Matemática Computacional

Teórica 1

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

2º Semestre 20-21

Teórica 1

Introdução

- **Fenómeno aleatório** - fenómeno sujeito a influência do acaso, fora do alcance do observador. Caracteriza-se pela sua *imprevisibilidade* e *regularidade estatística*
- **Experiência aleatória** - todo o procedimento que verifica as seguintes propriedades:
  - pode repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições (ou em condições semelhantes)
  - a sua realização dá um resultado de entre um conjunto de resultados possíveis
  - cada um dos resultados da experiência é imprevisível mas é possível considerar *estabilidade na frequência da sua ocorrência*

Experiências aleatórias: exemplos

1. Lançamento de dois dados e registo do número de pontos
2. Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima
3. Contagem do número mensal de acidentes de automóvel numa autoestrada
4. Registo do tempo de vida de uma pessoa, em anos
5. Registo do tempo de trabalho de uma máquina até à primeira avaria

Espaço de resultados

Espaço de resultados ou **espaço amostra** - Ω - conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória.

Para os exemplos anteriores, tem-se

1. $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$
2. $\Omega = \{\text{face nacional}, \text{face europeia}\} = \{N, E\} = \{1, 0\}$
3. $\Omega = \mathbb{N}_0$
4. $\Omega = \mathbb{N}$
5. $\Omega = \mathbb{R}^+$

Acontecimento aleatório - qualquer subconjunto do espaço de resultados

Álgebra de acontecimentos

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Diz-se que $A \subset \Omega$ se realizou se o resultado da experiência, ω, é um elemento de A, i.é., $\omega \in A$.

- $A \subset B$ - A é um subacontecimento de B se e só se a realização de A implica a realização de B
- $\overline{A}$ - acontecimento complementar (ou contrário) de A é o conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em A
- $A \cup B$ - união de A com B é o acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos A ou B

Álgebra de acontecimentos

- AB ou $A \cap B$ - **produto** ou **interseção** é o acontecimento que se realiza apenas quando ambos os acontecimentos se realizam
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ - **diferença** dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize
- Os acontecimentos A e B dizem-se **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis** se e só se a realização de um implica a não realização do outro, i.é., $A \cap B = \emptyset$
- $\emptyset$ - acontecimento impossível
- Ω - acontecimento certo

Propriedades das operações sobre acontecimentos

Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Associatividade

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributividade

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Probabilidade de um acontecimento

Definição clássica - Laplace (séc. XIX), sob a hipótese de que todos os casos são igualmente prováveis ou possíveis.
Probabilidade de realização de um acontecimento A é

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Definição frequencista

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

sendo n o número de repetições duma experiência aleatória e n_A o número de vezes que se verificou o acontecimento A.
Para n "grande" tem-se para as frequências relativas

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \approx P(A)$$

A probabilidade é interpretada como a frequência limite.

Axiomática das Probabilidades

Definição:

Probabilidade, P, é uma aplicação que a cada acontecimento de Ω faz corresponder um número real,

$$\begin{aligned} P : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

e que satisfaz os seguintes axiomas:

(A1) $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$

(A2) $P(\Omega) = 1$

(A3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$

Leis das Probabilidades

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A \backslash B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P\left(A \cap B\right)$
6. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$ se $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
7. $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right)$
8. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right) - P\left(A_1 \cap A_3\right) - \cdots - P\left(A_{n-1} \cap A_n\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) + \cdots + P\left(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\right) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)$

Probabilidade Condicionada

Probabilidade condicionada de A dado B ou probabilidade de A se B ($P(B) > 0$) é

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(B)}$$

Teorema

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ então

$$P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P\left(B|A\right) = P(B) \times P\left(A|B\right)$$

Independência

Dois acontecimentos dizem-se **independentes** se e só se

$$P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P(B)$$

Teorema

Se A e B são acontecimentos independentes, também são independentes os acontecimentos

A e $\overline{B}$

$\overline{A}$ e B

$\overline{A}$ e $\overline{B}$

Nota: Afirmar que os acontecimentos A e B são independentes não é equivalente a afirmar que A e B são mutuamente exclusivos

Teorema da probabilidade total

Teorema

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *acontecimentos que definem uma partição de* Ω, *isto é,* $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

Se $P(A_i) > 0$ *então para qualquer acontecimento* $B \subset \Omega$, *tem-se*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right) P\left(A_i\right)$$

Teorema de Bayes

Teorema

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *acontecimentos que definem uma partição de* Ω *tais que* $P(A_i) > 0$ *e seja* B *um outro acontecimento de* Ω. *Então, para* $k = 1, \ldots, n$, *tem-se*

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\, P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i)}$$

Variável aleatória

Variável aleatória (v.a.) X, é uma função de domínio Ω e contradomínio contido em $\mathbb{R}$, cujo valor é determinado pelo resultado de uma experiência aleatória, i.é,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = x \end{aligned}$$

Aos valores de uma variável aleatória associamos uma probabilidade.

Função distribuição cumulativa

Designa-se **função distribuição cumulativa** ou **função de distribuição** da variável aleatória X e representa-se por F ou F_X, à aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F(x) = P\left[X \leqslant x\right] \end{aligned}$$

Algumas propriedades da função de distribuição

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$
- Se $x_1 < x_2$ então $F(x_1) < F(x_2)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$
- $P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x)$
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

Tipos de variáveis aleatórias

Uma v.a. X diz-se **discreta** se o conjunto de valores que pode assumir for numerável ou infinitamente numerável.

Exemplos:

1. número de pintas que sai no lançamento de um dado
2. registo, a intervalos regulares, do número de pessoas em fila de espera na caixa de um supermercado

Uma v.a. X diz-se **contínua** se o conjunto de valores que pode assumir não for numerável, isto é, se assume qualquer valor real num dado intervalo.

Exemplos:

1. o peso de um indivíduo
2. o comprimento de uma folha de uma planta

Distribuições discretas - conceitos gerais

Função de probabilidade

Seja X uma v.a. discreta podendo assumir os valores $x_1, x_2, , ..., x_n$.
Chama-se função massa de probabilidade ou função de probabilidade da v.a. X à aplicação que a cada valor x_i faz corresponder $f(x_i) = P(X = x_i)$.

A função de probabilidade verifica as seguintes propriedades:

1. $f(x_i) \geq 0, \ \forall x_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

Normalmente apresenta-se um quadro da distribuição de probabilidade da variável aleatória X

Tabela: Distribuição de probabilidade

x_i	x_1	x_2	...	...	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	...	$f(x_n)$

Função distribuição

A função distribuição define-se por

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leqslant x} f(x_k)$$

Parâmetros de uma distribuição discreta

Parâmetros de uma distribuição são **indicadores** que a caracterizam.

Valor Médio

Designa-se por **valor médio**, **esperança matemática**, **valor esperado** ou **média**, e representa-se por $E(X)$, μ_X ou μ,

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Propriedades:

1. $E(k) = k$ (k constante)
2. $E(k\,X) = kE(X)$
3. $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Parâmetros de uma distribuição discreta

Variância

Designa-se por variância de uma v.a. X e representa-se por $Var\,(X)$, $V(X)$, σ_X^2 ou simplesmente σ^2 a

$$\begin{aligned} V(X) =& E[(X-\mu)^2] \\ =& \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 f(x_i) \\ =& E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Desvio-padrão

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$

Propriedades da variância:

1. $V(X) \geq 0$
2. $V(k) = 0$
3. $V(k\,X) = k^2 V(X)$
4. $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$, se X_i v.a's independentes

Distribuição de Bernoulli

Prova de Bernoulli

É uma experiência aleatória que serve de base a várias distribuições teóricas.
Só pode ter um de dois resultados: **sucesso**, caso ocorra um determinado acontecimento A, ou **insucesso**, caso não ocorra A.

Exemplo:

Lançar uma moeda e verificar se sai cara (sucesso) ou coroa (insucesso).

Distribuição de Bernoulli

É a distribuição associada à contagem do número de sucessos que ocorrem numa única prova de Bernoulli.
Representa-se simbolicamente por $X \sim B_e(p)$, sendo p a probabilidade de ocorrer "sucesso"e $q = 1 - p$ a probabilidade de ocorrer "insucesso".

Função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases}$$

Distribuição de Bernoulli

Valor médio

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 0(1-p) + 1 \times p = p$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{2} {x_i}^2 p_i - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Distribuição Binomial

Seja X uma v.a que conta o número de sucessos numa sucessão de n provas repetidas, onde

- as provas são todas de Bernoulli (sucesso ou insucesso)
- as provas são independentes (o resultado obtido numa das provas não afeta as restantes)
- a probabilidade de sucesso (p) é igual em todas as provas

Diz-se que X tem **distribuição Binomial** de parâmetros n e p, simbolicamente,

$$X \sim B_i(n, p)$$

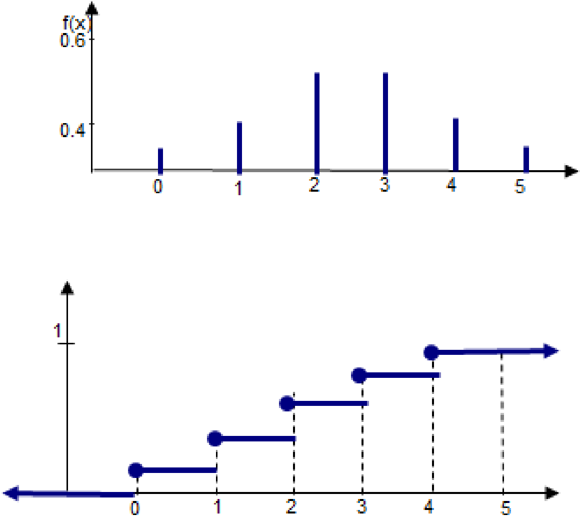
sendo, n o número de provas e p a probabilidade de ocorrer sucesso numa única prova $(0 \leq p \leq 1)$.

Função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x q^{n-x}, & x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 \quad , & x \notin \{0, 1, 2, ..n\} \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{x} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \quad , x = 0, 1, 2, ..., n$$


f(x)
0.6
0.4
0
1
2
3
4
5
1
0
1
2
3
4
5

Valor médio

$$\mu = E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p) = npq$$

Exemplo. Um aluno vai responder a um teste constituído por 10 grupos. Em cada grupo existem 4 opções de resposta. O aluno não sabe a matéria e responde "à sorte".

a) Calcule a probabilidade do aluno não acertar em nenhuma das questões.

b) Calcule a probabilidade de acertar no mínimo em 2 e em menos de 4 questões.

c) Calcule a probabilidade de acertar em mais de metade das questões

d) Calcule o valor esperado de respostas certas.

Resolução:

X – "número de respostas certas em 10"

Como a v.a. Representa o número de sucessos em n provas idênticas e independentes de Bernoulli, segue-se que X~Bi(10;p)

Note-se que p é a probabilidade de sucesso numa prova p=1/4=0.25

X~Bi(10,0.25)

a) Calcule a probabilidade do aluno não acertar em nenhuma das questões.

$$X \sim B_i(10; 0.25)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x} 0.25^x (1 - 0.25)^{10-x}, x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.25^0 0.75^{10} = 0.0563$$

b) Calcule a probabilidade de acertar no mínimo em 2 e em menos de 4.

$$P(2 \le X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.5319$$

$$P(X = 2)_{\begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=2 \end{cases}} = 0.2816 \text{ (consulta na tabela)}$$

$$P(X = 3)_{\begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=3 \end{cases}} = 0.2503 \text{ (consulta na tabela)}$$

c) Calcule a probabilidade de acertar em mais de metade das questões.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} P(X = x) = 0.0197$$

$$P(X \le 5)_{tabela: \begin{cases} n=10 \\ p=0.25 \\ x=5 \end{cases}} = 0.9803 \text{ (consulta na tabela)}$$

d) Calcule o valor esperado de respostas certas.

$$E(X) = n \cdot p = 10 * 0.25 = 2.5$$

Processo de Poisson

Um processo de Poisson refere-se ao número de acontecimentos que ocorrem num intervalo (tempo ou espaço) e que tem as propriedades:

- A probabilidade de que ocorram x acontecimentos num intervalo de tempo depende apenas do número x e da duração t do intervalo de tempo (não depende do início da contagem)
- O nº de eventos que ocorrem em intervalos de tempo distintos são independentes (não tem memória)
- A probabilidade de ocorrer um evento num intervalo muito pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo
- A probabilidade de ocorrer mais do que um evento num intervalo muito pequeno é nula

Distribuição de Poisson

Usada para modelar a ocorrência de acontecimentos raros (acontecimentos com probabilidade de ocorrência baixa) que ocorrem com uma taxa média de ocorrência λ, em intervalos de tempo ou dentro de um espaço limitado.

Exemplos:

- Nº de chamadas a um pronto socorro durante a madrugada
- Nº de defeitos de um tecido por m^2
- Nº de autocarros que chegam à paragem num minuto
- Nº de acessos a uma página web durante uma hora

Diz-se então que uma v.a. X tem **distribuição de Poisson** de parâmetro $\lambda > 0$ e representa-se simbolicamente por

$$X \sim P_o(\lambda)$$

Função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, \cdots\} \\ 0 \quad , & x \notin \{0, 1, \cdots\} \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leqslant x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}, \; x \in \{0, 1, \cdots\}, \lambda > 0$$

Valor médio e variância

Se $X \sim P_o(\lambda)$ então

$$\mu = E(X) = \lambda$$
$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

Teorema

Se X representa o número de acontecimentos que ocorrem num intervalo de amplitude unitária I e

$$X \sim P_o(\lambda)$$

e a v.a. Y representa o nº de eventos que ocorrem num intervalo de amplitude α então

$$Y \sim P_o(\alpha\lambda)$$

Exemplo

Sabe-se que o número de chamadas que chega a uma central telefónica durante 1 hora tem distribuição de Poisson de média 11.0 chamadas/hora.

a) Calcule a probabilidade de durante uma hora chegar apenas uma chamada

X-"Número de chamadas, por hora"; $X \sim P_0(11)$

$$P(X = x) = e^{-11}\frac{11^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,3,\ldots$$

$$R: P(X = 1) = e^{-11}\frac{11^1}{1!} \underset{tabela\begin{cases}\lambda = 11\\ x = 1\end{cases}}{=} 0.0002$$

b) Calcule a probabilidade de chegarem mais de 6 e menos de 11 chamadas durante uma hora.

$$R: P(6 < X < 11) = P(6 < X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 6) = 0.3813$$

c) Calcule a probabilidade de durante 15 minutos não chegar nenhuma chamada.

Y-"Número de chamadas, num período de 15 minutos"; $X \sim P_0(\frac{11}{4} \approx 2.8)$

$$R: P(Y = 0) = e^{-2.8}\frac{2.8^0}{0!} \underset{tabela\begin{cases}\lambda = 2.8\\ x = 0\end{cases}}{=} 0.0608$$

Teorema

Quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mantendo-se constante o produto np tem-se

$$X \sim B_i(n,p) \Longrightarrow X \sim P(\lambda) \text{ com } \lambda = np$$

A distribuição de Poisson surge como o limite da distribuição Binomial quando $n \to \infty$ e $p \to 0$.

Regra prática:

Em geral, a distribuição de Poisson fornece uma boa aproximação da distribuição Binomial quando $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$

Exemplo:

$$X \sim B_i(100; 0.05) \approx X_a \sim P_o(100 * 0.05)$$
$$P(X=4) \approx P(X_a=4)_{\begin{cases}\lambda=5\\x=4\end{cases}} = 0.1755$$