

Teoremas del límite: ley de los grandes números y teorema límite central

Jorge Antonio Gómez García
Saud Antonio Morales González

15 de diciembre de 2022

Índice

1. Introducción	2
2. Ley de los grandes números	2
2.1. Ley débil de los grandes números	2
2.1.1. Ejemplo en Python	2
2.2. Ley fuerte de los grandes números	3
3. Teorema límite central	3

1. Introducción

TEXT

2. Ley de los grandes números

2.1. Ley débil de los grandes números

Sea X_i una secuencia de variables aleatorias independientes tales que $E[X_i] = \mu$ y $\text{var}(X_n) \leq M$ para todo $n \geq 1$. Entonces, la siguiente secuencia de variables aleatorias converge a μ en probabilidad:

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow \mu \quad \text{en probabilidad.}$$

De esta ecuación tenemos que:

$$E[\bar{X}_n^2] \rightarrow \mu^2$$

2.1.1. Ejemplo en Python

Considere el siguiente ejemplo: Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con distribución exponencial, tal que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. El segundo momento $E[\bar{X}_i^2]$ de X_i , con m diferentes valores de ω , puede ser simulado en Python de la siguiente manera:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
media_exp = 2    # beta = 0.5
n = 10000        # Numero de variables aleatorias
m = 50           # Numero de w's

# Generamos m muestras de n variables aleatorias con
# distribucion exponencial:
x = np.random.exponential(media_exp, (m,n))
# (m,n) es una matriz (filas, columnas)

# Obtenemos la media de cada una de las muestras:
x_barra = np.mean(x, axis=1)
# axis=1: calcula la media de cada fila
# (m, 1) es un vector

# Obtenemos el segundo momento de cada una de las
# muestras:
x_barra_cuadrado = np.mean(x_barra**2)

print(x_barra_cuadrado)
# 4.0000000000000004
```

¿Qué describe el código anterior? Primero, determinamos los parámetros de la distribución exponencial. En este caso la media está definida como `media_exp = 2`. Luego,

generamos m muestras de n variables aleatorias con distribución exponencial. Finalmente, calculamos el segundo momento de cada una de las muestras. En este caso, el segundo momento es 4.0000000000000004 .

2.2. Ley fuerte de los grandes números

3. Teorema límite central