Producto punto y normas (para vectores, matrices, polinomios y funciones continuas)

Jorge Antonio Gómez García
Emiliano Martín Lugo López
Saud Antonio Morales González

03 de marzo de 2022

1 Introducción: espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados **vectores**, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar (número real).[1]

Se define matemáticamente como:

$$\mathrm{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_1), x_i \in \mathrm{R}, i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$$

La **definición** de dicha suma y producto están sujetas a diez axiomas. Mientras que, para un espacio vectorial R^2, se definen como:

- Suma de dos vectores:
  $\vec{A} + \vec{B} = (a, b) + (c, d) = (a + c, c + d)$
- Producto de un escalar por un vector:
  $a(u, v) = (au, av), a \in \mathrm{R}$

2 Definición del producto punto

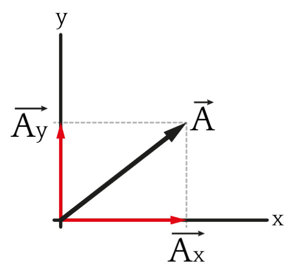
El producto punto, (también llamado producto escalar o prodcuto interno) es el resultado de multiplicar las componentes de dos vectores entre sí. Se define como:

> Sea u, v y w vectores en un **espacio vectorial** y sea c cualquier escalar. Un producto punto en V es una función que asocia un

[1] Isabel Pustilnik y Federico Gómez, "Espacios y subespacios vectoriales - Definición, propiedades y ejemplos", Álgebra y Geometría Analítica, 8 de noviembre de 2017, https://aga.frba.utn.edu.ar/espacios-y-subespacios-vectoriales/.

número real $\langle u, v\rangle$ con cada par de vectores u y v que cumplen los siguientes:[2]

Los componentes de un vector (o coordenadas de un vector) son las ”proyecciones” de ese vector sobre los ejes del plano cartesiano. Una representación gráfica es la siguiente:



En este caso el componente horizontal es $\vec{A_x}$, y el compoentente vercical es $\vec{A_y}$.

2.1 Axiomas o propiedades del producto punto

1. Conmutatividad:
   $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. Distributividad con la suma:
   $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
3. Asociatividad:
   $c\langle u, v\rangle = \langle cu, v\rangle = \langle u, cv\rangle$
4. Propiedad de magnitud:
   $\langle v, v\rangle \geq 0$ y $\langle v, v\rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$

Cuando un espacio vectorial V tiene al menos un producto punto, podemos llamarlo **espacio con producto punto**. Ahora bien, cuando se hace referencia a un espacio con producto punto, se supone que **el conjunto de escalares es el conjunto de los números reales**.

3 Producto punto para vectores

Para calcular el producto punto se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \parallel \vec{A} \parallel \parallel \vec{B} \parallel \cos\theta \tag{1}$$

[2] Ron Larson, *Algebra lineal. matemáticas* 4, 7a ed. (Ciudad de México: Cengage learning, 2018), 185.

Recuerde que $\| \vec{A} \|$ y $\| \vec{B} \|$ son las **magintudes** o módulos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Esta es una forma particularmente buena de obtener el producto punto en función del ángulo interno θ que separa a los dos vectores. Sin embargo la definición del producto punto para R^2 es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \tag{2}$$

Tanto la ecuación (1) como la ecuación (2), son iguales. La primera es un teorema[3] derivado de aplicar la definición del producto punto (la segunda).

Por lo tanto, tenemos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \| \vec{A} \| \| \vec{B} \| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y \tag{3}$$

3.1 Ortogonalidad

En la ecuación (3), note que si el ángulo interno entre ambos vectores es de 90°, tenemos que $cos\theta = 0$ y, por lo tanto, el produto escalar es igual a 0. A este tipo de vectores se les llama **vectores ortogonales**.

Ejemplo:

Determinar si los siguietes vectores son ortogonales entre sí:

$$\vec{v} = (2, -3, 1) \qquad \vec{u} = (3, 2, 0)$$

Calculando el producto punto tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= (2, -3, 1) \cdot (3, 2, 0) \\ &= (2)(3) + (-3)(2) + (1)(0) \\ &= 6 - 6 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Al ser el producto punto igual a cero, tenemos dos vectores que son ortogonales entre sí.

3.2 Módulo de un vector en términos del producto punto (norma)

Recuerde que algunos párrafos atrás establecimos que el producto punto es el resultado de multiplicar las magnitudes de los vectores por el coseno de θ. Pues bien, la magnitud (también llamada módulo o norma) de un vector $\vec{A}$ se escribe $\| \vec{A} \|$ y se **define** como:

$$\| \vec{A} \| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2} \tag{4}$$

[3] Es una interpretación del teorema del coseno

Esto quiere decir que la norma de un vector es la raíz de la suma los componentes del vector multiplicados consigos mismos.

Ejemplo:

Determinar la norma del siguiente vector:

$$\vec{v} = (-3, 2, 5)$$

Para ello:

$$\begin{aligned}\parallel \vec{v} \parallel &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \\ &= \sqrt{(-3, 2, 5) \cdot (-3, 2, 5)} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{38}\end{aligned}$$

3.3 Ángulo entre dos vectores en términos de su producto punto

Al igual que la norma y la condición de ortogonalidad, el producto punto sirve para determinar el ángulo de separación entre dos vectores. Para determinar el ángulo interior entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en terminos de su producto punto, necesitamos determinar el coseno de su ángulo (θ).

Para obtener dicho coseno se cumple que:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\parallel \vec{A} \parallel \parallel \vec{B} \parallel} = \frac{A_1B_1 + A_1B_1 + \cdot + A_nB_n}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + \cdots + B_n^2}} \tag{5}$$

Una vez que ha determinado el valor del coseno de θ, puede aplicar la función trigonométrica inversa para conocer el ángulo de separación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right) \tag{6}$$

Ejemplo:

A partir del siguiente par de vectores, determine el ángulo de separación entre el vector $\vec{A}$ y el $\vec{B}$:

$$\vec{A} = (1, 2, -3) \qquad \vec{B} = (-2, 4, 1)$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arccos\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{(1)(-2)+(2)(4)+(-3)(1)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-3)^2}\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(1)^2}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{-2+8+-3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+16+1}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{(7)(2)}\sqrt{(7)(3)}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{(7)^2(2)(3)}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right) \\
&= 79.92^\circ
\end{aligned}
\tag{7}
$$

4 Producto punto para matrices

Las propiedades de la multiplicación de matrices son causa directa de muchas de las propiedades del producto punto. También se puede obtener el producto punto de la multiplicación de matrices. Pate ello, se sigue el siguiente procedimiento:

Definiendo a A y B como matrices pertenecientes a un espacio vectorial M, donde:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}
$$

tenemos que:

$$
\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} \tag{8}
$$

es un producto punto de A y B sobre el espacio vectorial M.

En adición, los vectores pueden ser representados en matrices en una forma de matriz columna de $n \times 1$. De tal forma que un vector $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ donde $u \in \mathrm{R}$ puede representarse matricialmente como:

$$
u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{9}
$$

Ahora bien, si tenemos otra matriz v, definida como:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

y deseamos obtener el producto punto de ambas matrices, tenemos que:

$$\begin{aligned} u \cdot v = u^T v &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= [u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n] \end{aligned} \tag{11}$$

Ejemplo:

Determine el producto punto de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} A \cdot B = A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} &= [(1)(4) + (4)(-2) + (-6)(-1)] \\ &= 4 - 8 + 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Como resultado de multiplicar $A \cdot B$, tenemos un producto punto de 2.

5 Producto punto para polinomios

6 Producto punto para funciones continuas

7 Ejercicios

7.1 Vectores

7.2 Matrices

7.3 Polinomios

Con los siguientes polinomios:

$$p(x) = 1 - 2x^2 \qquad q(x) = 4 - 2x + x^2 \qquad r(x) = x + 2x^2$$

Determine:

a. $\langle p, q \rangle$ **b.** $\langle q, r \rangle$ **c.** $\| q \|$ **d.** $d(p, q)$

a.

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= (4)(1) + (0)(-2) + (-2)(1) \\ \langle p, q \rangle &= 4 + 0 - 2 \\ \langle p, q \rangle &= 2 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \langle q, r \rangle &= (4)(0) + (-2)(1) + (1)(2) \\ \langle q, r \rangle &= 0 - 2 + 2 \\ \langle q, r \rangle &= 0 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \| p \| &= \sqrt{\langle q, q \rangle} \\ \| p \| &= \sqrt{(4)(4) + (-2)(-2) + (1)(1)} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ \| p \| &= \sqrt{16 + 4 + 1} \\ \| p \| &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \| p - q \| \\ d(p, q) &= \| (1 - 2x^2) - (4 - 2x + x^2) \| \\ d(p, q) &= \| -3 + 2x - 3x^2 \| \\ d(p, q) &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-3)^2} \\ d(p, q) &= \sqrt{22} \end{aligned}$$

7.4 Funiones continuas

8 Tarea