Temas de estudio para el examen de Estadística I

Jorge Antonio Gómez García

December 1, 2022

Referencias y recursos útiles

Demostraciones:

1. Colorario 4.13.
2. Teorema 4.14.
3. Distribución Binomial:
   - Función generadora de momentos.
   - Esperanza.
   - Varianza.
4. Distribución *Poisson*:
   - Función generadora de momentos.
   - Esperanza.
   - Varianza.
5. Distribución *Gamma*:
   - Función generadora de momentos.
   - Esperanza.
   - Varianza.
6. Distribución Normal:
   - Función generadora de momentos.
   - Esperanza.
   - Varianza.
7. Estudiar multivariable antes de covarianza.
8. Candidatos a venir en el examen: ejercicios **5.65** y **5.86** del Wackerly. Ejercicio **6.64** no viene en el examen.

Colorario 4.13

Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes, demuestre que:

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = 0.$$

D! Sea Y_1 y Y_2 variables aleatorias independientes, y μ_1 y μ_2 sus respectivas medias, además, sea

$$\mu_i = \mathrm{E}[Y_i], \quad i = 1, 2,$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) &= \mathrm{E}\left[(Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_1 Y_2\right] - \mu_1 \mu_2 \\
&= \mathrm{E}\left[Y_1 Y_2\right] - \mathrm{E}\left[Y_1\right] \mathrm{E}\left[Y_2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_1\right] \mathrm{E}\left[Y_2\right] - \mathrm{E}\left[Y_1\right] \mathrm{E}\left[Y_2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.14

Sean X_i y Y_j variables aleatorias para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. Entonces para las constantes a_i y b_j, $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, demuestre que:

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}\left(X_i, Y_j\right).$$

D! Sea X_i y Y_j variables aleatorias para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, y recuerde que la definición de covarianza es:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &:= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right] \\
&= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) &= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right)\right] - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] \cdot \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j X_i Y_j\right] - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] \cdot \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{E}\left[X_i Y_j\right] - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] \cdot \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{E}\left[X_i Y_j\right] - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}\left[X_i\right] \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \mathrm{E}\left[Y_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{E}\left[X_i Y_j\right] - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{E}\left[X_i\right] \mathrm{E}\left[Y_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \left(\mathrm{E}\left[X_i Y_j\right] - \mathrm{E}\left[X_i\right] \mathrm{E}\left[Y_j\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}\left(X_i, Y_j\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio *5.86

Suponga que Z es una variable aleatoria normal estándar y que Y_1 y Y_2 son variables aleatorias con distribución χ^2 con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente. Además. suponga que Z, Y_1 y Y_2 son independientes.

1. Defina $W = \dfrac{Z}{\sqrt{Y_1}}$. Encuentre $\mathrm{E}[W]$ y $\mathrm{var}[W]$. ¿Qué suposiciones se necesitan acerca del valor de ν_1? [*Sugerencia*: $W = Z(1/\sqrt{Y_1}) = g(Z)h(Y_1)$. El ejercicio **4.112** puede ayudarle].

Esperanza. D!

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[W] &= \mathrm{E}\left[Z \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1}}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[Z\right]\mathrm{E}\left[\frac{1}{\sqrt{Y_1}}\right] \\ &= 0 \cdot \mathrm{E}\left[\frac{1}{\sqrt{Y_1}}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

Varianza. D! Sea la definición de varianza:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &:= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2\end{aligned}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[W] &= \mathrm{var}\left[Z \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1}}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(Z \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1}}\right)^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Z \cdot \frac{1}{\sqrt{Y_1}}\right]\right)^2 \\ &= \mathrm{E}\left[Z^2 \cdot \frac{1}{Y_1}\right] - \left(\mathrm{E}\left[Z\right] \cdot \mathrm{E}\left[\frac{1}{Y_1}\right]\right)^2 \\ &= \mathrm{E}\left[Z^2 \cdot \frac{1}{Y_1}\right] - \left(0 \cdot \mathrm{E}\left[\frac{1}{Y_1}\right]\right)^2 \\ &= \mathrm{E}\left[Z^2 \cdot \frac{1}{Y_1}\right] - 0 \\ &= \mathrm{E}\left[Z^2 \cdot \frac{1}{Y_1}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[Z^2\right] \cdot \mathrm{E}\left[\frac{1}{Y_1}\right] \\ &= [...]\end{aligned}$$

Note que Z es una variable aleatoria normal estándar, por lo que $\mathrm{E}\left[Z^2\right] = 1$. [...]

2. Defina $U = Y_1/Y_2$. Encuentre $E(U)$ y $V(U)$. ¿Qué suposiciones se necesitan acerca del valor de ν_1 y ν_2? Use la sugerencia del inciso anterior.

Esperanza:

D! Note que Y_1 y Y_2 son variables aleatorias **independientes** con distribución χ^2. La esperanza de una función *gamma* es $\mathrm{E}[X] = \alpha\beta$, donde α y β son los parámetros de la distribución. En el caso particular de una distribución χ^2 con ν grados de libertad, $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$, entonces, $\mathrm{E}[X] = \nu$. Por lo tanto, $\mathrm{E}[Y_1] = \nu_1$ y $\mathrm{E}[Y_2] = \nu_2$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[U] &= \mathrm{E}\left[\frac{Y_1}{Y_2}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_1\right]\mathrm{E}\left[\frac{1}{Y_2}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[Y_1\right] \cdot \frac{1}{\mathrm{E}\left[Y_2\right]} \\
&= \nu_1 \cdot \frac{1}{\nu_2} \\
&= \frac{\nu_1}{\nu_2}
\end{aligned}$$

□

Varianza:

D! Note que Y_1 y Y_2 son variables aleatorias **independientes** con distribución χ^2. La varianza de una función *gamma* es $\mathrm{var}[X] = \alpha\beta^2$, donde α y β son los parámetros de la distribución. En el caso particular de una distribución χ^2 con ν grados de libertad, $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$, entonces, $\mathrm{var}[X] = 2\nu$. Por lo tanto, $\mathrm{var}[Y_1] = 2\nu_1$ y $\mathrm{var}[Y_2] = 2\nu_2$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[U] &= \mathrm{var}\left[\frac{Y_1}{Y_2}\right] \\
&= [...]
\end{aligned}$$

Distribución Binomial

Función generadora de momentos

D! Sea X una variable aleatoria con distribución binomial, con parámetros n y p. Entonces:

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k} \\
&\quad \text{Por el binomio de Newton tenemos:} \\
&= (pe^t + 1 - p)^n \\
&= (pe^t + q)^n
\end{aligned}$$

□

Esperanza

D! Sea X una variable aleatoria con distribución binomial, con parámetros n y p. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-1-(x-1))!} p^{x-1}(1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1}(1-p)^{n-1-(x-1)}, \quad \text{Cambio de variable: } y = x-1 \\
&= np \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^{y}(1-p)^{n-1-y}}_{1}, \quad \text{Note que la suma parece } \operatorname{bin}(n-1,p) \\
&= np \cdot 1 \\
&= np
\end{aligned}
$$

□

Varianza

D! Sea X una variable aleatoria con distribución binomial, con parámetros n y p. Entonces:

Calcule E$[X^2]$**:**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} [x + (x-1) + x] \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \underbrace{\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{np} \\
&= \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!(n-2-(x-2))!} p^x (1-p)^{n-x} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2}(1-p)^{n-2-(x-2)} + np, \quad \text{Cambio de variable: } y = x-2 \\
&= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{y=0}^{n-2} \binom{n-2}{y} p^{y}(1-p)^{n-2-y}}_{1} + np, \quad \text{Note que la suma parece } \operatorname{bin}(n-2,p) \\
&= n(n-1)p^2 \cdot 1 + np \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, ya podemos calcular la varianza var$[X]$**:**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[X] &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \\
&= \underbrace{n(n-1)p^2 + np}_{\mathrm{E}[X^2]} - \underbrace{(np)^2}_{(\mathrm{E}[X])^2} \\
&= (n^2 - n)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2} \\
&= -np^2 + np \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

□

Distribución Poisson

Función generadora de momentos

D! Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson, con parámetro λ. Entonces:

$$
\begin{aligned}
M(t) := \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}, \quad \text{Cambio de variable: } y = \lambda e^t \\
&= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{y^x}{x!}}_{\substack{\text{Es la serie} \\ \text{de Taylor} \\ \text{de } e^y}} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{y}, \quad \text{Recuerde que } y = \lambda e^t \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} \\
&= e^{\lambda e^t - \lambda} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Esperanza

D! Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson, con parámetro λ. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}, \quad \text{Cambio de variable: } y = x - 1 \\
&= \lambda \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}}_{1}, \quad \text{Note que la suma parece } \textit{Poisson} \\
&= \lambda \cdot 1 \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

$\square$

Varianza

D! Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson, con parámetro λ. Entonces:

Calcule $\mathrm{E}[X^2]$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} [x + (x-1) + x] e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} + \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}}_{\lambda} \\
&= \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda, \quad \text{Cambio de variable: } y = x-2 \\
&= \lambda^2 \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}}_{1} + \lambda, \quad \text{Note que la suma parece } \textit{Poisson} \\
&= \lambda^2 \cdot 1 + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, ya podemos calcular la varianza $\mathrm{var}[X]$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \\
&= \underbrace{\lambda^2 + \lambda}_{\mathrm{E}[X^2]} - \underbrace{(\lambda)^2}_{(\mathrm{E}[X])^2} \\
&= \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

□

Distribución Gamma

Función generadora de momentos

Referencias y recursos útiles

- **Binomio de Newton.** Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$. El binomio de Newton de grado m es el polinomio:

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$$

- **Propiedad 1 de la ecuación combinatoria:**

$$k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$$

- **Propiedad 2 de la ecuación combinatoria:**

$$k^2\binom{m}{k} = m(m-1)\binom{m-2}{k-2} + k\binom{m}{k}$$

- **Número de Euler (e):**

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

- **Exponencial de Euler (e^x):**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En este caso nos referimos al momento de orden k de la variable aleatoria X respecto al origen.

- **Serie de Taylor:**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

- **Serie de Maclaurin.** Una serie de Maclaurin es un serie de Taylor $f(x)$ con $a = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

- **Función generadora de momentos.** Dada una variable aleatoria X, se define la función generadora de momentos como:

$$m_{\mathrm{X}}(t) = M(t) := \mathrm{E}(e^{tX})$$

- $X \sim$ **Binomial**(n, p)**, dónde** $n \in \mathbb{N}$ **y** $p \in [0, 1]$**,** entonces:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{para } x \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

- $X \sim$ **Poisson**(λ)**, dónde** $\lambda > 0$**,** entonces:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{N}$$

- $X \sim$ **Gamma**(α, β)**, dónde** $\alpha > 0$ **y** $\beta > 0$**,** entonces:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \text{para } x > 0,$$

dónde:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

- $X \sim$ **Normal**(μ, σ^2)**, dónde** $\mu \in \mathbb{R}$ **y** $\sigma^2 > 0$**,** entonces:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$