Crecimiento Exponencial

Ramiro Bustamante - Jorge Cortés

08-04-2022

Introducción

Ya, Robert Malthus en el siglo XIX se dio cuenta del principio de crecimiento exponencial. Esto significa que si se dan condiciones de recurso y espacio no limitante la población va a crecer indefinidamente. Este tipo de crecimiento ha sido sujeto de diversos estudios teóricos y se han formulado diferentes modelos matemáticos para describirlo. Este es el modelo más simple de crecimiento poblacional y puede ser el punto de partida para comprender cómo se conciben y se construyen los modelos en Ecología.
Como ya vimos en clases, el crecimiento exponencial no se sostiene indefinidamente porque el ambiente es limitante, o sea espacio y recursos se van agotando en la medida que el tamaño de la población aumenta. Para representar este crecimiento con limitaciones, lo ecólogos construyeron el modelo logístico a comienzos del siglo XX y básicamente, es un esfuerzo por representar en una ecuación los efectos negativos de la densidad poblacional sobre la tasa de crecimiento poblacional (efectos densodependientes). Por otro lado, la dinámica de una población es una descripción cuantitativa de los cambios en abundancia a lo largo de un eje temporal. Debido a que los nacimientos de individuos (y por lo tanto la aparición de nuevas generaciones) se producen en forma estacional o anual, considerar el tiempo como una variable discreta resulta bastante útil. Sin embargo, en la medida que los nacimientos y muertes ocurren entre intervalos de tiempo pequeños (poblaciones con sobre-posición de generaciones), el uso del tiempo como variable continua puede ser más adecuado. En esta Actividad, ejercitaremos principalmente los modelos de crecimiento poblacional en tiempo discreto debido a que la simulaciones que se realizan en computador son más fáciles de realizar usando el tiempo como una variable discreta.

Crecimiento Exponencial Discreto

Crecimiento poblacional de Nymphaea odorata a través de los años

1)Vamos a graficar el número de individuos de *Nymphaea odorata* en 5 años (Figura 1); para ello necesitamos cargar los paquetes ggpubr y ggplot2 para graficar (De no tener los paquetes instalados, puede instalarlos con la función install.packages("ggpubr")).

```r
#install.packages("primer")
#install.packages("ggplot2")
#install.packages("ggpubr")
library(primer)
library(ggplot2)
library(ggpubr)


N <- c(1, 3, 9, 27, 81)
year <- 2001:2005
```

Conteo de *N. odorata* en 5 años

```
qplot(year, N,
      xlab = "Año",
      ylab = "N",
      main = "Conteo por año de N. odorata",
      colour=I("Red"))
```

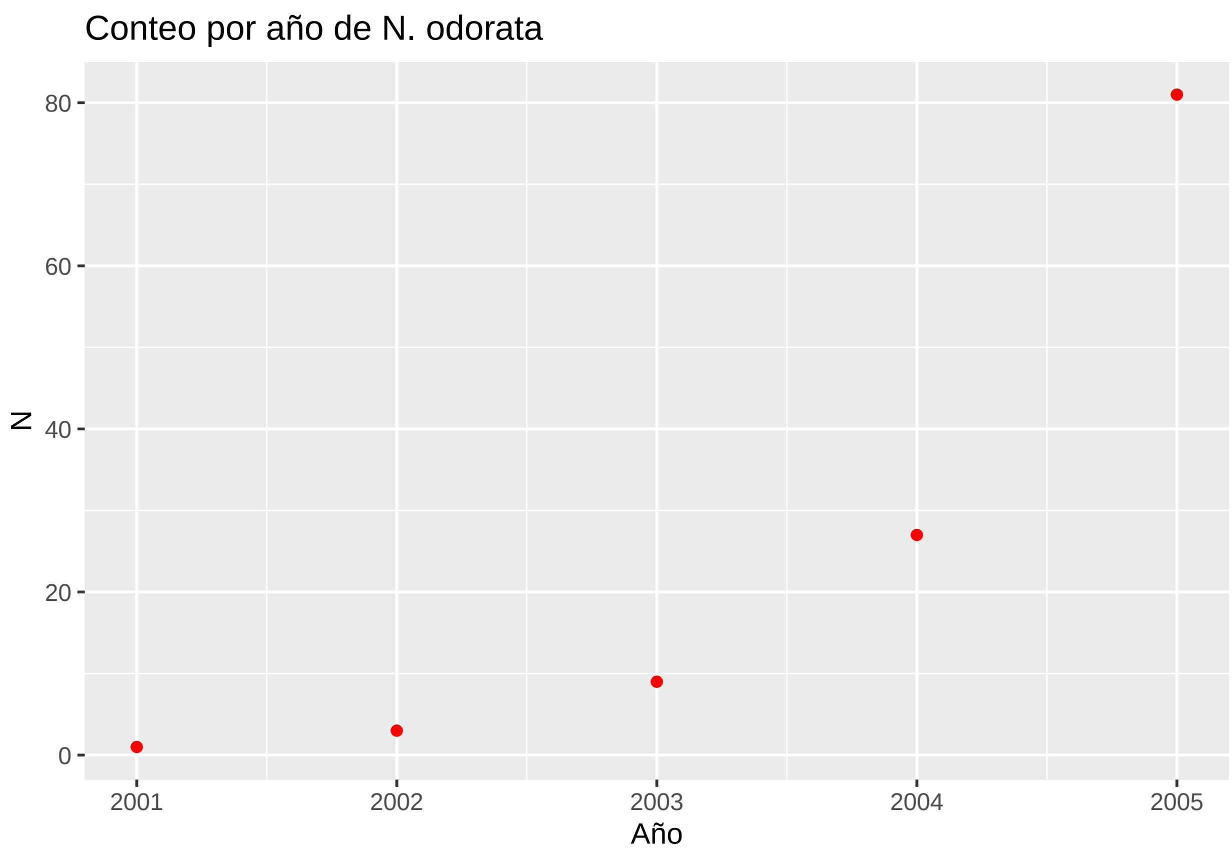


Figure 1: Crecimiento poblacional de la planta Nymphaea odorata en un lapso de 5 años.

2) Para estudiar la tendencia poblacional de esta planta, podemos calcular la tasa finita de crecimiento poblacional, simplemente dividiendo el número de individuos en t + 1 por el número de inviduos en el tiempo t:

$$\lambda = \frac{\mathrm{N}_{t+1}}{\mathrm{N}_t}$$

Para ello usamos el siguiente Script:

```
rates = N[2:5]/N[1:4] #divide cada valor de N por el valor anterior
rates
```

```
## [1] 3 3 3 3
```

Si se consideran 5 unidades de tiempo, entonces podemos calcular 4 valores de la tasa finita de crecimiento poblacional. Se observa que esta tasa resulta ser una constante.

3) dado que lambda es una constante, podemos escribir un modelo de crecimiento sencillo:

$$\mathrm{N}_t = \mathrm{N}_0 * \lambda^t$$

Para este caso lambda es igual a 3. (tasa finita de crecimiento). Entonces, para simular el crecimiento de la población necesitamos conocer: (i) lambda, (ii) N0 y (iii) un horizonte temporal t; esto lo veremos más adelante.

Efecto del tamaño inicial de la población

Generamos un vector (N_0) con 3 tamaños poblacionales iniciales distintos; usando el siguiente Script:

```r
N0  <- c(10,20,30)
lambda <- 2
time <- 0:4
```

Utilizaremos sapply para aplicar nuestro modelo a cada elemento en N_0, es decir a cada tamaño poblacional inicial (Figura 2).

```r
Nt.s <- sapply(N0, function(n) n * lambda^time)
Nt.s
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   10   20   30
## [2,]   20   40   60
## [3,]   40   80  120
## [4,]   80  160  240
## [5,]  160  320  480
```

Usamos la función matplot para graficar las 3 curvas a la vez y aplicamos logaritmo a los tamaños poblacionales.

```r
par(mfrow=c(1,2))

matplot(time, Nt.s, type = "l",
        pch = 1:3,
        xlab = "Tiempo",
        ylab = "N",
        main="Tamaño poblacional vs Tiempo")

matplot(time, Nt.s, type = "l",
        log = "y",
        pch = 1:3,
```

```
        xlab = "Tiempo",
        ylab = "log(N)",
        main="Log Tamaño poblacional vs Tiempo")
```

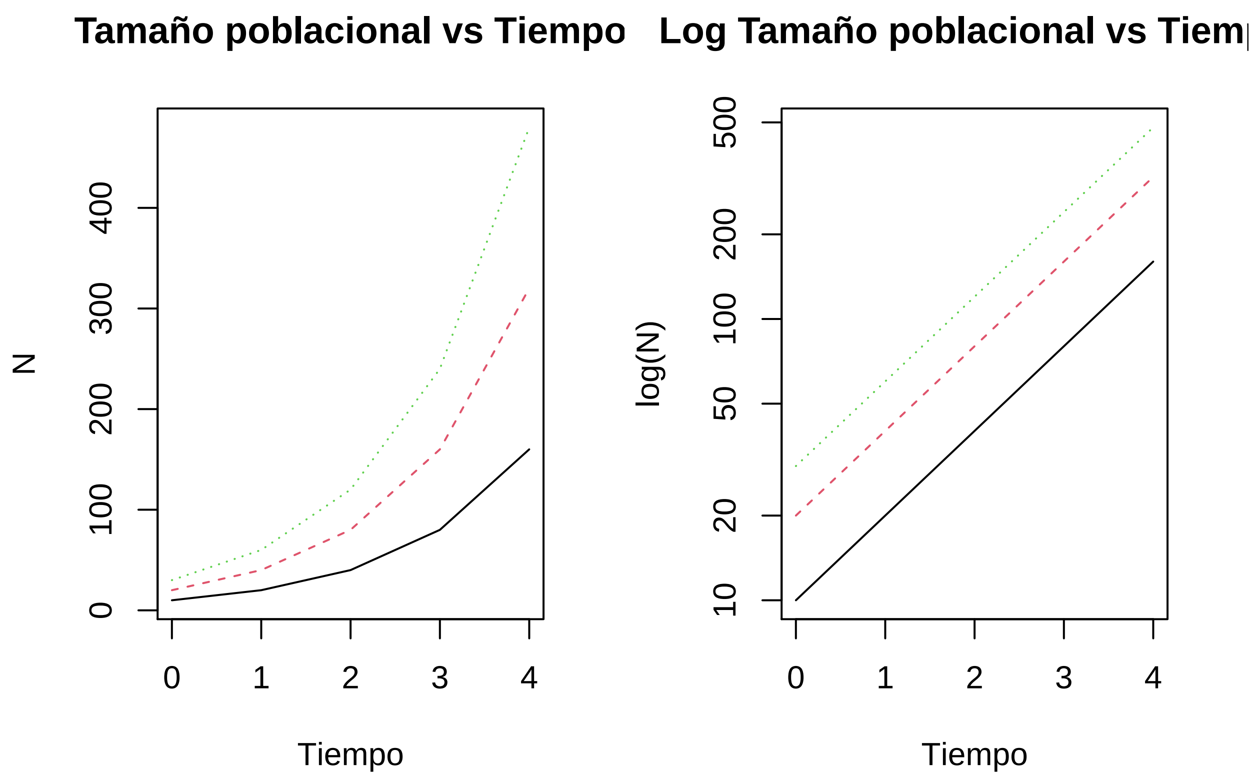


Figure 2: Curvas de crecimiento poblacional a partir de tres valores de N0 inicial. Se muestra el crecimiento usando N y aplicando ln(N).

¿Qué efectos puedes notar al cambiar la población inicial?

Efecto del valor de λ

Probaremos con distintos valores de λ y observaremos el efecto sobre el crecimiento poblacional, con el siguiente Script:

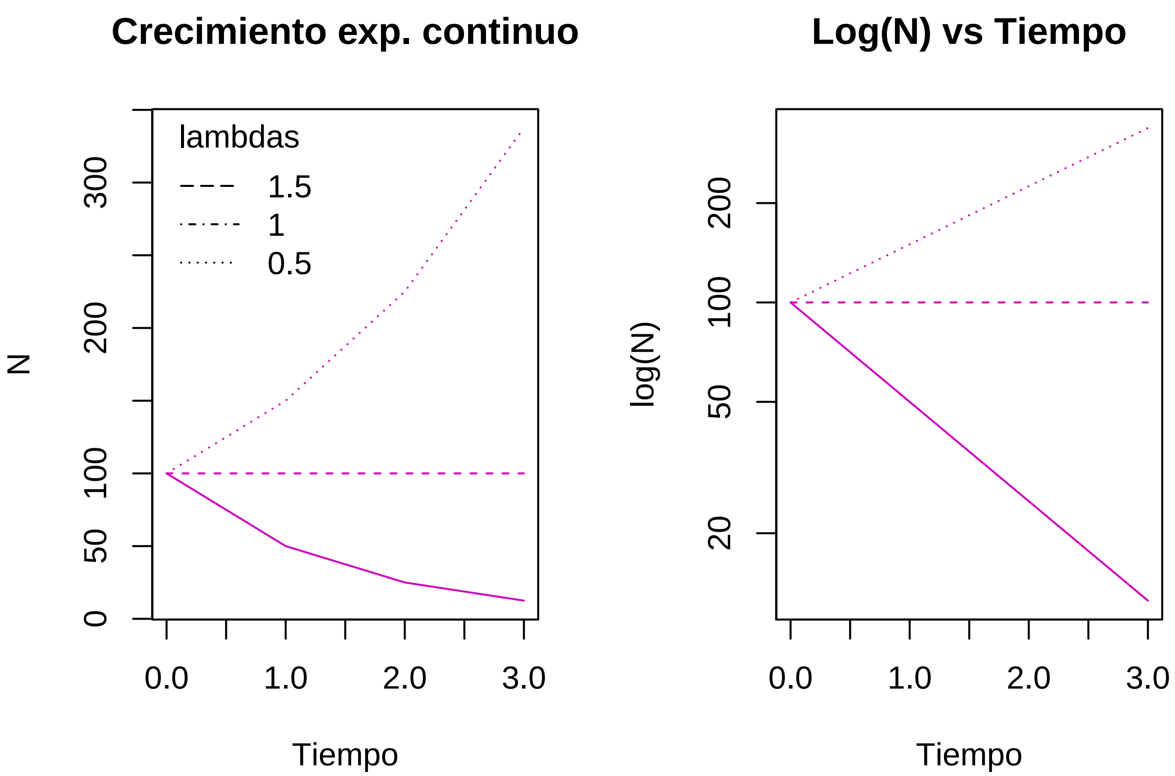
```
N0 <- 100
time <- 0:3
lambdas <- c(0.5, 1, 1.5)
```

Nuevamente utilizamos sapply para aplicar nuestro modelo denso independiente a todos los valores de λ

```
N.all <- sapply(lambdas, function(x) N0 * x^time)
```

```r
par(mfrow=c(1,2))

matplot(time, N.all, type = "l",
        main = "Crecimiento exp. continuo",
        xlab = "Tiempo",
        ylab = "N",
        col = 6)
legend("topleft", paste(rev(lambdas)), lty = 5:1, col = 1, bty = "n", title = "lambdas")
matplot(time, N.all, type = "l",
        main = "Log(N) vs Tiempo",
        xlab = "Tiempo",
        ylab = "log(N)",
        log = "y",
        col = 6)
```



¿Qué efecto tiene sobre el crecimiento demográfico los distintos valores de λ?

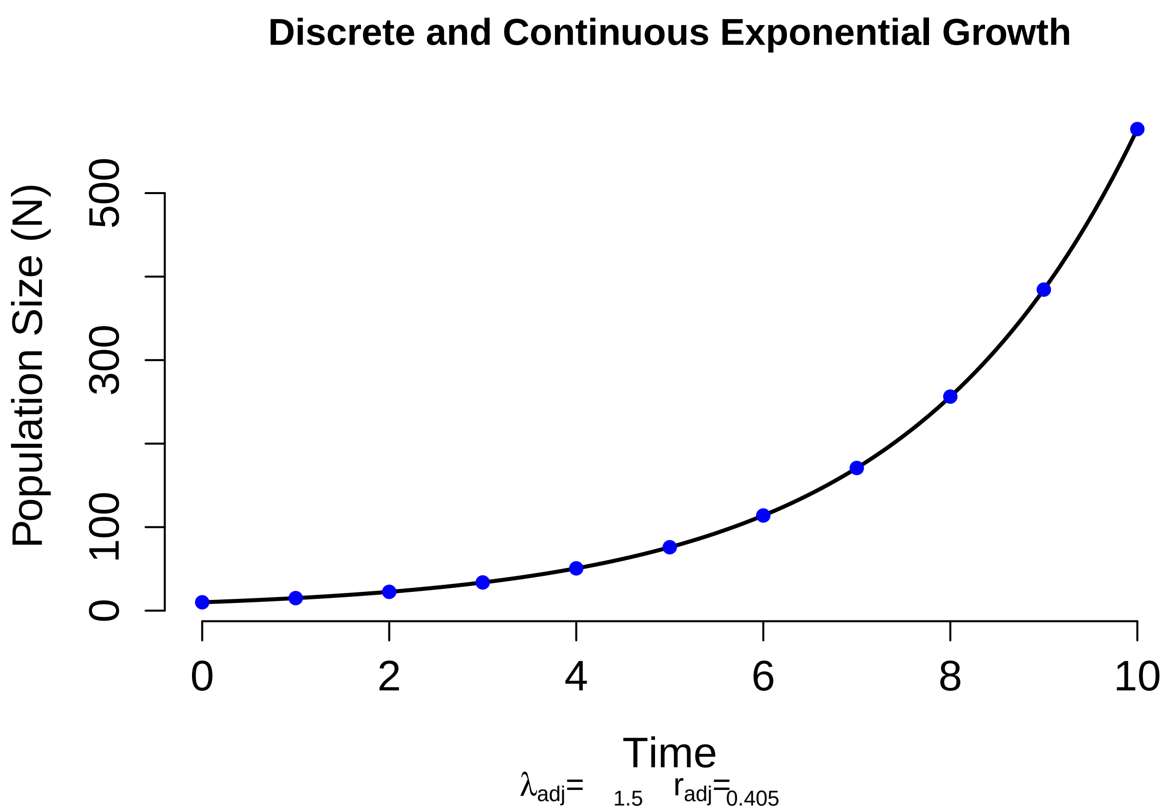
BOX 1

Paquete Ecovirtual

Gran parte de los modelos utilizados y las simulaciones realizadas podemos llevarlas a cabo con una sola linea de comando, utilizando funciones contenidas en otros paquetes. En este caso, con el paquete Ecovirtual podemos generar una curva de crecimiento exponencial.

```r
#install.packages("EcoVirtual")
library(EcoVirtual)

N0 = 10
lamb= 1.5
tmax= 10
popExp(N0, lamb, tmax, intt = 1)
```



Podemos cambiar los valores de las distintas variables y observar como cambian las curvas.

Otra métrica que podemos explorar además de r para analizar el crecimiento de una población es el tiempo en que se duplica su población, el cual se obtiene de:

$$t = \frac{ln(2)}{r}$$

Creamos una función para explorar esto:

```r
m.time <- function(r, m = 2) {
  log(m)/r
}

rs <- c(0, 0.1, 0.5, 1, 2)
m.time(rs)
```

```
## [1]       Inf 6.9314718 1.3862944 0.6931472 0.3465736
```

Anexo

Actividad

Crecimiento Denso-independiente (exponencial) Continuo

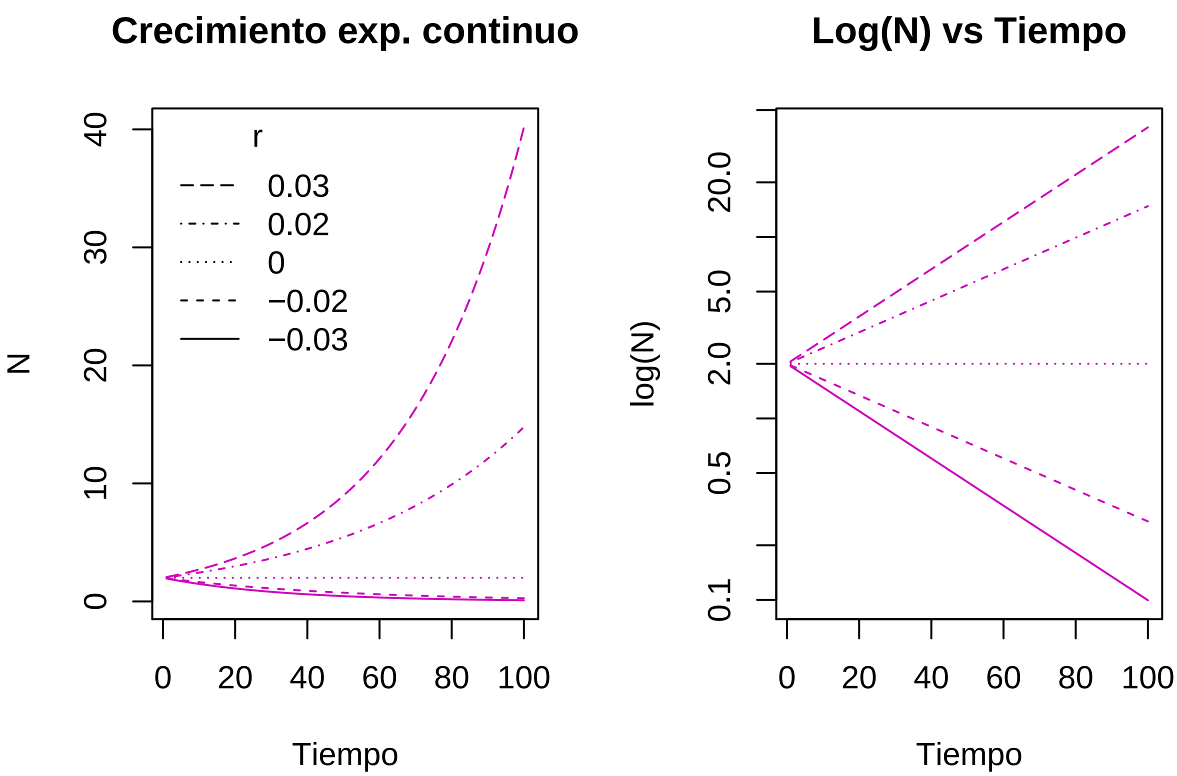
El crecimiento denso-independiente o exponenial continuo puede ser modelado por la ecuación: $\mathrm{N}_t = \mathrm{N}_0 * e^{rt}$ Podemos proyectar en el tiempo la población tal como hicimos con el modelo en su forma discreta:

Escogemos 5 tasas de crecimiento (r) y un intervalo de tiempo de 1 a 100

```
r <- c(-0.03, -0.02, 0, 0.02, 0.03)
N0 <- 2; t <- 1:100
cont.mat <- sapply(r, function(ri) N0 * exp(ri * t))
```

Graficamos

```
layout(matrix(1:2, nrow = 1))
matplot(t, cont.mat, type = "l",
        main = "Crecimiento exp. continuo",
        xlab = "Tiempo",
        ylab = "N",
        col = 6)
legend("topleft", paste(rev(r)), lty = 5:1, col = 1, bty = "n", title = "r")
matplot(t, cont.mat, type = "l",
        main = "Log(N) vs Tiempo",
        xlab = "Tiempo",
        ylab = "log(N)",
        log = "y",
        col = 6)
```



¿Qué diferencias puedes notar con respecto al modelo en formato discreto?

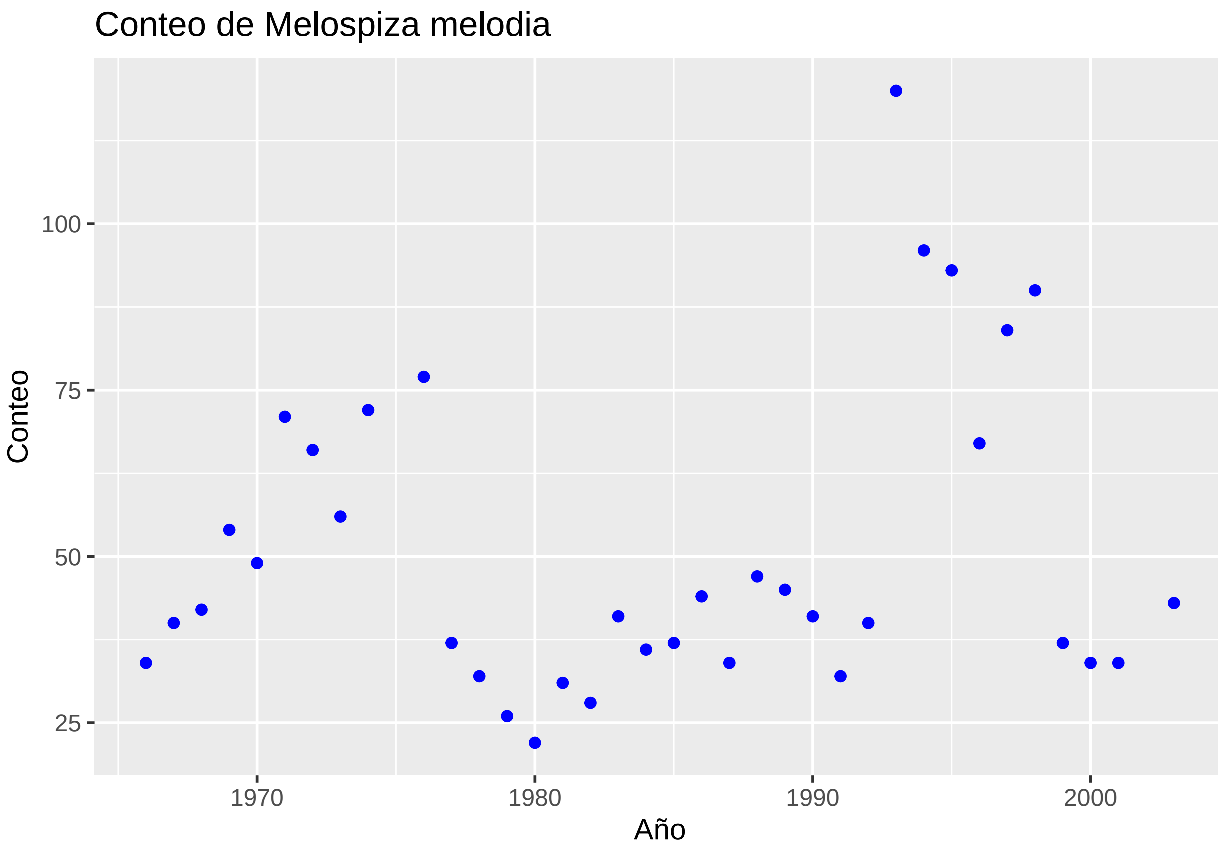
Media aritmética y media geométrica

Hasta ahora hemos utilizado tasas fijas de λ, pero este valor podría cambiar en cada año, dado esto podemos calcular, por ejemplo, la media aritmética de los distintos valores de lambda o podríamos calcular la media geométrica, a continuación compararemos ambas aproximaciones. Usaremos el set de datos sparrows contenidos en el paquete primer.

```
data(sparrows)
str(sparrows)
```

```
## 'data.frame':    36 obs. of  3 variables:
##  $ Year          : int  1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1976 ...
##  $ Count         : int  34 40 42 54 49 71 66 56 72 77 ...
##  $ ObserverNumber: int  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```

```
attach(sparrows)
qplot(x = Year, y = Count, data = sparrows,
      xlab = "Año",
      ylab = "Conteo",
      geom = "point",
      colour=I("Blue"),
      main = "Conteo de Melospiza melodia")
```



Usaremos 6 valores observados de R de los datos sparrows:

```
t <- 5
SS6 <- sparrows[1:(t + 1), ]
```

Calculamos los valores de λ para cada intervalo y calculamos media aritmética y geométrica.

```
SSgr <- SS6$Count[2:(t + 1)]/SS6$Count[1:t]

SSgr
```

```
## [1] 1.1764706 1.0500000 1.2857143 0.9074074 1.4489796
```

```
lam.A <- sum(SSgr)/t
lam.G <- prod(SSgr)^(1/t)

lam.A
```

```
## [1] 1.173714
```

```
lam.G
```

```
## [1] 1.15866
```

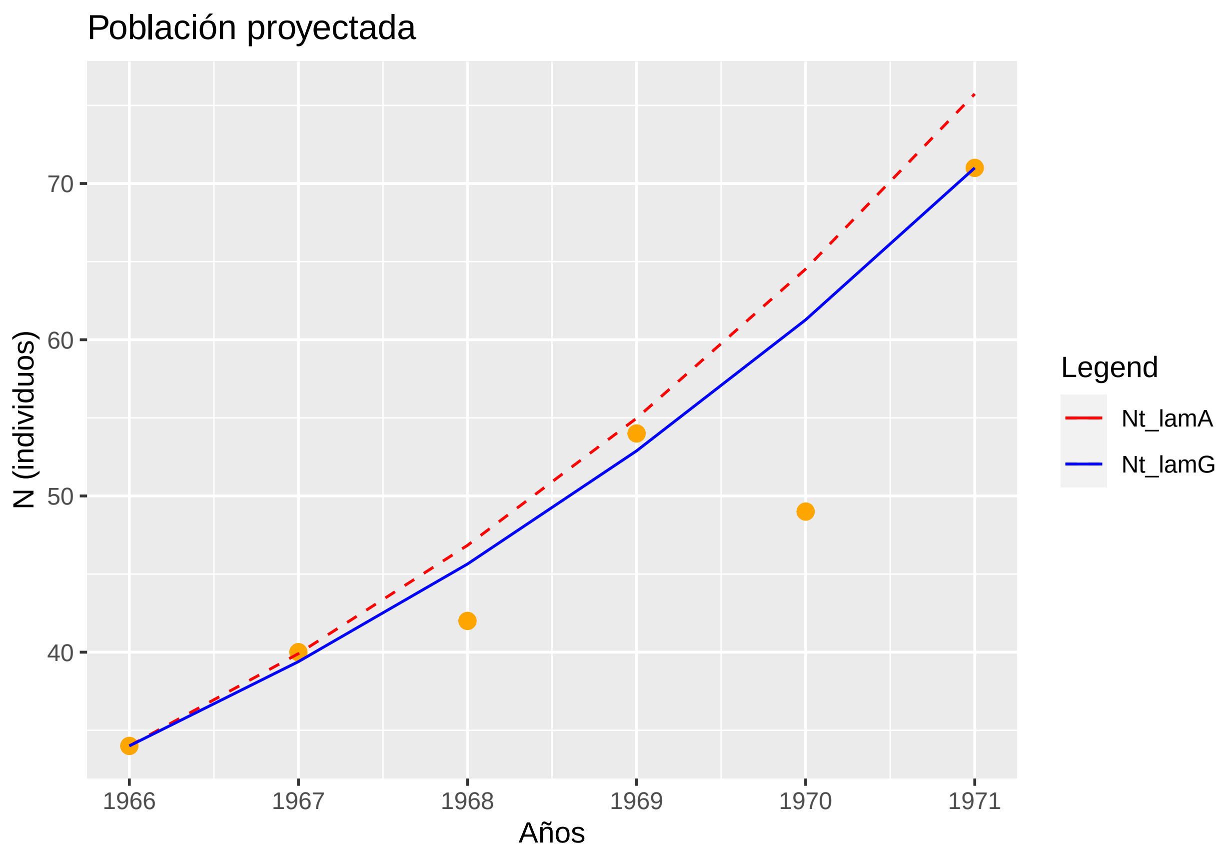
Ahora graficamos las proyecciones de ambas medias

```r
N0 <- SS6$Count[1]
Nt_lamA <- (sapply(N0, function(n) n * lam.A^(0:t)))
Nt_lamG <- (sapply(N0, function(n) n * lam.G^(0:t)))

data_fin <- cbind(SS6, Nt_lamA, Nt_lamG)

colors <- c("Nt_lamA" = "red", "Nt_lamG" = "blue")

ggplot(data_fin, aes(x = Year, y = Count)) +
  ggtitle("Población proyectada")+
  geom_point(size = 4, shape = 20, color = "orange")+
  geom_line(data = data_fin, aes(x=Year, y=Nt_lamA, color = "Nt_lamA"), linetype = "dashed")+
  geom_line(data = data_fin, aes(x=Year, y=Nt_lamG, color = "Nt_lamG"))+
  labs(x = "Años",
       y = "N (individuos)",
    color="Legend")+
  scale_color_manual(values = colors)
```



A partir de estos resultados, averigua en qué se diferencian la media armónica y la media geométrica.