

1. Item 1

1.1. Modelado de un sistema RLC en variables de estado

Se parte de un circuito serie RLC como el mostrado en la figura, con una entrada de tensión $v_e(t)$ y como salida se toma la tensión en la resistencia, $v_R(t)$.

Para modelar este sistema en variables de estado, hay que identificar qué variables almacenan energía. En este caso, eso lo hacen el inductor y el capacitor, así que las variables de estado naturales a elegir son:

- $x_1(t) = i(t)$, corriente en el inductor
- $x_2(t) = v_c(t)$, tensión sobre el capacitor

Estas variables son suficientes para describir el estado dinámico del circuito en cualquier instante de tiempo.

Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones al lazo del circuito, se tiene:

$$v_e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

Y usando las relaciones constitutivas de los componentes:

$$v_R(t) = Ri(t), \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Entonces, reemplazando:

$$v_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$

Y además:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

Con esto, podemos armar el sistema de ecuaciones diferenciales y dejarlo en forma matricial-vectorial como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Donde:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = v_e(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, si se quiere obtener la salida $y(t) = v_R(t) = R \cdot i(t)$, se define:

$$y(t) = Cx(t), \quad C = [R \quad 0]$$

Parámetros y Simulación

Se asignaron los siguientes valores:

$$R = 220 \, \Omega, \quad L = 500 \, \text{mH}, \quad C = 2,2 \, \mu\text{F}$$

La entrada $v_e(t)$ se define como una señal escalón que cambia de signo cada 10 ms, alternando entre +12 V y -12 V. Las condiciones iniciales del sistema se consideraron nulas.

Antes de simular, se analizó la dinámica del sistema. Para eso se calcularon los polos a partir de la matriz A , o de forma equivalente, con la función de transferencia obtenida por Laplace. Esto permite ver si el sistema es subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado.

Con los polos, se determinó el tiempo de integración necesario. Si el sistema es oscilatorio, se eligió el paso como $h \approx \frac{1}{20 \cdot \omega_d}$, y si no, se basó en la dinámica más rápida. En este caso, se utilizó integración por Euler para simular la evolución de las variables de estado en el tiempo.

El tiempo total de simulación fue de 50 ms, suficiente para observar varios ciclos del cambio de la entrada.

Conclusión

Este trabajo permitió entender cómo, a partir del concepto de variables de estado, se puede modelar y simular un sistema físico real como el circuito RLC. Elegimos como variables de estado a las que representan el almacenamiento de energía (corriente en el inductor y tensión en el capacitor), con lo cual armamos las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento dinámico del sistema.

Después de armar la representación en el espacio de estados, usamos la matriz del sistema A para analizar la dinámica interna, ver si es oscilatoria o no, y con eso elegir un paso de integración adecuado. En este caso, aplicamos el método de Euler para integrar numéricamente las ecuaciones del sistema.

De la simulación se puede observar cómo el sistema responde ante una entrada que cambia de +12 a -12 V cada 10 ms. El comportamiento de la corriente y la tensión en el capacitor refleja la dinámica esperada del sistema RLC: oscilaciones amortiguadas, con una respuesta que intenta seguir los cambios bruscos de la entrada pero lo hace de forma suave debido a la presencia del inductor y el capacitor, que actúan como filtros.

Este análisis es clave para entender el comportamiento temporal de sistemas eléctricos y para poder predecir su respuesta ante distintos tipos de entrada.

2. Item 2

Identificación de parámetros de un sistema RLC a partir de la respuesta al escalón

Planteo del problema

Se dispone de la respuesta medida de un circuito RLC serie frente a una excitación tipo escalón. El objetivo es estimar los valores de R , L y C del sistema a partir de los datos, usando el método de la respuesta al escalón y comparando los resultados con el modelo teórico.

Modelo del sistema

El circuito RLC serie responde a la siguiente ecuación diferencial:

$$V_e(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_C(t) \quad (1)$$

Dado que la corriente en un capacitor se relaciona con la tensión por:

$$i(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad (2)$$

Podemos reescribir la ecuación de entrada en función de la tensión en el capacitor:

$$V_e(t) = LC \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \quad (3)$$

Aplicando transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas), se obtiene la función de transferencia teórica:

$$\frac{V_C(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (4)$$

Análisis inicial de la respuesta

A partir del análisis gráfico de la respuesta medida del sistema se observó:

- La salida $V_C(t)$ no presenta oscilaciones, por lo que se descartan polos complejos conjugados.
- La forma de la curva sugiere un sistema de segundo orden con **polos reales distintos**.
- Se observó una señal de entrada escalón con retardo. Para evitar complejidades, se seleccionó el primer escalón positivo sin retardo aparente.

Identificación por método de 3 puntos (polo-polo-cero)

Se aplicó el método descripto para sistemas de segundo orden con polos reales distintos, considerando una función de transferencia del tipo:

$$G(s) = \frac{K(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (5)$$

Donde:

- K : ganancia de estado estacionario.
- T_1, T_2 : constantes de tiempo asociadas a los polos reales.
- T_3 : constante de tiempo asociada al cero (posible).

Se seleccionaron tres puntos de la salida equiespaciados temporalmente: t_1 , $2t_1$, y $3t_1$, extrayendo los valores de V_C correspondientes: y_1 , y_2 , y_3 .

A partir de los valores normalizados:

$$k_1 = \frac{y_1/A}{K} - 1 \quad (6)$$

$$k_2 = \frac{y_2/A}{K} - 1 \quad (7)$$

$$k_3 = \frac{y_3/A}{K} - 1 \quad (8)$$

Se resolvió el siguiente sistema no lineal para obtener los valores de $\alpha_1 = e^{-t_1/T_1}$ y $\alpha_2 = e^{-t_1/T_2}$:

$$\beta = \frac{k_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (9)$$

Luego, se despejan las constantes de tiempo:

$$T_1 = -\frac{t_1}{\ln \alpha_1} \quad (10)$$

$$T_2 = -\frac{t_1}{\ln \alpha_2} \quad (11)$$

$$T_3 = \beta(T_1 - T_2) + T_1 \quad (12)$$

Con estos valores se construyó la función de transferencia estimada $\hat{G}(s)$.

Estimación de parámetros físicos del sistema

La función de transferencia teórica no contiene el cero, por lo que se planteó:

$$G_{teo}(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (13)$$

Para obtener los parámetros físicos, se estimó primero el valor de C a partir de la derivada hacia atrás de $V_C(t)$:

$$C(t) = \frac{i(t)}{dV_C(t)/dt} \quad (14)$$

Donde la derivada se calculó por diferencias finitas hacia atrás:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} \approx \frac{V_C(t) - V_C(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (15)$$

Una vez conocido C , se utilizaron los coeficientes del denominador estimado para calcular:

$$R = \text{coeficiente de } s \div C \quad (16)$$

$$L = \text{coeficiente de } s^2 \div C \quad (17)$$

Comparación de modelos

Se graficaron en conjunto las siguientes curvas:

- Respuesta medida del sistema.
- Respuesta del modelo estimado $\hat{G}(s)$.
- Respuesta del modelo teórico $G_{teo}(s)$ con los valores de R , L y C obtenidos.
- Respuesta del modelo teórico **con el cero** (modelo ampliado).

Observaciones

- La función estimada presenta un cero (en el numerador) que no se encuentra en el modelo teórico clásico de un RLC serie, pero que surge del método de identificación basado en la salida.
- Este cero resulta ser muy cercano al origen ($T_3 \ll 1$), por lo cual puede despreciarse para simplificar la comparación con el modelo físico.
- Se observa una ligera diferencia entre la curva teórica sin cero y la respuesta real en la zona de subida. Esta diferencia se reduce significativamente al incluir el cero estimado.

Conclusiones

- Se logró estimar adecuadamente una función de transferencia a partir de datos experimentales, utilizando el método de los tres puntos para sistemas con polos reales distintos.
- A partir del modelo estimado se obtuvieron valores razonables de R , L y C que reproducen con buena precisión la dinámica del sistema.
- La inclusión del cero en el modelo mejora el ajuste con la señal medida, lo que demuestra la utilidad del modelo de identificación, aún cuando no coincida estructuralmente con el circuito real.
- El método demuestra ser útil para sistemas de segundo orden sin oscilaciones, donde se pueda asumir un modelo de polos reales distintos.

3. Item 3

Verificación del modelo a partir del segundo escalón negativo

Para validar los parámetros estimados en los ítems anteriores, se utilizó el segundo escalón negativo de la señal de entrada, el cual ocurre aproximadamente a los 0,05 s. A partir de este punto, se extrajeron las señales medidas de corriente $i(t)$, tensión de entrada $v_i(t)$ y tensión en el capacitor $v_c(t)$.

Se normalizó el eje temporal para que el instante inicial coincida con el comienzo del escalón (es decir, $t = 0$). Luego, se estimó la corriente utilizando el valor de capacitancia C previamente calculado, a partir de la ecuación:

$$i_{\text{estimada}}(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Para la derivada temporal, se aplicó el método de diferencias hacia atrás sobre la señal $v_c(t)$, considerando el paso de tiempo constante Δt obtenido de los datos medidos.

A continuación, se presenta la comparación entre la corriente estimada y la medida:

Conclusiones

La superposición entre la corriente medida y la corriente estimada es razonablemente buena, especialmente en la forma general de la respuesta y el pico inicial. Esto valida el valor de la capacitancia C previamente estimado, así como la hipótesis de que el modelo obtenido describe adecuadamente el comportamiento dinámico del circuito RLC en torno a transiciones de entrada.

Sin embargo, se observan pequeñas diferencias en la amplitud y en el decaimiento, lo cual puede atribuirse a:

- Aproximaciones numéricas en el cálculo de la derivada.
- Limitaciones de precisión en los datos medidos.
- Efectos no modelados como la resistencia parásita del capacitor o pequeñas no linealidades.

En conjunto, este análisis respalda la validez del modelo obtenido a partir del primer escalón positivo, demostrando su capacidad para reproducir correctamente el comportamiento del sistema ante nuevas excitaciones.

sectionCaso 2

Ítem [4] – Torque máximo soportado por el motor con controlador PID

Objetivo

Determinar el torque de carga máximo que puede soportar el motor modelado mediante las ecuaciones (1-5), (1-6) y (1-7) bajo una alimentación constante de 12 V, evaluando la respuesta del sistema controlado con un PID discreto. Se busca identificar el valor de T_L a partir del cual el motor no puede mantener su velocidad de referencia.

Metodología

Se utilizó un modelo del motor implementado en MATLAB mediante integración por el método de Euler con paso temporal $\Delta t = 1 \times 10^{-7}$ s. El sistema es regulado por un controlador PID con parámetros:

- $K_p = 6$
- $K_i = 920$
- $K_d = 0$

El torque de carga T_L se incrementa linealmente en cada paso temporal con un valor de $\Delta T_L = 1 \times 10^{-9}$ Nm hasta un tiempo total de simulación de 5 ms. Se registran la velocidad angular $\omega(t)$ y el valor de $T_L(t)$ para identificar el instante en el que la velocidad angular comienza a decaer y no puede mantenerse próxima a la referencia impuesta de 2 rad/s.

Código

El siguiente fragmento representa la simulación principal del sistema:

Listing 1: Simulación para identificación de T_L máximo

```
% Fragmento clave :
TL=0; delta_TL = 1e-9;
...
for t = 0:t_etapa:tF
    ...
    X = modmotor(t_etapa, X, u, TL);
    ...
    x1(ii)=X(1); % Omega
    ...
    TL_vec(ii) = TL;
    TL = TL + delta_TL;
end
```

Resultados

La figura muestra cómo la velocidad angular $\omega(t)$ decrece a medida que el torque de carga incrementa, hasta llegar a un punto donde el motor no puede sostener la velocidad de referencia. Observando el cruce por cero de la velocidad, se puede estimar que el torque máximo soportado bajo estas condiciones de control es:

$$T_{L,\text{máx}} \approx 2,2 \times 10^{-5} \text{ Nm}$$

Este valor se obtuvo al observar el cruce por cero en el gráfico de $\omega(t)$, correspondiente aproximadamente a $t \approx 0,0022$ s.

Observaciones

- La estimación del torque máximo es sensible a los parámetros del PID: un controlador más agresivo podría sostener un T_L ligeramente mayor antes de perder seguimiento.
- Es importante considerar este valor como una referencia para dimensionar adecuadamente el hardware de control y potencia, como transistores de salida y disipadores térmicos.
- Se recomienda realizar simulaciones adicionales con distintos valores de referencia y parámetros del controlador para obtener una curva característica del sistema bajo distintas condiciones de operación.

4. Ítem 5: Identificación del modelo dinámico del motor

4.1. Objetivo

El objetivo de este ítem es obtener un modelo dinámico que describa el comportamiento de un motor de corriente continua, a partir de mediciones experimentales de su velocidad angular ω

frente a dos entradas: un escalón de tensión V_a y un escalón de torque de carga T_L . A partir de las funciones de transferencia estimadas, se pretende extraer los parámetros físicos característicos del modelo del motor.

4.2. 1. Carga y preprocesamiento de los datos

Se utilizaron los datos medidos del archivo `Curvas_Medidas_Motor_2025.xls`. De dicho archivo se extrajeron los siguientes tramos:

- **Curva ω/V_a :** Se seleccionaron las filas 201 a 400, donde se aplica un escalón de 12 V sin retardo.
- **Curva ω/T_L :** Se seleccionaron las filas 401 a 700, donde se observa una perturbación negativa en la velocidad angular debido a un escalón positivo en el torque de carga.

En ambos casos se normalizó el tiempo para que $t = 0$ coincida con el instante de aplicación del escalón.

Dado que el efecto del escalón en T_L fue una disminución en ω , se aplicó un cambio de signo y centrado respecto al valor inicial para ajustar la señal de velocidad a una forma creciente, compatible con la metodología de identificación utilizada.

4.3. 2. Estimación de la función de transferencia

Se empleó el método de los tres puntos para obtener una función de transferencia estimada de segundo orden sobreamortiguada con la siguiente forma:

$$G(s) = K \cdot \frac{T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

donde:

- K es la ganancia estática,
- T_1 y T_2 son las constantes de tiempo asociadas a los dos polos reales distintos,
- T_3 es la constante de tiempo asociada al cero.

El método consiste en tomar tres muestras equiespaciadas de la salida ante un escalón, y a partir de ellas deducir la ganancia y las constantes de tiempo del sistema. Los resultados obtenidos son:

Para ω/V_a :

- $K = 3,765$
- $T_1 = 0,0045 \text{ s}$
- $T_2 = 0,00341 \text{ s}$
- $T_3 = 0,00138 \text{ s}$

Función de transferencia estimada:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{3,765 \cdot (0,00138s + 1)}{(0,0045s + 1)(0,00341s + 1)}$$

Para ω/T_L :

- $K = 33,75$
- $T_1 = 0,00175 \text{ s}$
- $T_2 = 0,001845 \text{ s}$
- $T_3 = 0,0103 \text{ s}$

Función de transferencia estimada:

$$\frac{\omega(s)}{T_L(s)} = \frac{33,75 \cdot (0,0103s + 1)}{(0,00175s + 1)(0,001845s + 1)}$$

4.4. 3. Modelo físico del motor

El modelo dinámico del motor utilizado se basa en un esquema típico con tres parámetros eléctricos y tres parámetros mecánicos:

- Parámetros eléctricos: resistencia del inducido R_a , inductancia L_a , constante de par K_i .
- Parámetros mecánicos: momento de inercia J_m , coeficiente de fricción viscosa B_m , constante de fuerza contraelectromotriz K_m .

La función de transferencia general del motor en lazo abierto es:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m K_i}{(L_a J_m)s^2 + (L_a B_m + R_a J_m)s + (R_a B_m + K_m K_i)}$$

Se equipara esta expresión con el denominador de la función estimada y se resuelve el sistema de ecuaciones simbólicas para identificar los parámetros físicos.

Parámetros identificados

- $R_a = 2,43 \Omega$ (valor medido)
- $L_a = 0,00475 \text{ H}$
- $K_i = 0,443$
- $J_m = 0,00113 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- $K_m = 0,562$
- $B_m = 0,146 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$

4.5. 4. Observaciones

- La respuesta estimada para ω/V_a presenta una excelente coincidencia con la medición experimental, tanto en la ganancia como en la dinámica transitoria.
- Para ω/T_L se observó mayor dispersión en los datos. Fue necesario invertir la señal y centrarla para obtener una respuesta tipo escalón creciente. A pesar de ello, el modelo estimado representa adecuadamente la dinámica general del sistema.
- Se verificó que el sistema presenta dos polos reales negativos (sobreamortiguado) y un cero en el numerador, como se esperaba para un sistema de segundo orden no mínimo fase.
- El método de identificación por tres puntos es una herramienta efectiva cuando las señales están bien definidas y con bajo nivel de ruido.

4.6. 5. Conclusiones

- Se obtuvieron modelos dinámicos de segundo orden para el motor en respuesta a V_a y a T_L , que se ajustan razonablemente a los datos experimentales.
- A partir de estas funciones de transferencia se identificaron con éxito los parámetros físicos del motor, tanto eléctricos como mecánicos.
- El modelo identificado es adecuado para ser utilizado en el diseño de controladores y en simulaciones más avanzadas que involucren perturbaciones o condiciones de carga variables.
- La combinación de MATLAB y herramientas simbólicas permite resolver con eficiencia problemas de identificación de sistemas físicos a partir de datos reales.

5. Ítem 6: Control PID discreto del ángulo del motor

Consigna

Implementar un PID en tiempo discreto para que el ángulo del motor permanezca en una referencia de 1 rad, sometido al torque descrito en la Fig. 1-3. *Tip: partir de $K_P = 0,1$, $K_I = 0,01$, $K_D = 5$.*

Implementación y desarrollo

El controlador PID se implementó en forma discreta utilizando la ecuación general de diferencias basada en el método trapezoidal:

$$u[k] = u[k-1] + A_1 e[k] + B_1 e[k-1] + C_1 e[k-2]$$

donde:

$$A_1 = \frac{2K_P T_s + K_I T_s^2 + 2K_D}{2T_s}$$

$$B_1 = \frac{-2K_P T_s + K_I T_s^2 - 4K_D}{2T_s}$$

$$C_1 = \frac{K_D}{T_s}$$

El sistema se simuló utilizando el modelo del motor obtenido previamente por identificación, con la entrada de control u limitada entre $[-12 \text{ V}, 12 \text{ V}]$ para reflejar saturación del actuador.

Durante la simulación se observó que, con el paso de integración original $T_s = 1 \text{ ms}$, el error acumulado era significativo debido al comportamiento del término integral. Para mejorar la precisión numérica, se incrementó el paso a $T_s = 10 \text{ ms}$, lo que redujo la acumulación de error y estabilizó la respuesta.

Código MATLAB utilizado

```
clear;
X = -[0; 0; 0; 0];
ii = 0;
t_etapa = 1e-2;      % Paso de integración ampliado
thetaRef = 1;        % Referencia de ángulo [rad]
tF = 10;              % Tiempo final de simulación
TL = 0;

% Constantes del PID ajustadas
Kp = 2000;
Ki = 5000;
Kd = 10;

Ts = t_etapa;
A1 = ((2*Kp*Ts) + (Ki*(Ts^2)) + (2*Kd)) / (2*Ts);
B1 = (-2*Kp*Ts + Ki*(Ts^2) - 4*Kd) / (2*Ts);
C1 = Kd / Ts;

e = zeros(tF / t_etapa, 1);
u = 0;

for t = 0:t_etapa:tF
    ii = ii + 1; k = ii + 2;

    % Torque externo aplicado según consigna
    if(t >= 0.7010)
        TL = 0.12;
    end
    if(t >= 1.001)
```

```

        TL = 0;
    end

    X = modmotor_ang(t_etapa, X, u, TL);
    e(k) = thetaRef - X(3); % Error de posición angular
    u = u + A1*e(k) + B1*e(k-1) + C1*e(k-2); % PID discreto

    % Saturación del actuador
    u = max(min(u, 12), -12);

    % Registro de variables
    x1(ii) = X(1); % Velocidad angular
    x2(ii) = X(2); % Wp
    x3(ii) = X(3); % Ángulo
    x4(ii) = X(4); % Corriente
    acc(ii) = u;
    carga(ii) = TL;
end

% Gráficos
t = 0:t_etapa:tF;
subplot(3,1,1); hold on;
plot(t,x3,'r'); title('Salida \theta'); xlabel('Tiempo [s]');
subplot(3,1,2); hold on;
plot(t,carga,'m'); title('Carga TL'); xlabel('Tiempo [s]');
subplot(3,1,3); hold on;
plot(t,acc,'b'); title('Entrada u_t'); xlabel('Tiempo [s]');

```

Observaciones

- La respuesta del sistema con los valores iniciales sugeridos ($K_P = 0,1$, $K_I = 0,01$, $K_D = 5$) fue muy lenta, por lo que se aumentaron considerablemente las ganancias para lograr una regulación aceptable.
- El aumento del paso de integración ($T_s = 10$ ms) ayudó a estabilizar la simulación y evitar errores numéricos acumulados, especialmente en el término integral.
- Una oscilación pequeña en régimen permanente ($\pm 0,02$ rad) fue observada, producto de la ausencia de una componente derivativa en etapas anteriores. Se incorporó $K_D > 0$ para mejorar el amortiguamiento.

Conclusiones

Se logró implementar un controlador PID discreto efectivo que regula el ángulo del motor a 1 rad pese a perturbaciones externas. Fue fundamental ajustar las ganancias a valores más altos que los sugeridos inicialmente y agregar la acción derivativa para evitar oscilaciones sostenidas en

régimen. El paso de integración también tuvo un rol clave: si es muy pequeño, se acumulan errores numéricos; si es muy grande, se pierde precisión. Se encontró un equilibrio con $T_s = 10$ ms.

El modelo del motor utilizado corresponde al identificado previamente a partir de curvas experimentales, lo cual permitió simular de manera realista la dinámica del sistema.