FUNDAMENTOS Y EVOLUCIÓN

Ec. Schrödinger: $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$; $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$.
Continuidad: $\rho = |\Psi|^2$; $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}(\Psi^*\nabla\Psi)$. $\partial_t\rho + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$.
Ehrenfest: $\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle + \langle\partial_t\hat{A}\rangle$. $\langle\dot{\hat{p}}\rangle = -\langle\nabla V\rangle$.
Conmutadores: $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$; $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$. $[\partial_{x_j}, \partial_{x_k}]\Psi = 0$
$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$. $[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$ $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}]$ $[\hat{A},\hat{A}] = [\hat{A},\hat{A}^n] = 0$
$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] + [\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]] + [\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$. $\hat{A} = \hat{A}^\dagger \Rightarrow \lambda_{\hat{A}} \in \mathbb{R}$ $\hat{A} = -\hat{A}^\dagger \Rightarrow \lambda_{\hat{A}} \in i\mathbb{R}$
BCH: $e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}} = e^{\hat{X}+\hat{Y}+\frac{1}{2}[\hat{X},\hat{Y}]+\cdots}$. $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]$.
Pauli: $\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. $\lambda = \pm1$, $\mathrm{tr} = 0$, $\det = -1$.
Autovectores σ_1 : $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{\pm1}$. σ_2 : $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{\pm i}$. σ_3 : $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$.
Spin $\vec{n}$: $\hat{S}_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}n_3 & n_1 - in_2\\ n_1 + in_2 & -n_3\end{pmatrix}$. $|\uparrow\rangle_{\vec{n}} = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_z + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_z$.

TAYLOR Y FUNCIONES ESPECIALES

• $f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ [Multivar]
• $e^x \approx 1 + x + x^2/2$. • $\sin x \approx x - x^3/6$. • $\cos x \approx 1 - x^2/2$ • $\tan x \approx x + x^3/3$.
• $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$. • $(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ • $\sqrt{x^2 - a^2} \xrightarrow{x\to\infty} x$.
• $\sinh x \approx x + x^3/6$. • $\cosh x \approx 1 + x^2/2$. • $\tanh x \approx x - x^3/3$.
Bessel Esf.: $[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1](\rho\tilde{R}_l(\rho)) = 0$ $\begin{matrix}\rho = kr\\ R_l(r) = \tilde{R}_l(kr)\end{matrix}$ $j_0 = \frac{\sin\rho}{\rho}$; $n_0 = -\frac{\cos\rho}{\rho}$.
$j_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to0} \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}$ $n_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to0} -\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}$
$j_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right)$ $n_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} -\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right)$
Legendre: $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. $\int_{-1}^{1} P_l P_{l'} = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$.
Relación de Cierre: $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}$. $\int |x\rangle\langle x| dx = \mathbb{I}$.

ÁLGEBRA DE OPERADORES

Kets/Bras: $\langle\phi|\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2\rangle = \alpha\langle\phi|\Psi_1\rangle + \beta\langle\phi|\Psi_2\rangle$. (Lineal 2ª entrada).
Cambio Base: $P_{B\to B'} = (\langle f_i|e_j\rangle)$. $B'|\Psi\rangle = PB|\Psi\rangle$. $\hat{A}' = P\hat{A}P^\dagger$.
Unitarios: $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$ **Hermitianos:** $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ **Sist. inv. bajo op.:** $[\hat{H},\hat{O}] = 0$
Antilineales: $\hat{T}(\alpha\Psi) = \alpha^*\hat{T}\Psi$. $\langle\hat{T}\Phi|\hat{T}\Psi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^* = \langle\Psi|\Phi\rangle$. (e.g. Inversión temporal).
Prod. Tensorial: $(\hat{A}\otimes\hat{B})|x,y\rangle = \hat{A}|x\rangle\otimes\hat{B}|y\rangle$. $\mathrm{tr}(\hat{A}\otimes\hat{B}) = \mathrm{tr}(\hat{A})\mathrm{tr}(\hat{B})$.
Oscilador: $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p})$; $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$. $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$.
$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$; $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. $\langle x|n\rangle = \Psi_n(x) \sim e^{-x^2/2}H_n(x)$.

MOMENTO ANGULAR Y SPIN

Escalera: $L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}|l, m\pm1\rangle$.
Spin 1/2: $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$. $[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. $\{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\delta_{ij}$.
$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.
Adición $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$: $|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2$. $M = m_1 + m_2$.
Clebsch-Gordan: $|J,M\rangle = \sum_{m_1,m_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|JM\rangle|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle$.

ANSATZS

$\psi(x) = \mathcal{N}e^{-\alpha x^2}$ Gaussiana (O.A.). $\mathcal{N} = \sqrt[4]{2\alpha/\pi}$ $\langle T\rangle = \alpha\hbar^2/2m$
$\psi(x) = \mathcal{N}e^{-\alpha|x|}$ Decae más lento que gaussiana. $\mathcal{N} = \sqrt{\alpha}$ $\langle T\rangle = \alpha^2\hbar^2/2m$
$\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \psi_\alpha(\mathbf{x}_1)\psi_\alpha(\mathbf{x}_2)$ $\psi(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathcal{N}}\,e^{-\alpha|\mathbf{x}|/a_0}$ $\Rightarrow$ $\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \mathcal{N}e^{-\alpha(r_1+r_2)/a_0}$
$\mathcal{N} = \alpha^3/a_0^3\pi$
$\psi(\mathbf{x}) = r^n e^{-\alpha r}$ Coulomb $\partial_x|x| = \mathrm{sgn}(x)$ $\partial_x^2|x| = 2\delta(x)$
$\psi(x) = \mathcal{N}\cdot\begin{cases}\cos(\pi x/2\alpha) : & |x| < \alpha\\ 0 : & |x| > \alpha\end{cases}$ Partícula pozo pot. ∞, ancho $L = 2\alpha$ $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
$\psi(x) = \mathcal{N}\cdot\begin{cases}\alpha^2 - x^2 : & |x| < \alpha\\ 0 : & |x| > \alpha\end{cases}$ Partícula confinada: $\psi(\pm\alpha) = 0$ $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{15}{16\alpha^5}}$
$\psi(\mathbf{x})_j = e^{-\alpha r_j/a_0}$ Función de onda del e_j^- del átomo $\Rightarrow \Psi = \Pi_j\,\psi_j$

PERTURBACIONES Y MÉTODO VARIACIONAL $E(\alpha) \to \partial_\alpha E = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha^*$

Átomo Hidrogenoide (CGS): $H = \sum_{i=1}\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_i^2 - \frac{Ze^2}{r_i}\right) + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = H_0 + H'$
Perturbaciones: $\Delta E^{(1)} = \langle\Psi_0^{(Z)}|H'|\Psi_0^{(Z)}\rangle$ $E^{(1)} = -Ry\,Z^2\sum_i(1/n_i^2) + \Delta E^{(1)}$
Rayleigh-Ritz: $E(\alpha) = \frac{\langle\Psi_\alpha|H|\Psi_\alpha\rangle}{\langle\Psi_\alpha|\Psi_\alpha\rangle} \ge E_0$. Error en E de orden δ^2 si error en Ψ es δ.
Teorema Virial: $2\langle T\rangle = \langle\mathbf{r}\cdot\nabla V\rangle$. Si $V \propto r^n \Rightarrow 2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$. $V \propto r^{-1} \Rightarrow \langle H\rangle = \langle V\rangle/2$
Variacional: Ansatz Ψ_α $E(\alpha) = \langle\Psi_\alpha|\hat{H}(Z)|\Psi_\alpha\rangle$ $\frac{\partial E(\alpha)}{\partial\alpha} = 0 \implies \alpha^*$
Estados Excitados: Proponer $\Psi_\perp$ tal que $\langle\Psi_{trial}|\Psi_0\rangle = 0$.

APROXIMACIÓN WKB (SEMI-CLÁSICA)

Fase: $\Psi(x) = e^{iW(x)/\hbar}$. Si $V(x)$ lento $\implies \hbar|p'| \ll p^2$.
Solución: $\Psi(x) \approx \frac{A}{\sqrt{p(x)}}\exp(\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x')dx')$. $p(x) = \sqrt{2m(E - V)}$.
Matching (Puntos de Retorno x_0): $V(x) \approx E + V'(x_0)(x - x_0)$.
- Punto de retorno x_0 : aquel donde $E = V(x_0)$
• En zona prohibida ($E < V$): $\Psi \sim \frac{1}{2\sqrt{|p|}}\exp(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x}|p|dx')$.
• En zona permitida ($E > V$): $\Psi \sim \frac{1}{\sqrt{p}}\cos(\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x}p\,dx' - \frac{\pi}{4})$.
Cuantización B-S: $\int_{x_1}^{x_2}p(x)dx = (n + \frac{1}{2})\pi\hbar$. $(n = 0, 1, \ldots)$.
Efecto Túnel (Gamow): $T \approx e^{-2G}$; $G = \frac{1}{\hbar}\int_a^b\sqrt{2m(V(x) - E)}dx$.
Desintegración α: $\lambda = \nu T \approx \frac{v}{2R}e^{-2G}$. $G \propto \frac{Z}{\sqrt{E}}$ (Ley Geiger-Nuttall).

SCATTERING EN 1D $k = \sqrt{2mE/\hbar^2} \leftrightarrow E = \hbar^2k^2/2m$

Canales Incidientes:
• **R (Right-moving):** Izda $\to$ Dcha. $\Psi_R = e^{ikx} + re^{-ikx}(x \to -\infty)$; $te^{ikx}(x \to \infty)$.
• **L (Left-moving):** Dcha $\to$ Izda. $\Psi_L = t'e^{-ikx}(x \to -\infty)$; $e^{-ikx} + r'e^{ikx}(x \to \infty)$.
Unitariedad: $t = t'$, $|r|^2 + |t|^2 = R^2 + = 1$, $r/t = -(r'/t')^*$. Si V simétrico: $r = r'$.
Base Paridad (V par): $\Psi_\pm(x) = \Psi_R(x) \pm \Psi_R(-x)$.
$\Psi_\pm \xrightarrow{x\to\infty} e^{-ikx} \pm S_{\pm\pm}e^{ikx}$. $S_{++} = t + r$, $S_{--} = t - r$. $(|S_{ii}| = 1)$.
Estados Ligados: Polos de S en $k = i\lambda$ $(\lambda > 0)$. $S_{++}^{-1}(i\lambda) = 0$ o $S_{--}^{-1}(i\lambda) = 0$.
Resonancias: Polo en $k = k_0 - i\gamma$. $E = E_0 - i\Gamma/2$. $\Gamma \approx \frac{2\hbar^2}{m}k_0\gamma$. $\tau = \hbar/\Gamma$.
Fase $\delta(E)$: $\delta_{res} = \arctan\frac{\Gamma/2}{E_0 - E}$. En E_0, $\delta = \pi/2$ y σ es máxima.
1. Resuelve ec. Schröd. 2. Aplica matching 3. Halla coefs. R, T

SCATTERING 3D con $V(r)$: ONDAS PARCIALES (O.P.)

Condición de Regularidad: En el origen $(r = 0)$: $u_l(0) = 0$
Solución. asintótica: $\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$.
Ec. Radial: $u_l(r) := rR_l(r)$: $[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r)]u_l = 0$ con $U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}$.
Expansión O.P.: $\Psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta)$.
El efecto del potencial es introducir un desfase respecto a la solución libre.
Solución Libre ($U = 0$): $R_l(r) \propto j_l(kr) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}$.
Con Potencial ($U \neq 0$): $R_l(r) \xrightarrow{r\to\infty} A_l\frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr}$.
Física del desfase: $\delta_l > 0 \implies$ Atractivo; $\delta_l < 0 \implies$ Repulsivo.
Amplitud de dispersión: $f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)$.
Sección Eficaz Diferencial: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$.
Sección Eficaz Total: $\sigma_{tot} = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l$.
Teorema Óptico: $\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\Im f(0)$.
Matching: en corte $r = a$, igualar log-derivada interna$\gamma_l = \frac{u_l'(a)}{u_l(a)}$ ($' \equiv$ deriv):

$$\tan\delta_l = \frac{kj_l'(ka) - \gamma_l j_l(ka)}{kn_l'(ka) - \gamma_l n_l(ka)} = \tan\delta_l = \frac{\frac{kj_l'(ka)}{\gamma_l} - j_l(ka)}{\frac{kn_l'(ka)}{\gamma_l} - n_l(ka)}$$

REGÍMENES SEGÚN ENERGÍA (Aproximaciones) + CASOS PARTICULARES

Baja Energía ($ka \ll 1$): $\delta_l \approx k^{2l+1}$. Domina $l = 0$ (Onda S). $f(0) = -a_s$
Longitud de Dispersión (a_s): $a_s = -\frac{d\delta_0}{dk}\Big|_{k=0} \implies \sigma_{tot} \approx 4\pi a_s^2$.
Alta Energía ($ka \gg 1$): $\sigma_{tot} \approx 2\pi a^2$ Aproximaciones alta energía:
$\sum_{l=0}^{ka\sim\infty}h(l)\sin^2(l\pi/2 - ka) = \langle\sin^2(\ldots)\rangle\sum_{l=0}^{ka\sim\infty}h(l)$ $\langle\sin^2\rangle = 1/2$
Sumatorios: $\sum_{i=1}^{N}C = NC$ $\sum_{i=0}^{N}C = (N+1)C$ $\sum_{i=0}^{N} = \sum_{i=1}^{N} = \frac{N(N+1)}{2}$
Esfera Dura ($V = \infty, r < a$): Condición: $u_l(a) = 0 \implies \gamma_l \to \infty$.
Fase: $\tan\delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}$. Onda S $(l = 0)$: $\delta_0 = -ka \implies \sigma_{tot} \xrightarrow{k\to0} 4\pi a^2$.

POTENCIALES CONTINUOS (SIN CORTE a)

Condición de Regularidad: En el origen $(r = 0)$: $u_l(0) = 0$
Extracción de δ_l por Comportamiento Asintótico ($r \to \infty$): Se compara la solución global $u_l(r)$ con la forma estándar (escrita a continuación, de dos formas):
Base Trigonométrica: $u_l(r) \xrightarrow{r\to\infty} A\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + B\cos(kr - \frac{l\pi}{2}) \Rightarrow \tan\delta_l = \frac{B}{A}$
Base Exponencial: $u_l(r) \xrightarrow{r\to\infty} Ce^{ikr} + De^{-ikr}e^{2i(\delta_l - l\pi/2)} = -\frac{C}{D}$
Adimensionalización: $V(r)$ depende de parámetro r_0, definir:
$x = \frac{r}{r_0}$, $\kappa = kr_0$, $\frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{r_0^2}\frac{d^2}{dx^2}$. El desfase es invariante: $\delta_l(k) = \delta_l(\kappa)$.
Onda S ($l = 0$): $\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1 + \cot^2\delta_0}$ **Amplitud:** $f_0 = \frac{1}{k(\cot\delta_0 - i)}$.

ESTADOS LIGADOS:

$E = -\frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} \le 0$ $k = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Comportamiento asintótico: $u_l(r) \sim e^{ikr} \to e^{-\lambda r}$
Matching: Para onda S $(l = 0)$, continuidad log-deriv en $r = a$: $\gamma_0 = \frac{u_0'(r)}{u_0(r)}\Big|_{r=a} = -\lambda$
Matching ($l > 0$): Se iguala con log-deriv de funs Hankel esfs: $\gamma_l = \frac{d}{dr}\ln[rh_l^{(1)}(i\kappa r)]\Big|_{r=a}$
Polos de la Matriz S: estados ligados $\Leftrightarrow$ polos de $S_l(k)$ en eje $\Im$ positivo del plano complejo k: $S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} = \frac{\cot\delta_l + i}{\cot\delta_l - i} \Rightarrow \cot\delta_l(k) = 1/\tan\delta_l(k) = i \Leftrightarrow e^{2i\delta_l} \to \infty$

RESONANCIAS EN SCATTERING (ESTADOS METAESTABLE)

$k_{res} = k_0 - i\gamma$ con $k_0 > 0, \gamma > 0$ $E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$
Cuando sección eficaz parcial σ_l alcanza el límite unitario (máximo teórico):
Fase: $\delta_l(E_R) = (n + 1/2)\pi \implies \sin^2\delta_l = 1$.
Sección Eficaz: $\sigma_l^{max} = \frac{4\pi}{k^2}(2l + 1)$.
Matching: El denominador de $\tan\delta_l$ se anula: $kn_l'(ka) - \gamma_l n_l(ka) = 0$.
Aprox Breit-Wigner:
En vecindad de resonancia E_R con anchura Γ, sección eficaz $\sigma(E)$ sigue perfil de BW:
$\sigma(E) \simeq \frac{2\pi\hbar^2(2l+1)}{mE}\frac{\Gamma^2}{4(E - E_R)^2 + \Gamma^2}$
En el punto de resonancia, el desfase es $\delta_0(E_R) = \frac{\pi}{2}$ y su derivada es $\frac{d\delta}{dE}\Big|_{E_0} = -\frac{2}{\Gamma} < 0$.
Retraso Temporal (Wigner): $\Delta t = 2\hbar\frac{d\delta_l}{dE}$. En resonancia, Δt es máximo (la partícula queda atrapada en un estado metaestable).
Vida Media: $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$. Tiempo característico de desintegración del estado cuasiligado.

BORN Y LIPPMANN-SCHWINGER

LS: $|\Psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{V}|\Psi^{(+)}\rangle$. $\hat{G}_0^{(+)} = (E - H_0 + i\epsilon)^{-1} = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$. Equiv:
$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) + \int G_0^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3r' \to \psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r})d^3r'$
$f(k,\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\,e^{-i\mathbf{kr}}\,V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$
1ª Born: $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}d^3r'$
$f(\theta) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}V(r')d^3r'$ [$q = |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f| = 2k\sin(\theta_{\mathrm{scatt}}/2)$ Solo disp. elástic!]
Si sist. parts: $m \mapsto \mu = \frac{m_1\cdot m_2}{m_1 + m_2}$. Baja eneregía: $f(0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(r')d^3r' = -a_s = \alpha_0$
• **Yukawa:** $V_0\frac{e^{-\alpha r}}{r} \implies f_B = \frac{-2mV_0/\hbar^2}{q^2 + \alpha^2}$.
• **Coulomb:** $\alpha \to 0 \implies \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ (Rutherford).
Validez Born: $V_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ (baja E) o $V_0 \ll \frac{\hbar^2k}{ma}$ (alta E) — A alta E, $l_{\max} = ka$
Validez Born: $|\psi^{(1)}(0)/\psi(0)| \ll 1$, $\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}}$
1. Busca $f(\theta,\phi)$, $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)^2|$. 2. Resuelve $[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E]\psi = 0$
3. Aplica matching 4. Halla σ_{tot}
Para $\hat{V} = \lambda|\xi\rangle\langle\xi|$, definimos $C = \langle\xi|\psi^{(+)}\rangle$: $|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \lambda\hat{G}_0^{(+)}|\xi\rangle C \implies$
$C = \langle\xi|\phi\rangle + \lambda\langle\xi|\hat{G}_0^{(+)}|\xi\rangle C \implies C = \frac{\langle\xi|\phi\rangle}{1 - \lambda\langle\xi|\hat{G}_0^{(+)}|\xi\rangle}$. Amplitud Transición: $T(\mathbf{k}',\mathbf{k}) =$
$= \langle\phi_{\mathbf{k}'}|\hat{V}|\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \lambda\langle\phi_{\mathbf{k}'}|\xi\rangle C = \frac{\lambda\langle\phi_{\mathbf{k}'}|\xi\rangle\langle\xi|\phi_{\mathbf{k}}\rangle}{1 - \lambda\langle\xi|\hat{G}_0^{(+)}|\xi\rangle} = T(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \frac{\lambda\tilde{\xi}(\mathbf{k}')\tilde{\xi}^*(\mathbf{k})}{1 - \lambda\int d^3q\frac{|\tilde{\xi}(\mathbf{q})|^2}{E_k - \frac{\hbar^2q^2}{2m} + i\epsilon}}$
COMPTON (Dispersión inelastic): $\vec{q}\cdot\vec{q} = q'^2 = k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\theta_{\mathrm{scatt}}$ (en CM)
$ck = \frac{\hbar q'^2}{2m} + ck$. Sust, divide entre $\frac{1}{ckk'}$, para baja energía, $k/k' \approx k'/k \approx 1$ $k = 2\pi/\lambda$

CUADRIMOMENTOS Y RELATIVIDAD

Métrica: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. $p\cdot q = -p^0q^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$.
Def: $p^\mu = (E/c,\mathbf{p})$, $p_\mu = (-E/c,\mathbf{p})$. $(c = 1 \implies p^\mu = (E,\mathbf{p}))$.
On-shell: $p^\mu p_\mu = -m^2c^2 \implies E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.
Conservación: $\sum p_{in}^\mu = \sum p_{out}^\mu$. • $E_{in} = E_{out}$ • $\mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_{out}$
Identidad Colisiones: $(p_1 - p_1')^2 = (p_2' - p_2)^2$.
Ángulo Scattering: $\cos\theta = \frac{p_1\cdot p_1' + E_1E_1'}{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_1'|}$.
Estrategia: Para umbrales, usar $s = (\sum p_i)^2$. En C.M. $\mathbf{p}_{tot} = 0$, $s = -E_{CM}^2$.

ELECTRODINÁMICA Y ACOPLAMIENTO MÍNIMO (CGS)

Unidades CGS: $e^2/4\pi\epsilon_0 \to e_{cgs}^2$. $[e] = (E\cdot L)^{1/2}$. 1 statV = 300 V.
Maxwell: $\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, $\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0$, $\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$.
Potenciales: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$.
Invariancia Gauge: $\{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi,\ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\dot{\chi}\} \Leftrightarrow A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\chi$.
Derivada covariante: $D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu$.
Gauges Comunes: • **Lorentz:** $\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0$. • **Coulomb:** $\nabla\cdot\vec{A} = 0$.
Euler-Lagrange: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}}\right) = 0$
Dependencias: $\psi = \psi(\mathbf{r},t)$ $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$
Partícula Cargada: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - q\varphi$. Momento canónico: $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$.
Hamiltoniano (acop. mín) con Spin = 0, $\vec{B} \equiv cte$: $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\varphi$.
$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}$ (momento cinético). *Nota: para 1! partícula + no cosas raras, considera* $\varphi = 0$
Velocidad cinética: $\hat{\vec{v}} = \hat{\vec{\pi}}/m$ $[\hat{v}_k,\hat{v}_l] = \frac{i\hbar q}{m^2c}(\partial_kA_l - \partial_lA_k) = \frac{i\hbar q}{m^2c}\sum_n^3\varepsilon_{kln}B_n$
Para partícula spín 0, elección del potencial vector $\vec{A}$ define las simetrías de fun onda:
$\to$**Gauge de Landau:** $\vec{A} = (-By,0,0)$ o $\vec{A} = (0,Bx,0)$.
-Simetría: Rompe la simetría rotacional pero preserva la traslación en una dirección
-Efecto: Reduce el Hamiltoniano 2D a un Oscilador Armónico 1D desplazado.
-Cuándo usar: Geometrías rectangulares, Efecto Hall Cuántico, o cuando interesa estudiar la degeneración infinita de los niveles mediante el centro de la órbita y_0.
$\to$**Gauge Simétrico:** $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$.
-Simetría: Preserva la simetría rotacional alrededor de $\hat{z}$.
-Efecto: El Hamiltoniano conmuta con $\hat{L}_z$. Las soluciones se expresan en coordenadas polares mediante polinomios de Laguerre.
-Cuándo usar: Geometrías circulares, cilindros, puntos cuánticos, o cuando el momento angular es un número cuántico relevante.
Conmutación: $[\mathbf{r}_k,\hat{\pi}_l] = i\hbar\delta_{kl}$ $[p_i,F(\mathbf{r})] = -i\hbar\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial r_i}$ $[x_i,F(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_i}$
Acop. mín tens.: $(i\hbar D_0 - \frac{1}{2m}D_iD_i)\Psi = 0$ **Inv. Gauge Cuántica:** $\Psi' = \exp(i\frac{q}{\hbar c}\chi)\Psi$.
Hamiltoniano (acop. mín) con Spin $\neq$ 0, $\vec{B} \equiv cte$: $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 - \frac{\mu}{s\hbar}\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{B}} + q\varphi$
Spin $s = 1/2 \implies S = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ $\Psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)\phi(t)$
Identidad de Pauli: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$.
Tensores: $(\nabla\times F)^i = \varepsilon^{ijk}\partial_jF_k$ $(\nabla\times F)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_jF_k$ $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lij} = 2\delta_k^l$
$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{I} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$ $|\vec{e}|^2 = 1 \rightsquigarrow \exp\{i\alpha(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\} = \mathbb{I}\cos\alpha + i(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\sin\alpha$

NIVELES DE LANDAU Y SPIN

$\vec{B} = B\hat{z}$. $\omega_B = |q|B/mc$ (frec. ciclotrón). $r_B = v_\perp/\omega_B$.
Conmutación: $[\hat{\pi}_x,\hat{\pi}_y] = i\frac{\hbar qB}{c} = im\hbar\omega_B$.

Hamiltoniano Landau (∄ Spin): $\hat H = \frac{1}{2m}(\hat\pi_x^2+\hat\pi_y^2)+\frac{\hat p_z^2}{2m}$.
Energía: $E_n = \hbar\omega_B(n+1/2)+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}$. Degeneración infinita en k_z.
Gauge de Landau ($\vec A=(0,Bx,0)$): $\Psi_{n,k_y,k_z}\sim e^{i(k_y y+k_z z)}\phi_n(x-x_c)$.
Centro de guía: $x_c = -\frac{\hbar c k_y}{qB}$.
Con Spin (Ecuación de Pauli): $\hat H = \hat H_{orb} - \frac{\mu}{s\hbar}\vec S\cdot\vec B = \hat H_{orb} - \vec\mu\cdot\vec B$.
$E=\hbar\omega_B(n+1/2)+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\mp\mu_B B$.

EFECTO HALL CUÁNTICO

$\hat H = \hat H_{Landau} - qE_y y$. Velocidad de deriva: $\langle v_x\rangle = cE_y/B$.
Espectro: $E_{n,k_x} = \hbar\omega_B(n+1/2)+\frac{m}{2}(\frac{cE_y}{B})^2 - \frac{\hbar c E_y}{B}k_x$.
Resistencia Hall: $R_{yx} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{B}{qnc}$. Cuantización: $R_{yx} = \frac{h}{q^2\nu}$ ($\nu\in\mathbb Z$).
Degeneración por Nivel: $N=\Phi/\Phi_0$ con $\Phi_0 = hc/q$ (Fluxon).

ÁTOMOS EN CAMPOS EXTERNOS

$\hat H = \hat H_0 + \frac{eB}{2mc}(L_z+2S_z)+\frac{e^2B^2}{8mc^2}(x^2+y^2) - e\vec E\cdot\vec r$.
Zeeman: $\Delta E = \mu_B B(m_l+2m_s)$. Rompe degeneración en m.
Stark: $V=-e|\vec E|z$. 1º orden en $n=1$ nulo (paridad). $n=2$ ($2s$ y $2p_0$): $\Delta E = \pm 3e|\vec E|a_0$.
Diamagnetismo: $\Delta E = \frac{e^2B^2}{8mc^2}\langle x^2+y^2\rangle$. Siempre positivo.

Neutrones en B (mom mag. $\mu<0$ — De Broglie: $\lambda = h/p,\quad p=mv=\hbar k$)
Si polariz. neutrons $\uparrow\uparrow$ **B** ⇒ Energía pot: $U=+\mu B$
Si polariz. neutrons $\downarrow\uparrow$ **B** ⇒ Energía pot: $U=-\mu B$
Intensidad interferencia 2 haces, amplitud A, desfase relativo $\Delta\phi$, intesidad 1! haz I_0:
Energía haz fuera del campo: $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$, dentro: $E=\frac{\hbar^2 k}{2m} = \frac{\hbar^2k'^2}{2m}+U$ (conserv. energía)
$k' = k\sqrt{1-\frac{U}{E}}\approx k(1-\frac{U}{2E}) = k - \frac{mU}{\hbar^2 k}$ Si 2 haces, 1 no B, otro B durante long l, desfase:
$\Delta\phi = (k'-k)l = -\frac{mUl}{\hbar^2k} = -\frac{Ul}{\hbar v}\Rightarrow \Delta\phi = \mp\frac{\mu B l}{\hbar v},\quad v=\frac{h}{m\lambda}$
$I=\propto|\psi_1+\psi_2|^2 = |A+Ae^{i\Delta\phi}|^2 = 2I_0(1+\cos\Delta\phi) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

MONOPOLO DE DIRAC

Maxwell Modificado: $\nabla\cdot\vec B = 4\pi\rho_m$. $\vec B = g\hat r/r^2$. Flujo $\Phi_B = 4\pi g$.
Potencial Vector: $\vec A^{(\pm)} = \pm g\frac{1\mp\cos\theta}{r\sin\theta}\hat\phi$. (Singularidad en polo S/N).
Cuantización de Carga: $qg = \frac{n\hbar c}{2}$. Implica cuantización de toda carga eléctrica.

CRISTALES Y FONONES

Cadena 1D: $H=\sum[\frac{p_n^2}{2m}+\frac12\lambda(q_{n+1}-q_n)^2]$. Modos normales $\Omega_k^2 = \frac{4\lambda}{m}\sin^2(\frac{ak}{2})$.
Cuantización: $\hat H = \sum\hbar\Omega_k(\hat a_k^\dagger\hat a_k+1/2)$.
Fonones: Excitaciones elementales (Bosones). $\hat q_n\sim\sum(\hat a_k e^{ikna}+\hat a_k^\dagger e^{-ikna})$.
3D: $\Omega_\lambda(\vec k)\approx c_s k$ (acústicos). $\Omega\to\omega_0$ (ópticos).

SEGUNDA CUANTIZACIÓN Y GRAFENO

Bosones: $[\hat a_i,\hat a_j^\dagger]=\delta_{ij}$. **Fermiones:** $\{\hat c_i,\hat c_j^\dagger\}=\delta_{ij}$.
Grafeno: Red hexagonal (subredes A, B). Puntos K (conos de Dirac).
Hamiltoniano Dirac: $H\approx\hbar v_F\vec\sigma\cdot\vec k$. $E=\pm\hbar v_F|\vec k|$. $v_F\approx 10^6$ m/s.
Operador Campo: $\hat\Psi(\vec x) = \sum\phi_i(\vec x)\hat c_i$.

CUANTIZACIÓN DEL CAMPO E.M. (FOTONES)

Gauge Coulomb $\nabla\cdot\vec A=0,\varphi=0$. $\hat{\vec A}\sim\sum_{\vec k,\eta}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}}\vec\epsilon_\eta(\hat a_{\vec k,\eta}e^{i(\vec k\vec x-\omega t)}+\text{H.c.})$.
Energía: $\hat H_{rad} = \sum_{\vec k,\eta}\hbar\omega(\hat a^\dagger_{\vec k,\eta}\hat a_{\vec k,\eta}+1/2)$.
Fotón: Estado $|\vec k,\eta\rangle = \hat a^\dagger_{\vec k,\eta}|0\rangle$. Helicidad $\eta=\pm1$.

CUANTIZACIÓN DEL CAMPO E.M.

Gauge de Coulomb: $\varphi=0$, $\nabla\cdot\vec A=0$. **Campo Cuántico:**
$\hat{\vec A}(t,\vec x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E(k)}}\sum_{\eta=\pm}\vec\epsilon_\eta(k)\left[e^{i(k\cdot x-\omega t)}\hat a_\eta(k)+e^{-i(k\cdot x-\omega t)}\hat a_\eta^\dagger(k)\right]$.
Relación Dispersión: $E(k)=\hbar\omega(k)=\hbar c|\vec k|$. **Transversalidad:** $\vec k\cdot\vec\epsilon_\eta(k)=0$.
$\vec\epsilon_\eta\cdot\vec\epsilon_{\eta'} = \delta_{\eta\eta'}$. **Campos Operadores:** • $\hat{\vec E} = -\frac1c\dot{\hat{\vec A}} = \frac{i}{\hbar c}\int\dots\sqrt{\frac{E}{2}}\sum\vec\epsilon_\eta[e^{i\cdots}\hat a_\eta - \text{H.c.}]$.
• $\hat{\vec B} = \nabla\times\hat{\vec A} = i\int\dots\frac{1}{\sqrt{2E}}\sum(\vec k\times\vec\epsilon_\eta)[e^{i\cdots}\hat a_\eta - \text{H.c.}]$. **Hamiltoniano Radiación:**
$\hat H_{rad} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}E(k)\sum\hat a_\eta^\dagger\hat a_\eta$. **Estados de Fock:** $|n(\vec k,\eta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat a_\eta^\dagger)^n|0\rangle$. Energía $n\hbar\omega$.
Función de onda del fotón: $\Psi_{\vec k,\eta}(t,\vec x) = \langle 0|\hat{\vec A}|\vec k,\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E(k)}}\vec\epsilon_\eta e^{i(k\cdot x-\omega t)}$. **Ejercicio Tip:** Si piden el valor esperado de $\vec E^2$, recuerda que aparecerá el término de energía del punto cero que se suele renormalizar/normalizar a $|0\rangle$.

ESTADOS COHERENTES (GLAUBER)

Definición: $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$. Son autoestados de $\hat a$: $\hat a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$. **Propiedades:** $\langle\alpha|\hat H|\alpha\rangle = \hbar\omega(|\alpha|^2+1/2) = E_{cl}+E_{vac}$. **Límite Clásico:** En un estado de Glauber, $\langle\alpha|\hat{\vec E}|\alpha\rangle$ recupera la forma de una onda electromagnética clásica senoidal con amplitud $\propto|\alpha|$. **Incertidumbre:** Minimizan $\Delta x\Delta p=\hbar/2$ (paquetes de mínima incertidumbre).

INTERACCIÓN RADIACIÓN-MATERIA

Hamiltoniano Total: $\hat H = \hat H_{rad}+\hat H_{at}+\hat H_{int}$. **Acoplamiento Mínimo:** $\vec p\to\vec p-\frac qc\hat{\vec A}$.
$\hat H_{int} = \hat H^{(1)}_{int}+\hat H^{(2)}_{int}+\hat H^{(s)}_{int}$. • $\hat H^{(1)}_{int} = -\frac{q}{mc}\hat{\vec A}\cdot\vec p\sim\sqrt\alpha$ (Procesos de 1 fotón: absorción/emisión). • $\hat H^{(2)}_{int} = \frac{q^2}{2mc^2}\hat{\vec A}^2\sim\alpha$ (Procesos de 2 fotones: scattering). • $\hat H^{(s)}_{int} = -\frac{\mu}{s\hbar}\vec S\cdot\vec B$ (Interacción con el espín). **Teoría de Perturbaciones:** Al ser $\alpha\approx1/137\ll1$, tratamos $\hat H_{int}$ como perturbación. El término $\vec A\cdot\vec p$ domina. **Ejercicio Tip:** En procesos de emisión espontánea, el estado inicial es $|n'\rangle\otimes|0\rangle$ y el final $|n\rangle\otimes|1\rangle$. El elemento de matriz solo recibe contribución de $\hat a^\dagger$ de $\hat H^{(1)}_{int}$.

REGLA DE SELECCIÓN DIPOLAR

Aproximación Dipolar: $e^{i\vec k\cdot\vec x}\approx1$. Válida si $\lambda_{foton}\gg a_{atomo}$ (Baja energía).
Elemento de Matriz Atómico: $\langle n,l,m|e^{-i\vec k\cdot\vec x}\vec p|n',l',m'\rangle\approx\langle n,l,m|\vec p|n',l',m'\rangle$.
Usando $[\hat H_0,\vec x] = \frac{\hbar}{im}\vec p$: $\langle n|\vec p|n'\rangle = \frac{im}{\hbar}(E_{n'}-E_n)\langle n|\vec x|n'\rangle$. **Reglas de Selección (Dipolo Eléctrico):** 1. $\Delta l=\pm1$ (Cambio de paridad). 2. $\Delta m=0,\pm1$. 3. Δn cualquiera.
Fuerza de Oscilador: $f_{12} = \frac{2m}{3\hbar^2}(E_2-E_1)\sum_{m_2,j}|\langle2|\hat x_j|1\rangle|^2$.

EMISIÓN Y ABSORCIÓN

Emisión Espontánea: Transición $|i\rangle\to|f\rangle+\gamma$. $\Gamma_{2\to1} = \frac{4\alpha\omega^3}{3c^2}|\langle1|\vec x|2\rangle|^2$. **Coeficientes de Einstein:** • A_{21}: Tasa de emisión espontánea. • B_{12},B_{21}: Tasas de absorción y emisión estimulada. **Relaciones:** $g_1B_{12}=g_2B_{21}$ y $A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{21}$. **Emisión Estimulada:** Probabilidad $\propto(n_\gamma+1)$. El $+1$ es la espontánea, el n_γ es la estimulada. **Ejercicio Tip:** La vida media es $\tau=1/\sum\Gamma$. Si hay varios canales de desintegración, suma las anchuras $\Gamma_{tot}=\Gamma_1+\Gamma_2+\dots$.

EFECTO FOTOELÉCTRICO

Proceso: γ + Átomo → Ion + e^-. **Cinemática:** $\hbar\omega = E_{ioniz}+\frac{p_e^2}{2m}$. **Elemento de Matriz:** $\langle\Psi_{final}|e^{i\vec k\cdot\vec x}\vec\epsilon\cdot\vec p|\Psi_{1s}\rangle$. Aquí Ψ_{final} es un estado de scattering (onda plana o función hipergeométrica). **Sección Eficaz** ($d\sigma/d\Omega$): $\propto\frac{\alpha}{E_\gamma}\sin^2\theta$. • Máxima para $\theta=\pi/2$ (electrones salen perpendiculares al haz incidente). • Nula en la dirección de incidencia ($\theta=0$). **Física:** El efecto depende de la frecuencia ω, no de la intensidad (que solo afecta al número de electrones, no a su energía).

ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON

Origen: Relación relativista $E^2=p^2c^2+m^2c^4$. $\left(\partial_\mu\partial^\mu+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x)=0$. (Operador D'Alembertiano $\Box+\mu^2$). **Interpretación Probabilística:** $\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}(\phi^*\partial_t\phi-\phi\partial_t\phi^*)$. **Problema:** ρ no es definida positiva (puede ser <0). Se interpreta como densidad de carga, no de probabilidad. **Soluciones Libre:** $\phi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2k^0}}[a(k)e^{-ikx}+b^*(k)e^{ikx}]$.
Contiene energías positivas y negativas ($E=\pm\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$). **Lím. No Relativista:** Haciendo $\phi(t,\vec x)=e^{-imc^2t/\hbar}\Psi(t,\vec x)$, se recupera la ec. de Schröd para Ψ si $E_{cin}\ll mc^2$.
Acoplamiento EM: Derivada covariante $D_\mu=\partial_\mu+\frac{iq}{\hbar c}A_\mu.(D_\mu D^\mu+\mu^2)\phi=0$.
Corriente de probabilidad: $j^\mu=\frac{i\hbar}{2m}(\phi\partial^\mu\phi^*-\phi^*\partial^\mu\phi)$.

LA ECUACIÓN DE DIRAC LIBRE

Motivación: Superar el carácter cuadrático de KG y la densidad $\rho<0$. **Derivación:** Factorización de $p^2-m^2c^2=(\gamma^\mu p_\mu-mc)(\gamma^\nu p_\nu+mc)=0$. **Ecuación:** $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc)\psi(x)=0$ o $(i\hbar\not\partial-mc)\psi=0$. **Álgebra de Clifford:** $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}\mathbb I$. • $(\gamma^0)^2=\mathbb I$, $(\gamma^i)^2=-\mathbb I$. • $\text{tr}(\gamma^\mu)=0$. • Dimensión mínima $N=4$. **Representación de Dirac (Estándar):** $\gamma^0=\begin{pmatrix}\mathbb I&0\\0&-\mathbb I\end{pmatrix}$, $\gamma^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}$. **Representación de Weyl (Quiral):** $\gamma^0=\begin{pmatrix}0&\mathbb I\\\mathbb I&0\end{pmatrix}$, $\gamma^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}$. $\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}-\mathbb I&0\\0&\mathbb I\end{pmatrix}$ (en Weyl).
Corriente de Probabilidad: $j^\mu=c\bar\psi\gamma^\mu\psi$. $\rho=\psi^\dagger\psi\ge0$. **Estrategia Examen:** Si piden probar inv. Lorentz, usa $S[\Lambda]\gamma^\mu S^{-1}[\Lambda]=\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$.

SOLUCIONES Y ESPINORES

Ondas Planas: $\psi(x)=u(\vec k)e^{-ikx}$ ($E>0$) o $v(\vec k)e^{ikx}$ ($E<0$). **Ecs. Algebraicas:** $(\not k-\frac{mc}{\hbar})u=0$ y $(\not k+\frac{mc}{\hbar})v=0$. **Estructura (Rep. Dirac):** $u_s(\vec p)=N\begin{pmatrix}\phi_s\\\frac{c\vec\sigma\cdot\vec p}{E+mc^2}\phi_s\end{pmatrix}$, $v_s(\vec p)=N\begin{pmatrix}\frac{c\vec\sigma\cdot\vec p}{E+mc^2}\chi_s\\\chi_s\end{pmatrix}$. $N=\sqrt{(E+mc^2)/2mc^2}$. ϕ,χ espinores de Pauli. **Helicidad:** $\hat h=\frac{\vec S\cdot\vec p}{|\vec p|}$. Conmuta con H libre. Proyecta el spin sobre el momento.

LÍMITE NO RELATIVISTA (NR)

Separamos $\psi=\begin{pmatrix}\theta\\\chi\end{pmatrix}e^{-imct/\hbar}$. θ (grande), χ (pequeña). $\chi\approx\frac{c\vec\sigma\cdot\vec\pi}{2mc^2}\theta$. $\vec\pi=\vec p-\frac qc\vec A$.
Ecuación de Pauli: $i\hbar\partial_t\theta=\left[\frac{(\vec p-\frac qc\vec A)^2}{2m}+qA_0-\frac{q\hbar}{2mc}\vec\sigma\cdot\vec B\right]\theta$. **Factor G:** Dirac predice $g=2$. El término de spin-campo es $\vec\mu\cdot\vec B$. **Estrategia:** Para derivar la ec. de Pauli, usa $(\vec\sigma\cdot\vec A)(\vec\sigma\cdot\vec B)=\vec A\cdot\vec B+i\vec\sigma(\vec A\times\vec B)$ y el hecho de que $[\pi_j,\pi_k]=\frac{i\hbar q}{c}\epsilon_{jkl}B_l$.

CORRECCIONES RELATIVISTAS

Hamiltoniano de orden $(mc)^{-2}$ para el átomo de H:
$H_{rel}=\frac{p^2}{2m}+V(r)-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\nabla^2V)+\frac{1}{2m^2c^2}\frac1r\frac{dV}{dr}\vec S\cdot\vec L$. 1. **Masa-Velocidad:** $-p^4/8m^3c^2$. 2. **Darwin:** $\frac{\hbar^2\pi e^2}{2m^2c^2}\delta^{(3)}(\vec r)$. Solo afecta a orbitales s ($l=0$). 3. **Spin-Órbita:** $\xi(r)\vec S\cdot\vec L$. Explica la estructura fina.

ANTIMATERIA Y SIMETRÍA C

Conjugación C: $\psi^C=C\bar\psi^T=i\gamma^2\gamma^0\bar\psi^T$. • Electrón ($q=-e,m$) ↔ Positrón ($q=+e,m$). • En el mar de Dirac, un "hueco" en los niveles $E<0$ se comporta como una partícula de carga opuesta y energía positiva. **Zitterbewegung:** Interferencia de soluciones $E\gtrless0$. $\hat v(t)=c^2\vec pH^{-1}+(\dots)e^{-i2Ht/\hbar}$. Oscilación rápida de frecuencia $\omega\approx2mc^2/\hbar$.

LÍMITE DE MASA NULA (WEYL)

Si $m=0$, el Hamiltoniano desacopla espinores L y R. **Ecs. de Weyl:** $(D_0+\vec\sigma\cdot\vec D)\psi_R=0$; $(D_0-\vec\sigma\cdot\vec D)\psi_L=0$. **Quiralidad:** $\gamma^5\psi_{R,L}=\pm\psi_{R,L}$. Para $m=0$, helicidad = quiralidad.
Corriente: $j^0=c(\psi_L^\dagger\psi_L+\psi_R^\dagger\psi_R)$; $\vec j=c(-\psi_L^\dagger\vec\sigma\psi_L+\psi_R^\dagger\vec\sigma\psi_R)$.

PARADOJA DE KLEIN

Scattering en escalón de potencial V_0. **Regímenes de la Barrera:** 1. $E-mc^2>V_0$: Transmisión clásica-cuántica normal. 2. $E-mc^2<V_0<E+mc^2$: Reflexión total ($R=1$). Onda evanescente. 3. $V_0>E+mc^2$: **Paradoja de Klein.** $R>1$ y $T<0$ (flujo entrante desde la barrera). **Física:** Creación de pares e^-e^+. El campo es tan fuerte que "arranca" electrones del vacío, dejando positrones que se propagan dentro de la barrera.
Ejercicio Tip: Calcula $\tilde k=\sqrt{(E-V_0)^2-m^2c^4}/c$. En el régimen 3, $\tilde k$ es real pero el flujo se invierte.

ÁLGEBRA Y MATRICES ÚTILES

• $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}$. $\eta=(-1,1,1,1)$. • $\gamma^0=(\gamma^0)^\dagger$; $\gamma^i=-(\gamma^i)^\dagger$. • $\bar\psi=\psi^\dagger\gamma^0$. • $\text{tr}(\mathbb I)=4$; $\text{tr}(\gamma^\mu)=0$; $\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4\eta^\mu\nu$. • $\text{tr}(\gamma^5)=0$; $\text{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu)=0$. • $\gamma^\mu\gamma_\mu=4$; $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu=-2\gamma^\nu$. • **Bilinear L-Lorentz:** $\bar\psi\psi$ (Escalar), $\bar\psi\gamma^5\psi$ (Pseudoesc.), $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ (Vector), $\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$ (Axial).

Otros

Part. libre en caja cúbica, lado L: $\psi(\mathbf x)=\frac{1}{\sqrt{L^3}}e^{i\mathbf{xp}/\hbar}$, en estado energía $E=0\to\mathbf p=0$
Potenciales $V=V(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})\xrightarrow{C.V.}\mathbf R=\frac12(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}),\mathbf r=\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}$. Jacobiano es la unidad.
$\langle V\rangle=\int_{L^3}d\mathbf R^3\int_{L^3}V(\mathbf r)d\mathbf r^3$ Si $V(\mathbf r)=0$ para $r>R$, $\langle V\rangle=L^3\cdot\int_{\mathbb R^3}V(\mathbf r)d\mathbf r^3$
FUNCIONES DE ONDA DE ÁTOMOS HIDROGENOIDES ($\rho=Zr/a_0$) $\Psi_{tot}=\Pi_{i=1}^n\psi_i$:

$$\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-\rho}$$
$$\psi_{200}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}(2-\rho)e^{-\rho/2}$$
$$\psi_{210}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho e^{-\rho/2}\cos\theta$$
$$\psi_{21\pm1}=\pm\frac{1}{8\sqrt\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho e^{-\rho/2}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$
$$\psi_{300}=\frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}(27-18\rho+2\rho^2)e^{-\rho/3}$$
$$\psi_{310}=\frac{\sqrt2}{81\sqrt\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho(6-\rho)e^{-\rho/3}\cos\theta$$
$$\psi_{31\pm1}=\pm\frac{1}{81\sqrt\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho(6-\rho)e^{-\rho/3}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$
$$\psi_{320}=\frac{1}{81\sqrt{6\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho^2e^{-\rho/3}(3\cos^2\theta-1)$$
$$\psi_{32\pm1}=\pm\frac{1}{81\sqrt\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho^2e^{-\rho/3}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$$
$$\psi_{32\pm2}=\frac{1}{162\sqrt\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\rho^2e^{-\rho/3}\sin^2\theta e^{\pm2i\phi}$$

Integral de Corrección Energía de Primer Orden (si unidades CGS → quita $4\pi\epsilon_0$)
$E^{(1)}=\left\langle\Psi^{(0)}\left|\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf r_1-\mathbf r_2|}\right|\Psi^{(0)}\right\rangle\qquad\Psi^{(0)}(\mathbf r_1,\mathbf r_2)=\frac{Z^3}{\pi a_0^3}e^{-Z(r_1+r_2)/a_0}$
$E^{(1)}=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\right)^2\iint e^{-\frac{2Z(r_1+r_2)}{a_0}}\frac{1}{|\mathbf r_1-\mathbf r_2|}d^3\mathbf r_1d^3\mathbf r_2$
Expandiendo en Arm. Esf. para $1/r_{12}$ y considerando la simetría esférica ($l=0$):
$E^{(1)}=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z^6}{\pi^2a_0^6}\right)(4\pi)^2\int_0^\infty r_1^2dr_1\int_0^\infty r_2^2dr_2\,e^{-\frac{2Z(r_1+r_2)}{a_0}}\frac{1}{r_>}=$
$=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{16Z^6}{a_0^6}\int_0^\infty r_1^2e^{-\frac{2Zr_1}{a_0}}\left[\int_0^\infty r_2^2e^{-\frac{2Zr_2}{a_0}}\frac{1}{r_>}dr_2\right]dr_1$
Dividimos la integral interior en las regiones $r_2<r_1$ ($r_>=r_1$) y $r_2>r_1$ ($r_>=r_2$):
$I_{int}=\frac{1}{r_1}\int_0^{r_1}r_2^2e^{-\frac{2Zr_2}{a_0}}dr_2+\int_{r_1}^\infty r_2e^{-\frac{2Zr_2}{a_0}}dr_2=\frac{a_0^3}{4Z^3}\left[\frac{1}{r_1}-e^{-\frac{2Zr_1}{a_0}}\left(\frac1{r_1}+\frac{Z}{a_0}\right)\right]$
Plug I_{int} en int. ext. y queda resolver integrales del tipo $\int x^ne^{-\lambda x}dx$:
$E^{(1)}=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Z^3}{a_0^3}\int_0^\infty\left[r_1e^{-\frac{2Zr_1}{a_0}}-e^{-\frac{4Zr_1}{a_0}}\left(r_1+\frac{Zr_1^2}{a_0}\right)\right]dr_1$

Integrals ($n\in\mathbb N_0, m\in\mathbb Z,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu,\sigma,r\in\mathbb R, x\in\mathbb R\cap\text{Dom}_f,\ a,b,z\in\mathbb C$)

+C omitted. Avoid division by 0. Most results can be extended to $\mathbb{C}$.

Basic

$\int (x+\alpha)^r dx = \frac{(x+\alpha)^{r+1}}{r+1}$ $\int x(x+\alpha)^r dx = \frac{(x+\alpha)^{r+1}(rx+x-\alpha)}{(r+1)(r+2)}$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Rational

$\int \frac{dx}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}\ln|\alpha x+\beta|$ $\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{x}{\alpha}$ $\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\ln|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}|$ $\int \frac{dx}{\alpha^2-x^2} = \frac{1}{2\alpha}\ln|\frac{\alpha+x}{\alpha-x}|$

$\int \frac{dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}\arctan\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{(4\alpha\gamma-\beta^2)}}$ $\int \frac{dx}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\ln|\frac{\alpha+x}{\beta+x}|$

Roots

$\int \sqrt{(x^2+\alpha^2)} = \frac{1}{2}[x\sqrt{(x^2+\alpha^2)} + \alpha^2 \operatorname{arsinh}\frac{x}{|\alpha|}]$ $\int \sqrt{(x^2-\alpha^2)} = \frac{1}{2}[x\sqrt{(x^2-\alpha^2)} - \alpha^2\ln|\sqrt{(x^2-\alpha^2)}+x|]$

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)}} = \operatorname{arsinh}\frac{x}{|\alpha|}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{(-x^2+\alpha^2)}} = \arcsin\frac{x}{|\alpha|}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)}} = \ln|\sqrt{(x^2-\alpha^2)}+x|$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2+\alpha^2)}} = -\frac{1}{\alpha}\operatorname{arsinh}\frac{\alpha}{|x|}$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{(-x^2+\alpha^2)}} = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{|\sqrt{(-x^2+\alpha^2)}+\alpha|}{|x|}$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-\alpha^2)}} = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\sqrt{(x^2-\alpha^2)}}{\alpha}$

$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2\pm\alpha^2)}}dx = \sqrt{(x^2\pm\alpha^2)}$ $\int \frac{x}{\sqrt{(-x^2+\alpha^2)}}dx = -\sqrt{(-x^2+\alpha^2)}$

$\int \frac{dx}{(x^2\pm\alpha^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{\alpha^2\sqrt{(x^2\pm\alpha^2)}}$ $\int \frac{dx}{(-x^2+\alpha^2)^{3/2}} = \frac{x}{\alpha\sqrt{(-x^2+\alpha^2)}}$

$\int \frac{x}{(x^2\pm\alpha^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{(x^2\pm\alpha^2)}}$ $\int \frac{x}{(x^2\pm\alpha^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{(x^2\pm\alpha^2)}}$

Trigonometric

$(\mu,\nu > 0,\ \chi \equiv x\alpha,\ \gamma \equiv \alpha+\beta,\ \delta \equiv \alpha-\beta)$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$ $\int \cos x\,dx = \sin x$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ $\int \frac{dx}{\tan^2 x} = -\cot x - x$

$\int \sinh x\,dx = \cosh x$ $\int \cosh x\,dx = \sinh x$ $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$ $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$ $\int \frac{dx}{\tanh^2 x} = -\coth x + x$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$ $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x$ $\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$ $\int \tanh^2 x\,dx = -\tanh x + x$

$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln|\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}|$ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\frac{1}{\cos x}+\tan x|$ $\int \frac{dx}{\tan x} = \ln|\sin x|$

$\int \sin^n \alpha x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}\chi\cos\chi}{n\alpha} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\alpha x\,dx$ $\int \cos^n \alpha x\,dx = +\frac{\cos^{n-1}\chi\sin\chi}{n\alpha} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\alpha x\,dx$

$\int \sin\alpha x\sin\beta x\,dx = -\frac{\sin\gamma x}{2\gamma} + \frac{\sin\delta x}{2\delta}$ $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx = +\frac{\sin\gamma x}{2\gamma} + \frac{\sin\delta x}{2\delta}$ $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,dx = -\frac{\cos\gamma x}{2\gamma} - \frac{\cos\delta x}{2\delta}$

$\int x\sin\alpha x\,dx = \frac{\sin\chi}{\alpha^2} - \frac{x\cos\chi}{\alpha}$ $\int x\cos\alpha x\,dx = \frac{\cos\chi}{\alpha^2} + \frac{x\sin\chi}{\alpha}$ $\int x\,{}^{\sin^2}_{\cos^2}\alpha x\,dx = \mp\frac{2\chi\sin 2\chi + \cos 2\chi \mp 2\chi^2}{8\alpha^2}$

$\int x\,{}^{\sin\alpha x\sin\beta x}_{\cos\alpha x\cos\beta x}dx = \mp\frac{x\sin\gamma x}{2\gamma} \mp \frac{\cos\gamma x}{2\gamma^2} + \frac{x\sin\delta x}{2\delta} + \frac{\cos\delta x}{2\delta^2}$ $\int x\sin\alpha x\cos\beta x\,dx = -\frac{x\cos\gamma x}{2\gamma} + \frac{\sin\delta x}{2\delta^2} - \frac{x\cos\delta x}{2\delta} + \frac{\sin\gamma x}{2\gamma^2}$

Definite integrals

$(m!! = m(m-2)(m-4)\ldots,\quad -1!! = 0!! = 1!! = 1)$

$\int_0^{\pi/2}\sin^\mu x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^\mu x\,dx = \frac{1}{2}B(\frac{\mu+1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{if } \mu = n \text{ even}\\ 1 & \text{if } \mu = n \text{ odd}\end{cases}$ $\int_{-1}^{+1}{}^{\sin(m\pi x)\sin(\tilde m\pi x)}_{\cos(m\pi x)\cos(\tilde m\pi x)}dx = \delta_{m,\tilde m}$

$\int_0^\alpha {}^{\sin(\frac{m\pi x}{\alpha})\sin(\frac{\tilde m\pi x}{\alpha})}_{\cos(\frac{m\pi x}{\alpha})\cos(\frac{\tilde m\pi x}{\alpha})}dx = \frac{\alpha}{2}\delta_{m,\tilde m}$ also valid $m = 1/2$ $\int_0^\alpha \sin(\frac{m\pi x}{\alpha})\cos(\frac{\tilde m\pi x}{\alpha})dx = \begin{cases}0 & \text{if } m+\tilde m \text{ even}\\ \frac{2m\alpha}{m^2-\tilde m^2}\frac{1}{\pi} & \text{if } m+\tilde m \text{ odd}\end{cases}$ $\int_0^\pi {}^{\sin}_{\cos}x\,dx = {}^{2}_{0}$

$\int_0^\pi \sin^n x\cos^{\tilde n}x\,dx = 0\ \forall\,\tilde n$ odd $\int_0^{\pi\mu}{}^{\sin^2}_{\cos^2}\alpha x\,dx = \frac{1}{4\alpha}[2\pi\alpha\mu \mp \sin(2\pi\alpha\mu)] \overset{\text{if } \mu=n}{=} \frac{\pi n}{\alpha}$ $\int_0^\pi {}^{\sin^3}_{\cos^3}x\,dx = {}^{4/3}_{0}$

$\int_0^{2\pi}{}^{\sin}_{\cos}x\,dx = 0$ $\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx = 0$ $\int_0^{2\pi}\sin^n x\cos^{\tilde n}x\,dx = 0$ if $n,\tilde n$ not both even $\int_0^{2\pi}{}^{\sin^3}_{\cos^3}x\,dx = 0$

$\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^n\sin nx\,dx = 0$ $\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^n\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{\pi}{2^{n-1}}$

Parity

Even : $f_e(-x) = f_e(x)$ sym w.r.t Y-axis *Odd* : $f_o(-x) = -f_o(x)$ sym w.r.t (0,0)

$\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_e(x)\,dx = 2\int_0^\alpha f_e(x)\,dx$ $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_o(x)\,dx = 0$

f_e : $\cos x,\ \cosh x,\ x^{2n},\ e^{-x^2},\ |x|,\ \delta_{ij},\ \delta(x),\ \mathbb{R},\ 1/f_e,\ f_o',\ f_e \pm f_e,\ f_e\cdot f_e,\ f_o\cdot f_o,\ \mathcal{F}\{f_e(x)\}(\xi),\ldots$

f_o : $\sin x,\ \sinh x,\ x^{2n+1},\ \tan x,\ \operatorname{erf} x,\ \operatorname{sign} x,\ \ln(\frac{1+x}{1-x}),\ 1/f_o,\ f_e',\ f_o \pm f_o,\ f_e\cdot f_o,\ \mathcal{F}\{f_o(x)\}(\xi),\ldots$

Log/Exp

$(r \neq -1)$

$\int x^r\ln x\,dx = x^{r+1}\left(\frac{\ln x}{r+1} - \frac{1}{(r+1)^2}\right)$ $\int (\ln x)^n\,dx = (-1)^n\,n!\,x\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\ln x)^k}{k!}$ $\int \frac{dx}{(e^{-x/\alpha}+1)} = \alpha\ln(e^{x/\alpha}+1)$

$\int xe^{\alpha x^2}dx = \frac{e^{\alpha x^2}}{2\alpha}$ $\int x^n e^{\alpha x}dx = e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-1)^k}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{\alpha^{k+1}}$ $\int \frac{e^{\alpha x}}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{\alpha x}}{x^{n-1}} + \alpha\int\frac{e^{\alpha x}}{x^{n-1}}dx\right)$

Definite integrals

$(r-1,\ \alpha > 0\quad \gamma \equiv$ Euler-Mascheroni constant$)$

$\int_0^\infty x^r e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{r+1}{2}}} = \begin{cases}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} & \text{if } r = 2n\\ \frac{n!}{2\,\alpha^{n+1}} & \text{if } r = 2n+1\end{cases}$ $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$

$\int_0^\infty x^r e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(r+1)}{a^{r+1}} \overset{\text{if } r=n}{=} \frac{n!}{a^{n+1}}$ $(r > -1,\ \Re(a) > 0)$ $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}$

$\int_0^\infty e^{-ax^b}dx = a^{-1/b}\Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right)$ $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2+\beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$ $\int_0^{2\pi}e^{i(m-\tilde m)\phi}d\phi = 2\pi\delta_{m,\tilde m}$

$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin(\beta x)dx = \frac{\beta}{\alpha^2+b^2}$ $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(\beta x)dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ $\int_0^\infty \frac{\ln x}{e^x}dx = \int_1^\infty\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)dx = -\gamma$

Error function integrals

$(\varphi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \mu \equiv$ mean, $\sigma^2 \equiv$ variance$)$ $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ $i\operatorname{erfi}(z) = \operatorname{erf}(iz)$

$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt = \operatorname{erf}(z)$ $\int \varphi\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)$ $\int \sqrt{x}\,e^{ax}dx = \frac{\sqrt{x}\,e^{ax}}{a} - \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erfi}(\sqrt{a}\sqrt{x})}{2a^{3/2}}$

Integrales/trig usadas en ejercicios:

$\int_{-a}^{+a}\cos^2(\frac{\pi n}{2a})\,u^4\,du = \frac{\pi^2 - 20\pi^2 + 120}{5\pi^4}a^5$ (En pot. cuártico, $V = \xi\,x^4$)

$\int_\Omega e^{iqr\cos\theta}d\Omega = 4\pi\frac{\sin(qr)}{qr}$ $\arctan(x \to \infty) = \pi/2$ $\sqrt{a-x} \xrightarrow{x\to 0} \sqrt{a} - \frac{x}{2\sqrt{a}}$

$\tan(ka+\delta) = \frac{\tan(ka)+\tan\delta}{1-\tan(ka)\tan\delta}$ $\begin{matrix}u = \tan(ka)\\ v = \tan(\delta)\end{matrix}$ $1+\tan^2\delta = \frac{1}{\cos^2(\delta)}$ $e^{i2\delta} = \frac{1+i\tan\delta}{1-i\tan\delta}$

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\sin(ka)\cos(ka) = \frac{1}{2}\sin(2ka)$

$\tan(ka) - \tan(ka+\delta) = \Omega \Rightarrow \tan(\delta) = \frac{-\frac{\Omega}{2}[1+\cos(2ka)]}{1-\frac{\Omega}{2}\sin(2ka)} = \frac{-\Omega}{1+\tan^2(ka)-\Omega\tan(ka)}$

$\cot(ka+\delta) - \cot(ka) = \Omega \Rightarrow \tan(\delta) = \frac{-\frac{\Omega}{2}[1-\cos^2(2ka)]}{1+\frac{\Omega}{2}\sin(2ka)} = \frac{-\Omega\tan^2(ka)}{1+\tan^2(ka)+\Omega\tan(ka)}$

$\cot(ka) = 1/\tan(ka)$ Condición de resonancia: $\cot(\delta) = 0 \rightsquigarrow ka = \eta$, defino:

$k_{\text{res}}\,a = \eta - \epsilon$. Despeja ϵ, sust. en k_{res}, $E_{\text{res}} = \frac{\hbar^2 k_{\text{res}}^2}{2m}$ $\Gamma = -2\left\{\frac{d(\cot\delta)}{dE}\Big|_{E=E_{\text{res}}}\right\}^{-1}$

$\int_{\frac{a}{k}}^{r}\sqrt{k^2 - \frac{a^2}{x^2}}\,dx = \sqrt{k^2r^2 - a^2} - a\arctan\left(\frac{\sqrt{k^2r^2-a^2}}{a}\right)$ con $\begin{matrix}a = \sqrt{l(l+1)},\\ r_0 = a/k\end{matrix}$ (WKB)

Coordinate Systems

Spherical

$(\theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi))$

$\begin{cases}x = r\sin\theta\cos\phi\\ y = r\sin\theta\sin\phi\\ z = r\cos\theta\end{cases}$ $\begin{cases}\hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol\theta} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol\phi}\\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol\theta} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol\phi}\\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}\end{cases}$

$\begin{cases}r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta = \arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z)\\ \phi = \arctan(y/x)\end{cases}$ $\begin{cases}\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\boldsymbol\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\boldsymbol\phi} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}\end{cases}$

Cylindrical

$(\rho \in [0,\infty),\ \phi \in [0,2\pi))$

$\begin{cases}x = \rho\cos\phi\\ y = \rho\sin\phi\\ z = z\end{cases}$ $\begin{cases}\hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol\rho} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol\phi}\\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\boldsymbol\rho} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol\phi}\\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\end{cases}$

$\begin{cases}\rho = \sqrt{x^2+y^2}\\ \phi = \arctan(y/x)\\ z = z\end{cases}$ $\begin{cases}\hat{\boldsymbol\rho} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\boldsymbol\phi} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\end{cases}$

Vector Derivatives

Cartesian

$(d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}},\ dV = dx\,dy\,dz)$

Gradient: $\nabla f = \partial_x f\,\hat{\mathbf{x}} + \partial_y f\,\hat{\mathbf{y}} + \partial_z f\,\hat{\mathbf{z}}$

Divergence: $\nabla\cdot\mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$

Curl: $\nabla\times\mathbf{F} = \begin{cases}\partial_y F_z - \partial_z F_y & \text{in } \hat{\mathbf{x}}\\ \partial_z F_x - \partial_x F_z & \text{in } \hat{\mathbf{y}}\\ \partial_x F_y - \partial_y F_x & \text{in } \hat{\mathbf{z}}\end{cases}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$

Spherical

$(d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol\phi},\ dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi)$

Gradient: $\nabla f = \partial_r f\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta f\,\hat{\boldsymbol\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi f\,\hat{\boldsymbol\phi}$

Divergence: $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi F_\phi$

Curl: $\nabla\times\mathbf{F} = \begin{cases}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\partial_\theta(\sin\theta\,F_\phi) - \partial_\phi F_\theta\right] & \text{in } \hat{\mathbf{r}}\\ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi F_r - \partial_r(rF_\phi)\right] & \text{in } \hat{\boldsymbol\theta}\\ \frac{1}{r}\left[\partial_r(rF_\theta) - \partial_\theta F_r\right] & \text{in } \hat{\boldsymbol\phi}\end{cases}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r f\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta f\right) + \frac{\partial_\phi^2 f}{r^2\sin^2\theta}$

Cylindrical

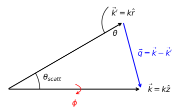
$(d\mathbf{l} = d\rho\,\hat{\boldsymbol\rho} + \rho\,d\phi\,\hat{\boldsymbol\phi} + dz\,\hat{\mathbf{z}},\ dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz)$

Gradient: $\nabla f = \partial_\rho f\,\hat{\boldsymbol\rho} + \frac{1}{\rho}\partial_\phi f\,\hat{\boldsymbol\phi} + \partial_z f\,\hat{\mathbf{z}}$

Divergence: $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi F_\phi + \partial_z F_z$

Curl: $\nabla\times\mathbf{F} = \begin{cases}\frac{1}{\rho}\partial_\phi F_z - \partial_z F_\phi & \text{in } \hat{\boldsymbol\rho}\\ \partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z & \text{in } \hat{\boldsymbol\phi}\\ \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho F_\phi) - \partial_\phi F_\rho\right] & \text{in } \hat{\mathbf{z}}\end{cases}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\,\partial_\rho f\right) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f$



EDOS

$y'' + k^2 y = 0$ **Trig.:** $y(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ **Exp.:** $y(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$

Fase: $y(x) = \mathcal{A}\sin(kx+\delta)$ o $y(x) = \mathcal{B}\cos(kx+\tilde\delta)$ escógela con misma paridad que $V(r)$ o similar al otro trozo

Ecuación Radial Libre: $\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r) = 0 \implies u_l(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr)$.

Bessel Esf.: $\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right](\rho\tilde R_l(\rho)) = 0$ $j_0 = \frac{\sin\rho}{\rho}$; $n_0 = -\frac{\cos\rho}{\rho}$.

$j_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}$ $n_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} -\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}$

$j_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right)$ $n_l(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} -\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right)$.

Hankel Esf.: $h_l^{(1,2)}(\rho) = j_l(\rho) \pm in_l(\rho)$.

$h_l^{(1)}(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho}e^{i(\rho - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{2})}$ $h_l^{(2)}(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho}e^{-i(\rho - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{2})}$.

Pozo de Potencial $(r < a)$: $\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 + \gamma^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r) = 0$

Solución regular: $u_l(r) = Crj_l(r\sqrt{k^2+\gamma^2})$.

Pozo cosh $V(r) = -\frac{\hbar^2}{mr_0^2}\frac{1}{\cosh^2(r/r_0)}$

$[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 + \frac{2}{\cosh^2 x}]y(x) = 0 \Rightarrow y(x) = e^{\pm ikx}(\tanh x \mp ik)$

Asintótica con Scattering: $u_l(r) \xrightarrow{r\to\infty} A_l\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$

$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)$

Límite $k \to 0$ **(Onda** s**):** $k\cot\delta_0 \approx -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}r_0k^2$.

a_s (atractivo): $\frac{1}{|\gamma|}(a|\gamma| - \tanh(a|\gamma|))$

a_s (repulsivo): $\frac{1}{|\gamma|}(a|\gamma| - \tan(a|\gamma|))$

Resonancia B.W.: $\sigma(E) \approx \frac{2\pi\hbar^2(2l+1)}{mE}\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2+\Gamma^2/4}$ $\delta(E) \approx \delta_{bg} + \arctan\left(\frac{\Gamma/2}{E_R - E}\right)$

Quantity	Symbol	Value	Unit
speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}
constant of gravitation	G	6.67430×10^{-11}	m^3 kg^{-1} s^{-2}
Planck constant	h	$6.62607015 \times 10^{-34}$	J Hz^{-1}
reduced Planck constant	$\hbar$	$1.054571817 \times 10^{-34}$	J s
elementary charge	e	$1.602176634 \times 10^{-19}$	C
vacuum magnetic permeability	$\mu_0 = 4\pi\alpha\hbar/e^2c$	$1.25663706127 \times 10^{-6}$	N A^{-2}
vacuum electric permittivity	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0c^2$	$8.8541878128 \times 10^{-12}$	F m^{-1}
vacuum impedance	$Z_0 = \mu_0c$	376.73031346177	Ω
Josephson constant	$K_J = 2e/h$	$483\,597.8484 \times 10^9$	Hz V^{-1}
von Klitzing constant	$R_K = 2\pi\hbar/e^2$	25 812.80745	Ω
magnetic flux quantum	$\Phi_0 = 2\pi\hbar/2e$	$2.067833848 \times 10^{-15}$	Wb
conductance quantum	$G_0 = 2e^2/2\pi\hbar$	$7.748091729 \times 10^{-5}$	S
inverse conductance quantum	G_0^{-1}	12 906.40372	Ω
electron mass	m_e	$9.1093837139 \times 10^{-31}$	kg
proton mass	m_p	$1.67262192595 \times 10^{-27}$	kg
proton-electron mass ratio	m_p/m_e	1836.152673426	—
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$	$7.2973525643 \times 10^{-3}$	—
inverse fine-structure	α^{-1}	137.035999177	—
Bohr Radius	$a_0 = \hbar/m_ec\alpha$	$5.29177210544 \times 10^{-11}$	m
classical electron radius	$r_e = \alpha^2a_0$	$2.8179403205 \times 10^{-15}$	m
Bohr Magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.2740100657 \times 10^{-24}$	J T^{-1}
Nuclear Magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$5.0507837393 \times 10^{-27}$	J T^{-1}
Rydberg frequency	$cR_\infty = \frac{\alpha^2m_ec}{2h}$	$3.28984196025 \times 10^{15}$	Hz
Hartree energy	$E_h = \alpha^2hcR_\infty$	$4.35974472221 \times 10^{-18}$	J
Boltzmann constant	k_B	1.380649×10^{-23}	J K^{-1}
Stefan–Boltzmann constant	$\sigma = \frac{\pi^2k_B^4}{60\hbar^3c^2}$	$5.670374419 \times 10^{-8}$	W m^{-2} K^{-4}
Avogadro constant	N_A	$6.02214076 \times 10^{23}$	mol^{-1}
molar gas constant	$R = N_Ak_B$	8.314462618	J mol^{-1} K^{-1}
Faraday constant	$F = N_Ae$	96 485.33212	C mol^{-1}
Non-SI units			
h-bar c	$\hbar c$	197.3269804	eV nm=MeV fm
electron volt	eV	$1.602176634 \times 10^{-19}$	J
atomic mass unit	u	$1.66053906892 \times 10^{-27}$	kg
atomic mass unit	u	931.49410242	MeV c^{-2}
Fermi coupling constant	$G_F^0 = G_F/(\hbar c)^3$	1.1663787×10^{-5}	GeV^{-2}

Done by: Jorge Acebes Hernández. Complete code on GitHub and Overleaf
No warranty on material accuracy. Last checked: January 29, 2026