DIFFRACTION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PLANE PAR UN OBJET CYLINDRIQUE NON INFINIMENT CONDUCTEUR DE SECTION ARBITRAIRE

D. MAYSTRE et P. VINCENT

Université de Provence, Laboratoire d'Optique Electromagnétique, Centre de St-Jérôme 13 Marseille (13e), France

Recu le 26 avril 1972

A new method to investigate the diffraction of an electromagnetic wave by an infinite cylinder of arbitrary cross section, made with a dielectric or conductor material, is given. This method leads to a Fredholm integral equation. Some computation has already been achieved on the UNIVAC 1106 computer, they are in good agreement with the conservation of energy.

1. Introduction

Le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle diélectrique ou de conductivité finie a été abordé par de nombreux auteurs: la majorité d'entre eux se sont intéressés à des profils de formes géométriques simples et ont utilisé des méthodes analytiques ou variationnelles. Dans le cas où la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des dimensions de l'objet, des méthodes générales ont été proposées pour résoudre ce problème [1–3] ou le problème formellement semblable de la diffraction d'une onde plane par un réseau diélectrique ou conducteur [4–6]; nous proposons une méthode reposant sur la résolution d'une seule équation intégrale de type Fredholm.

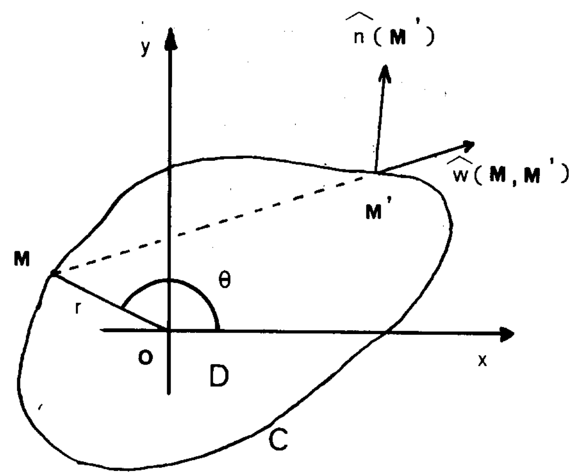

Fig. 1. Notations utilisées.

2. Notations utilisées

Elles sont résumées sur la fig. 1. Les génératrices du cylindre diffractant, de permittivité ϵ et de perméabilité μ_0, sont parallèles à l'axe Oz du vecteur unitaire $\hat{e}_z$. Bien que le formalisme mathématique puisse s'appliquer à un profil quelconque, nous prenons ici une directrice C d'équation $r = f(\theta)$ limitant le domaine D intérieur. On désigne par $\hat{n}(\mathrm{M}')$ le vecteur unitaire de la normale au point M' de C dirigé vers l'extérieur, et on pose $\hat{w}(\mathrm{M},\mathrm{M}') = \overrightarrow{\mathrm{MM}'}/|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|$.

Nous choisissons une dépendance temporelle en $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ et, par souci de simplicité, nous nous limitons au cas de polarisation $\boldsymbol{E} \parallel$ où l'onde incidente $\boldsymbol{E}^\mathrm{i}$ de nombre d'onde k_0 s'écrit:

$$\boldsymbol{E}^\mathrm{i} = \hat{e}_z E^\mathrm{i} = \hat{e}_z \exp(\mathrm{i}k_0 x). \tag{1}$$

On montre alors que le champ électrique total $\boldsymbol{E}(\mathrm{P})$ reste parallèle à Oz [7], le problème est donc de déterminer la fonction $E(\mathrm{P}) = \boldsymbol{E}(\mathrm{P}) \cdot \hat{e}_z$.

Cette fonction est définie par les conditions (2), (3) et (4) traduisant respectivement:

- les équations de Maxwell:

$$\Delta E(\mathrm{P}) + k_0^2 E(\mathrm{P}) = 0, \quad \mathrm{P} \notin D,$$
$$\Delta E(\mathrm{P}) + k^2 E(\mathrm{P}) = 0, \quad \mathrm{P} \in D, \tag{2}$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien et $k^2 = \epsilon k_0^2$,

- la continuité de E et de sa dérivée normale $\mathrm{d}E/\mathrm{d}n$, (3)
- une condition d'ondes sortantes pour le champ diffracté $E^{\mathrm{d}} = E - E^{\mathrm{i}}$. (4)

3. Mise en équation

3.1. *Choix d'une fonction inconnue*

Soit la fonction $u(\mathrm{P})$ définie en tout point par:

$$u(\mathrm{P}) = E^{\mathrm{d}}(\mathrm{P}) \text{ si } \mathrm{P} \notin \mathrm{D}, \tag{5}$$

$u(\mathrm{P})$ est partout continue, (6)

$$\Delta u(\mathrm{P}) + k_0^2 u(\mathrm{P}) = 0 \text{ si } \mathrm{P} \in \mathrm{D}. \tag{7}$$

Si l'on admet l'unicité du champ diffracté E^{d} et l'unicité de la solution au problème intérieur de D ‡, la fonction u est unique.

La fonction $u(\mathrm{P})$ est par définition continue à la traversée de C, mais rien ne nous permet d'affirmer que sa dérivée normale jouit de la même propriété, et nous choisissons comme inconnue du problème la fonction $\phi(\mathrm{M})$ définie sur C et égale au saut de la dérivée normale $\mathrm{d}u/\mathrm{d}n$ de $u(\mathrm{P})$ lors du franchissement de C dans le sens de la normale $\boldsymbol{n}(\mathrm{M})$.

On peut poser:

$$\phi(\mathrm{M}) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)_{\mathrm{ext}} - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)_{\mathrm{int}}, \tag{8}$$

avec (fig. 2):

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)_{\mathrm{ext}} = \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{M}} [\hat{\boldsymbol{n}}(\mathrm{M}) \cdot \boldsymbol{\nabla}(u(\mathrm{P}))], \quad \mathrm{P} \notin \mathrm{D},$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)_{\mathrm{int}} = \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{M}} [\hat{\boldsymbol{n}}(\mathrm{M}) \cdot \boldsymbol{\nabla}(u(\mathrm{P}))], \quad \mathrm{P} \in \mathrm{D}, \tag{9}$$

P est un point de Γ.

‡ Cette dernière peut ne pas être assurée dans le cas où $\nu = (1/2\pi)\, c\, k_0$ est une fréquence propre de D.

3.2. *Expression en fonction de ϕ du champ sur C ainsi que de sa dérivée normale*

D'après (6) et (8), on peut écrire au sens des distributions sur l'espace des fonctions de $\mathcal{D}$ à deux variables, indéfinement dérivables et à support borné [8]:

$$\Delta u + k_0^2 u = \phi \delta_C, \tag{10}$$

$\phi\, \delta_C$ étant la distribution définie par:

$$\langle \phi\, \delta_C, \psi \rangle = \int_C \psi(\mathrm{M})\, \phi(\mathrm{M})\, \mathrm{d}s,$$

où s désigne l'abscisse curviligne et ψ une fonction de $\mathcal{D}$.

Soit $G_0(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ la fonction de Green vérifiant une condition d'ondes sortantes à l'infini et l'équation suivante:

$$\Delta G_0(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) + k_0^2\, G_0(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \delta, \tag{11}$$

où δ désigne la distribution de Dirac.

On sait que:

$$G_0(\overrightarrow{\mathrm{OM}}) = -\tfrac{1}{4}\mathrm{i} H_0^+ (k_0 |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|). \tag{12}$$

D'après (10) et (11) et compte tenu des propriétés élémentaires du produit de convolution:

$$u(\mathrm{P}) = G_0 * \phi\, \delta_C = \int_C G_0(\mathrm{P},\mathrm{M}')\, \phi(\mathrm{M}')\, \mathrm{d}s', \tag{13}$$

où M′ est un point courant de C d'abscisse curviligne s' et $G_0(\mathrm{P},\mathrm{M}') = G_0(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}')$.

$u(\mathrm{P})$ ets une fonction continue qui, sur C, est égale au champ diffracté donc:

$$E(\mathrm{M}) = E^{\mathrm{i}}(\mathrm{M}) + \int_C G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\, \phi(\mathrm{M}')\, \mathrm{d}s'. \tag{14}$$

Le calcul de la dérivée normale du champ diffracté sur C, égal à $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}n)_{\mathrm{ext}}$, peut être fait à partir de (9) en

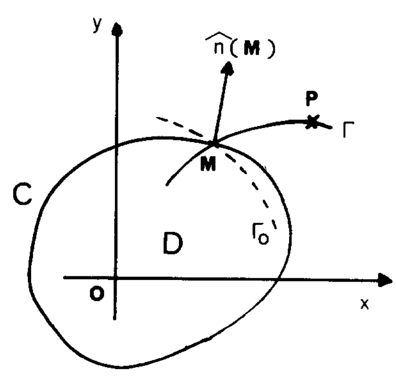

Fig. 2.

remarquant que si, par exemple, Γ est un cercle Γ_0 centré à l'origine (fig. 2), l'expression $\hat{n}(\mathrm{M})\cdot\nabla(u(\mathrm{P}))$ est une fonction périodique de $\theta(\mathrm{P})$ représentable par une série de Fourier discontinue pour $\theta(\mathrm{P}) = \theta(\mathrm{M})$, donc:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)_{\mathrm{ext}} + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)_{\mathrm{int}}\right] = \hat{n}(\mathrm{M})\cdot\nabla(u(\mathrm{M})). \tag{9'}$$

D'après (8) et (9'):

$$\frac{\mathrm{d}E(\mathrm{M})}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}E^{\mathrm{i}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}n} + \tfrac{1}{2}\phi(\mathrm{M}) + \int_C \frac{\mathrm{d}G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}}}\,\phi(\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s', \tag{15}$$

où $\mathrm{d}/\mathrm{d}n_{\mathrm{M}}$ signifie que la dérivation est faite par rapport à M.

3.3. *Equation intégrale*

Connaissant la fonction ϕ, nous pouvons d'après (14) et (15) déterminer le champ et sa dérivée normale sur C. Comme nous allons le montrer, la présence de l'obstacle diffractant impose une relation entre ces deux grandeurs. Pour cela, nous introduisons une fonction $v(\mathrm{P})$ définie partout par:

$$v(\mathrm{P}) = E(\mathrm{P}) \text{ si } \mathrm{P} \in \mathrm{D}, \qquad = 0 \quad \text{si } \mathrm{P} \notin \mathrm{D}, \tag{16}$$

et au sens des distributions:

$$\Delta v + k^2 v = -(\mathrm{d}E/\mathrm{d}n)\,\delta_C - \nabla\cdot(\boldsymbol{n}E\delta_C).$$

En introduisant la fonction $G(\mathrm{P},\mathrm{M}')$ déduite de $G_0(\mathrm{P},\mathrm{M}')$ par substitution de k à k_0, il vient:

$$v(\mathrm{P}) = \int_C \left(\frac{\mathrm{d}G(\mathrm{P},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}'}} E(\mathrm{M}') - G(\mathrm{P},\mathrm{M}')\,\frac{\mathrm{d}E(\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}s'.$$

Par le raisonnement déjà utilisé pour obtenir (9'), on obtient la relation cherchée:

$$\tfrac{1}{2}E(\mathrm{M}) = \int_C \left(\frac{\mathrm{d}G(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}'}} E(\mathrm{M}') - G(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\frac{\mathrm{d}E(M')}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}s'. \tag{17}$$

En reportant dans (17) les expressions de E et $\mathrm{d}E/\mathrm{d}n$ données par (14) et (15), on obtient une équation intégrale de Fredholm de première espèce:

$$\phi_0(\mathrm{M}) = \int_C N(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\phi(\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s', \tag{18}$$

où:

$$\phi_0(\mathrm{M}) = E^{\mathrm{i}}(\mathrm{M}) + 2\int_C \left(G(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\frac{\mathrm{d}E^{\mathrm{i}}(\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n} - \frac{\mathrm{d}G(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}'}}\,E^{\mathrm{i}}(\mathrm{M}')\right)\mathrm{d}s', \tag{19}$$

$$N(\mathrm{M},\mathrm{M}') = -G(\mathrm{M},\mathrm{M}') - G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}') + 2\int_C \left(\frac{\mathrm{d}G(\mathrm{M},\mathrm{M}'')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}''}} G_0(\mathrm{M}'',\mathrm{M}') - G(\mathrm{M},\mathrm{M}'')\,\frac{\mathrm{d}G_0(\mathrm{M}'',\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}''}}\right)\mathrm{d}s''. \tag{20}$$

Ainsi que nous le verrons par la suite, les intégrales figurant dans (19) et (20) existent toujours, et après avoir résolu (18), le champ diffracté à l'extérieur de D est donné par (13).

4. Traitement numérique

Le lecteur vérifiera (fig. 1) que les deux expressions:

$$\frac{\mathrm{d}G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}}} = \tfrac{1}{4}\mathrm{i}k_0\;\hat{n}(\mathrm{M})\cdot\hat{w}(\mathrm{M}',\mathrm{M})\,H_1^{+}(k_0|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|),$$

$$\frac{\mathrm{d}G(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}'}} = \tfrac{1}{4}\mathrm{i}k\;\hat{n}(\mathrm{M}')\cdot\hat{w}(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,H_1^{+}(k|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}|),$$

restent finies quand M' tend vers M car:

$$\lim_{\mathrm{M}'\to\mathrm{M}} \frac{\mathrm{d}G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}}} = \lim_{\mathrm{M}'\to\mathrm{M}} \frac{\mathrm{d}G(\mathrm{M},\mathrm{M}')}{\mathrm{d}n_{\mathrm{M}'}} = \frac{1}{4\pi R_{\mathrm{c}}},$$

où R_{c}, égal au rayon de courbure algébrique, est positif si la concavité de C est tournée vers l'intérieur de D et négatif dans le cas contraire.

Comme, par contre, $G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')$ et $G(\mathrm{M},\mathrm{M}')$ ne sont pas bornés, le calcul des intégrales du type $\int_C G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\xi(\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s'$ qui apparaissent dans (19) et (20) pose un problème numérique. Nous l'avons résolu en écrivant:

$$\int_C G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\xi(\mathrm{M}')\mathrm{d}s' = \int_C \left[G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\xi(\mathrm{M}') - S_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\xi(\mathrm{M})\right]\mathrm{d}s' + \xi(\mathrm{M})\int_C S_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s', \tag{21}$$

où

$$S_0(\mathrm{M},\mathrm{M}') = (1/2\pi)\{\log\left[|\theta(\mathrm{M}) - \theta(\mathrm{M}')|\right] + \log\left[2\pi - |\theta(\mathrm{M}) - \theta(\mathrm{M}')|\right]\}.$$

Cette méthode nous a paru judicieuse car:
- l'intégrale $\int_C S_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\mathrm{d}s'$ est analytique et sa valeur ne dépend pas de M,
- l'expression $[G_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\xi(\mathrm{M}') - S_0(\mathrm{M},\mathrm{M}')\,\xi(\mathrm{M})]$ restant finie, il est possible d'utiliser une méthode de discrétisation (représentation de la fonction ϕ par sa valeur en N_p points de C) pour effectuer la première intégrale qui figure au second membre de (21).

On sait que si $r > \sup\,(f(\theta))$, le champ diffracté se met sous la forme d'un développement en fonction de Hankel:

$$E^\mathrm{d} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m^+(k_0|\vec{\mathrm{OM}}|)\exp\,[\mathrm{i}m\,\theta(\mathrm{M})]$$

et que les coefficients A_m se déduisent aisément de la fonction ϕ [9].

Le calcul a été effectué pour des cylindres circulaires ou elliptiques de permittivité relative égale à 2 et dont les dimensions étaient de l'ordre de quelques longueurs d'ondes. En prenant six points de discrétisation par longueur d'onde, le critère d'énergie [9] est vérifié à mieux que le centième et le temps de calcul reste de l'ordre de grandeur de quelques secondes; d'autre part, les résultats sont en très bon accord avec les calculs effectués parallèlement en utilisant une méthode différentielle [3].

5. Conclusion

Ce formalisme qui présente l'intérêt de conduire à la résolution d'*une seule* équation se transpose aisément au problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau. Il s'applique théoriquement non seulement aux obstacles diélectriques mais aussi aux obstacles conducteurs. Les difficultés numériques qui apparaissent alors et qui sont liées à la présence de fonctions de Hankel de la variable complexe sont actuellement étudiées dans notre laboratoire sur le cas des réseaux de conductivité finie dont il est souhaitable de connaître les propriétés énergétiques pour aborder certains problèmes de spectroscopie dans l'ultra-violet.

Remerciément

Nous remercions Messieurs les Professeurs R. Petit et M. Cadilhac dont les conseils ont facilité la réalisation de ce travail suggéré par Monsieur R. Petit.

Références

[1] J.H. Richmond, I.E.E.E. Trans. Ant. Prop. Ap 13 (1965) 334.
[2] P.C. Waterman, MITRE Technical Report, n° 84 (1968).
[3] P. Vincent et R. Petit, en préparation.
[4] A.R. Neureuther et K. Zaki, Alta Frequenza 38 (1969) 282.
[5] G. Cerutti-Maori, R. Petit et M. Cadilhac, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 268 B (1969) 1060.
[6] P.M. van den Berg, Appl. Sci. Res. 24 (1971) 261.
[7] R. Petit, Rev. Opt. 6 (1966) 249, 353.
[8] L. Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques (Hermann, Paris, 1965).
[9] J.Ch. Bolomey, Thèse, Orsay, n° C.N.R.S. A.O. 5604 (1971).