Apuntes de Álgebra Lineal

Jorge Antonio Gómez García
El conocimiento se construye en comunidad
CIDE - Matemáticas III

Otoño de 2022

Resumen

Este documento contiene los apuntes de Álgebra Lineal para la asignatura de Matemáticas III del Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE) impartido por el profesor Itza Tlaloc Quetzalcoatl Curiel Cabral durante otoño del 2022. Puede ver el programa en este enlace.

Índice

Contenido

1. Matrices y eliminación gaussiana.
   a) La geometría de las ecuaciones lineales.
   b) Eliminación gaussiana.
   c) Notación y operaciones con matrices.
   d) Factores triangulares.
   e) Inversas y transpuestas.
2. Espacios vectoriales y ecuaciones lineales.
   a) Espacios vectoriales.
   b) Subespacios vectoriales.
   c) Soluciones a m ecuaciones lineales en n incógnitas.
   d) Combinación lineal y espacio generado.
   e) Independencia y dependencia lineal.
   f) Base de un espacio y dimensión.
   g) Los cuatro espacios fundamentales.
   h) Transformaciones lineales.
   i) Matriz de una transformación lineal.
   j) Núcleo e imagen de una transformación lineal.
   k) Rango y nulidad.
3. Ortogonalidad.
   a) Producto interno.
   b) Conjuntos ortogonales y proyecciones
   c) Aproximación de mínimos cuadrados.
   d) Bases ortogonales, matrices ortogonales.
   e) Procedimiento Gram-Schmidt.
4. Determinantes.
   a) Propiedades de los determinantes.
   b) Fórmula del determinante.
   c) Aplicaciones.
5. Eigenvalores y eigenvectores.
   a) Cálculo de valores, vectores y espacios propios.
   b) La forma diagonal de una matriz.
   c) Ecuaciones en diferencia y las potencias A^k.

   d) Ecuaciones diferenciales y la exponencial e^{At}.

   e) Matrices complejas: Simétrica VS Hermitiana y Ortogonal VS Unitaria.

6. Matrices positivas definidas.

   a) Criterio de mínimos, máximos y puntos sillas de funciones de varias variables usando valores propios.

   b) Pruebas para determinar si es positiva definida.

   c) Matrices semidefinidas e indefinidas $Ax = \lambda Mx$.

Preámbulo

Tipos de ecuaciones lineales

Sean A, B, C, m, x números reales y x, y variables. Las ecuaciones lineales son aquellas que pueden expresarse de las siguientes formas:

1. Pendiente ordenada al origen de la recta:

$$y = mx + b$$

2. Forma normal de la recta:

$$Ax + By + C = 0$$

3. Forma general de la recta:

$$Ax + By = C$$

4. Forma punto pendiente de la recta:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

5. Forma simétrica de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Nota

Los resultados de investigación suelen entregarse en la forma general de la recta.

El álgebra lineal pretende conocer la información de los sistemas de ecuaciones lineales. Le interesa si un problema tiene una, muchas o ninguna solución.

Métodos de solución de ecuaciones lineales

1. Método de sustitución.
2. Sumas y restas $(+/-)$.
3. Método de igualación.
4. Método de Cramer.
5. Método de Gauss-Jordan.

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales para x y y:

1. $x - y = 7$
   $x + y = 5$
2. $x - y = 7$
   $2x - 2y = 14$
3. $x - y = 7$
   $2x - 2y = 13$

Notas sobre cada ejercicio

1. Es un sistema **no singular**.
   Tiene solución única.
   Es resultado de la igualdad $n = n, \quad n \in \mathbb{R}$.
2. Es un sistema **singular**.
   Tiene infinitas soluciones.
   Es resultado de la igualdad $0 = 0$.
   La solución $\in (-\infty, \infty)$.
3. Es un sistema **singular**.
   No tiene solución.
   Es resultado de la igualdad $0 = n, \quad n \in \mathbb{R}, \quad n \neq 0$.
   Es decir, el resultado es una inconsistencia.

Operadores gaussianos

1. **Operador de suma de filas** (Suma y resta):
   $R_i \leftarrow R_i + R_j$.
2. **Operador de multiplicación por un escalar:**
   $R_i \leftarrow \alpha R_i$.
3. **Suma y resta + multiplicación por un escalar:**
   $R_i \leftarrow \alpha R_i + R_j$.
4. **Operador de intercambio de filas:**
   $R_i \leftrightarrow R_j$.

Notas sobre las matrices resultantes

Sea A una matriz de $m \times n$ y sean a, b, c, d, e, f números reales:

1. **Determinante igual a cero**: $|A| = 0$
   El sistema tiene múltiples soluciones.
   Ejemplo: $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
2. **Determinante igual a cero**: $|A| = 0$
   El sistema no tiene soluciones, es decir, es inconsistente.
   Ejemplo: $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{array}\right], \quad f \neq 0.$
3. **Determinante distinto de cero**: $|A| \neq 0$
   El sistema tiene una única solución.
   Ejemplo: $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right]$

Inversión de matrices

Inversión por cofactores

El método de inversión de matrices por cofactores es una técnica para encontrar la inversa de una matriz cuadrada. Este método se basa en el concepto de cofactor de un elemento de una matriz y utiliza la fórmula de la inversa de una matriz dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

donde $\det(A)$ es el determinante de la matriz A y $\operatorname{adj}(A)$ es la matriz adjunta de A. La matriz adjunta de A se puede calcular como:

$$\operatorname{adj}(A) = C^T$$

donde C es la matriz de cofactores de A. La matriz de cofactores de A se define como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor de A que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz A.

Para calcular la inversa de una matriz A usando este método, primero se calcula el determinante de la matriz A y luego se calcula la matriz de cofactores C de A. Luego se calcula la matriz adjunta de A como C^T. Finalmente, se utiliza la fórmula de la inversa de la matriz para calcular la inversa de A como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

Este método funciona siempre y cuando el determinante de la matriz A sea distinto de cero. Si el determinante de la matriz es cero, entonces la matriz no tiene inversa.

Inversión por operadores gaussianos

Este método se basa en el uso de operadores matriciales especiales llamados operadores gaussianos, que son matrices que tienen la propiedad de çancelarüna fila o columna de una matriz al multiplicarla por ellos.

Para invertir una matriz A usando este método, se sigue el siguiente proceso:

Sea A una matriz cuadrada. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. Se obtiene la matriz identidad I del mismo tamaño que A mediante la concatenación de las matrices A y I: $[A|I]$. Por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Se aplican operadores gaussianos a la matriz $[A|I]$ para reducirla a una matriz escalonada reducida. Esto implica eliminar los elementos debajo de la diagonal principal

mediante la multiplicación por operadores gaussianos adecuados. Por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right]$$

3. Una vez que la matriz se ha reducido a una matriz escalonada reducida, se aplican operadores gaussianos adecuados a la matriz para convertirla en la matriz identidad. Los operadores gaussianos se aplican a las filas superiores de la matriz para eliminar los elementos encima de la diagonal principal. Por ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & 1 & 0 & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{array}\right]$$

4. La inversa de la matriz A se encuentra en la parte derecha de la matriz resultante, es decir, en la sección que correspondía a la matriz identidad original.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Este método funciona siempre y cuando la matriz A sea invertible, es decir, tenga un determinante distinto de cero. Si el determinante de la matriz es cero, entonces la matriz no tiene inversa y este método no puede utilizarse.

1. Matrices y eliminación gaussiana

1.1. La geometría de las ecuaciones lineales

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{cases} \tag{1}$$

Este sistema de ecuaciones luce de la siguiente manera:

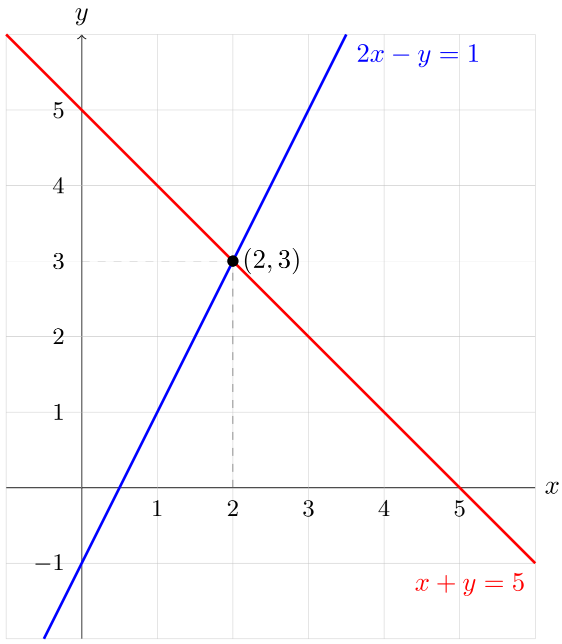

Figura 1: Gráfica del sistema de ecuaciones lineales (**??**).

Ahora bien, existe una equivalencia entre representar un sistema de ecuaciones lineales en forma de gráfica y representarlo en forma de vectores. Para ello, considere el sistema de ecuaciones (**??**). Puede ser representado como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v_1}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v_2}} y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Dónde la gráfica de cada vector es la siguiente:

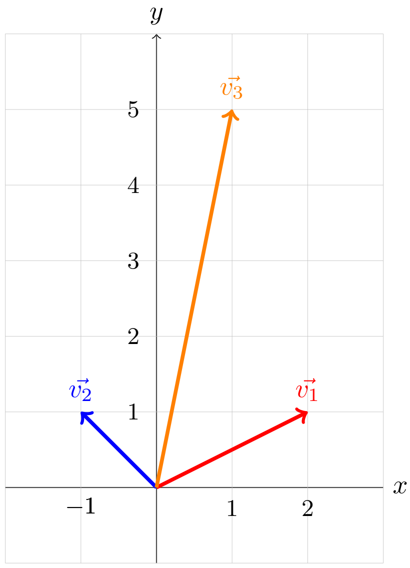

Figura 2: Óptica vectorial del sistema de ecuaciones (**??**).

1.1.1. Álgebra de vectores

1. **Producto vectorial:**

$$v_1 \times v_2 = v_1 \times v_2^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}_{n\times 1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{1\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{\text{Matriz } n\times n}$$

2. **Producto punto:**

$$v_1 \cdot v_2 = v_1^T \cdot v_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{1\times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{a}_{\mathbb{R}}$$

3. **Producto por un escalar:**

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_{11} \\ \alpha v_{21} \\ \vdots \\ \alpha v_{n1} \end{pmatrix}$$

1.1.2. Variable compleja

Sea z una variable compleja, la cual está definida como:

$$z = a + ib, \tag{3}$$

dónde, a y b son números reales y $i^2 = -1$.

Operaciones con números complejos:

1. Suma:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 \\ &= (a_1 + a_2) + (ib_1 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

2. Multiplicación:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

1.2. Vectores y matrices

Definición 1. **Vector renglón:**

Sea x un vector de n dimensiones, entonces:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{M}_{(1\times n)}$$

Definición 2. **Vector columna:**

Sea x un vector de n dimensiones, entonces:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{(n\times 1)}$$

Definición 3. **Matriz:**

Sea A una matriz de m renglones y n columnas, está definida como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{(m\times n)}$$

Definición 4. **Igualdad:**

Sean A y B dos matrices de $m \times n$:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad [a_{ij}] = [b_{ij}], \quad \forall i \forall j$$

Definición 5. **Suma matricial:**

Sean A, B y C matrices de $m \times n$:

$$A + B = C \Longleftrightarrow [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Definición 6. **Multiplicación por un escalar:**

Sean $A \in \mathbb{M}_{(m\times n)}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha A = B, \quad B \in \mathbb{M}_{(m\times n)} \quad \Longleftrightarrow \quad [\alpha a_{ij}] = [b_{ij}]$$

Teorema 1.

Sean A, B y C matrices de $m \times n$ y α, β números reales, entonces:

1. $A + \vec{0} = A$
2. $0A = \vec{0}$
3. $A + B = B + A$
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $1A = A$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

1.3. Producto vectorial y producto matricial

$$\text{Sean } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Producto escalar (producto punto):

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= a^T b \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha, \quad \alpha \text{ es un escalar} \end{aligned}$$

Teorema 2.

Sean a, b y c vectores de n dimensiones, es decir, a, b y $c \in \mathbb{R}^n$ y sean α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $a \cdot \vec{0} = 0$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
3. $\alpha a \cdot b = \alpha(a \cdot b)$

Producto matricial: Sean $A \in \mathbb{M}_{(m\times n)}$ y $B \in \mathbb{M}_{(n\times p)}$ y $C \in \mathbb{M}_{(m\times p)}$:

$$\begin{aligned} AB = C, \quad \iff \quad & [a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}] \\ & C_{ij} = [A_{i\cdot}] \cdot [B_{\cdot j}] \end{aligned}$$

Teorema 3.

Sean $A \in \mathbb{M}_{(n,m)}$, $B \in \mathbb{M}_{(m,p)}$ y $C \in \mathbb{M}_{(p,q)}$, entonces:

$$A(BC) = (AB)C$$

Teorema 4.

Sean $A \in \mathbb{M}_{(n,m)}$ y $B, C \in \mathbb{M}_{(m,p)}$, entonces:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Teorema 5.

Sean $A, B \in \mathbb{M}_{(n,m)}$ y $C \in \mathbb{M}_{(m,p)}$, entonces:

$$(A + B)C = AC + BC$$

1.4. Representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales

Sean $A \in \mathbb{M}_{(n,n)}$ y $x, b \in \mathbb{R}^n$:

$$Ax = b, \quad \longrightarrow \begin{cases} \textbf{Sistema no homogéneo} \\ \text{Puede o no tener solución} \end{cases}$$

$$Ax = \vec{0}, \quad \longrightarrow \begin{cases} \textbf{Sistema homogéneo} \begin{cases} x = \vec{0} \to \text{Solución trivial} \\ \text{Múltiples soluciones} \end{cases} \\ \text{Siempre tiene solución} \end{cases}$$

Teorema 6.

Sean x_1 y x_2 soluciones del *sistema no homogeneo*. Entonces su diferencia $x_1 - x_2$ es una solución del *sistema homogéneo* asociado.

D! Sean $x_1, x_2, b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{M}_{(n,n)}$, entonces:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= A(x_1 - x_2) \\ &= Ax_1 - Ax_2 \\ &= b - b \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$\square$

Otra demostración:

D! Sean $x_1, x_2, b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{M}_{(n,n)}$, entonces:

$$Ax_1 = b \qquad Ax_2 = b$$

$$\begin{aligned} Ax_1 &= Ax_2 \\ Ax_1 - Ax_2 &= \vec{0} \\ A(x_1 - x_2) &= \vec{0} \\ Ax &= \vec{0} \end{aligned}$$

$\square$

Corolario

Si x es una solución del *sistema no homogéneo*, y es otra solución del *sistema no homogéneo*, entonces, existe una solución h al *sistema homogéneo* asociado tal que:

$$y = x + h$$

D!

$$\begin{aligned} h &= y - x \\ h &= x \\ Ax &= A(y - x) \\ &= Ay - Ax \\ &= b - b \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

□

Nota

Si el fin es encontrar todas las soluciones del *sistema no homogéneo*, entonces, se puede tomar x como una solución cualquiera y y como la solución del *sistema homogéneo* asociado a x.

1.5. Matrices inversas

Si una matriz A tiene inversa, entonces A es **invertible** y A^{-1} es la **matriz inversa** de A.

Definición 7. Matriz inversa:

Sean $A \in \mathbb{M}_{(n,n)}$ y $B \in \mathbb{M}_{(n,n)}$:

$$AB = BA = I_n$$

dónde B es la matriz inversa de A y I_n es la matriz identidad de orden n.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

La pregunta es: ¿A es invertible?

- Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible.
- Si $\det(A) = 0$, entonces A no es invertible, es decir, no tiene inversa.
- $[A|I_n] \Longrightarrow \left[I_n|A^{-1}\right]$
  A es invertible si es posible llegar a la matriz identidad en la parte izquierda de la matriz aumentada.
  Si A es una matriz cuadrada de $n \times n$, entonces debe obtener n pivotes en la matriz aumentada. Algo como lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi & \xi & \cdots & \xi \\ 0 & 1 & \xi & \xi & \cdots & \xi \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \cdots & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Si hay menos de n pivotes, entonces A no es invertible.

Nota

La matriz inversa de la matriz inversa de una matriz A es A:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Teorema 7.

Si A es invertible, entonces su matriz inversa A^{-1} es única.

D! Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{(n,n)}$, tales que B y C son matrices inversas de A. Entonces:

$$BA = AB = I_n \qquad CA = AC = I_n$$

$$\begin{aligned} B &= BI \\ &= B(AC) \\ &= BA(C) \\ &= IC \\ &= C \end{aligned}$$

$$\therefore \quad B = C \quad \textbf{!}$$

$\square$

Esto es una contradicción, ya que B y C son matrices inversas de A, que al principio se habían supuesto distintas. Sin embargo, la demostración anterior muestra que son iguales.

Teorema 8.

Si (AB) es invertible, entonces $B^{-1}A^{-1}$ es la matriz inversa de (AB).

$$(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I_n$$
$$ABA^{-1}B^{-1} = A^{-1}B^{-1}AB = I_n$$

2. Espacios vectoriales y ecuaciones lineales

$$(\underbrace{\mathbb{V}}_{\substack{\text{Conjunto}\\\text{de vetores}}}, \underbrace{\bigoplus}_{\substack{\text{Operación}\\\text{de suma}}}, \underbrace{\bigotimes}_{\substack{\text{Operación de}\\\text{producto por}\\\text{un escalar}}})$$

Definición 8. Espacio vectorial:

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un conjunto de objetos llamados **vectores**, junto con dos operaciones: una operación de suma y una operación de producto por un escalar. Dichas operaciones satisfacen una serie de propiedades llamadas **axiomas de un espacio vectorial**.

2.1. Los 10 axiomas de un espacio vectorial

Sean $a, b, c \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Los axiomas de un espacio vectorial son los siguientes:

1. **Axioma 1:** El conjunto de vectores debe ser cerrado bajo la suma. **(Cerradura bajo la suma)**.

$$a + b \in \mathbb{V} \tag{1}$$

2. **Axioma 2:** El conjunto de vectores debe ser cerrado bajo el producto por un escalar. **(Cerradura bajo el producto por un escalar)**.

$$\alpha a \in \mathbb{V} \tag{2}$$

3. **Axioma 3:** La suma debe ser conmutativa. **(Conmutatividad de la suma)**.

$$a + b = b + a \tag{3}$$

4. **Axioma 4:** La suma debe ser asociativa. **(Asociatividad de la suma)**.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{4}$$

5. **Axioma 5:** Debe existir un vector nulo tal que sumado por otro vector a, de como resultado al mismo vector a. **(Existencia de un vector nulo, vector cero o idéntico aditivo)**.

$$\exists\ \vec{0} \in \mathbb{V} \quad : \quad a + \vec{0} = \vec{0} + a = a \tag{5}$$

6. **Axioma 6:** Debe existir un vector inverso tal que sumado al vector original a, de como resultado el vector nulo. **(Existencia de un vector inverso o inverso aditivo)**.

$$\exists\ -a \in \mathbb{V} \quad : \quad a + (-a) = (-a) + a = \vec{0} \tag{6}$$

7. **Axioma 7:** El producto por un escalar debe ser asociativo. **(Asociatividad del producto por un escalar)**.

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \tag{7}$$

8. **Axioma 8:** El producto por un escalar debe ser distributivo con respecto a la suma. **(Distributividad del producto por un escalar o primera ley distributiva)**.

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \tag{8}$$

9. **Axioma 9:** El producto por un vector debe ser distributivo con respecto a la suma de dos escalares. **(Distributividad del producto por un escalar o segunda ley distributiva)**.

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \tag{9}$$

10. **Axioma 10:** Debe existir un escalar neutro tal que multiplicado por un vector a, de como resultado al mismo vector a. **(Existencia de un escalar neutro)**.

$$\exists\ 1 \in \mathbb{R} \quad : \quad 1a = a1 = a \tag{10}$$

Nota

En resumen. Sean $a, b, c \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **entonces:**

1. **Cerradura bajo la suma:** $a + b \in \mathbb{V}$
2. **Conmutatividad:** $a + b = b + a$
3. **Asociatividad bajo la suma:** $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. **Vector nulo:** $a + \vec{0} = a$
5. **Inverso aditivo:** $a + (-a) = \vec{0}$
6. **Cerradura bajo el producto por un escalar:** $\alpha a \in \mathbb{V}$
7. **Primera ley distributiva:** $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
8. **Segunda ley distributiva:** $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
9. **Ley asociativa del producto por un escalar:** $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
10. **Neutro multiplicativo:** $1a = a$

2.1.1. Ejemplos de espacios vectoriales

1) $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ **<u>Sí</u> es un espacio vectorial**

2) $(\{0\}, +, \times)$ **<u>Sí</u> es un espacio vectorial**, llamado espacio trivial de dimensión cero.

3) $(\{1\}, +, \times)$ **<u>No</u> es un espacio vectorial**, pues no cumple con el axioma 1 (cerradura bajo la suma).

4) $\mathbb{V}_1$ = conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que están en una recta que pasa por el origen. **<u>Sí</u> es un espacio vectorial**.

$$\mathbb{V}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = mx_1\}, \quad m \in \mathbb{R}$$

5) $\mathbb{V}_2$ = conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que están en una recta que no pasa por el origen. **<u>No</u> es un espacio vectorial** porque no cumple con el axioma 5 (existencia de un vector nulo), pues no pasa por el origen.

$$\mathbb{V}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = mx_1 + b\}, \quad m, b \in \mathbb{R}$$

6) $\mathbb{V}_3$ = conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están en un plano que pasa por el origen. **<u>Sí</u> es un espacio vectorial**.

$$\mathbb{V}_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Note que $x_3 = \dfrac{-a_1}{a_3}x_1 + \dfrac{-a_2}{a_3}x_2$. Es decir, al no haber intercepto, pasa por el origen.

Nota

En el caso de los polinomios, decir que ”pasa por el cero”significa que $y = 0$ y no que pasa por el origen. Por ejemplo, el polinomio $y = 2x + 3$ pasa por el cero, pero no pasa por el origen.

7) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n(x)$ = Polinomio de grado n en la variable x. **Sí es un espacio vectorial**.

8) $\mathbb{V} = \mathcal{C}\,[0,1]$, el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$. **Sí es un espacio vectorial**.

9) $\mathbb{V} = \mathcal{C}\,[a,b]$ el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. **Sí es un espacio vectorial**.

10) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{(3,4)}$, el conjunto de matrices de 3 filas y 4 columnas. **Sí es un espacio vectorial**.

11) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{(n,n)}$ invertibles, el conjunto de matrices cuadradas invertibles $(n \times n)$. **No es un espacio vectorial**, pues no tiene *ceromatriz* o matriz aditiva nula.

12) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{(n,n)}$ invertibles con la siguiente Definición de suma: $A \oplus B = AB$. **No es un espacio vectorial**.
✓Existe la *ceromatriz*, que es I_n.
! Pero no tiene conmutatividad, pues $A \oplus B \neq B \oplus A$.

13) $\mathbb{V} = \mathbb{C}$, el conjunto de números complejos. **Sí es un espacio vectorial**.

14) $\mathbb{V} = \int_0^1 f(x)dx$, el conjunto de funciones integrables en el intervalo $[0,1]$. **Sí es un espacio vectorial**. $\boxed{\text{Este es un ejercicio de examen}}$

Teorema 9.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Entonces:

1. $\alpha\vec{0} = \vec{0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $0x = \vec{0}, \quad \forall x \in \mathbb{V}$.
3. $\alpha x = \vec{0} \implies \alpha = 0 \lor x = \vec{0}$
4. $(-1)x = -x, \quad \forall x \in \mathbb{V}$.

Demostración del primer punto: **D!** Sea $\vec{0}$ el *cerovector* de $\mathbb{V}$:

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
$$\alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha\vec{0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} = \alpha\vec{0}$$
$$\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} - \alpha\vec{0} = \alpha\vec{0} - \alpha\vec{0}$$
$$\alpha\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
$$\alpha\vec{0} = \vec{0}$$

2.2. Subespacios vectoriales

Definición 9. Subespacio vectorial ($\mathbb{H}$):

Sea $\mathbb{H}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$.
Suponga que $\mathbb{H}$ en sí mismo es un espacio vectorial bajo los operadores de la suma y del producto definidos en $\mathbb{V}$. Decimos que $\mathbb{H}$ es un **subespacio vectorial** de $\mathbb{V}$.

Ejemplo:

$$\mathbb{H} \subseteq \mathbb{V}$$
$$\implies \vec{0} \subseteq \mathbb{R}^n$$

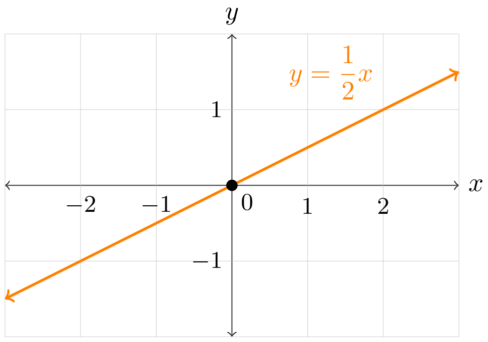

Figura 3: Ejemplo del subespacio vectorial $\mathbb{H}$ para $m = 1/2$

Teorema 10.

Un subconjunto no vacío $\mathbb{H}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, si se cumplen las dos reglas de cerradura (bajo la suma y bajo el producto) para asegurar que $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial.

Nota

$\mathbb{H}$ debe tener $\vec{0}$ (*cerovector*). De esta manera, para asegurarte que $\mathbb{H}$ es un subespacio vectorial, debes verificar **dos** propiedades y demostrar otras **dos**:

1. La existencia del *cerovector* $\vec{0}$.
2. Que $\mathbb{H}$ no es vacío. Pero al existir un *cerovector*, $\mathbb{H}$ no puede ser vacío. Por lo tanto, esta propiedad se demuestra al verificar que $\vec{0} \in \mathbb{H}$.
3. Cerradura bajo la suma.
4. Cerradura bajo el producto por un escalar.

2.2.1. Ejemplos de subespacios vectoriales

1) $\mathbb{V} \supseteq \{0\} = \mathbb{H}$, dónde $\mathbb{V}$ es el espacio trivial. $\mathbb{H}$ es el subespacio trivial. **Sí es un subespacio vectorial**.
✓Existe el *cerovector*, que es $\vec{0}$.
✓$\mathbb{H}$ no es vacío, pues $\vec{0} \in \mathbb{H}$.
✓Cerradura bajo la suma: $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.
✓Cerradura bajo el producto por un escalar: $\alpha\vec{0} = \vec{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{H} = \{(x, y) \mid y = mx\}$, el conjunto de puntos de la recta $y = mx$. **Sí es un subespacio vectorial**. Puede ver un caso particular en la figura **??**. En este caso el *cerovector* es $(0, 0)$, es decir, el origen de coordenadas.
✓Existe el *cerovector*, que es $(0, 0)$.
✓$\mathbb{H}$ no es vacío, pues $(0, 0) \in \mathbb{H}$.
✓Cerradura bajo la suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
✓Cerradura bajo el producto por un escalar: $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \supseteq \mathbb{H} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = at \\ y = bt \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = ct \end{array} \right\}$
El conjunto de puntos de la recta $x = at$, $y = bt$ y $z = ct$. **Sí es un subespacio vectorial**. En este caso el *cerovector* es $(0, 0, 0)$, es decir, el origen de coordenadas.
✓Existe el *cerovector*, que es $(0, 0, 0)$.
✓$\mathbb{H}$ no es vacío, pues $(0, 0, 0) \in \mathbb{H}$.

✓Cerradura bajo la suma: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
✓Cerradura bajo el producto por un escalar: $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \supseteq \mathbb{H} = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$, el conjunto de puntos de la recta $ax + by + cz = 0$. **<u>Sí</u> es un subespacio vectorial**. En este caso el *cerovector* es $(0, 0, 0)$, es decir, el origen de coordenadas.
✓Existe el *cerovector*, que es $(0, 0, 0)$.
✓$\mathbb{H}$ no es vacío, pues $(0, 0, 0) \in \mathbb{H}$.
✓Cerradura bajo la suma: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
✓Cerradura bajo el producto por un escalar: $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Nota

Demostración de un subespacio vectorial

Para el **ejemplo 4**, puede demostrar ambas cerraduras de la siguiente manera:

Cerradura bajo la suma: D! Sean $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ vectores pertenecientes al subespacio vectorial $\mathbb{H}$.
Definimos a h_1 y h_2 como:

$$\begin{aligned} h_1 &= (at_1, bt_1, ct_1), \quad ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ h_2 &= (at_2, bt_2, ct_2), \quad \underbrace{ax_2 + by_2 + cz_2 = 0}_{\substack{\text{Caracterizamos} \\ \text{a } h_1 \text{ y } h_2}} \end{aligned}$$

Aplicamos la definición o caracterización de la suma de vectores:

$$\begin{aligned} \implies &(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0 \\ &= a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = 0 \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

□

Cerradura bajo el producto por un escalar: D! Sean $h \in \mathbb{H}$ un vector perteneciente al subespacio vectorial $\mathbb{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar.
Definimos a h y lo caracterizamos:

$$h = (at, bt, ct), \quad ax + by + cz = 0$$

Aplicamos la definición o caracterización del producto por un escalar:

$$\begin{aligned} \implies \alpha h &= \alpha(x, y, z) \\ &= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= a(\alpha x) + b(\alpha y) + c(\alpha z) \\ &= \alpha(ax + by + cz) \\ &= \alpha(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

5) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n(x) \supseteq \mathbb{H} = \mathbb{P}_m(x), m < n$. **<u>Sí</u> es un subespacio vectorial**. En este caso el *cerovector* es el cero polinomial.
✓Existe el *cerovector*, que es el vector nulo.

Nota

Cero polinomial

En el caso de $\mathbb{P}_n(x)$, el cero polinomial es el siguiente:

$$0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Mientras que en el caso de $\mathbb{P}_m(x)$, el cero polinomial es el siguiente:

$$0x^m + 0x^{m-1} + \cdots + 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Únicamente eliminas los términos de mayor grado, es decir, los términos de $\mathbb{P}_n(x)$ que no pertenecen a $\mathbb{P}_m(x)$. Por ejemplo: Sea $n = 3$ y $m = 2$:

$$\overbrace{0x^3 + \underbrace{0x^2 + 0x + 0 = 0}_{\text{Cero polinomial de } \mathbb{P}_2(x)}}^{\text{Cero polinomial de } \mathbb{P}_3(x)}$$

✓$\mathbb{H}$ no es vacío, pues el vector nulo pertenece a $\mathbb{H}$.
✓Cerradura bajo la suma.
✓Cerradura bajo el producto por un escalar.

2.2.2. Ejercicios de subespacios vectoriales

Ejercicios de clase		
$\mathbb{V}$	$\mathbb{H}$	¿Es un subespacio?
$\mathbb{M}_{(m\times n)}$	$\left\{A \in \mathbb{M}_{(m\times n)} \middle\| a_{11} = 0\right\}$	Sí
$\mathbb{M}_{(n\times n)}$	$\left\{A \in \mathbb{M}_{(n\times n)} \;\middle\|\; \text{invertibles}\right\}$	No. La *ceromatriz* no está en el subconjunto.
$\mathcal{C}\,[0,1]$	$\mathcal{C}\,[0,1]$ Funciones continuas y diferenciables al menos una vez.	Sí. La función cero existe y es derivable.
$\mathcal{C}\,[0,1]$	$\mathbb{P}_n[0,1]$	Sí. El cero polinomial existe.
$\mathcal{C}\,[0,1]$	$\int_0^1 f(x)\,dx$	No. Hay funciones integrables que no son continuas.

Teorema 11.

Sean $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ subespacios vectoriales de $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.

1. **Asegurarse que no están vacíos.**
   Si $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$ tiene al menos un elemento, pues el cero vectorial pertenece a ambos subespacios.

2. **Cerradura bajo la suma.**
   Sean $u, v \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$, entonces $u \oplus v \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$.

3. **Cerradura bajo el producto por un escalar.**
   Sean $u \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \times u \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$.

Esta es una demostración de examen.

2.3. Combinación lineal

$$\text{Suponga } \mathbb{V} = \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{V}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Definición 10. **Vectores canónicos:**

Suponga un espacio vectorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$. Los vectores canónicos de $\mathbb{V}$ son los siguientes:

$$\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector x se puede escribir como una **combinación lineal** de los vectores canónicos de $\mathbb{V}$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definición 11. **Combinación lineal:**

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Un vector $v \in \mathbb{V}$ se dice que es una **combinación lineal** de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si existe un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Dicho de otra forma, un vector $v \in \mathbb{V}$ es una combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si existe un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ tales que se cumple la igualdad anterior.

2.3.1. Ejemplo de una combinación lineal con matrices

$$\mathbb{V} = \mathbb{M}_{(2\times 3)}$$

Sea $A \in \mathbb{M}_{(2\times3)}$ una matriz de 2 filas y 3 columnas definida por:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Una posible combinación lineal es la siguiente:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Cómo puede ver, cumple la forma} \\ \text{de una combinación lineal } (A = 3A_1 + 2A_2).}}$$

Sin embargo, no es la única combinación lineal de A, pues también se puede descomponer en los elementos canónicos de $\mathbb{M}_{(2\times3)}$ de la siguiente manera:

$$A = -3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + -1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota

Todas las matrices se pueden descomponer como combinaciones lineales de los elementos canónicos.

2.3.2. Ejemplo de una combinación lineal con polinomios

$$\mathbb{V} = \mathbb{P}_n(x)$$

Nota

Recuerde que una combinación lineal es una descomposición lineal de un vector en otros vectores del mismo espacio vectorial.

Así, tenemos que:

$$\mathbb{P}_n(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + zx^n$$

Por lo tanto, el vector canónico es:

$$\hat{\imath} = \left(1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\right)$$

2.4. Conjunto generado y espacio generado

Definición 12. Conjunto generado:

Se dice que los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in \mathbb{V}$ **generan** a $\mathbb{V}$ si $\forall v \in \mathbb{V}\ \exists$ un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}$ tales que: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Definición 13. Espacio generado:

El **espacio generado** por los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es el conjunto generado por todas las combinaciones lineales de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Es decir,

$$gen\,\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{v \in \mathbb{V} \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k\}$$
$$\text{donde } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$