Matemática Computacional

Teórica 2

Departamento de Matemática
Instituto Superior de Engenharia do Porto

2º Semestre 20-21

Distribuições Contínuas

Introdução

- Uma v.a contínua pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo de números reais
- Não é possível listar, individualmente, todos os valores de uma v.a. contínua. Por conseguinte, o quadro de distribuição de probabilidade/função de probabilidade usado nas distribuições discretas é inadequado para descrever convenientemente uma v.a. contínua
- Associam-se probabilidades a intervalos e não a pontos

Função densidade de probabilidade

Seja X uma v.a. contínua.
A função **densidade de probabilidade** (f.d.p.) ou função densidade de X é uma função f tal que

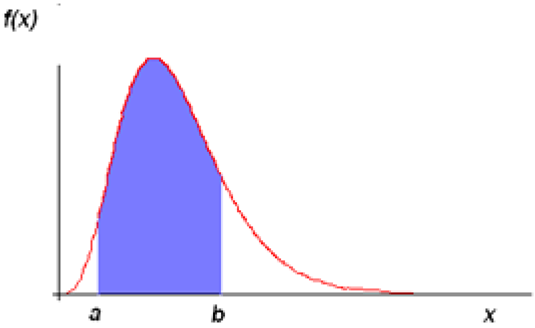
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

e que verifica as seguintes propriedades

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Função densidade de probabilidade

Geometricamente,



Função de distribuição

Seja X uma v.a. contínua com f.d.p. f.
A função de distribuição de X é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \;\; -\infty < x < +\infty$$

Valor médio e variância

X é uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade f.

O valor médio é

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

A variância é

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2$$

Exemplo

Seja X uma v.a. com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x)\,, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0\,, & x < 1 \vee x > 2 \end{cases}$$

1. Determine o valor de k.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{2} k(2-x)dx = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

2. Determine $E(X)$ e $V(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{2} (4x - 2x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{1}^{2} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 (4-2x)dx = \frac{1}{18}$$

Distribuição Normal

- A distribuição normal é, em muitos sentidos, a distribuição fundamental da teoria estatística moderna
- Foi estudada inicialmente no séc. XVIII quando os cientistas observaram um impressionante grau de regularidade nos erros de medição. Verificou-se que os padrões (distribuições) podiam ser aproximados por curvas contínuas a que chamavam "curvas normais dos erros"
- As propriedades matemáticas das "curvas normais" foram estudadas por Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) e Karl Gauss (1777-1855)

Distribuição Normal

- A distribuição normal é muitas vezes usada para representar quantidades que resultam da soma de um grande número de quantidades aleatórias (Teorema do Limite Central), ou para representar características de populações relacionadas com medições ou com os respetivos erros
- Trata-se da distribuição mais importante devido à sua aplicabilidade na modelização estocástica de muitos fenómenos naturais

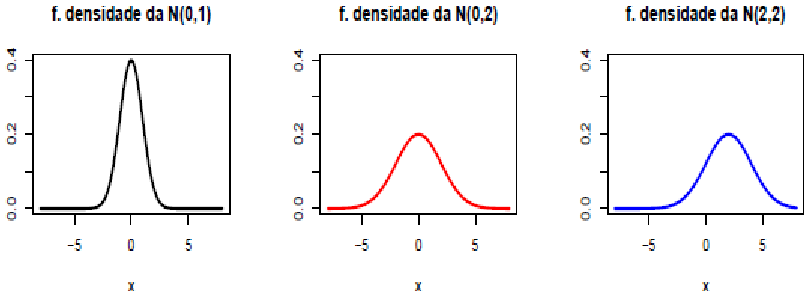
Definição

Diz-se que a v.a. contínua X tem distribuição normal ou distribuição de Gauss com parâmetros μ e σ^2 e representa-se por

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

se a sua função densidade de probabilidade é

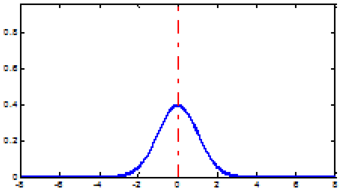
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Gráficos da função densidade normal para alguns valores de μ e σ.

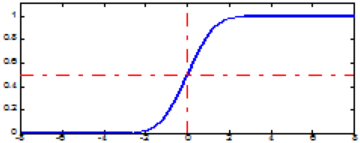
Função Densidade de Probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in R$$



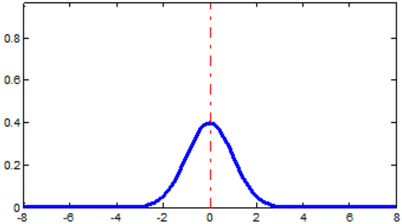
Função de Distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Propriedades da curva densidade de uma v.a. com distribuição normal

- O domínio é $\mathbb{R}$
- Tem a forma de sino e um único máximo em $x = \mu$
- É simétrica relativamente a um eixo vertical em $x = \mu$ (média), a mediana também ocorre em $x = \mu$
- Tem dois pontos de inflexão em $x = \mu - \sigma$ e em $x = \mu + \sigma$
- O eixo dos xx é uma assímptota



Distribuição Normal Reduzida

A v.a. Z tem distribuição **normal reduzida** se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ e escreve-se

$$Z \sim N(0,1)$$

A função densidade de probabilidade é

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

e a função de distribuição

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Obs: Os valores da função de distribuição da normal reduzida estão tabelados

Teoremas importantes

Teorema

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *e* $Y = a + bX$ *então*

$$Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Corolário

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *então a v.a.* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *tem distribuição normal reduzida, i.é.,*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Cálculo de probabilidades

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- $F(a) = P\left(X \leq a\right) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > b) = 1 - P\left(X \leq b\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$
- $P\left(a < X \leq b\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

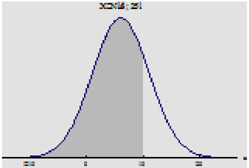
Seja X~N(6;25) , calcule

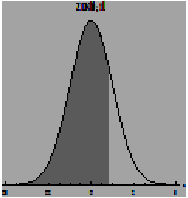
a) P(X<10)

$R: P(X<10) = P(\frac{X-6}{5} < \frac{10-6}{5}) = P(Z<0.8)$

$P(Z<0.8) = \Phi(0.8) \approx 0.7881$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6}{5} \sim N(0;1)$





b) P(X>5) $R: P(X>5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5-6}{5}\right) = 0.5793$ $Nota: P(X<a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

c) P(5<X<10)

$R: P(5<X<10) = P(X<10) - P(X \leq 5) = 0.7881 - (1 - 0.5793) = 0.3674$

d) O valor de k que é ultrapassado em 20% dos casos.

$$P(X>k) = 0.2 \Leftrightarrow P(X \leq k) = 0.8 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-6}{5}\right) = 0.8 \Leftrightarrow \frac{k-6}{5} = \Phi^{-1}(0.8) = 0.84 \Leftrightarrow k = 10.2$$

Aditividade da Distribuição Normal

Teorema

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são v.a. independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ então a v.a.

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Aditividade da Distribuição Normal

Corolário

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são v.a. normais e independentes, com o mesmo valor médio μ e a mesma variância σ^2 então as v.a. soma e média têm distribuição normal definida por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Exemplo

Um aluno tem duas possibilidades de se deslocar ao ISEP e o tempo de deslocação é uma v.a. com distribuição normal.
Pelo caminho A o tempo de deslocação é $N(55 \text{ min}, 81 \text{ min}^2)$ enquanto que pelo caminho B é $N(60 \text{ min}, 9 \text{ min}^2)$.
O aluno dispõe de 63 minutos, no máximo, para realizar a viagem de modo a não chegar atrasado.

(a) Qual dos caminhos deve o aluno utilizar?

(b) Calcule a probabilidade do tempo total acumulado em 4 viagens pelo caminho A e 6 viagens pelo caminho B exceder 10 horas.

Exemplo

(a)

X_A - Tempo de conclusão do percurso A (min); $X_A \sim N(55, 9^2)$

X_B - Tempo de conclusão do percurso B (min); $X_B \sim N(60, 3^2)$

$$P(X_A < 63) = \Phi\left(\frac{63-55}{9}\right) = \Phi(0.89) = 0.8133$$

$$P(X_B < 63) = \Phi\left(\frac{63-60}{3}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

R: O aluno deve escolher o percurso B, pois $\Phi(1) > \Phi(0.89)$

(b) X_T - Tempo total de conclusão dos 10 percursos (min)

$$X_T = \sum_{i=1}^{4} X_{A_i} + \sum_{i=1}^{6} X_{B_i} \sim N(4 \times 55 + 6 \times 60, 4 \times 81 + 6 \times 9)$$

$$X_T \sim N(580, 19.44^2)$$

$$P(X_T > 600) = 1 - \Phi\left(\frac{600-580}{19.44}\right) = 1 - \Phi(1,03) = 0.1515$$