Teoremas del límite: ley de los grandes números y teorema límite central

Jorge Antonio Gómez García
Saud Antonio Morales González

15 de diciembre de 2022

Índice

1. Introducción

TEXT ....

2. Ley de los grandes números

2.1. Ley débil de los grandes números

Sea X_i una secuencia de variables aleatorias independientes tales que $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ y $\mathrm{var}(X_n) \leq M$ para todo $n \geq 1$. Entonces, la siguiente secuencia de variables aleatorias converge a μ en probabilidad:

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mu \quad \text{en probabilidad.}$$

De esta ecuación tenemos que:

$$\mathrm{E}[\overline{X}_n^2] \to \mu^2$$

2.1.1. Ejemplo en Python

Considere el siguiente ejemplo: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial, tal que $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. El segundo momento $\mathrm{E}[\overline{X}_i^2]$ de X_i, con m diferentes valores de ω, puede ser simulado en Python de la siguiente manera:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
media_exp = 2   # beta = 0.5
n = 10000       # Numero de variables aleatorias
m = 50          # Numero de w's

# Generamos m muestras de n variables aleatorias con
    distribucion exponencial:
x = np.random.exponential(media_exp, (m,n))
    # (m,n) es una matriz (filas, columnas)

# Obtenemos la media de cada una de las muestras:
x_barra = np.mean(x, axis=1)
    # axis=1: calcula la media de cada fila
    # (m, 1) es un vector

# Obtenemos el segundo momento de cada una de las
    muestras:
x_barra_cuadrado = np.mean(x_barra**2)

print(x_barra_cuadrado)
    # 4.0000000000000004
    # blablabalbalablablaalblablabla
    # dahsjkdh sdkjfhsdkfsd
    # djlaksjdlkasjdlkas
    # sdalkjdslkfj lksdjf lskdfj
```

```
    # sdalkjdslkfj lksdjf lskdfj
    # sdalkjdslkfj lksdjf lskdfj
    # sdalkjdslkfj lksdjf lskdfj
    # sdalkjdslkfj lksdjf lskdfj
```

¿Qué describe el código anterior? Primero, determinamos los parámetros de la distribución exponencial. En este caso la media está definida como `media_exp = 2`. Luego, generamos `m` muestras de `n` variables aleatorias con distribución exponencial. Finalmente, calculamos el segundo momento de cada una de las muestras. En este caso, el segundo momento es `4.0000000000000004`.

2.2. Ley fuerte de los grandes números

3. Teorema límite central