

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ingeniería

Laboratorio 6 - Modelación y Simulación

Parte Teórica (Parte 1 y Parte 2)

Curso: CC3039 - Modelación y Simulación

Integrantes:

Jorge López

Davis Roldán

Gabriel Paz

Fecha: Octubre 2025

1. Introducción

Este laboratorio tiene como objetivo analizar los equilibrios del modelo SIR con dinámica vital mediante el uso de ecuaciones diferenciales y su interpretación conceptual. Se busca comprender cómo los flujos de entrada y salida determinan el equilibrio y la estabilidad del sistema, tanto desde un enfoque matemático como desde la perspectiva de modelos basados en agentes (MBA).

2. Parte 1 - Teoría

1. El ELE se encuentra en ($S^* = N$, $I^* = 0$). Describa en términos conceptuales por qué este es un estado de “balance” en el sistema. ¿Qué flujos de entrada y salida se están equilibrando exactamente en el compartimento de susceptibles (S) para que su nivel permanezca constante?

El equilibrio libre de enfermedad (ELE) es un estado de balance porque los nacimientos (μN) compensan exactamente las muertes naturales (μS) dentro del compartimento de susceptibles. No existen infecciones nuevas, por lo que la población susceptible permanece constante en el tiempo.

2. El equilibrio endémico representa un estado donde la enfermedad persiste de forma estable. Explique la tensión fundamental que existe en este equilibrio. ¿Qué fuerza impulsa el aumento de infecciones y qué fuerza contraria la frena, permitiendo que el número de infectados I^* se mantenga constante y no sea cero?

La tensión fundamental se da entre la tasa de transmisión ($\beta SI/N$), que incrementa el número de infectados, y la suma de recuperación y mortalidad ($\gamma I + \mu I$), que reduce los casos. Estas dos fuerzas opuestas se equilibran, manteniendo I^* constante y positivo.

3. Imagine que quiere construir un Modelo Basado en Agentes (MBA) que represente la misma dinámica de este modelo SIR. ¿Cómo implementaría los procesos de “nacimiento” (N) y “muerte natural” (S , I , R) a nivel de agentes individuales? Describa las reglas o eventos que programaría para los agentes.

Cada agente tendría una probabilidad μ de morir naturalmente en cada paso temporal. De forma paralela, se generarían nuevos agentes con una tasa de nacimiento μN , que ingresarían al sistema como susceptibles. De esta manera se mantiene constante la población total simulando la dinámica vital.

4. Si ejecutara su MBA y graficara el número total de susceptibles contra el número total de infectados (un espacio de estados proyectado), ¿esperaría que las trayectorias se vieran idénticas a las del modelo de ecuaciones diferenciales? ¿Por qué sí o por qué no? Mencione al menos un factor clave inherente a los MBA que introduciría diferencias en el gráfico.

No se verían idénticas, ya que los MBA incluyen estocasticidad. Los eventos de infección, recuperación y muerte ocurren de forma discreta y aleatoria, generando trayectorias con fluctuaciones alrededor de las curvas deterministas del modelo SIR.

3. Parte 2 - Teoría

1. La matriz Jacobiana es una “instantánea” de las fuerzas del sistema en un punto específico. Explique conceptualmente qué representa el elemento en la esquina inferior izquierda de la matriz $((dI/dt)/S)$. ¿Qué nos dice este término sobre la relación entre los susceptibles y la propagación de la infección?

Este elemento muestra cómo los cambios en el número de susceptibles afectan la velocidad de crecimiento de los infectados. Si S aumenta, hay más individuos disponibles para contagiarse, lo que incrementa la tasa de propagación de la infección.

2. El análisis muestra que cuando $R < 1$, el Equilibrio Libre de Enfermedad es inestable. Describa en una o dos frases qué significa esto en el contexto de una política de salud pública de “esperar y ver”. ¿Por qué la inestabilidad de este punto hace que esa política sea arriesgada?

Cuando $R_0 > 1$, cualquier pequeño número de infectados genera un brote creciente. Por eso, una política de “esperar y ver” es riesgosa, ya que el sistema se aleja rápidamente del equilibrio libre de enfermedad y la epidemia se propaga.

3. El Equilibrio Endémico, cuando existe, suele ser estable. ¿Qué significa “estabilidad” en este contexto? Si una nueva variante del virus, más contagiosa, causa un aumento repentino de casos (una perturbación), ¿qué predice la estabilidad de este equilibrio sobre el comportamiento del sistema a largo plazo?

La estabilidad implica que, ante una perturbación, el sistema tiende a regresar a su estado original. Si surge una variante más contagiosa y aumenta temporalmente I , el sistema even-

tualmente volverá al equilibrio endémico, manteniendo una cantidad estable de infectados.

4. En un modelo de ecuaciones, un equilibrio estable es un punto fijo. En un MBA, debido a la aleatoriedad (estocasticidad), el sistema nunca se asienta perfectamente en un punto. ¿Cómo se manifestaría un “equilibrio estable” en el espacio de estados proyectado de un MBA? Describa cómo se vería la trayectoria del sistema una vez que ha alcanzado este estado de equilibrio.

El equilibrio estable en un MBA aparecería como una nube de puntos concentrada alrededor de un valor promedio en el espacio de estados. Las trayectorias oscilarían ligeramente debido a la aleatoriedad, pero sin desviarse significativamente del equilibrio.