Laboratorio 5 - Parte 1

CC3039 - Modelación y Simulación

Teoría y Práctica

Semestre II - 2025

Defina y responda

1. ¿Cuál es la característica más definitoria de una red libre de escala que la diferencia de una red aleatoria (Erdős-Rényi)? Explique por qué esta característica obliga a los modeladores a ir más allá de los modelos que se basan únicamente en propiedades promedio (como el modelo SIR clásico).

Respuesta. Una red libre de escala tiene **hubs**: pocos nodos con grado enorme y muchos con grado pequeño. Eso ocurre porque la distribución de grados sigue una cola pesada $P(k) \sim k^{-\gamma}$. En Erdős–Rényi, en cambio, el grado es *aprox.* Poisson: la mayoría de nodos están cerca del promedio $\bar{k}$. Por eso, usar sólo $\bar{k}$ en la dinámica (p. ej., SIR clásico) **se queda corto** en libres de escala: los hubs dominan el contagio. Se necesitan modelos que incorporen la heterogeneidad, típicamente a través de $\langle k^2 \rangle$ (campo medio heterogéneo) y no sólo de $\bar{k}$.

2. Considere la fórmula de la ley de potencia vista en clase. ¿Qué implica un valor menor de gamma (por ejemplo, 2,1 frente a 3,5) sobre la prevalencia de nodos altamente conectados en la red?

Respuesta. Un γ más pequeño $\Rightarrow$ cola más pesada. Con $\gamma = 2{,}1$ aparecen **más hubs y más grandes** que con $\gamma = 3{,}5$. En la práctica, la red es mucho más heterogénea; la varianza de grados crece (incluso puede divergir con N si $\gamma \leq 3$), y la propagación “se apalanca” en esos supernodos.

3. ¿Por qué el número reproductivo básico R_0 para una enfermedad que se propaga en una red libre de escala depende de la varianza de la distribución de grados, no solo de la media?

Respuesta. El contagio “ve” más a nodos de alto grado. En campo medio heterogéneo:

$$R_0 \;\approx\; \frac{\beta}{\mu} \, \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle}.$$

Así, una $\langle k^2 \rangle$ grande (mayor varianza) **eleva** R_0 y **baja el umbral epidémico**. Intuición: más dispersión de grados $\Rightarrow$ más probabilidad de golpear un hub y encadenar transmisiones.

4. ¿Por qué las intervenciones dirigidas (p. ej., centrar las pruebas, el uso de mascarillas o la vacunación en los centros de la red) son particularmente eficaces y eficientes en una red sin escala en comparación con una red aleatoria? Explíquelo desde una perspectiva matemática y práctica.

Respuesta. Atacar primero los hubs (reducir contactos, testear, vacunar) **recorta** $\langle k^2 \rangle$ y rompe los “superenlaces” que mantienen la conectividad efectiva (percolación dirigida). Con **poca cobertura** ya se reduce mucho R_0 y se fragmenta la red. En redes aleatorias el beneficio es menor porque los nodos se parecen más entre sí; en libres de escala, focalizar en hubs es **altamente costo–efectivo**.

Parte Práctica: simulación SIR en ER vs. Libre de Escala

Notebook (Google Colab):
`https://colab.research.google.com/drive/1ld1JBJIdjsw1GtyQ-QjVCCqYpbxnGAb5?usp=sharing`

Figuras a incluir en el informe

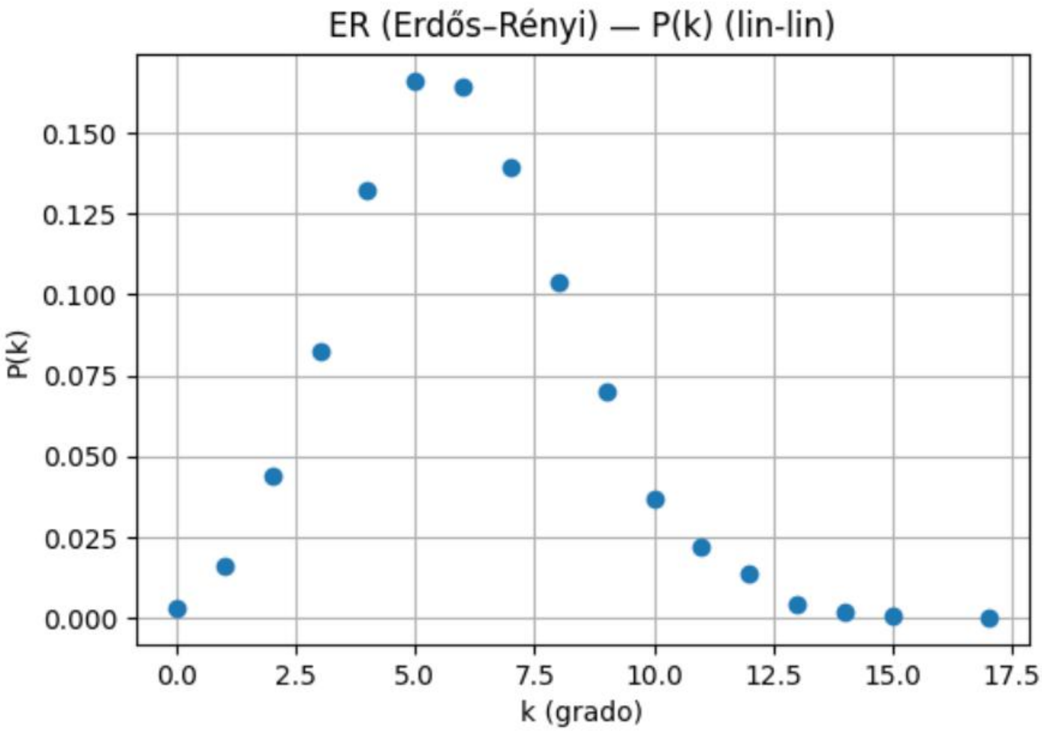

Figura 1: ER (Erdős–Rényi) — Distribución de grados $P(k)$ en escala lineal (lin–lin).

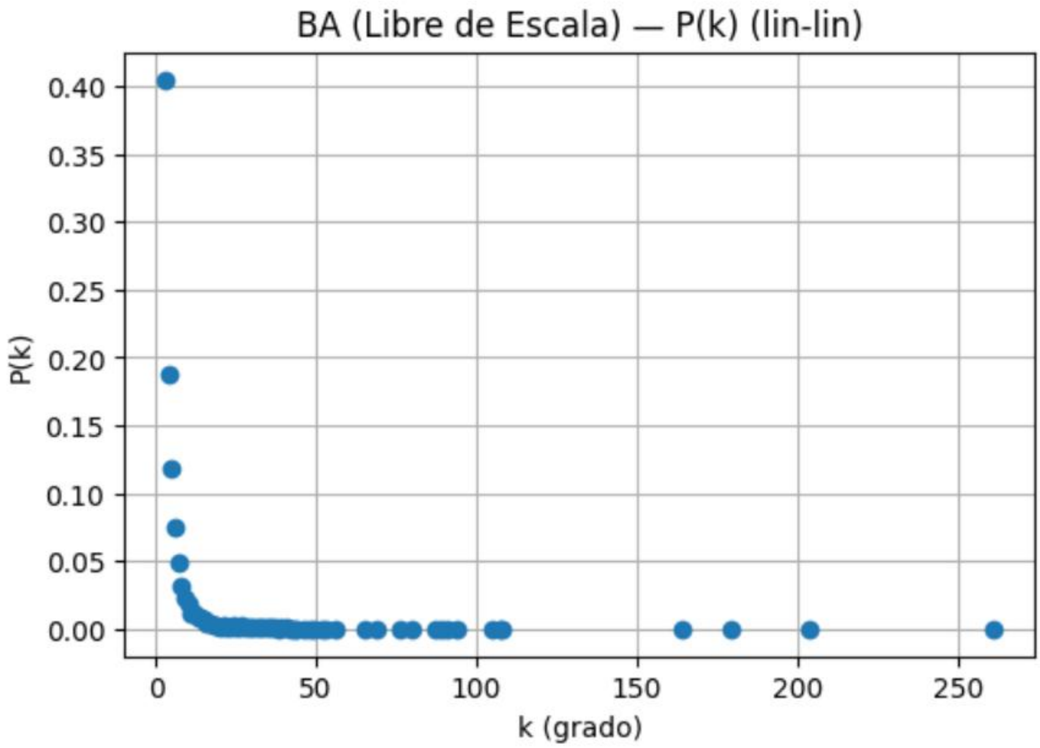

Figura 2: BA (Libre de Escala) — Distribución de grados $P(k)$ en escala lineal (lin–lin).

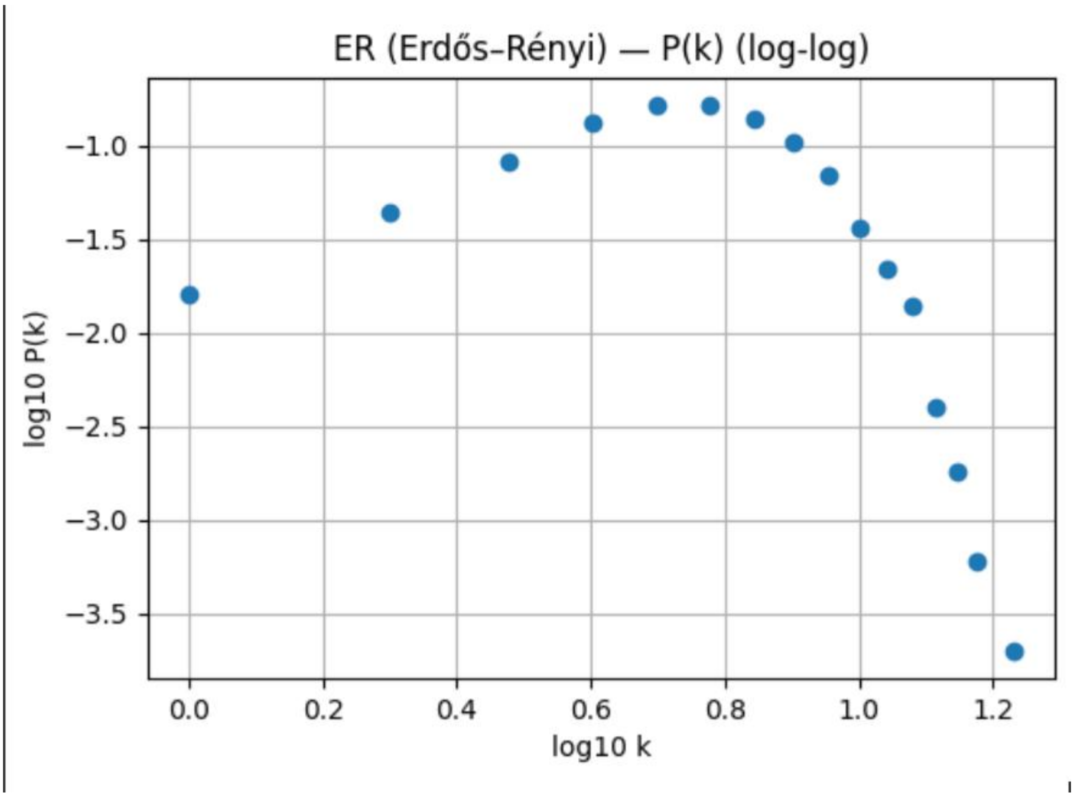

Figura 3: ER (Erdős–Rényi) — Distribución de grados $P(k)$ en escala log–log.

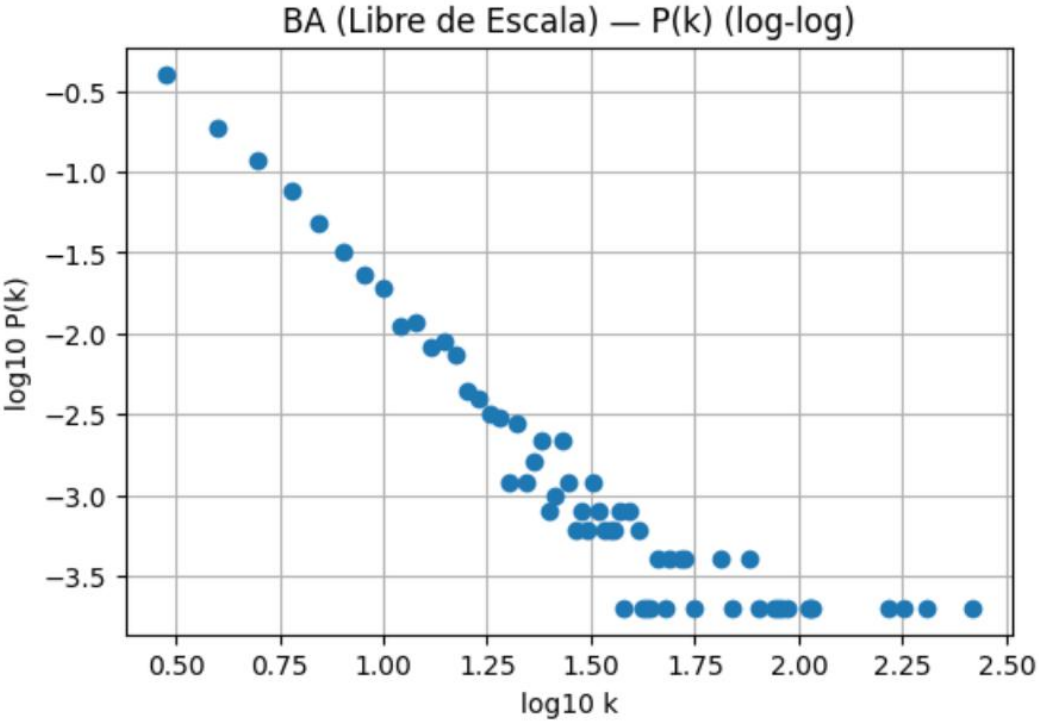

Figura 4: BA (Libre de Escala) — Distribución de grados $P(k)$ en escala log–log. (La recta *aprox.* confirma tendencia tipo ley de potencia).

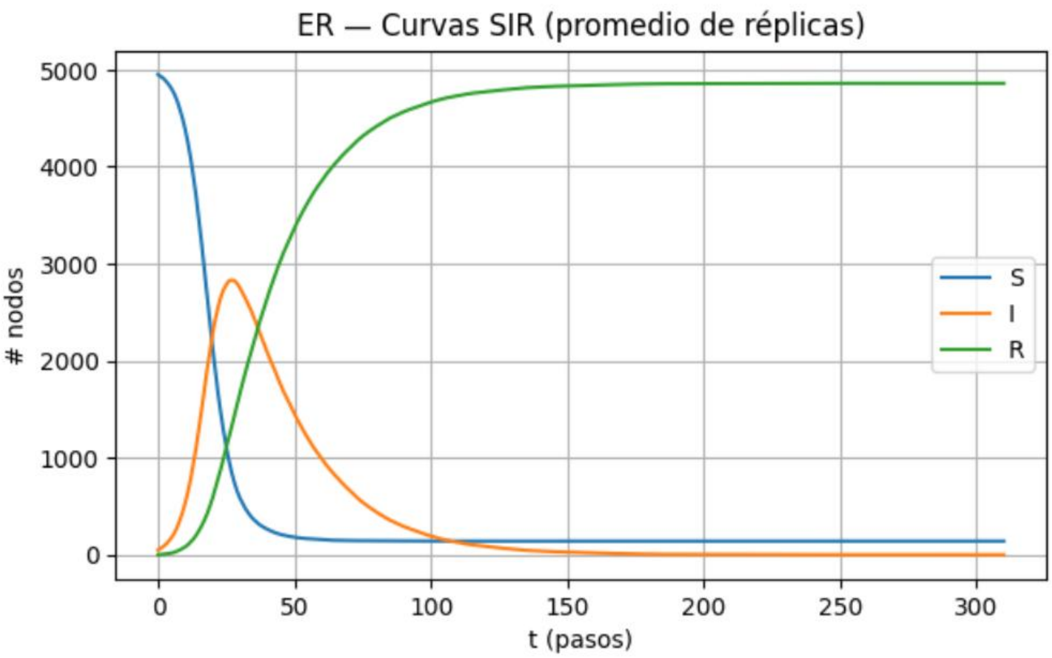

Figura 5: ER — Curvas SIR (promedio de réplicas).

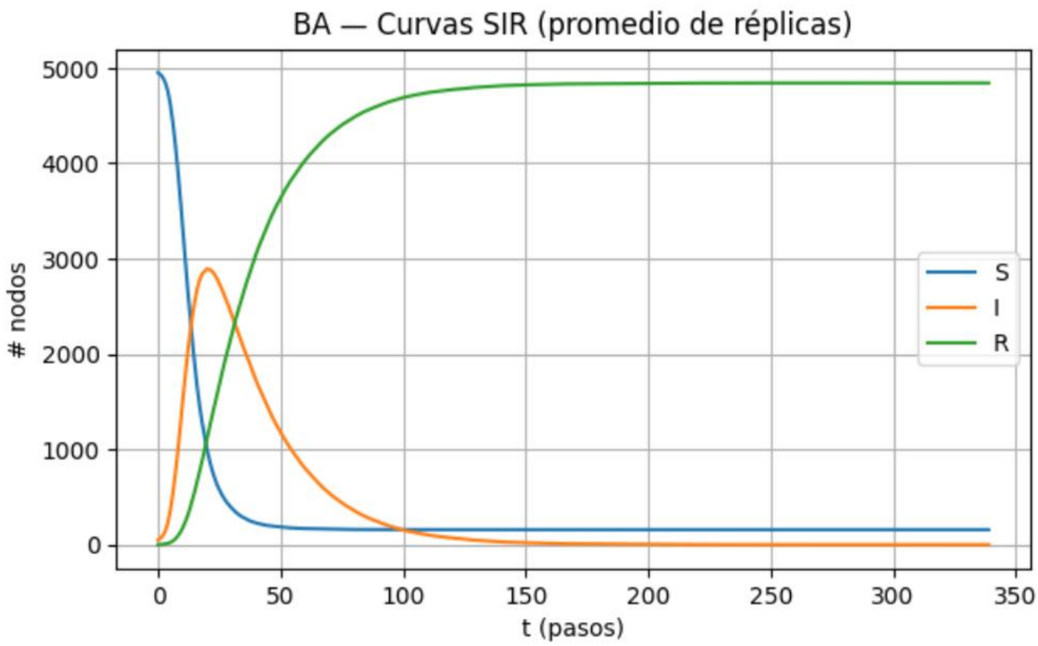

Figura 6: BA — Curvas SIR (promedio de réplicas).

Resumen cuantitativo (valores obtenidos en mi corrida)

Red	$\bar{k}$	Var(k)	R_0 teórico	Pico I (prom)	Ataque final (prom)
ER	5,993	5,843	8,952	2837,000	0,972
BA (libre de escala)	5,996	74,212	26,059	2899,000	0,968

Responda (basado en las figuras y tabla)

- **Diferencia en los histogramas lin–lin.**
  En ER, $P(k)$ es unimodal y concentrada alrededor de $\bar{k}$ (forma "tipo Poisson"). En BA, $P(k)$ cae lentamente: muchísimos nodos de bajo grado y una cola extendida con algunos grados muy altos. Esa forma indica **heterogeneidad fuerte** y presencia de **hubs**.
- **Qué revela el gráfico logarítmico (log–log) de BA.**
  La nube de puntos sigue una **tendencia casi lineal** en log–log, lo que es consistente con una **ley de potencia** $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Esto confirma el carácter sin escala y explica por qué unos pocos nodos concentran muchísimos enlaces.
- **Media y varianza de cada red; por qué importa la varianza.**
  Con los parámetros usados, obtuve: $\bar{k}_{\text{ER}} \approx 5{,}99$, $\text{Var}(k)_{\text{ER}} \approx 5{,}84$; $\bar{k}_{\text{BA}} \approx 6{,}00$, $\text{Var}(k)_{\text{BA}} \approx 74{,}21$. La **varianza mucho mayor en BA** implica $\langle k^2 \rangle$ grande, y por el resultado de campo medio heterogéneo

  $$R_0 \approx \frac{\beta}{\mu} \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle},$$

  BA tiene R_0 teórico más alto (26.059 vs 8.952). Esto reduce el umbral epidémico y acelera la propagación.
- **Patógeno nuevo: *¿dónde causaría una epidemia rápida y a gran escala?***
  En la **red sin escala (BA)**. Su estructura con hubs (alta Var(k)) produce R_0 mayor y **picos más tempranos** (en mi corrida: BA pico $\approx 20{,}3$ pasos vs ER $\approx 26{,}7$). Aunque ambos casos terminaron con ataque cercano a 1 por tener $R_0 \gg 1$, la BA favorece brotes más rápidos y robustos; si se baja β/μ hasta el umbral, la diferencia en tamaño final también se vuelve marcada.