Exame Época Normal 2020/2021

1. Distribuição de Poisson $\mu = 2$

(a) $P(1 < X < 6) = P(X<6) - P(X \leq 1)$

$P(X<6) = P(x \leq 6) - P(X=6)$ } consulta da Tabela

$P(X<6) = 0{,}9955 - 0{,}0120$

$P(X<6) = 0{,}9835$

$P(1<X<6) = 0{,}9835 - \underbrace{0{,}4060}_{\text{valor tabelado}}$

R: $P(1<X<6) = 0{,}5775$

(b) $P(X \leq 5 \mid X>1) = \dfrac{P(X \leq 5 \cap X > 1)}{P(X>1)} = \dfrac{P(1 < X \leq 5)}{P(X>1)}$

$P(1<X\leq 5) = \underbrace{P(X \leq 5) - P(X \leq 1)}_{\text{ver tabela}} = 0{,}9834 - 0{,}4060 = 0{,}5774$

$P(X>1) = P(X \geq 1) - P(X=1) = 0{,}8707 - 0{,}2707 = 0{,}6$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - 0{,}1293 = 0{,}8707$

$P(X<1) = \underbrace{P(X \leq 1) - P(X=1)}_{\text{ver Tabela}} = 0{,}4060 - 0{,}2707 = 0{,}1293$

$P(X \leq 5 \mid X>1) = \dfrac{0{,}5774}{0{,}6} = 0{,}9623$

√(c) R: 2 ($\mu = E(X) = \lambda = 2$)

(d)

2.

3. $\mu = 27{,}5 \quad \sigma = 6{,}1^2$

✓ (a)

X_A - Gasto total, em centenas de euros, de um indivíduo numa ida ao casino A.

X_T - Gasto total, em centenas de euros, de 35 indivíduos numa ida ao casino A.

$$X_T = \sum_{i=1}^{35} X_{A_i} \sim N(35 \times 27{,}5 \,;\, 35 \times 6{,}1)$$

$$X_T \sim N(962{,}5 \,;\, 213{,}5)$$

100 000 euros = 1000 centenas de euros

$$P(X_T > 1000) = 1 - \Phi\left(\frac{1000 - 962{,}5}{213{,}5}\right) = \underbrace{1 - \Phi(0{,}176)}^{\text{ver tabela}} =$$

$$= 1 - 0{,}5714 =$$

$$= 0{,}4286$$

R: A probabilidade de um grupo de 35 clientes gastarem mais de 100 000 euros numa ida ao casino é de 0,4286.

? (b) $n_A = 40$, $\mu = 2725$, 96% de confiança

$$I.C._{96\%} = \left] \bar{x} - z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

$\bar{x} = \mu = 2725$

Grau de confiança:

$$1 - \alpha = 0{,}96 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}04 \Rightarrow z_c = z_{0{,}98} = \Phi^{-1}(1 - 0{,}02) =$$

$$I.C._{96\%} \left] 2725 - 2{,}054 \times \frac{6{,}1}{\sqrt{40}} ; 2725 + 2{,}054 \times \frac{6{,}1}{\sqrt{40}} \right[$$

$$= \Phi^{-1}(0{,}98) =$$

$$= \underbrace{2{,}054}_{\text{ver tabela}}$$

$$I.C._{96\%} \left] 2723{,}0189 ; 2726{,}9811 \right[$$

R: Podemos afirmar com 96% de confiança que o valor médio obtido numa amostra aleatória de 40 clientes (2725€) situa-se entre 2723,0189 e 2726,9811. Logo podemos concluir que os técnicos têm razão.

4 -

Casino A | $n_A = 110$ $P(1000 \leq X_A \leq 3000) = 0{,}43$

$P(X_A > 3000) = 0{,}155$

Casino B | $n_B = 120$ $P(X_B > 3000) = 0{,}16$

$P(X_B < 1000) = 0{,}41$

(a) → Casino A

X_A - v.a. que representa o nº de indivíduos com um gasto superior a 3000 € por ida ao casino A.

$\hat{P}_A$ - v.a. que representa a proporção de indivíduos com um gasto superior a 3000 € por ida ao casino A, considerando uma amostra aleatória de 110 indivíduos.

Teste de hipóteses unilateral à direita para a proporção:

$H_0 : p_0 = 0{,}15$ v.s. $H_1 : p_0 > 0{,}15$

Amostra: $n = 110$, $\hat{p}_A = 0{,}155$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{\hat{P}_A - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n_A}}} \sim N(0,1)$$ Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, a estatíc

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $p_0 = 0{,}15$, a estatística de teste é:

$$Z = \frac{\hat{P}_A - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \times (0{,}85)}{110}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica:

Como o nível de significância é $\alpha = 0{,}06$, logo

$P(Z > z_c) = 0{,}06 \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0{,}94 \Leftrightarrow z_c = 1{,}555$

$R_c =]1{,}555, +\infty[$

Valor observado da estatística de teste:

$$z_{obs} = \frac{0{,}155 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \times 0{,}85}{110}}} = 0{,}1469$$

Decisão: $z_{obs} = 0{,}1469 < 1{,}555$; $z_{obs} \notin R_c$

Logo não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 6%, não existe evidência estatística de que a proporção de indivíduos com um gasto superior a 3000 € por ida ao casino A seja superior a 15%.

→ Casino B

X_B - v.a. que representa o nº de indivíduos com um gasto superior a 3000 € por ida ao casino B.

$\hat{P}_B$ - v.a. que representa a proporção de indivíduos com um gasto superior a 3000 € por ida ao casino B, considerando uma amostra aleatória de 120 indivíduos

Teste de hipóteses unilateral à direita para a proporção:

$H_0 : p_0 = 0,15$ v.s. $H_1 : p_0 > 0,15$

Amostra: $n = 120$, $\hat{p}_A = 0,16$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{\hat{P}_A - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n_A}}} \sim N(0,1)$$

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $p_0 = 0,15$, a estatística de teste é:

$$Z = \frac{\hat{P}_A - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15(1-0,85)}{120}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica:

Como o nível de significância é $\alpha = 0,06$, logo

$P(Z > z_c) = 0,06 \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0,94 \Leftrightarrow z_c = 1,555$

$R_c =]1,555, +\infty[$

Valor observado da estatística de teste:

$$z_{obs} = \frac{0,16 - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{120}}} = 0,3068$$

Decisão:

$z_{obs} = 0,3068 < 1,555$, $z_{obs} \notin R_c$

Logo, não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 6%, não existe evidência estatística de que a proporção de indivíduos com um gasto superior a 3000 € por ida ao casino B seja superior a 15%.

b)

X_A - v.a. que representa o número de indivíduos com um gasto inferior a 1000€ por ida ao casino A.

$\hat{P}_A$ - v.a. que representa a proporção de indivíduos com um gasto inferior a 1000€ por ida ao casino A, considerando uma amostra aleatória de 110 indivíduos.

X_B - v.a. que representa o número de indivíduos com um gasto inferior a 1000€ por ida ao casino B.

$\hat{P}_B$ - v.a. que representa a proporção de indivíduos com um gasto inferior a 1000€ por ida ao casino B, considerando uma amostra aleatória de 120 indivíduos

Teste de hipóteses unilateral à direita para a diferença de proporções:

$H_0 : p_A - p_B = 0$ v.s. $H_1 : p_A - p_B > 0$

Amostras: $n_A = 110$, $\hat{p}_A = 1 - 0{,}43 - 0{,}155 = 0{,}415$, $n_B = 120$, $p_B = 0{,}41$

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\hat{P}_A - \hat{P}_B) - 0}{\sqrt{\frac{\hat{P}_A(1-\hat{P}_A)}{n_A} + \frac{\hat{P}_B(1-\hat{P}_B)}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

Região crítica:

Como o nível de significância é $\alpha = 0{,}02$, logo

$P(Z > z_c) = 0{,}02 \Leftrightarrow P(Z \leq z_c) = 0{,}98 \Leftrightarrow z_c = 2{,}0538$

$R_c = \left]2{,}0538, +\infty\right[$

Valor observado da estatística de teste:

$$z_{obs} = \frac{0{,}415 - 0{,}41}{\frac{0{,}415 \times 0{,}585}{110} + \frac{0{,}41 \times 0{,}59}{120}} = 1{,}1840$$

Decisão:

$z_{obs} = 1{,}1840 < 2{,}0538$; $z_{obs} \notin R_c$.

Logo não se deve rejeitar H_0. Ao nível de significância de 2%, não existe evidência estatística de que a proporção de indivíduos com um gasto inferior a 1000€ no casino A seja superior à proporção de indivíduos com um gasto inferior a 1000€ no casino B.