Producto punto y normas (para vectores, matrices, polinomios y funciones continuas)

Jorge Antonio Gómez García
Emiliano Martín Lugo López
Saud Antonio Morales González

Matemáticas II
03 de abril de 2022

1 Espacios vectoriales

....

2 Definición del producto punto

Sea u, v y w vectores en un **espacio vectorial** y sea c cualquier escalar. Un producto interno en V es una función que asocia un número real $\langle u, v\rangle$ con cada par de vectores u y v que cumplen los siguientes:[1]

2.1 Axiomas o propiedades del producto punto

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
3. $c\langle u, v\rangle = \langle cu, v\rangle = \langle u, cv\rangle$
4. $\langle v, v\rangle \geq 0$ y $\langle v, v\rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$

Cuando un espacio vectorial V tiene al menos un producto punto, podemos llamarlo **espacio con producto punto**. Ahora bien, cuando se hace referencia a un espacio con producto punto, se supone que **el conjunto de escalares es el conjunto de los números reales**.

[1] Ron Larson, *Algebra lineal. matemáticas* 4, 7a ed. (Ciudad de México: Cengage learning, 2018), 185.

3 Producto punto y vectores

3.1 Módulo de un vector en términos del producto punto

3.2 Ángulo entre dos vectores en términos de su producto punto

3.3 Ortogonalidad

4 Producto punto y matrices

5 Producto punto y polinomios

6 Producto punto y funciones continuas

7 Ejercicios

7.1 Vectores

7.2 Matrices

7.3 Polinomios

Con los siguientes polinomios:

$$p(x) = 1 - 2x^2 \qquad q(x) = 4 - 2x + x^2 \qquad r(x) = x + 2x^2$$

Determine:

a. $\langle p, q \rangle$ **b.** $\langle q, r \rangle$ **c.** $\| q \|$ **d.** $d(p, q)$

a.

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= (4)(1) + (0)(-2) + (-2)(1) \\ \langle p, q \rangle &= 4 + 0 - 2 \\ \langle p, q \rangle &= 2 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \langle q, r \rangle &= (4)(0) + (-2)(1) + (1)(2) \\ \langle q, r \rangle &= 0 - 2 + 2 \\ \langle q, r \rangle &= 0 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \| p \| &= \sqrt{\langle q, q \rangle} \\ \| p \| &= \sqrt{(4)(4) + (-2)(-2) + (1)(1)} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ \| p \| &= \sqrt{16 + 4 + 1} \\ \| p \| &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

d.

$$
\begin{aligned}
d(p,q) &= \parallel p - q \parallel \\
d(p,q) &= \parallel (1-2x^2) - (4-2x+x^2) \parallel \\
d(p,q) &= \parallel -3+2x-3x^2 \parallel \\
d(p,q) &= \sqrt{(-3)^2+2^2+(-3)^2} \\
d(p,q) &= \sqrt{22}
\end{aligned}
$$

7.4 Funiones continuas

8 Tarea