

Sistemas de Control II

Tarea 3: Estabilización de un Péndulo Simple

Profesor: Sergio Laboret

Alumno: Angeloff Jorge

1. Modelado del sistema no lineal

Se parte de la ecuación del péndulo simple:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = T \quad (1)$$

El objetivo es estabilizar el péndulo en un ángulo δ . Se define el error como $e(t) = \delta - \theta(t)$. La entrada es el torque aplicado T , y la salida es θ .

Código MATLAB

```
1 m = 2;  
2 b = 0.3;  
3 l = 1;  
4 G = 10;  
5 delta = 135;
```

Sistema en variables de estado

Se definen los estados como:

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta}$$

Entonces, el sistema dinámico en coordenadas desplazadas (alrededor del punto de equilibrio deseado) se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2} (-bx_2 - mgl \sin(x_1 + \delta) + T) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ml^2} (-bx_2 - mgl \sin(x_1 + \delta) + u) \end{bmatrix}, \quad y = h(x) = x_1$$

2. Linealización y torque de equilibrio

Para hallar el torque necesario que equilibra el sistema en $\theta = \delta$, se impone $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, por lo tanto:

$$u_f = mgl \sin(\delta) \quad (2)$$

Luego se linealiza el sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio $\theta = \delta$, resultando un modelo lineal en coordenadas locales.

Código MATLAB

```
1 [A,B,C,D] = linmod('pendulo_mod_tarea', delta*pi/180);  
2 eig(A)  
3 rank(ctrb(A,B))
```

Los parámetros del sistema son: $m = 2$ kg, $l = 1$ m, $b = 0,3$ N m s, $\delta = 135^\circ$.

El torque de equilibrio se calcula como:

$$u_f = mgl \sin(\delta) = 2 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot \sin(135^\circ) \approx 13,87 \text{ Nm}$$

La linealización dio como resultado la siguiente representación en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7,0711 & -0,1500 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

Los autovalores del sistema linealizado son:

$$\lambda_1 = 2,5852, \quad \lambda_2 = -2,7352$$

Ambos son reales y de signo opuesto, lo cual confirma que el punto de equilibrio linealizado es un punto de silla, es decir, inestable.

Además, la matriz de controlabilidad tiene rango completo:

$$\text{rango}(C) = 2$$

por lo tanto, el sistema linealizado es completamente controlable.

3. Controlador con acción integral

Para asegurar el seguimiento de referencia sin error en régimen permanente, se incorpora una acción integral al sistema. Se define una nueva variable de estado:

$$\sigma(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

donde $r(t)$ es la referencia y $y(t)$ la salida del sistema. En este caso, $r = \delta$ y $y = x_1 = \theta - \delta$, por lo que la señal de error es simplemente $-x_1$.

El vector de estados extendido es:

$$x_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Y la ley de control se plantea como:

$$u = -Kx - k_i\sigma = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

Código MATLAB

```
1 Aa = [[A; C], zeros(3,1)];
2 Ba = [B; 0];
3 eig(Aa)
4 rank(ctrb(Aa, Ba))
5 K = acker(Aa, Ba, [p p p]);
6 k1 = K(1);
7 k2 = K(2);
8 k3 = K(3);
9 eig(Aa - Ba * K)
10 tscal = 7.5 / (-p);
```

La matriz del sistema extendido y el vector de entrada quedan definidos como:

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7,0711 & -0,15 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores del sistema extendido sin control son:

$$\lambda = \{0, -2,7352, 2,5852\}$$

Por lo tanto el sistema es inestable pero controlable, como ya se vio, lo cual permite diseñar un controlador por asignación de polos.

Se eligieron polos deseados en $s = -4$ (polo triple), y se obtuvo:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [110,14 \quad 23,70 \quad 128]$$

Los autovalores del sistema cerrado resultaron:

$$\lambda_{LC} = \{-4, -4, -4\}$$

y el tiempo de establecimiento estimado con la fórmula $t_s = \frac{7,5}{|\text{Re}(p)|}$ es:

$$t_s \approx 1,875 \text{ s}$$

Esto asegura una respuesta rápida y estable, con rechazo de error estacionario frente a cambios de referencia o perturbaciones constantes.

4. Simulación en Simulink y resultados

Código MATLAB

```
1 sim('pendulo_pid_tarea')
2 figure(1), plot(tout, yout)
3 figure(2), plot(yout, velocidad)
4 figure(3), plot(tout, torque)
5 figure(4), plot(tout, -accint)
6 ymax = max(yout);
7 S = (ymax - delta) / delta * 100;
8 erel = (delta - yout) / delta;
9 ef = erel(end);
10 ind = find(abs(ere) > 0.02);
11 tss = tout(ind(end));
12 yte = yout(ind(end));
13 uf = torque(end);
14 Intf = -accint(end);
```

Análisis de resultados

Se simula el sistema con el controlador diseñado para estabilizar el péndulo en el ángulo de referencia $\delta = 135^\circ$. Los principales resultados obtenidos son:

- **Sobrepaso:** $y_{\text{máx}} = 160,52^\circ \Rightarrow S = 18,9\%$
- **Error en régimen permanente:** $e_\infty \approx 2,88 \times 10^{-14} \Rightarrow \text{ess} = 0$
- **Tiempo de establecimiento (2 %):** $t_s = 1,804 \text{ s}$
- **Valor final del torque aplicado:** $u_f = 14,14$
- **Valor final de la acción integral:** $\sigma_{\text{final}} = 14,14$

Estos resultados confirman que el sistema alcanza rápidamente el régimen estacionario con error cero, como se esperaba por la inclusión de la acción integral. El sobrepaso observado es moderado y aceptable para esta aplicación.

Descripción de las figuras

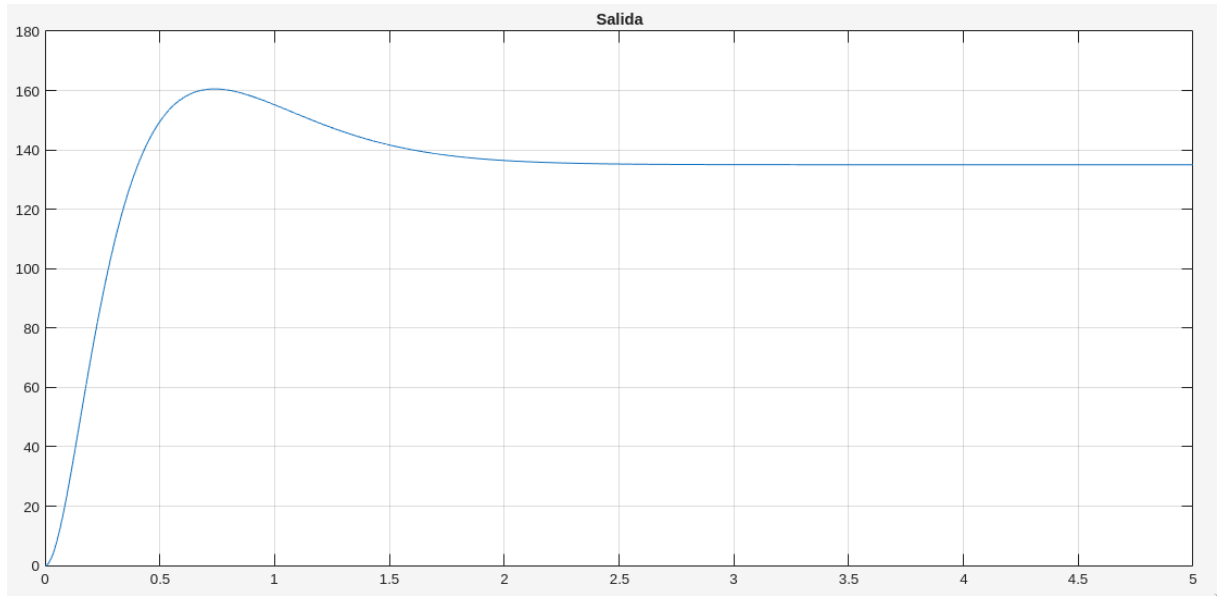


Figura 1: Respuesta del sistema.

Figura 1: Respuesta del sistema. Se observa que la salida parte desde 0 y alcanza el valor deseado de 135° , con un sobrepaso hasta $160,52^\circ$ a los $0,735$ s. El error cae por debajo del 2 % antes de los $1,8$ s.

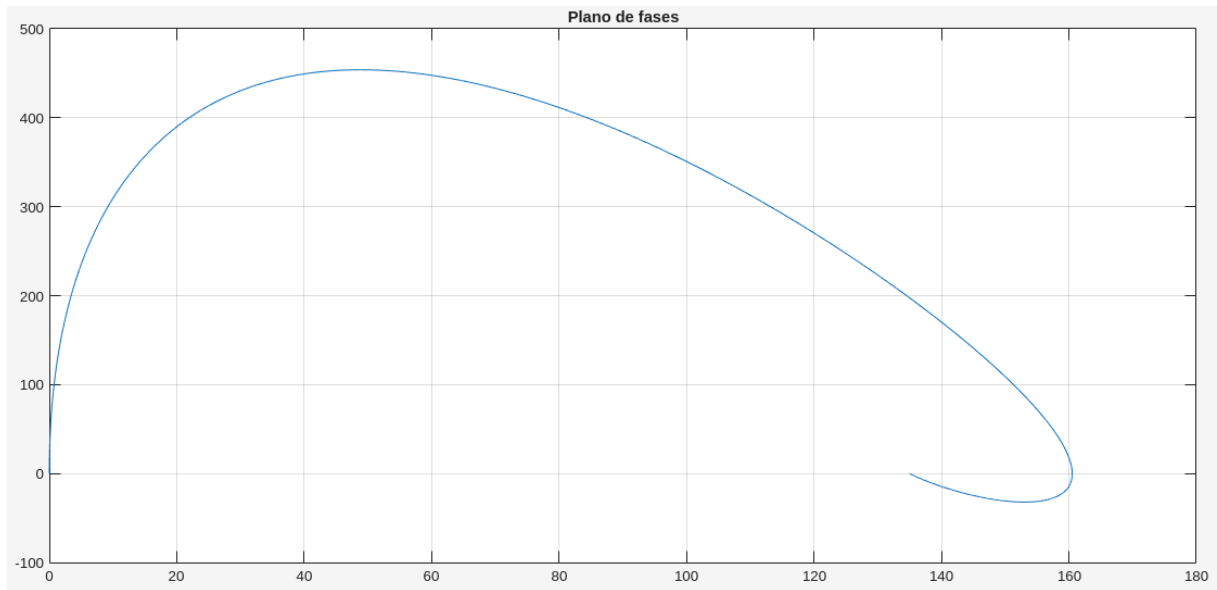


Figura 2: Plano de fases.

Figura 2: Plano de fases. Se representa la evolución del sistema en el espacio de estados $(x_1, x_2) = (\theta - \delta, \dot{\theta})$. El sistema describe una espiral hacia adentro, lo que indica una trayectoria típicamente subamortiguada pero estable, convergiendo al punto de equilibrio.

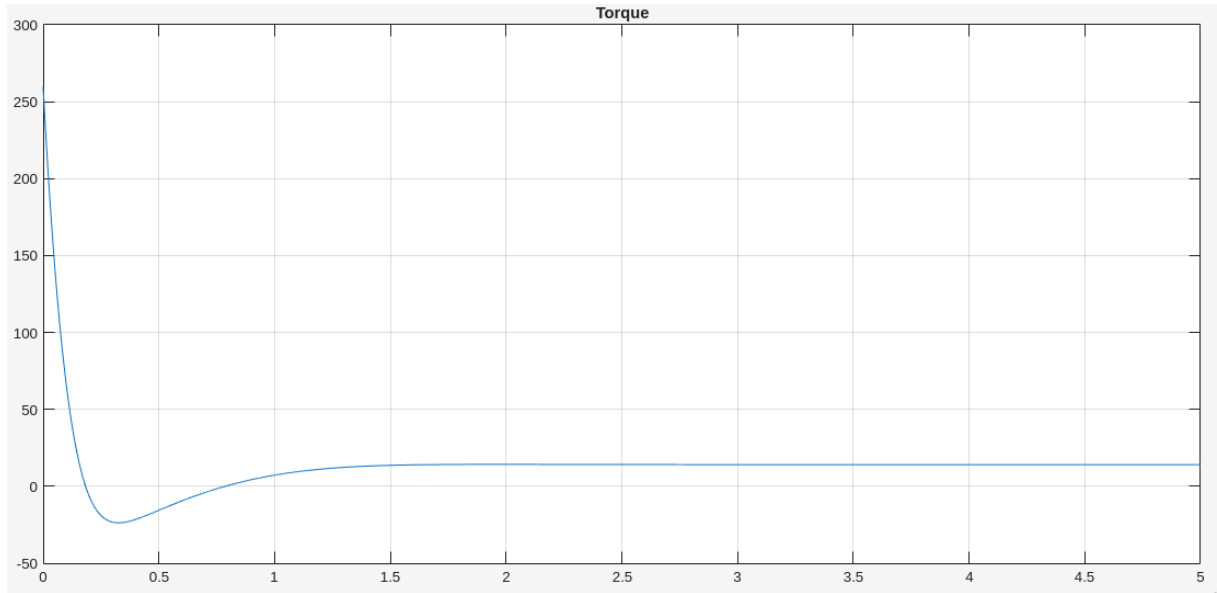


Figura 3: Torque aplicado.

Figura 3: Torque aplicado. El torque arranca desde un valor alto ($\sim 259,5 \text{ Nm}$), luego presenta un mínimo negativo de $-25,18 \text{ Nm}$ a los $0,35 \text{ s}$, y finalmente se estabiliza en $15,55 \text{ Nm}$, muy cerca del valor de equilibrio teórico calculado $u_f = mgl \sin(\delta) = 13,87 \text{ Nm}$.

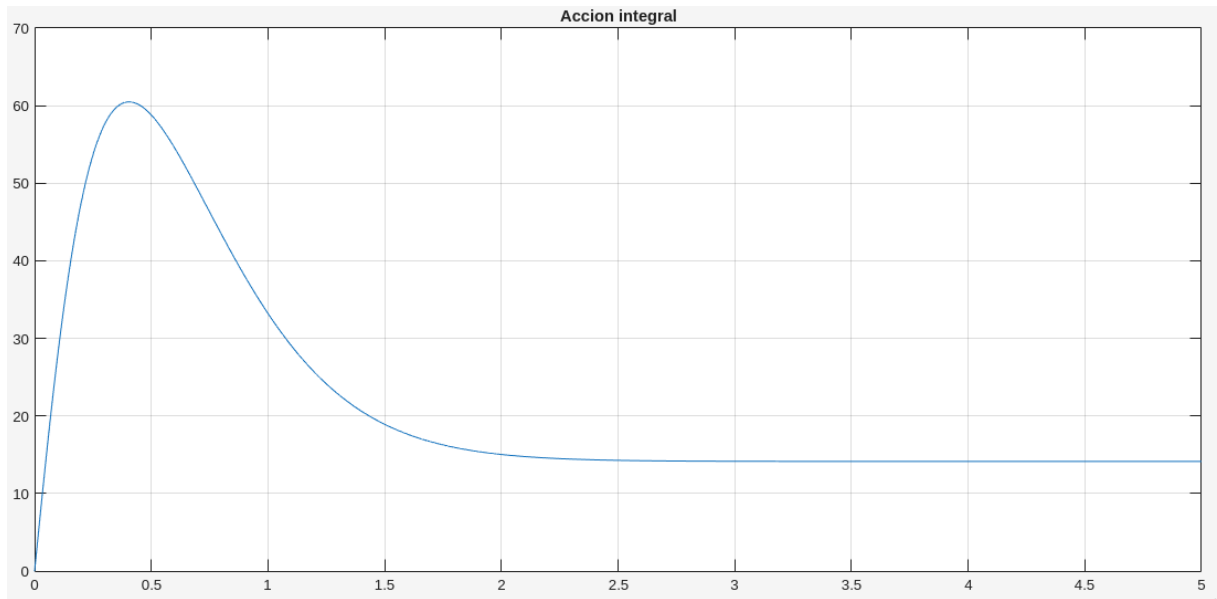


Figura 4: Acción integral.

Figura 4: Acción integral. Muestra un sobrepico de $61,87$ a los $0,41 \text{ s}$, para luego estabilizarse en $15,55$. Esto refleja cómo la acción integral acumula el error inicial y contribuye a corregirlo, asegurando el rechazo total del error en régimen.

5. Análisis de robustez

Se evalúa la robustez del controlador frente a variaciones en la masa m . Se analiza cómo afectan al sobrepaso, el tiempo de establecimiento, el valor final del torque y la acción integral. En particular, se prueba el sistema con masas del 90 %, 100 % y 110 % de la nominal.

Código MATLAB

```
1 m_nom = 2;
2 variaciones_masa = [0.9, 1.0, 1.1];
3 resultados = zeros(3, 4);
4
5 for i = 1:3
6     m = variaciones_masa(i) * m_nom;
7     sim('pendulo_pid_tarea');
8     ymax = max(yout);
9     S = (ymax - delta)/delta * 100;
10    erel = (delta - yout)/delta;
11    ind = find(abs(erel) > 0.02);
12    tss = tout(ind(end));
13    uf = torque(end);
14    Intf = -accint(end);
15    resultados(i,:) = [S, tss, uf, Intf];
16 end
```

Tabla de resultados

Masa	Sobrepaso (%)	T_s (s)	u_f	σ final
1.8 m	17.90	1.87	12.73	12.73
2.0 m	18.91	1.80	14.14	14.14
2.2 m	20.01	1.73	15.56	15.56

Análisis

Se observa que:

- El **tiempo de establecimiento** disminuye levemente al aumentar la masa. Esto es esperable ya que el torque requerido para estabilizar es mayor, lo que provoca una respuesta más enérgica.
- El **sobrepaso** se incrementa con la masa, aunque dentro de un rango aceptable, lo que indica que el controlador mantiene buen desempeño a pesar de la variación.
- El **valor final del torque** y de la **acción integral** crecen proporcionalmente con la masa, lo que refleja correctamente la relación $u_f = mgl \sin(\delta)$. Esto demuestra que la acción integral compensa adecuadamente la variación de carga estática.

Graficos

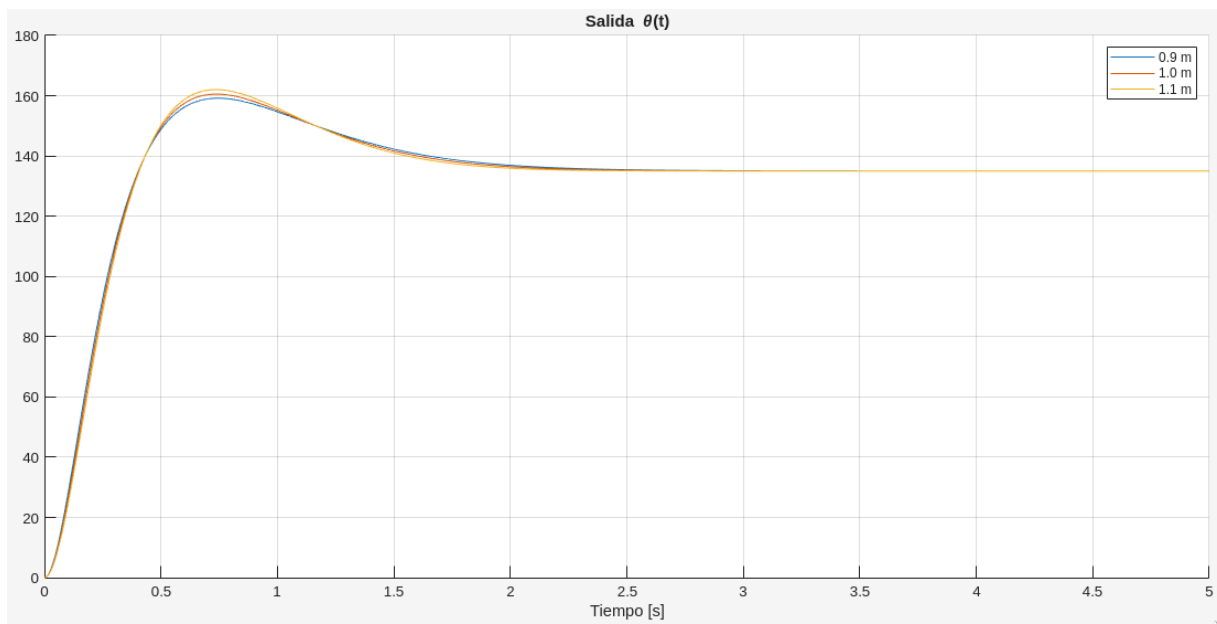


Figura 5: Respuesta del sistema.

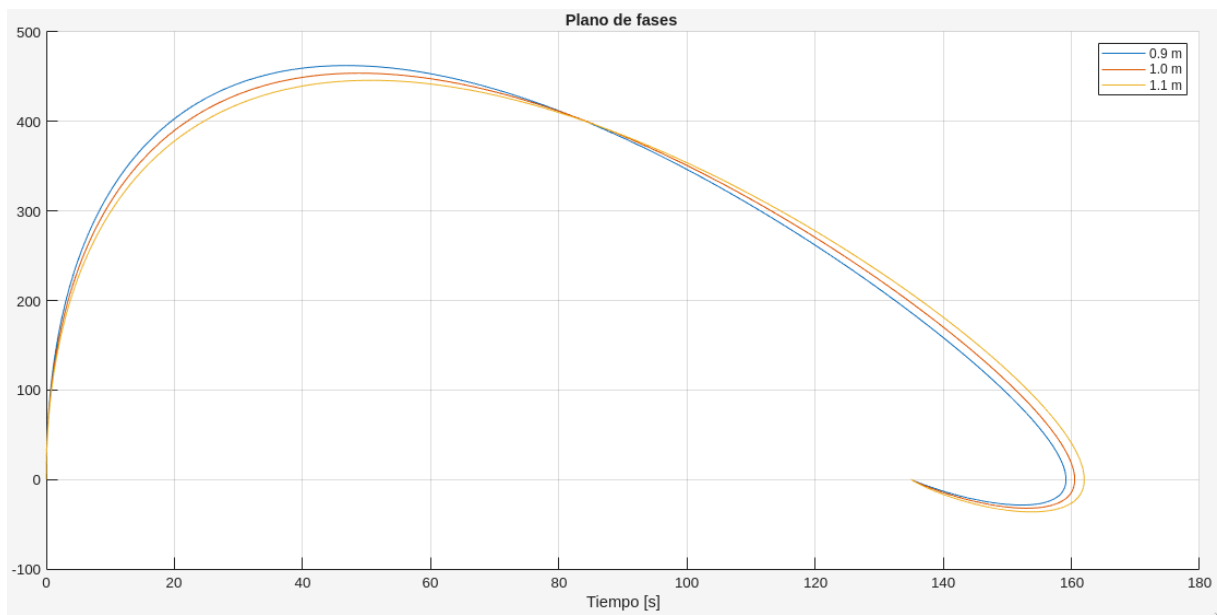


Figura 6: Plano de fases.

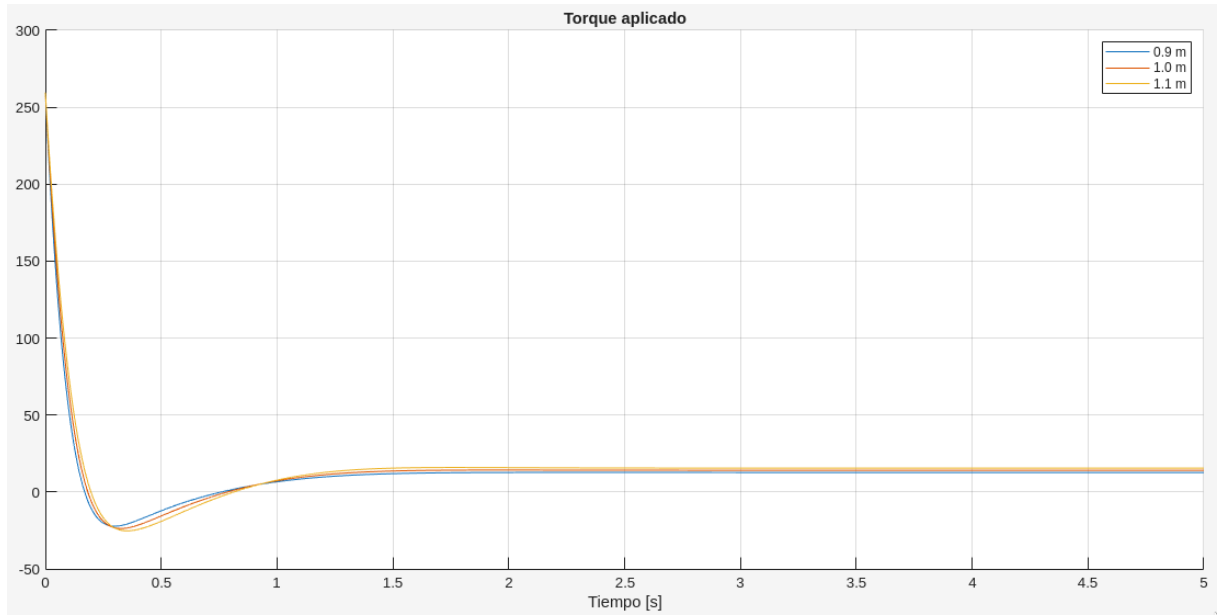


Figura 7: Torque aplicado.

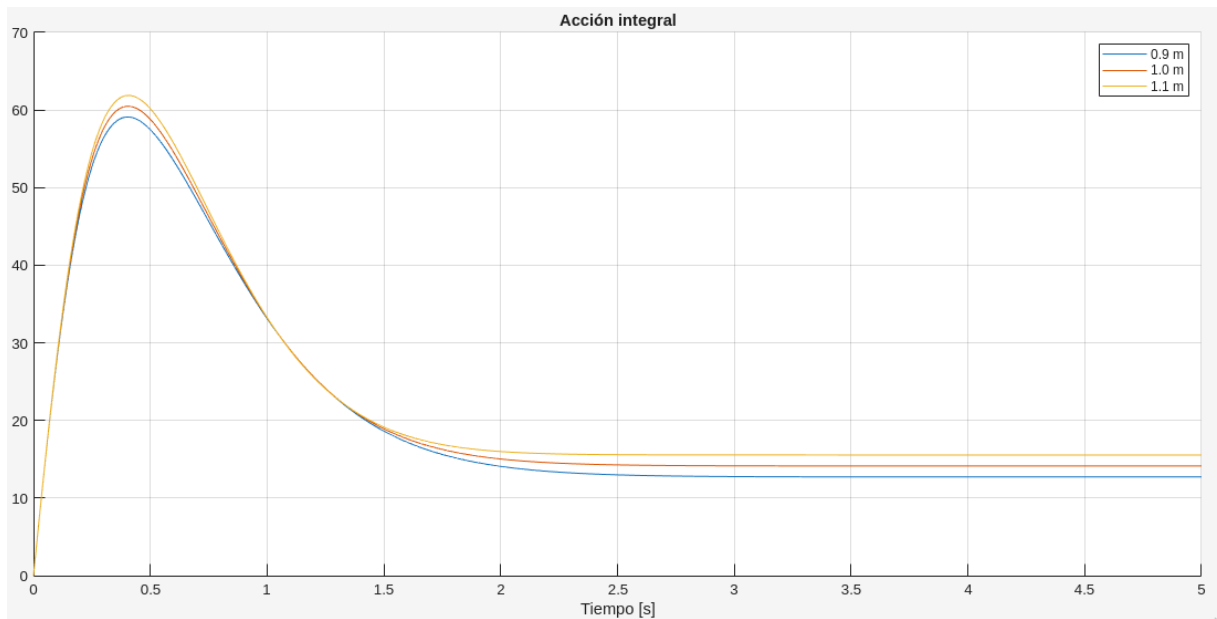


Figura 8: Acción integral.

En conjunto, los resultados muestran que el sistema controlado es robusto frente a variaciones moderadas de masa.

6. Conclusiones

En esta tarea se diseñó y analizó un controlador con acción integral para estabilizar un péndulo simple en un ángulo arbitrario. A partir de la linealización del modelo no lineal, se aplicó asignación de polos sobre el sistema extendido, garantizando estabilidad y seguimiento exacto de la referencia.

Las simulaciones mostraron buen desempeño dinámico: tiempo de establecimiento menor a 2 segundos, sobrepaso moderado ($\approx 19\%$) y error estacionario nulo. La acción integral fue clave

para alcanzar el equilibrio deseado.

Además, se evaluó la robustez ante variaciones del 10 % en la masa, observando un comportamiento estable con cambios leves en la dinámica. Esto confirma que el controlador es robusto frente a perturbaciones en la carga.

En resumen, el controlador cumple con los objetivos de estabilidad, seguimiento y robustez frente a variaciones paramétricas.