Cinemática de Robots

Cinemática de Robots

- La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia.
- La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.
- Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot; el primero de ellos se conoce como el problema cinemático directo y el segundo como problema cinemático inverso.

Cinemática de Robots

- El problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.
- El problema cinemático inverso, resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas.

Cinemática de Robots

- Denavit y Hartenberg propusieron un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de los elementos de una cadena cinemática, y en particular de un robot, con respecto a un sistema de referencia fijo.

- Este método utiliza una matriz de transformación homogénea para describir la relación espacial entre dos elementos rígidos adyacentes, reduciéndose así el problema cinemático a encontrar una matriz de transformación homogénea de 4x4 que relacione la localización espacial del extremo del robot con respecto al sistema de coordenadas de su base.

Cadenas Cinemáticas

- Dado que un robot se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia.

- De esta forma, el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz homogénea de transformación **T** que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto del sistema fijo situado en la base del mismo. Esta matriz **T** será función de las coordenadas articulares.

Cadenas Cinemáticas

- La resolución del problema cinemático directo consiste en encontrar las relaciones que permiten conocer la localización espacial del extremo del robot a partir de los valores de sus coordenadas articulares.

- Así, si se han escogido coordenadas cartesianas y ángulos de Euler para representar la posición y orientación del extremo de un robot de seis grados de libertad, la solución al problema Cinemático directo vendrá dada por las relaciones:

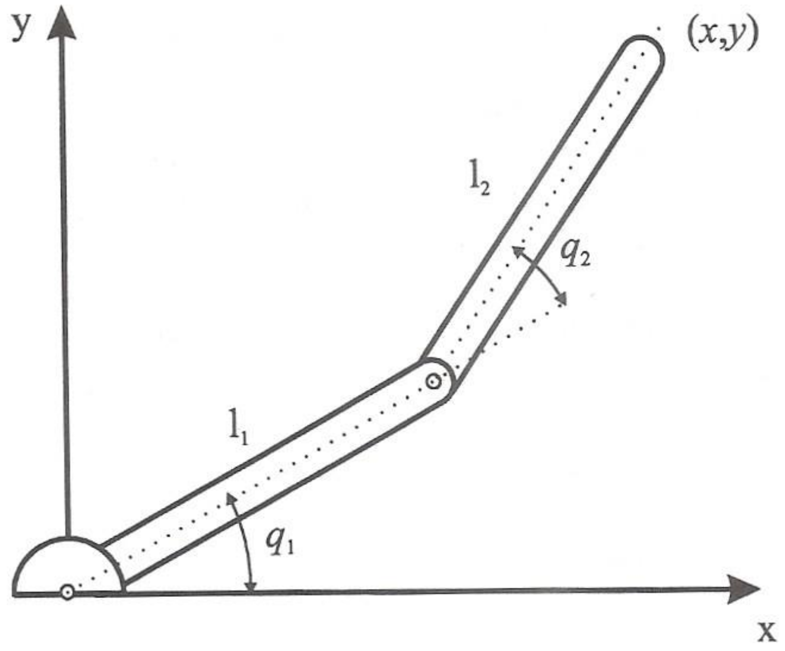
Relaciones Espaciales

- $x = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$
- $y = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$
- $z = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$
- $\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$
- $\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$
- $\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$

•La obtención de estas relaciones no es en general complicada, siendo incluso en ciertos casos (robots de pocos GDL) fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

Relaciones Espaciales

- Por ejemplo para un robot de 2 GDL que se muestra en la figura, es fácil comprobar que:
  - $x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$
  - $y = l_1 sen q_1 + l_2 sen(q_1 + q_2)$
- Para robots de más grados de libertad puede plantearse un método sistemático basado en la utilización de las matrices de transformación homogénea.



Cadenas Cinemáticas

- En general, un robot de *n* grados de libertad está formado por *n* eslabones unidos por *n* articulaciones, de forma que cada par articulación-eslabón constituye un grado de libertad.

- A cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia solidario a él y utilizando las transformaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el robot.

Matrices de Transformación

- Normalmente, la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot se suele denominar matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$.

- Así pues, ${}^{0}\mathbf{A}_1$ describe la posición y orientación del sistema de referencia solidario al primer eslabón con respecto al sistema de referencia solidario a la base, ${}^{1}\mathbf{A}_2$ describe la posición y orientación del segundo eslabón respecto del primero, etc.

Matrices de Transformación

- Del mismo modo, denominando a las matrices resultantes del producto de las matrices $^{i-1}\mathbf{A}_i$ con i desde 1 hasta *k*, se puede representar de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el robot.

- Así, por ejemplo, la posición y orientación del sistema solidario con el segundo eslabón del robot con respecto al sistema de coordenadas de la base se puede expresar mediante la matriz $^{0}\mathbf{A}_2$:

  - $^{0}\mathbf{A}_2 = {}^{0}\mathbf{A}_1 \, {}^{1}\mathbf{A}_2$

Matrices de Transformación

- De manera análoga, la matriz representa la localización del sistema del tercer eslabón:

$$^{0}\mathbf{A}_3 = {}^{0}\mathbf{A}_1\, {}^{1}\mathbf{A}_2\, {}^{2}\mathbf{A}_3$$

- Cuando se consideran todos los grados de libertad a la matriz $^{0}\mathbf{A}_n$ se le suele denominar **T**. Así, dado un robot de seis grados de libertad, se tiene que la posición y orientación del eslabón final vendrá dada por la matriz **T**:

$$\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_6 = {}^{0}\mathbf{A}_1\, {}^{1}\mathbf{A}_2\, {}^{2}\mathbf{A}_3\, {}^{3}\mathbf{A}_4\, {}^{4}\mathbf{A}_5\, {}^{5}\mathbf{A}_6$$

Método DH

- Aunque para describir la relación que existe entre dos elementos contiguos se puede hacer uso de cualquier sistema de referencia ligado a cada elemento, la forma habitual que se suele utilizar en robótica es la representación de Denavit-Hartenberg.

- Denvit-Hartenbarg en 1955 propusieron un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas $\{S_i\}$ ligado a cada eslabón i de una cadena articulada, pudiéndose determinar a continuación las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Método DH

- Según la representación de D-H, escogiendo adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

- Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento i con el sistema del elemento i-1.

Método DH

- Las transformaciones básicas son las siguientes:

1. Rotación alrededor del eje z_{i-1} un ángulo $\theta_{i.}$

2. Traslación a lo largo de z_{i-1} una distancia d_i; vector

- $\mathbf{d}_i(0,0,d_i)$.

3. Traslación a lo largo de x_i una distancia a_i; vector $\mathbf{a}_i(a_i, 0,0)$.

4. Rotación alrededor del eje x_i un ángulo α_i.

Método DH

- Dado que el producto no es conmutativo las transformaciones se han de realizar en el orden indicado. De este modo se tiene que:

$$^{i-1}\mathbf{A}_i = Rot(z,\theta_i)\ Tras(0,0,di)\ Tras(a_i,0,0)\ Rot(x,\alpha_i)$$

- y realizado el producto entre matrices:

$$^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -sen\theta_i & 0 & 0 \\ sen\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -sen\alpha_i & 0 \\ 0 & sen\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método DH

$$
{}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i sen\theta_i & sen\alpha_i sen\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ sen\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -sen\alpha_i\cos\theta_i & a_i sen\theta_i \\ 0 & sen\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

donde θ_i, a_i, d_i, α_i, son los parámetros D-H del eslabón i. De este modo, basta con identificar los parámetros θ_i, a_i, d_i, α_i para obtener las matrices A y relacionar así todos y cada uno de los eslabones del robot.

Método DH

- **D-H 1.** Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

- **D-H 2.** Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.

- **D-H 3.** Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

Método DH

- **D.H 4.** Situar el origen del sistema en la base $\{S_0\}$ en cualquier punto del eje z_0. Los ejes x_0 y y_0 se situarán de modo que formen un sistema de dextrógiro con z_0.

- **D.H 5.** Para i de 1 a n-1, situar el sistema $\{S_i\}$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i. Si ambos ejes se cortasen se situaría $\{S_i\}$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos $\{S_i\}$ se situaría en la articulación i+1.

- **D-H 6.** Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i o en la dirección normal a los planos z_{i-1}-z_i si z_{i-1} y z_i se intersectan.

Método DH

- **D-H 7.** Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i.

- **D-H 8.** Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n.

- **D-H 9.** Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.

Método DH

- **D.H 10.** Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1}, que habría que desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} queden alineados.

- **D.H 11.** Obtener a_i como la distancia medida a lo largo x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habrá que desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.

- **D.H 12.** Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}), para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.

Método DH

- **D.H. 13.** Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$.

- **D.H. 14.** Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1, {}^{1}\mathbf{A}_2, .. {}^{n-1}\mathbf{A}_n$.

- **D.H 15.** La matriz **T** define la orientación y posición del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.

Método DH

- Los cuatro parámetros de D-H (θ_i, a_i, d_i, α_i) dependen únicamente de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y el siguiente. Estos parámetros se muestran en la siguiente figura y representan:

- θ_i es el ángulo que forman los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular al eje z_{i-1}, utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

Método DH

- d_i es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i. Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

- a_i es la distancia a lo largo del eje x_i que va desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje xi hasta el origen del sistema i-ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i.

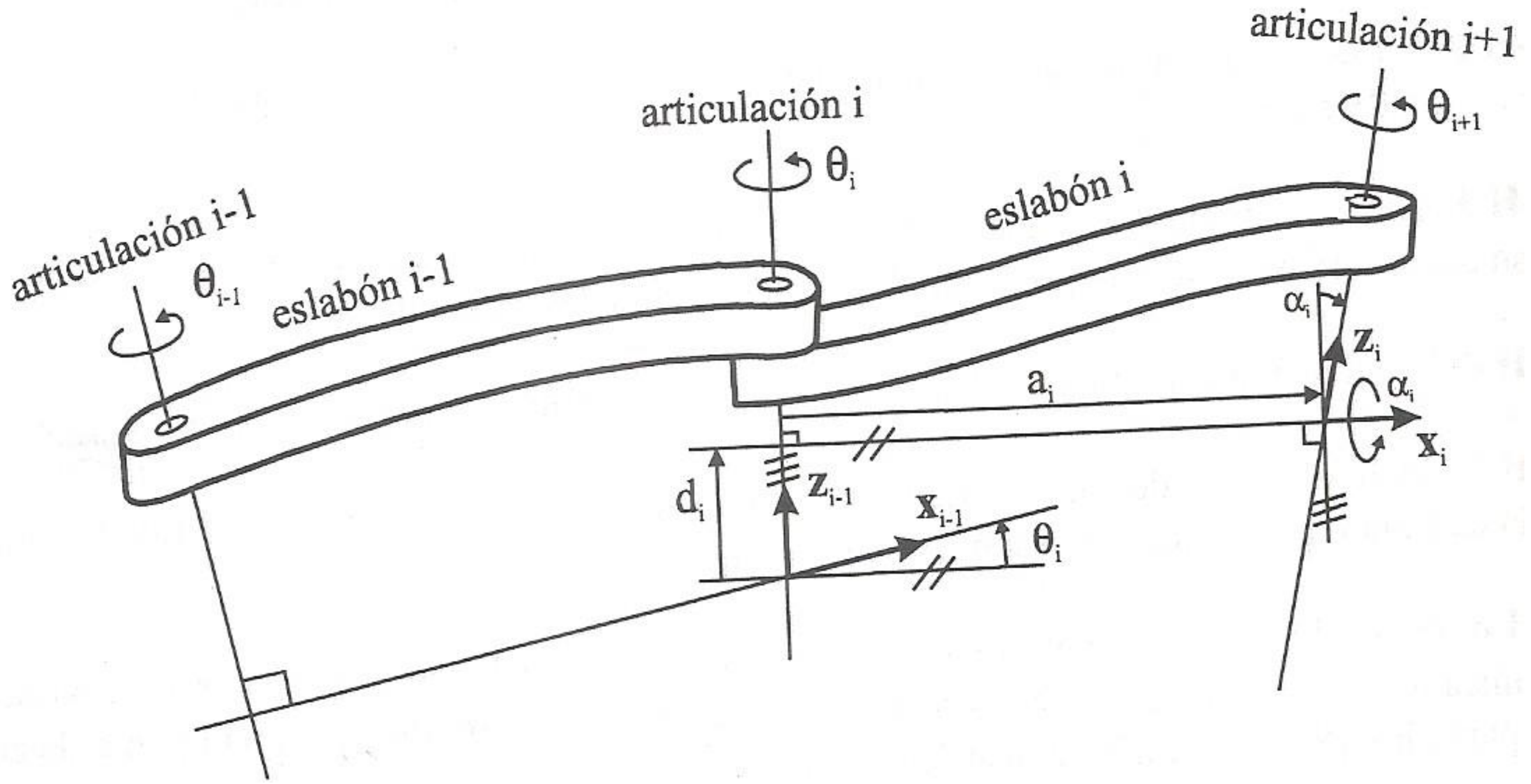
Método DH

- α_i es el ángulo de separación del eje z_{i-1} y el eje z_i, medido en un plano perpendicular al eje x_i, utilizando la regla de la mano derecha.

- Una vez obtenidos los parámetros D-H, el cálculo de las relaciones entre los eslabones consecutivos del robot es inmediato.

- Obtenida la matriz T, ésta expresará la orientación y posición del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, con lo que quedará resuelto el problema cinemático directo.

Método DH


articulación i+1
θ_{i+1}
articulación i
θ_i
eslabón i
articulación i-1
θ_{i-1}
eslabón i-1
α_i
z_i
a_i
α_i
x_i
d_i
z_{i-1}
x_{i-1}
θ_i