzeczywistych; arytmetyka zmiennopozycyjna.
- 60 Różnice w wywołaniu funkcji statycznych, niestatycznych i wirtualnych w C++.
- 61 Sposoby przekazywania parametrów do funkcji (przez wartość, przez referencję). Zalety i wady.
- 62 Wskaźniki, arytmetyka wskaźników, różnica między wskaźnikiem a referencją w C++.
- 63 Podstawowe założenia paradygmatu obiektowego: dziedziczenie, abstrakcja, enkapsulacja, polimorfizm.
- 64 Funkcje zaprzyjaźnione i ich związek z przeładowaniem operatorów w C++.
- 65 Programowanie generyczne na podstawie szablonów w języku C++.
- 66 Podstawowe kontenery w STL z szerszym omówieniem jednego z nich.
- 67 Obsługa sytuacji wyjątkowych w C++.
- 68 Obsługa plików w języku C.
- 69 Model wodospadu a model spiralny wytwarzania oprogramowania.
- 70 Diagram sekwencji i diagram przypadków użycia w języku UML.

- 76 Relacyjny model danych, normalizacja relacji (w szczególności algorytm doprowadzenia relacji do postaci Boyce’a-Codda), przykłady.
- 77 Indeksowanie w bazach danych: drzewa B+, tablice o organizacji indeksowej, indeksy haszowe, mapy binarne.
- 78 Podstawowe cechy transakcji (ACID). Metody sterowania współbieżnością transakcji, poziomy izolacji transakcji, przykłady.
- 79 Złączenia, grupowanie, podzapytania w języku SQL.

80 Szeregowalność harmonogramów w bazach danych.

Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że operacja zapisu powoduje natychmiastowy zapis elementu danych na dysk.

Przykład:

T_1 : transfer 50 zł z konta A na konto B

T_2 : transfer 10% z A na konto B

Przed rozpoczęciem transakcji: A = 1000 zł, B = 2000 zł

Wymaganie spójności: $(A + B)_{\text{przed transakcją}} = (A + B)_{\text{po transakcji}}$

T_1

read (A)

A := A - 50

write (A)

read (B)

B := B + 50

write (B)

T_2

read (A)

temp := A * 0.1

A := A - temp

write (A)

read (B)

B := B + temp

Harmonogram S1 - szeregowy, $\langle T_1, T_2 \rangle$ (czyt: najpierw operacje z T_1 , potem operacje z T_2).

T_1	T_2
read (A)	
A := A - 50	
write (A)	
read (B)	
B := B + 50	
write (B)	
	read (A)
	temp := A * 0.1
	A := A - temp
	write (A)
	read (B)
	B := B + temp
	write (B)

Po transakcji: A = 855, B = 2145

Wymaganie spójności: $(A + B)_{\text{przed transakcją}} = (A + B)_{\text{po transakcji}} = 3000$

Harmonogram S2 - współbieżny, równoważny w sensie wyniku harmonogramowi S1.

T_1	T_2
read (A)	
A := A - 50	
write (A)	
	read (A)
	temp := A * 0.1
	A := A - temp
	write (A)
read (B)	
B := B + 50	
write (B)	
	read (B)
	B := B + temp
	write (B)

Po transakcji: A = 855, B = 2145. Zachowany warunek spójności.

Harmonogram S3 - współbieżny.

T_1	T_2
read (A)	
A := A - 50	
	read (A)
	temp := A * 0.1
	A := A - temp
	write (A)
	read (B)
write (A)	
read (B)	
B := B + 50	
write (B)	
	B := B + temp
	write (B)

Po transakcji: $A = 950$, $B = 2100$.

Niespójny stan bazy danych! - $(A+B)_{\text{przed transakcją}} = 300 \neq (A+B)_{\text{po transakcji}} = 3050$

T_1 nadpisuje wartość A zapisaną przez T_2 .

80.1 Szeregowalność konfliktowa.

Uprościmy harmonogramy do operacji odczytu i zapisu.

Jeszcze raz harmonogram **S2**:

	T_1	T_2
1	read (A)	
2	write (A)	
3		read (A)
4		write (A)
5	read (B)	
6	write (B)	
7		read (B)
8		write (B)

Operacje konfliktowe - 2 i 3, 5 i 7 - odnoszą się z różnych transakcji do tej samej zmiennej.

Weźmy harmonogram **S4** - powstały z harmonogramu S2 przez zamianę kolejności instrukcji niekonfliktowych.

	T_1	T_2
1	read (A)	
2	write (A)	
3		read (A)
4	read (B)	
5		write (A)
6	write (B)	
7		read (B)
8		write (B)

S2 i S4 są **konfliktowo równoważne**.

Harmonogram **S1** z podstawowymi operacjami:

	T_1	T_2
1	read (A)	
2	write (A)	
3	read (B)	
4	write (B)	
5		read (A)
6		write (A)
7		read (B)
8		write (B)

Pogrubione operacje to te, których możemy zmienić kolejność (3 i 4 zamienione z 5 i 6) - otrzymalibyśmy wtedy harmonogram S2. Zatem S1 i S2 są **konfliktowo równoważne**. Ponieważ S1 jest szeregowy, to S2 jest **szeregowalny konfliktowo**.

Podsumowując:

- S1 i S2 są konfliktowo równoważne.
- S1 i S3 nie są konfliktowo równoważne.
- S2 i S4 są konfliktowo równoważne.
- S1 jest szeregowy.
- S2 i S4 są szeregowalne konfliktowo.

80.2 Szeregowalność perspektywiczna.

Równoważność perspektywiczna:

- (A) Jeśli w S T_k jest transakcją, która w harmonogramie czyta Q jako pierwsza, to w S' T_k musi być transakcją, która czyta Q jako pierwsza.
- (B) Jeśli w S T_i czyta Q zapisany przez T_j , to w S' T_i czyta Q zapisany przez T_j .
- (C) Jeśli w S T_m jest ostatnią transakcją, która zapisuje Q, to w S' T_m jest ostatnią transakcją, która zapisuje Q.

S1:

T_1	T_2
read (A)	
write (A)	
read (B)	
write (B)	
	read (A)
	write (A)
	read (B)
	write (B)

S2:

T_1	T_2
	read (A)
	write (A)
	read (B)
	write (B)
read (A)	
write (A)	
read (B)	
write (B)	

S3:

T_1	T_2
read (A)	
write (A)	
	read (A)
	write (A)
read (B)	
write (B)	
	read (B)
	write (B)

S1: $\langle T_1, T_2 \rangle$ i S2: $\langle T_2, T_1 \rangle$ **nie są równoważnie perspektywicznie**. Nie jest spełniony warunek (B): w S1 T_2 czyta A zapisane przez T_1 , ale to samo nie zachodzi w S2.

S1: $\langle T_1, T_2 \rangle$ **jest równoważny perspektywicznie** S3.

S4:

T_3	T_4	T_5
read(Q)		
	write(Q)	
write(Q)		
		write(Q)

S4 **jest szeregowalny perspektywicznie**, bo jest perspektywicznie równoważny harmonogramowi szeregowemu $\langle T_3, T_4, T_5 \rangle$. S4 **nie jest szeregowalny konfliktowo**, bo nie możemy pozamieniać kolejności operacji - praktycznie wszystkie są konfliktowe.

81 Definicja cyfrowego układu kombinacyjnego - przykłady układów kombinacyjnych i ich implementacje.

Zadanie 81.1 *Projektowanie układów kombinacyjnych.* Za pomocą bramek NAND zrealizować układ opisany poniższą tablicą prawdy:

Wejścia			Wyjścia
x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

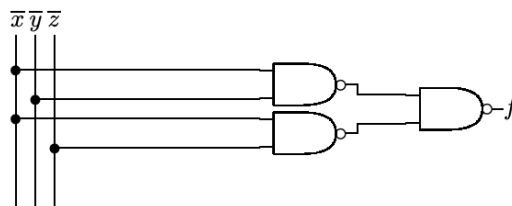
Na podstawie tablicy prawdy otrzymujemy funkcję logiczną:

$$f(x, y, z) = \sum(0, 1, 2) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}$$

Korzystając z praw de Morgana:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} = \overline{\overline{\bar{x}\bar{y}} + \overline{\bar{x}\bar{z}}} = \overline{\overline{\bar{x}\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}\bar{z}}} = \overline{\overline{\bar{x}\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}\bar{z}}}$$

Zatem schemat logiczny:



82 Definicja cyfrowego układu sekwencyjnego - przykłady układów sekwencyjnych i ich implementacje.

83 Minimalizacja funkcji logicznych.

83.1 Minimalizacja z wykorzystaniem algebry Boole'a

Zadanie 83.1 Zminimalizuj funkcję logiczną zadaną poniższą tabelką:

a	b	c	f (a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Zapisujemy funkcję w postaci sumy iloczynów poszczególnych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 1. Oczywiście aby wszystko było zgodne z prawdą, tam gdzie dany argument jest równy 0, musimy go zanegować:

$$f(a, b, c) = (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$$

Następnie wykorzystując rozdzielność możemy uprościć to wyrażenie:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \neg a \wedge (b \wedge \neg c \vee b \wedge c) \vee a \wedge (\neg b \wedge \neg c \vee \neg b \wedge c) = \\ &= \neg a \wedge (b \wedge (\neg c \vee c)) \vee a \wedge (\neg b \wedge (\neg c \vee c)) \end{aligned}$$

Wykorzystując:

$$\neg c \vee c = 1$$

$$b \wedge 1 = b$$

$$\neg b \wedge 1 = \neg b$$

Otrzymujemy:

$$f(a, b, c) = \neg a \wedge (b \wedge 1) \vee a \wedge (\neg b \wedge 1) = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$$

83.2 Minimalizacja z wykorzystaniem tablic Karnaugh

Zadanie 83.2 Uprość funkcję $f(x, y, z) = \sum(0, 2, 4, 6, 7)$

W przypadku takiego zapisu funkcji, liczby traktujemy jako zapisane dziesiętnie liczby binarne, w których każdy bit odpowiada danej zmiennej w funkcji (najstarszy bit odpowiada pierwszej zmiennej funkcji, itd.)

Więc dla przykładu 6 odpowiada $110 = xy\bar{z}$

Uzupełniamy tablice Karnaugh dla funkcji 3 zmiennych:

	y			
	000	001	011	010
x {	100	101	111	110
	z			

	y			
	0	1	3	2
x {	4	5	7	6
	z			

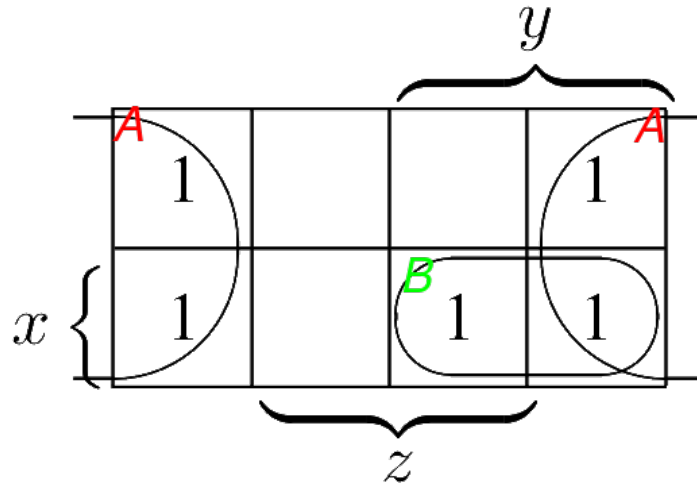
	y			
	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$
x {	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz	$xy\bar{z}$
	z			

W polach odpowiadających liczbom z naszej funkcji wpisujemy 1:

	y			
	1			1
x {	1		1	1
	z			

Następnie zaznaczamy prostokątnym zaznaczeniem jak największą liczbę pól z 1, ale tylko w taki sposób aby liczba tych pól była całkowitą potęgą 2. Warto w tym

miejscu pamiętać, że tablice Karnaugh możemy traktować jako tablicę cykliczną:



Następnie odczytujemy z tablic uproszczone już iloczyny dla poszczególnych zaznaczeń: dane zaznaczenie jest iloczynem tych zmiennych do których to zaznaczenie całkowicie należy lub nie należy.

Tak więc dla zaznaczenia **A** będzie to \bar{z} ponieważ zaznaczenie w całości nie leży w obszarze zmiennej z .

Natomiast dla zaznaczenia **B** będzie to xy ponieważ leży ono całkowicie na obszarze zmiennych x oraz y .

Ostatecznie nasza wyjściowa funkcja po uproszczeniu będzie miała postać sumy iloczynów poszczególnych obszarów:

$$f(x, y, z) = \sum(0, 2, 4, 6, 7) = xy + \bar{z}$$

- 84 Programowalne układy logiczne PLD (ROM, PAL, PLA).
- 85 Schemat blokowy komputera (maszyna von Neumanna).
- 86 Zarządzanie procesami: stany procesu, algorytmy szeregowania z wywłaszczaniem.
- 87 Muteks, semafor, monitor jako narzędzia synchronizacji procesów.
- 88 Pamięć wirtualna i mechanizm stronicowania.
- 89 Systemy plikowe - organizacja fizyczna i logiczna (na przykładzie wybranego systemu unikso-podobnego).
- 90 Model ISO OSI. Przykłady protokołów w poszczególnych warstwach.

91 Adresowanie w protokołach IPv4 i IPv6.

91.1 Adresowanie w IPv4.

Zadanie 91.1 *Wylicz adres sieci i broadcast z adresu hosta:*

1. 11.12.13.14/24
2. 11.12.13.14/25
3. 11.12.13.167/28
4. 11.12.138.167/17

1. 11.12.13.14/24

Maska 24 = 3*8 bitów (24 jedynek i 8 zer) od lewej - odcina trzy pierwsze oktety. Dla adresu sieci zerujemy resztę, dla broadcastu - wypełniamy jedynekami.

- sieć: 11.12.13.0/24
- broadcast: 11.12.13.255/24

2. 11.12.13.14/25

Maska 25 bajtów "odcina" pierwszy bit ostatniego oktetu (00001110). Uzupełniamy zerami/jedynekami pozostałe 7 bitów.

- sieć: 11.12.13.0/24
- broadcast: 11.12.13.127/24

3. 11.12.13.167/28

28 bitów - odcięte pierwsze z lewej cztery bity ostatniego oktetu (10100111), pozostałe cztery uzupełniamy.

- sieć: 11.12.13.160/24
- broadcast: 11.12.13.175/24

4. 11.12.138.167/17

17 bitów z lewej - zahaczamy jednym bitem o 3 oktet(10001010), zostaje 15 bity.

- sieć: 11.12.128.0/24

- broadcast: 11.12.255.255/24

Zadanie 91.2 Podziel podaną sieć na jak najwięcej podsieci tak, aby każda miała n użytecznych adresów.

1. 10.0.0.0/24, $n = 7$
2. 132.168.0.0/16, $n = 30$

1. 10.0.0.0/24, $n = 7$

7 użytecznych adresów IP - $7 \leq 2^k - 2 \Rightarrow 9 \leq 2^k \Rightarrow k = 4$. Potrzebujemy czterech bitów na adres hosta, zostają 4 bity na adres podsieci (pierwsze 24 odcina maska jako adres sieci). Nowa maska = $24 + 4 = 28$ bajtów. Zatem adresy podsieci:

- pierwsza: 10.0.0.0/28
- druga: 10.0.0.16/28
- \vdots
- przedostatnia: 10.0.0.224/28
- ostatnia: 10.0.0.240/28

2. 132.168.0.0/16, $n = 30$

$30 \leq 2^k - 2 \Rightarrow 32 \leq 2^k \Rightarrow k = 5$. 5 bitów na adres hosta, $32 - 5 - 16 = 11$ na adres podsieci - zaczynając od trzeciego oktetu. Nowa maska = $16 + 11 = 27$.

- pierwsza: 132.168.0.0/27
- druga: 132.168.0.32/27
- \vdots
- przedostatnia: 132.168.255.224/27
- ostatnia: 132.168.255.192/27

Zadanie 91.3 Podziel daną sieć na n podsieci po równo hostów.

1. 132.168.0.0/16, $n = 7$
2. 192.168.128.0/20, $n = 4$

1. 132.168.0.0/16, $n = 7$

$7 \leq 2^n \Rightarrow k = 3$ potrzebujemy 3 bitów na zakodowanie podsieci (będzie ich 8). 16 bitów odcina maska, kolejne 3 to podsieć i pozostałe 13 to host (nowa maska = $16 + 3 = 19$).

- pierwsza: 132.168.0.0/19
- druga: 132.168.32.0/19
- \vdots
- przedostatnia: 132.168.192.0/19
- ostatnia: 132.168.224.0/19

2. 192.168.128.0/20, $n = 4$

$4 \leq 2^k \Rightarrow k = 2$ bity na podsieć. 20 bitów odciętych przez maskę (w tym pierwsze cztery z 3 oktetu - **10000000**), 2 na podsieć (nowa maska = $20 + 2 = 22$), 10 na adres hosta. Kolejne adresy:

- 192.168.128.0/22
- 192.168.132.0/22
- 192.168.136.0/22
- 192.168.140.0/22

Zadanie 91.4 Sumaryzacja sieci. Zagreguj poniższe sieci - wyznacz najbardziej precyzyjną agregującą "nadsieć".

1. (A) 11.12.1.0/24
(B) 11.12.2.0/24
(C) 11.12.3.0/24
(D) 11.12.4.0/24
2. (A) 192.130.0.0/16
(B) 192.137.0.0/16
(C) 192.138.0.0/16

1. (A) 11.12.1.0/24

- (B) 11.12.2.0/24
 (C) 11.12.3.0/24
 (D) 11.12.4.0/24

Szukamy pierwsze od lewej bitu, który się różni dla co najmniej dwóch z tych sieci. Widzimy, że pierwsze dwa oktety są wspólne dla wszystkich, rozpisujemy więc trzeci:

A	0	0	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	0	0	0	1	0
C	0	0	0	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	0	1	0	0
	128	64	32	16	8	4	2	1

Różnią się dopiero na 6 bicie, pierwsze pięć jest zgodnych. Zatem nadsieć współdzieli pierwsze $16 + 5 = 21$ bitów:

11.12.0.0/21

2. (A) 192.130.0.0/16
 (B) 192.137.0.0/16
 (C) 192.138.0.0/16

Różnica w drugim oktecie:

A	1	0	0	0	0	0	1	0
B	1	0	0	0	1	0	0	1
C	1	0	0	0	1	0	1	0
	128	64	32	16	8	4	2	1

Różnią się dopiero na 5 bicie, pierwsze cztery są zgodne. Zatem nadsieć współdzieli pierwsze $16 + 4 = 20$ bitów:

192.128.0.0/21

- 92 Najważniejsze procesy zachodzące w sieci komputerowej od momentu wpisania adresu strony WWW do wyświetlenia strony w przeglądarce (komunikat HTTP, segment TCP, system DNS, pakiet IP, ARP, ramka).
- 93 Działanie przełączników Ethernet, sieci VLAN, protokół STP.
- 94 Rola routerów i podstawowe protokoły routingu (RIP, OSPF).
- 95 Szyfrowanie z kluczem publicznym, podpis cyfrowy, certyfikaty.
- 96 Wirtualne sieci prywatne, protokół IPsec.