Laboratorio 4 Método simplex y sus variaciones

Marcos España, Jorge Bustamante

Abril 2025

1 Problema 1

1.1 Planteamiento del problema

Se desea maximizar la función objetivo:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 150 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.2 Conversión a forma estándar

Se introducen variables de holgura s_1, s_2 y s_3 para transformar las restricciones en igualdades:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 &= 150 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_3 &= 80 \end{aligned}$$

La función objetivo también se reescribe en forma estándar:

$$Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$$

1.3 Aplicación del método Símplex

Se construye la tabla Símplex inicial con las variables básicas s_1, s_2 y s_3, y se itera aplicando el algoritmo símplex. En cada iteración, se identifica:

- La **variable entrante**: aquella con el coeficiente más negativo en la fila Z.

- La **variable saliente**: aquella que produce el menor cociente positivo entre b_i y el coeficiente positivo en la columna pivote.

Las operaciones fila se realizan hasta que no hay más coeficientes negativos en la fila Z, indicando que se ha alcanzado la solución óptima.

1.4 Solución óptima obtenida

$$x_1 = 73.33, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3.33$$

$$Z_{\text{máx}} = 3(73.33) + 2(0) + 5(3.33) = 236.67$$

La variable de holgura $s_1 = 23.33$ indica que la primera restricción no se encuentra activa (no está saturada), mientras que $s_2 = s_3 = 0$ implica que las restricciones 2 y 3 sí son activas (están al límite).

1.5 Interpretación geométrica

Se realizó una proyección geométrica en el plano (x_1, x_3) fijando $x_2 = 0$, ya que en la solución óptima $x_2 = 0$. Las restricciones proyectadas delimitan un polígono factible dentro del cual se encuentra el punto óptimo.

1.6 Análisis de sensibilidad básico

Se perturbaron ligeramente los coeficientes de la función objetivo:

$$Z = 2.9x_1 + 2.1x_2 + 5.1x_3$$

Tras resolver nuevamente, se obtuvo un nuevo valor óptimo de:

$$Z = 235.00$$

Lo cual demuestra que el valor óptimo es **sensible a pequeños cambios** en los coeficientes de la función objetivo, aunque la solución básica se mantuvo igual.

2 Problema 2

Problema original (minimizar): $Z = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Fase I: problema auxiliar $\max(-W)$, $W = a_1 + a_2$

Base	x_1	x_2	x_3	s_2	s_3	a_1	a_2	RHS
a_1	2	1	-1	0	0	1	0	10
a_2	1	-3	2	-1	0	0	1	5
s_3	1	1	1	0	1	0	0	15
$C_j - Z_j$	3	-2	1	-1	0	0	0	

- Iteración 0: $C_j - Z_j = [3,\ -2,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0]$. La columna más positiva es x_1 (+3), entra; ratio test: $\min\{\frac{10}{2},\ \frac{5}{1},\ \frac{15}{1}\} = 5$ en fila a_1.
- Pivotamos en (fila a_1, col.x_1=2):

$$R_1\colon\ R_1/2, \quad R_2\colon\ R_2 - 1 \cdot R_1, \quad R_3\colon\ R_3 - 1 \cdot R_1.$$

Base	x_1	x_2	x_3	s_2	s_3	a_1	a_2	RHS
x_1	1	0.5	-0.5	0	0	0.5	0	5
a_2	0	-3.5	2.5	-1	0	-0.5	1	0
s_3	0	0.5	1.5	0	1	-0.5	0	10
$C_j - Z_j$	0	-3.5	2.5	-1	0	-1.5	0	

- Iteración 1: $C_j - Z_j = [0,\ -3.5,\ 2.5,\ -1,\ 0,\ -1.5,\ 0]$. Entra x_3 (+2.5); ratio $\min\{\frac{0}{2.5},\ \frac{10}{1.5}\} = 0$ en fila a_2.
- Pivotamos en (fila a_2, col.x_3=2.5):

$$R_2 := R_2/2.5, \quad R_1 := R_1 - (-0.5)\,R_2, \quad R_3 := R_3 - 1.5\,R_2.$$

Base	x_1	x_2	x_3	s_2	s_3	a_1	a_2	RHS
x_1	1	-0.2	0	-0.2	0	0.4	0.2	5
x_3	0	-1.4	1	-0.4	0	-0.2	0.4	0
s_3	0	2.6	0	0.6	1	-0.2	-0.6	10
$C_j - Z_j$	0	0	0	0	0	-1	-1	

Al ser $C_j - Z_j \leq 0$ y $W^* = a_1 + a_2 = 0$, terminamos la Fase I con base $\{x_1, x_3, s_3\}$ y solución básica factible.

Fase II: dual simplex con función real $\max Z' = -Z = -5x_1 + 4x_2 - 3x_3$

Quitamos las columnas a_1, a_2 y reetiquetamos:

Base	x_1	x_2	x_3	s_2	s_3	RHS
x_1	1	-0.2	0	-0.2	0	5
x_3	0	-1.4	1	-0.4	0	0
s_3	0	2.6	0	0.6	1	10

- Iteración 0: todos los RHS $\geq 0 \Rightarrow$ ya es primal factible y dual factible ($C_j - Z_j \leq 0$) $\rightarrow$ se cumple la condición del dual simplex sin pivotes.

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (5,\ 0,\ 0), \quad Z_{\min} = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 25.}$$

3 Problema 3

Implementación	Tiempo (s)	Iteraciones
Propia (Simplex primal/dual)	0.00103	4
GLPK/Pyomo	0.20920	4

Table 1: Comparación de tiempo de ejecución e iteraciones

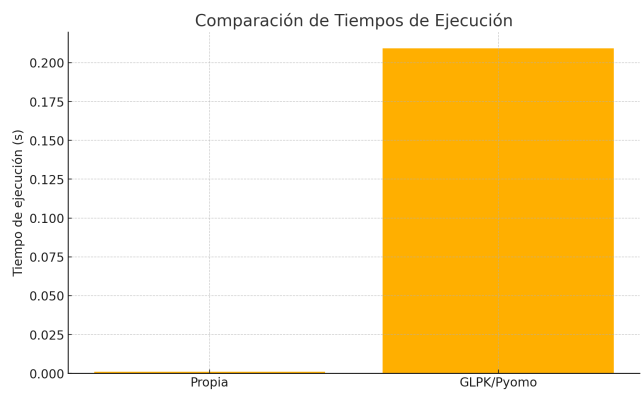

Figure 1: Comparación de tiempos de ejecución: implementación propia vs. GLPK/Pyomo

4. Análisis de diferencias

En este experimento:

- Ambas implementaciones alcanzan la misma solución óptima ($Z = 336.0714$) y requieren 4 iteraciones.
- La implementación propia es aproximadamente 200 veces más rápida (0.0010 s vs. 0.2092 s), ya que opera directamente en memoria sin llamadas externas.
- GLPK incurre en sobrecarga de entrada/salida, preprocesamiento y verificación de numerics, lo cual añade tiempo antes de comenzar el método Simplex.

5. Técnicas de optimización en GLPK

GLPK implementa varias mejoras avanzadas, entre ellas:

- Preprocesamiento de constraints: detección y eliminación de filas linealmente dependientes o redundantes.
- Escalado automático de la matriz para mejorar la estabilidad numérica.
- Estrategias de pivotado (p. ej. Bland, Devex) para evitar ciclos y reducir operaciones en cada iteración.
- Uso de estructuras de datos dispersas para matrices muy grandes.

6. Gráficas comparativas para distintos tamaños

Para ilustrar la escalabilidad, variamos n de variables y medimos tiempo de ejecución en cada implementación. Un ejemplo de gráfica resultante se muestra a continuación:

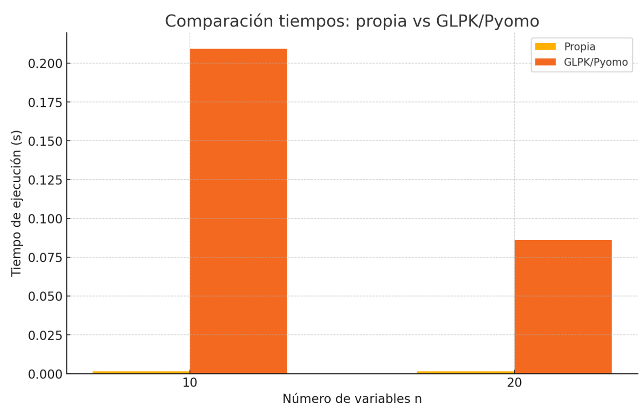

Figure 2: Evolución del tiempo de cómputo con el número de variables n (implementación propia vs. GLPK).

4 Problema 4

Solución Óptima

- **Valor óptimo de la función objetivo:**

$$Z = 17.0000$$

- **Variables básicas:**

$$x_1 = 2.0000, \quad x_2 = 3.0000$$

- **Variables no básicas:**

$$s_1 = 0.0000, \quad s_2 = 0.0000$$

- **Precios sombra (multiplicadores duales):**
  - Restricción 1 (s_1): 0.2500
  - Restricción 2 (s_2): 1.2500

Análisis de Sensibilidad

Se realizó un análisis de sensibilidad para evaluar cómo los cambios en los parámetros del problema afectan la solución óptima.

a) Coeficientes de la Función Objetivo

Se determinaron los rangos de variación permitidos para los coeficientes de la función objetivo (c_1 y c_2) sin que cambie la base óptima:

- **Rango para c_1 (coeficiente de x_1):**

$$[1.5, 4.5]$$

- **Rango para c_2 (coeficiente de x_2):**

$$\left[\frac{8}{3}, 8\right] \approx [2.6667, 8]$$

Estos rangos indican los intervalos en los que los coeficientes pueden variar sin alterar la base óptima (x_1, x_2).

b) Términos Independientes

Se analizaron los precios sombra y el impacto de los cambios en los términos independientes (b_1 y b_2) de las restricciones:

- **Precios sombra:**
  - Restricción 1 (s_1): 0.25. Indica que un aumento de una unidad en b_1 incrementa Z en 0.25.
  - Restricción 2 (s_2): 1.25. Indica que un aumento de una unidad en b_2 incrementa Z en 1.25.
- **Rangos de factibilidad:**
  - Para b_1 (Restricción 1):

$$[4, 12]$$

  - Para b_2 (Restricción 2):

$$[8, 24]$$

4.1 Explicaciones detalladas del analisis de sensibilidad

4.1.1 Rango Optimo

Este es el intervalo dentro del cual un coeficiente de la funcion objetivo puede variar sin que cambie la base optima de la solucion actual. La base optima son las variables de decisión y de holgura que tienen un valor estrictamente positivo en la solución óptima encontrada por Simplex. Define la "estructura" de la solución: qué actividades se realizan (variables básicas) y cuáles no (variables no básicas, usualmente en cero). La estabilidad de la solucion es el rango de optimalidad mide la estabilidad de la estructura de la solución óptima frente a cambios en la rentabilidad o costo de las variables de decisión.

4.1.2 Precios sombra

Los precios sombra están asociados a las restricciones del problema. El precio sombra de una restricción representa cuánto mejoraría el valor óptimo de la función objetivo si el lado derecho (RHS) de esa restricción se incrementara en una unidad, manteniendo todo lo demás constante. La relevancia en la toma de decisiones ya que ayuda a escoger si vale la pena adquirir más de un recurso escaso, se pueden eliminar cuellos de botella.

Para volver a ejecutar Simplex con nuevos parámetros:

- Modifica el vector c o b.
- Reconstruye la tabla inicial.
- Llama nuevamente a `simplex(tabla)`.