

# Del modelo no lineal al control efectivo: Una aplicación integral de Feedback Linearization en Simulink para una planta con articulación flexible, desde el análisis teórico hasta la simulación

Bustos Mendez Jorge Fernando  
Narvaez Arturo Nicolas  
*Universidad de Nariño*

2025

---

## Abstract

This work presents the development and implementation of a robust nonlinear controller for a flexible joint system using Feedback Linearization (FL), fully realized in MATLAB and Simulink. The design involves detailed derivations of Lie and cross derivatives, as well as the construction of a diffeomorphism for accurate nonlinear-to-linear transformation. The controller shows excellent performance under various reference changes and disturbances. The complete Simulink model, including all subsystems and control blocks, is provided as a valuable resource for education and research, ensuring reproducibility and practical applicability.

---

## 1. Introducción

El control de sistemas no lineales sigue siendo un desafío fundamental en ingeniería, especialmente en aplicaciones que requieren alta precisión y rápida respuesta. Entre las técnicas disponibles, el Feedback Linearization (FL) destaca por permitir el uso de estrategias lineales sobre sistemas inherentemente no lineales, lo que favorece soluciones robustas y eficientes. No obstante, su implementación suele limitarse al ámbito teórico. En este trabajo se presenta una aplicación práctica y detallada de FL sobre un Flexible Joint System, utilizando herramientas ampliamente difundidas como MATLAB y Simulink, resaltando su potencial tanto académico como aplicado.

El diseño de controladores para sistemas no lineales es un reto, especialmente en presencia de acoplamientos internos, restricciones físicas y comportamientos complejos como los de los manipuladores con articulaciones flexibles. Entre los enfoques existentes, el Feedback Linearization (FL) destaca por su capacidad de transformar dinámicamente un sistema no lineal en uno lineal mediante derivadas de Lie, facilitando así la aplicación de técnicas de control lineales. Su desempeño, sin embargo, depende fuertemente de la precisión del modelo, ya que cualquier error afecta la cancelación exacta de las no linealidades.

En años recientes, se ha explorado su aplicación en sistemas con articulaciones flexibles. Rajgade

et al. [1] propusieron un esquema robusto basado en FL mejorado con un observador proporcional-integral para estimar estados no medibles y compensar incertidumbres dinámicas. Abdul-Adheem et al. [2] presentaron un enfoque sin modelo que combina FL de entrada-salida con control activo de rechazo de perturbaciones, reduciendo la dependencia del modelo exacto. Desde una perspectiva más teórica, Mizzoni et al. [3] desarrollaron un esquema unificado de FL capaz de conmutar entre modos energéticamente eficientes y de alta destreza. Finalmente, Chen [4] abordó la FL para sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales-algebraicas, estableciendo condiciones necesarias y suficientes para su aplicación tanto interna como externamente.

En conjunto, estos trabajos evidencian la versatilidad y eficacia del FL en sistemas no lineales complejos, desde enfoques aplicados hasta marcos teóricos avanzados.

Este trabajo presenta el desarrollo completo de un controlador no lineal mediante FL aplicado a una planta tipo flexible joint, completamente implementado en MATLAB y Simulink. A diferencia de enfoques más teóricos, aquí se detalla el diseño paso a paso: cálculo de derivadas de Lie, derivadas cruzadas y construcción del difeomorfismo necesario. Estos elementos se integran en bloques reutilizables dentro de Simulink. Como aporte distintivo, se documenta completamente la estructura del modelo, permitiendo su validación funcional y reutili-

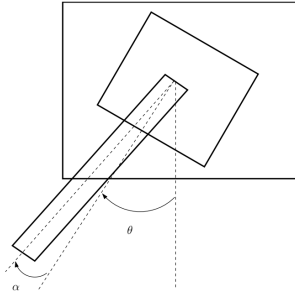
zación directa, lo que representa una herramienta valiosa para la enseñanza y la investigación. El enfoque es reproducible, estructurado y validado mediante simulaciones que demuestran un excelente desempeño ante referencias variables y dinámicas complejas.

## 2. Modelo Matemático de la Articulación Flexible

Se considera un manipulador de un solo eslabón con una articulación flexible que opera en un plano vertical, se incluye el efecto de la gravedad, lo cual introduce una no linealidad en las ecuaciones del sistema dinámico.

El sistema tiene dos grados de libertad:

- La posición angular del motor:  $\theta$
- El desplazamiento angular(deflexión) de la articulación flexible:  $\alpha$



**Figura 1:** Definición de las coordenadas generalizadas para el eslabón.

Los parámetros del sistema están suministrados en [Anexos](#).

### 2.0.1. Representación en el espacio de estados

El sistema se escribe como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{K_s}{J_h} x_2 - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m J_h} x_3 + \frac{K_m K_g}{R_m J_h} v \\ \dot{x}_4 &= -\frac{K_s}{J_h} x_2 + \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m J_h} x_3 - \frac{K_m K_g}{R_m J_h} v \\ &\quad - \frac{K_s}{J_l} x_2 + \frac{mgh}{J_l} \sin(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

Tomando  $u = v$ , y eligiendo como salida la posición en la punta  $y = x_1 + x_2$ , el sistema puede expresarse en la forma estándar de espacio de estados:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (1)$$

donde:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{K_s}{J_h} x_2 - \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m J_h} x_3 \\ -\left(\frac{K_s}{J_h} + \frac{K_s}{J_l}\right) x_2 + \frac{mgh}{J_l} \sin(x_1 + x_2) + \frac{K_m^2 K_g^2}{R_m J_h} x_3 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_m K_g}{R_m J_h} \\ -\frac{K_m K_g}{R_m J_h} \end{pmatrix}, \quad h(x) = x_1 + x_2$$

## 3. Diseño del Control

### 3.1. Grado relativo de la Articulación Flexible

Se desea determinar el **grado relativo** del sistema no lineal dado en la ecuación 1, respecto a la entrada  $u$  y la salida  $y = x_1 + x_2$ .

Recordando que el grado relativo  $r$  de un sistema no lineal es el número de veces que se debe derivar la salida hasta que la entrada aparezca de forma explícita.

La ecuación 1 representa el sistema en forma no lineal de espacio de estados donde:

$$h(x) = x_1 + x_2$$

Para calcular el grado relativo, se utilizan las derivadas de Lie:

$$\begin{aligned}L_f h &= \nabla h \cdot f \\ L_f^2 h &= \nabla(L_f h) \cdot f \\ L_f^3 h &= \nabla(L_f^2 h) \cdot f \\ L_f^4 h &= \nabla(L_f^3 h) \cdot f\end{aligned}$$

y las derivadas cruzadas con  $g$ :

$$\begin{aligned}L_g h &= \nabla h \cdot g = 0 \\ L_g L_f h &= \nabla(L_f h) \cdot g = 0 \\ L_g L_f^2 h &= \nabla(L_f^2 h) \cdot g = 0 \\ L_g L_f^3 h &= \nabla(L_f^3 h) \cdot g \neq 0\end{aligned}$$

La expresión simbólica obtenida para la cuarta derivada cruzada es:

$$\begin{aligned}L_g L_f^3 h &= \frac{K_g K_m}{J_h R_m} \left( \frac{K_s}{J_l} - \frac{gh_{cm} m \cos(x_1 + x_2)}{J_l} \right) \\ &\quad + \frac{K_g K_m gh_{cm} m \cos(x_1 + x_2)}{J_h J_l R_m}\end{aligned}$$

Y su valor numérico evaluado es:

$$L_g L_f^3 h = \frac{1062128232431616355}{39582418599936}$$

Este valor es claramente distinto de cero, por lo tanto:

$$L_g L_f^3 h \neq 0$$

El grado relativo del sistema es:

$$r = 4$$

Lo que indica que se requieren cuatro derivadas sucesivas de la salida  $y$  para que la entrada  $u$  aparezca de forma explícita.

### 3.2. Cálculo del cambio de coordenadas para la forma normal (Difeomorfismo)

El objetivo es encontrar un cambio de coordenadas:

$$z = \Phi(x)$$

que transforme el sistema original no lineal en su **forma normal**. En este caso, el sistema ya tiene grado relativo  $r = 4$ , y por tanto, la transformación está dada por:

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) \\ z_2 &= L_f h(x) \\ z_3 &= L_f^2 h(x) \\ z_4 &= L_f^3 h(x) \end{aligned}$$

En MATLAB, estas expresiones se calcularon simbólicamente como:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 \\ z_2 &= x_3 + x_4 \\ z_3 &= -\frac{K_s x_2 - g h_{cm} m \sin(x_1 + x_2)}{J_l} \\ z_4 &= \frac{g h_{cm} m x_3 \cos(x_1 + x_2)}{J_l} \\ &\quad - x_4 \left( \frac{K_s}{J_l} - \frac{g h_{cm} m \cos(x_1 + x_2)}{J_l} \right) \end{aligned}$$

Además, se obtuvieron las expresiones numéricas evaluadas con los parámetros del sistema, las cuales están implementadas en los [Anexos](#).

### 3.3. Controlador por linealización por realimentación

Se desea diseñar un controlador no lineal de la forma:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

que linealice exactamente el sistema, de modo que la dinámica entre la nueva entrada  $v$  y la salida  $y$  sea completamente lineal.

#### 3.3.1. Forma del controlador

Utilizando el resultado anterior, se sabe que el grado relativo del sistema es 4. Por lo tanto, se debe anular la dinámica no lineal hasta la cuarta derivada de la salida. Esto se logra mediante:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^3 h(x)} \left( v - L_f^4 h(x) \right)$$

En MATLAB, esta expresión se obtuvo como:

$$u = \frac{v - L_f^4 h(x)}{L_g L_f^3 h(x)}$$

Donde  $L_g L_f^3 h(x)$  es la derivada cruzada no nula y  $L_f^4 h(x)$  representa la cuarta derivada de la salida, antes de que aparezca la entrada. El resultado simbólico y numérico se encuentran en [Anexos](#).

#### 3.3.2. Forma linealizada del sistema

Con este controlador, la dinámica del sistema se convierte en:

$$\ddot{y} = v$$

O, más formalmente, la dinámica del sistema en forma de integradores queda como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v \end{aligned}$$

#### 3.3.3. Función de transferencia en lazo cerrado

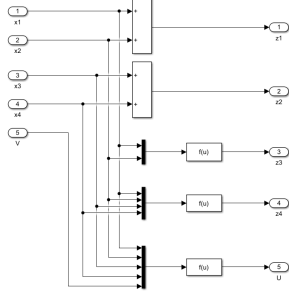
La salida  $y = z_1$ , y la entrada virtual es  $v$ , por lo tanto la función de transferencia del sistema entre  $v$  y  $y$  es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^4}$$

## 4. Implementación del modelo y controlador en Simulink

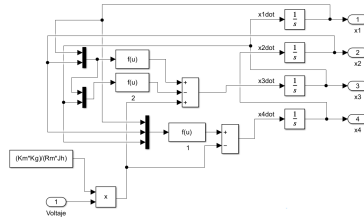
Para verificar el desempeño del sistema controlado, se implementó en Simulink tanto el modelo original no lineal del manipulador flexible como el controlador obtenido mediante linealización por realimentación.

1. **Sistema linealizador:** Este subsystem recibe los estados  $x$  y la entrada virtual  $v$ , y calcula la entrada real  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ .



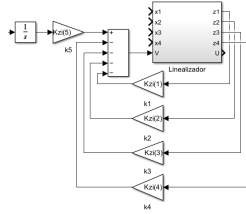
**Figura 2:** Sistema linealizador en Simulink.

2. **Modelo no lineal de la planta:** Implementación directa de las ecuaciones dinámicas del manipulador flexible.



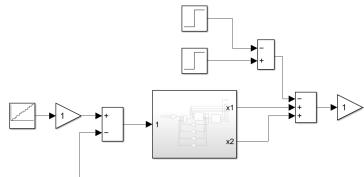
**Figura 3:** Modelo no lineal de la planta en Simulink.

3. **Carga de ganancias del controlador:** Se muestran los bloques que almacenan y aplican las ganancias calculadas previamente en MATLAB ( $K_z$  o  $K_{zi}$ ).



**Figura 4:** Ubicación de de ganancias del controlador con integrador.

4. **Sistema completo con referencia y perturbaciones:** Representación global del sistema incluyendo el generador de referencia, el controlador externo y las perturbaciones que se aplican a la planta.



**Figura 5:** Vista del sistema completo implementado en Simulink.

Los diagramas completos realizados en Simulink se pueden visualizar de mejor forma en [Anexos](#).

## 5. Diseño del controlador lineal de lazo externo

### 5.1. Modelo en coordenadas linealizadas

La dinámica del sistema en las coordenadas  $z = \Phi(x)$  es:

$$\dot{z} = A_z z + B_z v, \quad y = C_z z$$

con:

$$A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_z = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

### 5.2. Controlador sin integrador

Se diseñó una realimentación de estados:

$$v = -K_z z + r$$

utilizando colocación de polos de Bessel con  $\omega_b = 10$ . El orden del sistema es 4, por lo tanto las ganancias obtenidas fueron:

$$K_z = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

(donde se mostrará el valor numérico en la versión final).

### 5.3. Controlador con integrador

Para mejorar el rechazo de perturbaciones y el seguimiento en régimen permanente, se incorporó un integrador de error:

$$\dot{\xi} = r - y = r - C_z z$$

La planta extendida queda:

$$A_a = \begin{bmatrix} A_z & 0 \\ C_z & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

La realimentación ampliada:

$$v = -K_{zi} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}$$

También se usaron polos de Bessel de orden 5 (por el integrador adicional), escalados por  $\omega_b = 10$ . Las ganancias obtenidas fueron:

$$K_{zi} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5]$$

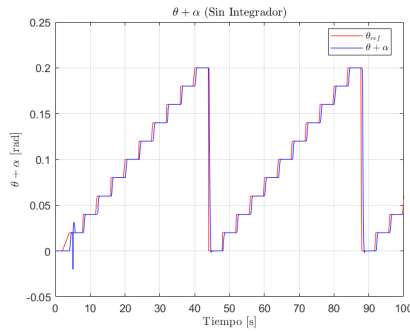
## Problema 6: Implementación del controlador multibucle y simulaciones

Se implementaron en Simulink los controladores:

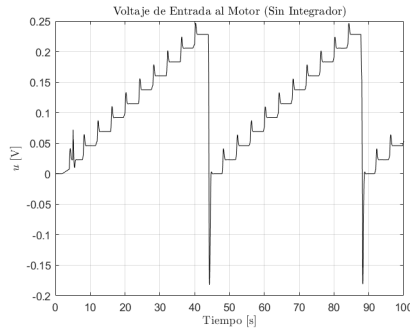
- Control sin integrador (feedback puro)
- Control con integrador (feedback + compensación de error acumulado)

### 5.4. Resultados de simulación

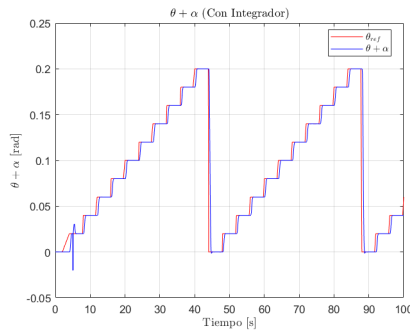
Se presentan los resultados para ambos controles implementados, ante 1 tipo de referencia (variable en forma de escalón):



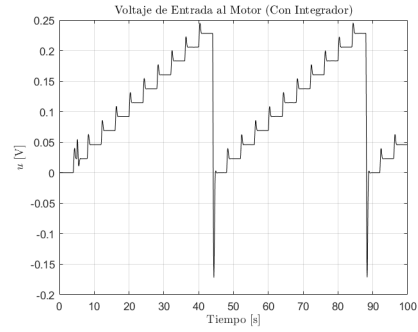
**Figura 6:** Respuesta de la salida  $x1 + x2$  del control sin integrador.



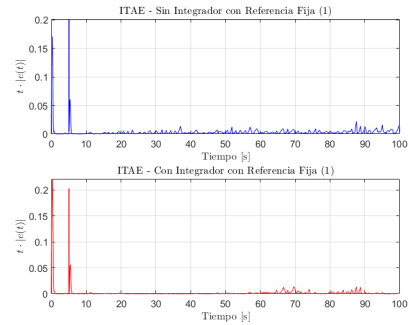
**Figura 7:** Señal de control sin integrador.



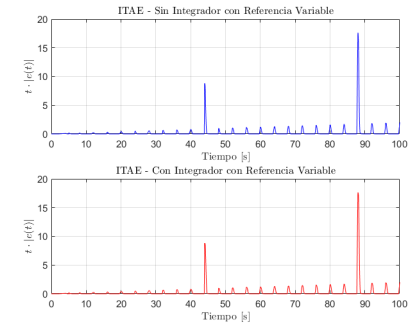
**Figura 8:** Respuesta de la salida  $x1 + x2$  del control con integrador.



**Figura 9:** Señal de control con integrador.



**Figura 10:** Comparación del índice ITAE entre ambos controladores con una referencia fija (1).



**Figura 11:** Comparación del índice ITAE entre ambos controladores con una referencia variable (forma de escalón).

Las gráficas de las demás señales se pueden observar en [Anexos](#).

## 6. Análisis y Resultados

Las simulaciones muestran un rendimiento sobresaliente del controlador basado en Feedback Linealization (FL) aplicado a una planta flexible, evaluado bajo diferentes tipos de referencia: fija y en escalera, con y sin integrador.

En el caso de una única referencia, el control sin integrador obtuvo un ITAE de 0.3381, mientras que

al incorporar un integrador, este valor se redujo a 0.2369, evidenciando una mejora significativa en el seguimiento y una reducción del error estacionario. Esto demuestra el aporte del integrador al mejorar la precisión del control sin comprometer la estabilidad. Para referencias en escalera, se obtuvieron valores de ITAE más altos: 22.3043 sin integrador y 25.8191 con integrador. Estos valores elevados no indican un mal desempeño del controlador, sino que responden a la naturaleza de las referencias, caracterizadas por cambios bruscos y frecuentes que acumulan error durante las transiciones. Aun así, el sistema mantuvo una respuesta rápida, estable y sin oscilaciones relevantes, lo cual confirma la robustez y adaptabilidad del controlador propuesto frente a dinámicas exigentes y discontinuidades en la referencia.

El uso del integrador demostró ser beneficioso, especialmente al mejorar el seguimiento y reducir errores en escenarios con referencia constante, reforzando su utilidad en configuraciones prácticas. Por parte de la robustez y Ventajas del Enfoque tenemos que una de las fortalezas más notables del controlador es su capacidad para manejar perturbaciones y saltos de referencia gracias a la cancelación exacta de no linealidades mediante derivadas de Lie, derivadas cruzadas y el difeomorfismo, lo que permitió un control más predecible y eficaz. Además, el hecho de que el orden relativo del sistema linealizado coincida con el de la planta original (orden 4) simplificó el diseño, evitando la necesidad de agregar dinámicas artificiales y reduciendo la complejidad computacional sin comprometer la estabilidad o precisión del sistema.

## 7. Conclusiones

Este trabajo ha demostrado la eficacia de la técnica de Feedback Linearization (FL) para el control de una planta tipo flexible joint, destacando su aplicabilidad más allá del ámbito teórico mediante una implementación completa en MATLAB y Simulink. A través de una cuidadosa modelación y del uso de herramientas simbólicas y numéricas, fue posible eliminar las no linealidades del sistema mediante derivadas de Lie, derivadas cruzadas y la construcción de un difeomorfismo adecuado, logrando una transformación exacta del sistema no lineal a uno lineal controlable.

Los resultados experimentales muestran que el controlador propuesto ofrece un desempeño robusto y preciso frente a perturbaciones y cambios abruptos en la referencia, con índices ITAE bajos tanto para referencias únicas como escalonadas. En particular, el uso de un integrador dentro del esquema de control mejoró la capacidad de seguimiento, reduciendo el error estacionario sin comprometer la

estabilidad del sistema.

Un aspecto clave en el éxito del diseño fue que el orden relativo del sistema coincidía con el orden de la planta (orden 4), lo cual permitió simplificar el proceso de linealización sin necesidad de introducir dinámicas adicionales. La presentación detallada del modelo y la implementación del controlador en Simulink representa un aporte relevante y poco común en la literatura, facilitando la replicabilidad del trabajo y su uso como guía académica o de investigación.

En conjunto, este estudio reafirma la potencia de FL como herramienta de control no lineal y su viabilidad en aplicaciones reales, sin dejar de lado que es necesario una buena caracterización del sistema. Y que en conjunto a un entorno de desarrollo adecuado como MATLAB/Simulink hacen más sencilla su implementación.

## Anexos

Para visualización con más detalle, puedes visitar el siguiente enlace de GitHub: <https://github.com/NicoNkx/Anexos-FeedBack-Linearization>

## Referencias

- [1] S. C. RAJGADE, P. D. SHENDGE Y P. S. LONDHE, "FEEDBACK LINEARIZATION-BASED ROBUST CONTROL FOR FLEXIBLE JOINT ROBOTIC SYSTEM USING PROPORTIONAL INTEGRAL OBSERVER," *International Journal of Dynamics and Control*, VOL. 11, PP. 396–410, 2023., <https://doi.org/10.1007/s40435-022-00984-8>.
- [2] W. R. ABDUL-ADHEEM, I. K. IBRAHEEM, A. J. HUMAIDI Y A. T. AZAR, "MODEL-FREE ACTIVE INPUT-OUTPUT FEEDBACK LINEARIZATION OF A SINGLE-LINK FLEXIBLE JOINT MANIPULATOR: AN IMPROVED ACTIVE DISTURBANCE REJECTION CONTROL APPROACH," *Measurement and Control*, VOL. 54, NO. 5–6, PP. 663–676, 2021., <https://doi.org/10.1177/0020294020917171>.
- [3] M. MIZZONI, P. VAN GOOR Y A. FRANCHI, "UNIFIED FEEDBACK LINEARIZATION FOR NONLINEAR SYSTEMS WITH DEXTEROUS AND ENERGY-SAVING MODES," *arXiv preprint*, ARXIV:2502.20524, 2025., <https://arxiv.org/abs/2502.20524>.
- [4] Y. CHEN, "FEEDBACK LINEARIZATION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC CONTROL SYSTEMS," *arXiv preprint*, ARXIV:2104.02141, 2021., <https://arxiv.org/abs/2104.02141>.