

# Teoremas del límite: ley de los grandes números y teorema límite central

Jorge Antonio Gómez García  
Saud Antonio Morales González

15 de diciembre de 2022

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Ley de los grandes números</b>	<b>2</b>
2.1. Ley débil de los grandes números . . . . .	2
2.1.1. Ejemplo en Python . . . . .	2
2.2. Ley fuerte de los grandes números . . . . .	3
<b>3. Teorema límite central</b>	<b>3</b>

# 1. Introducción

TEXT .....

## 2. Ley de los grandes números

### 2.1. Ley débil de los grandes números

Sea  $X_i$  una secuencia de variables aleatorias independientes tales que  $E[X_i] = \mu$  y  $\text{var}(X_n) \leq M$  para todo  $n \geq 1$ . Entonces, la siguiente secuencia de variables aleatorias converge a  $\mu$  en probabilidad:

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow \mu \quad \text{en probabilidad.}$$

De esta ecuación tenemos que:

$$E[\bar{X}_n^2] \rightarrow \mu^2$$

#### 2.1.1. Ejemplo en Python

Considere el siguiente ejemplo: Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes con distribución exponencial, tal que  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ . El segundo momento  $E[\bar{X}_i^2]$  de  $X_i$ , con  $m$  diferentes valores de  $\omega$ , puede ser simulado en Python de la siguiente manera:

Importamos las librerías necesarias y definimos los parámetros:

```
# Librerías
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
media_exp = 2    # beta = 0.5
n = 10000        # Numero de variables aleatorias
m = 50           # Numero de w's
```

Generamos  $m$  muestras de  $n$  variables aleatorias con distribucion exponencial:

```
x = np.random.exponential(media_exp, (m,n))
# (m,n) es una matriz (filas, columnas)
```

Obtenemos la media de cada una de las muestras:

```
x_barra = np.mean(x, axis=1)
# axis=1: calcula la media de cada fila
# (m, 1) es un vector columna
```

Obtenemos el segundo momento de cada una de las muestras:

```
x_barra_cuadrado = np.mean(x_barra**2)

print(x_barra_cuadrado)
# 4.0000000000000004
```

¿Qué describe el código anterior? Primero, determinamos los parámetros de la distribución exponencial. En este caso la media está definida como `media_exp = 2`. Luego, generamos `m` muestras de `n` variables aleatorias con distribución exponencial. Finalmente, calculamos el segundo momento de cada una de las muestras. En este caso, el segundo momento es `4.0000000000000004`.

## 2.2. Ley fuerte de los grandes números

## 3. Teorema límite central