



# Matemática Computacional

## Teórica 8

Departamento de Matemática  
Instituto Superior de Engenharia do Porto

2º Semestre 20-21

# Conteúdo

- 1 Regressão Linear Múltipla
- 2 Modelo
- 3 Significância do modelo
- 4 Intervalos de confiança
- 5 Testes de hipóteses
- 6 Exemplo

# Regressão Linear Múltipla

## RLM

Na análise de regressão encontramos situações com mais do que uma variável explicativa. Esse modelo de regressão recebe o nome de modelo de regressão múltipla (RLM).

A variável dependente ou resposta  $Y$  pode estar relacionada com  $k$  variáveis explicativas ou independentes.

# Regressão Linear Múltipla

## Modelo matemático

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

- $X_1, X_2, \dots, X_k$  - são  $k$  variáveis explicativas independentes não aleatórias
- $Y$  - variável aleatória resposta
- $\varepsilon$  - variável aleatória erro
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  são os coeficientes de regressão
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  representam a variação da resposta  $Y$  por unidade de variação de  $X_j$  quando assumimos como constantes as restantes variáveis explicativas.

## Modelo matemático

Para qualquer n-uplo de observações

$$(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n (n > k)$$

cada resposta  $y_i$  obtém-se da seguinte forma

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

## Forma matricial RLM

O modelo (1) apresentado é um sistema de  $n$  equações com a representação matricial

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \vdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \vdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \vdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

## Estimação dos coeficientes de regressão

Pretende-se encontrar o vetor de estimadores dos mínimos quadrados  $\hat{\beta}$  que minimize a soma dos quadrados dos resíduos. Da equação (2) obtemos  $\varepsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta$  e, conseqüentemente

$$SQ_E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta \quad (3)$$

## Estimação dos coeficientes de regressão

O estimador dos mínimos quadrados  $\hat{\beta}$  é a solução das seguintes  $k + 1$  equações normais:

$$\frac{\partial SQ_E}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Leftrightarrow -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta} = 0 \Leftrightarrow X^T X \hat{\beta} = X^T Y \quad (4)$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (5)$$



# Estimação dos coeficientes de regressão

As matrizes  $X^T X$  e  $X^T Y$  são

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

# Estimação dos coeficientes de regressão

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} y_i \end{bmatrix}$$

# Estimação dos coeficientes de regressão

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i2}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{bmatrix}$$

O modelo de regressão ajustado correspondente a 1

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j x_{ij}, i = 1, \dots, n \quad (6)$$

e matricialmente

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \quad (7)$$

## Significância do modelo de regressão

O teste de significância para a regressão é um teste para determinar se existe uma relação linear entre a variável resposta  $Y$  e as variáveis independentes (explicativas, regressoras)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Os testes de hipóteses a realizar pressupõem que os erros  $\varepsilon_i$  sejam normalmente distribuídos de média 0 e variância  $\sigma^2$ .

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ para algum } j, j = 1, \dots, k$$

## Significância do modelo de regressão

Utilizamos a análise de variância para avaliarmos a significância do modelo.

$$SQ_T = SQ_R + SQ_E$$

onde

$SQ_T = Y^T Y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} = Y^T Y - n\bar{y}^2$  - mede a variação total das observações em torno da média

$SQ_R = \hat{\beta}^T X^T Y - n\bar{y}^2$  - mede a variação da variável dependente explicada pelo modelo

$SQ_E = Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y$  - mede a variação não explicada pelo modelo.

# Significância do modelo de regressão

## Procedimento

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ para algum } j, j = 1, \dots, k$$

Estatística de teste :  $F_0 = \frac{MQ_R}{MQ_E}$  onde  $MQ_R = \frac{SQ_R}{gl_R}$  e  $MQ_E = \frac{SQ_E}{gl_E}$

Critério de rejeição:  $f_0 > f_\alpha(k, n - k + 1)$

## Significância do modelo de regressão

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média quadrática	Estatística de teste f
Regressão	$SQ_R$	$k$	$MQ_R = \frac{SQ_R}{k}$	$\frac{MQ_R}{MQ_E}$
Erro	$SQ_E$	$n - (k + 1)$	$MQ_E = \frac{SQ_E}{n - (k + 1)}$	
Total	$SQ_T$	$n - 1$		

### Decisão:

- i) Se  $f_0 > f_\alpha(k, n - (k + 1))$  rejeita-se  $H_0$ , o que permite concluir que há pelo menos uma variável independente que contribui significativamente para explicar a variação da variável dependente  $Y$ . Diz-se que o modelo de regressão linear apresentado é significativo.
- ii) Se  $f_0 \leq f_\alpha(k, n - (k + 1))$  não se rejeita  $H_0$ , o que permite concluir que há um mau ajuste do modelo linear apresentado. Diz-se que o modelo não é significativo e não deve ser utilizado.



## Coeficiente de determinação

### Coeficiente de determinação

Tal como no modelo RLS o coeficiente de determinação é dado por:

$$R^2 = \frac{SQ_R}{SQ_T} = 1 - \frac{SQ_E}{SQ_T}$$

Este coeficiente é uma medida da proporção da variação da variável resposta  $Y$  que é explicada pela equação de regressão. Também é utilizado o coeficiente de determinação ajustado que é dado por:

$$R_{ajust.}^2 = 1 - \frac{\frac{SQ_E}{n-(k+1)}}{\frac{SQ_T}{n-1}} = 1 - \left( \frac{n-1}{n-(k+1)} \right) (1 - R^2)$$

## Intervalos de confiança

Os estimadores  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$  têm uma distribuição normal multivariada. Portanto  $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 C)$ , com  $C = (X^T X)^{-1}$  que é uma matriz simétrica. Logo,

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 C_{jj})$$

$C_{jj}$  - é o elemento  $j$  da diagonal principal da matriz  $C$ .

A variância  $\sigma^2$  é estimada por  $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{SQ_E}{n-(k+1)} = MQ_E$

### I.C. para os coeficientes de regressão

O intervalo de confiança a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para os coeficientes de regressão,  $\beta_j$ 's, com  $j = 0, 1, \dots, k$  é dado por

$$\left[ \hat{\beta}_j - t_{1-\alpha/2}[n - (k + 1)] \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}, \hat{\beta}_j + t_{1-\alpha/2}[n - (k + 1)] \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \right]$$

## Intervalos de confiança

No caso de se pretender estimar o valor esperado da resposta  $Y$  dado  $x_0^T = [1 \ x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0k}]$ . O valor esperado de  $\hat{Y}$ ,  $E[\hat{Y}_0]$  considerando  $x_0$ , é estimado por  $\hat{\mu}_{Y_0} = x_0^T \hat{\beta}$  e a variância  $V[\hat{Y}_0]$  é estimada por  $\hat{\sigma}^2 x_0^T (X^T X)^{-1} x_0 = \hat{\sigma}^2 x_0^T C x_0$

### I.C. para os valores esperados $E(Y_0)$

O intervalo de confiança a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $E[Y_0]$  é dado por

$$\left[ \hat{\mu}_{Y_0} - t_{1-\alpha/2[n-(k+1)]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 x_0^T C x_0}, \hat{\mu}_{Y_0} + t_{1-\alpha/2[n-(k+1)]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 x_0^T C x_0} \right]$$

## Intervalos de confiança

No caso de se pretender estimar a previsão da resposta  $Y$  dado  $x_0^T = [1 \ x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0k}]$ , vamos considerar uma estimativa da previsão como  $\hat{y}_0 = x_0^T \hat{\beta}$ . É possível mostrar que

$$T = \frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + x_0^T C x_0)}} \sim t_{n-(k+1)}$$

### I.C. para a previsão da resposta $Y_0$

O intervalo de confiança a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para a previsão da resposta  $Y_0$  é dado por

$$\left[ \hat{y}_0 - t_{1-\alpha/2[n-(k+1)]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + x_0^T C x_0)}, \hat{y}_0 + t_{1-\alpha/2[n-(k+1)]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + x_0^T C x_0)} \right]$$

## Testes de hipóteses

Um teste de hipóteses para os coeficientes de regressão  $\beta_j$ 's obedece ao seguinte procedimento:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

$$\text{Estatística de teste : } T_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}}$$

$$\text{Critério de rejeição: } |t_0| > t_{1-\alpha/2, n-(k+1)}$$

**Decisão:** A rejeição de  $H_0$  permite concluir que o regressor  $x_j$  tem poder explicativo. A não rejeição de  $H_0$  permite concluir que o regressor  $x_j$  pode ser "eliminado".

## Exemplo

Considere a seguinte tabela de 12 observações.

$Y$  - variável dependente

$X_1$  e  $X_2$  - variáveis independentes

observação	Y	X1	X2
1	2256	80	8
2	2340	93	9
3	2426	100	10
4	2293	82	12
5	2330	90	11
6	2368	99	8
7	2250	81	8
8	2409	96	10
9	2364	94	12
10	2379	93	11
11	2440	97	13
12	2364	95	11

## Exemplo

O modelo a ser ajustado é:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \text{ com forma matricial } \mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Começamos por determinar o vetor de estimadores dos mínimos quadrados  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ . Onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 80 & 8 \\ 1 & 93 & 9 \\ 1 & 100 & 10 \\ 1 & 82 & 12 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 93 & 11 \\ 1 & 97 & 13 \\ 1 & 95 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 80 & 93 & 100 & 82 & \dots & 93 & 97 & 95 \\ 8 & 9 & 10 & 12 & \dots & 11 & 13 & 11 \end{bmatrix}$$

## Exemplo

As restantes matrizes necessárias

$$X^T X = \begin{bmatrix} 12 & 1100 & 123 \\ 1100 & 101370 & 11308 \\ 123 & 11308 & 1293 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 16,4449 & -0,1614 & -0,1527 \\ -0,1614 & 0,0020 & -0,0020 \\ -0,1527 & -0,0020 & 0,0331 \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 28219 \\ 2591095 \\ 289809 \end{bmatrix}$$



## Exemplo

Obtemos o vetor de estimadores dos coeficientes de regressão

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 1562,7301 \\ 7,5084 \\ 9,8131 \end{bmatrix}$$

O modelo de regressão fica definido por

$$\hat{Y} = 1562,7301 + 7,5084X_1 + 9,8131X_2$$

## Exemplo- significância do modelo obtido

Aplicamos o teste de hipóteses

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0, k = 2$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ para algum } j, j = 1, 2$$

**Estatística de teste:**  $F_0 = \frac{MQ_R}{MQ_E}$  onde  $MQ_R = \frac{SQ_R}{gl_R}$  e  $MQ_E = \frac{SQ_E}{gl_E}$

**Critério de rejeição:**  $f_0 > f_\alpha(k, n - (k + 1)) = f_\alpha(2, 12 - (2 + 1))$

$$SQ_T = Y^T Y - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} = Y^T Y - n\bar{y}^2 = 41468,9167$$

$$SQ_R = \hat{\beta}^T X^T Y - n\bar{y}^2 = 38223,5606$$

$$SQ_E = Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y = 3245,3561$$

## Exemplo- significância do modelo obtido

Sumariamos na seguinte tabela Anova:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média quadrática	Estatística de teste $f$
Regressão	38223,5606	2	$MQ_R = 19111,7803$	$\frac{MQ_R}{MQ_E} \approx 53,0007$
Erro	3245,3561	9	$MQ_E = 360,5951$	
Total	41468,9167	11		

Decisão: Observando a tabela, verificamos que  $f_0 \approx 53,0007$ .

Considerando  $\alpha = 0,05$ , obtemos  $f_{0,05(2,9)} \approx 4,2565$ . Como  $f_0 \approx 53,0007 > 4,2565$ , rejeita-se  $H_0$ , o que permite concluir que este modelo de regressão é significativo.

## Exemplo- Coeficiente de determinação

Verificamos que o modelo de regressão

$\hat{Y} = 1562,7301 + 7,5084X_1 + 9,8131X_2$  é significativo.

O valor do coeficiente de determinação múltiplo é dado por:

$$R^2 = \frac{SQ_R}{SQ_T} = \frac{38223,5606}{41468,9167} = 0,9217$$

O valor do coeficiente de determinação **ajustado** é dado por:

$$R_{ajust.}^2 = 1 - \left( \frac{n-1}{n-(k+1)} \right) (1 - R^2) = 1 - \frac{11}{9} (1 - 0,9217) = 0,9043$$

## Exemplo- Intervalos de confiança

### I.C. para o coeficiente de regressão $\beta_2$

O **intervalo de confiança** a 95% para o coeficiente de regressão,  $\beta_2$  é dado por

$$\left] \hat{\beta}_2 - t_{0,975[12-(2+1)]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{22}} , \hat{\beta}_2 + t_{0,975[12-(2+1)]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{22}} \right[$$

Com

$$\hat{\beta}_2 = 9,8131$$

$$\hat{\sigma}^2 = MQ_E = 360,5951$$

$$C_{22} = 0,0331 \text{ , elemento da diagonal principal da matriz } (X^T X)^{-1}$$

$$t_{0,975[12-(2+1)]} = t_{0,975[9]} = 2,2622$$

$$\text{O } I.C._{95\%}(\beta_2) = ]1,9990, 17,6272[$$

## Exemplo- Intervalos de confiança

Consideremos  $x_1 = 80$  e  $x_2 = 8$ , isto é ,  $x_0^T = [1 \quad 80 \quad 8]$

I.C. para o valor esperado  $E(Y_0)$

O intervalo de confiança a 95% para  $E[Y_0]$  é dado por

$$\left[ \hat{\mu}_{Y_0} - t_{0,975[9]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 x_0^T C x_0} , \hat{\mu}_{Y_0} + t_{0,975[9]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 x_0^T C x_0} \right]$$

Onde

$$\hat{\mu}_{Y_0} = x_0^T \hat{\beta} = [1 \quad 80 \quad 8] \begin{bmatrix} 1562,7301 \\ 7,5084 \\ 9,8131 \end{bmatrix} = 2241,9060$$

## Exemplo- Intervalos de confiança

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2 x_0^T C x_0 &= \\
 360,5951 \begin{bmatrix} 1 & 80 & 8 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} 16,4449 & -0,1614 & -0,1527 \\ -0,1614 & 0,0020 & -0,0020 \\ -0,1527 & -0,0020 & 0,0331 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 80 \\ 8 \end{bmatrix} \\
 &= 149,5319
 \end{aligned}$$

Assim, o  $I.C_{.95\%}(\mu_{Y_0}) = ]2214,2436 ; 2269,5684[$

## Exemplo- Intervalos de confiança

Consideremos novamente  $x_1 = 80$  e  $x_2 = 8$ . Pretendemos estimar a previsão da resposta  $Y$  dado  $x_0^T = [1 \ 80 \ 8]$

### I.C. para a previsão da resposta $Y_0$

O intervalo de confiança a 95% para a previsão da resposta  $Y_0$  é dado por

$$\left[ \hat{y}_0 - t_{0,975[9]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + x_0^T C x_0)} , \hat{y}_0 + t_{0,975[9]} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + x_0^T C x_0)} \right]$$

Onde

$$\hat{y}_0 = x_0^T \hat{\beta} = 2241,9060$$



## Exemplo- Intervalos de confiança

$$x_0^T C x_0 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 80 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16,4449 & -0,1614 & -0,1527 \\ -0,1614 & 0,0020 & -0,0020 \\ -0,1527 & -0,0020 & 0,0331 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 80 \\ 8 \end{bmatrix} = 0,4147$$

$$\hat{\sigma}^2 (1 + x_0^T C x_0) = 510,1270$$

Assim

$$I.C._{95\%}(y_0) = ]2190,8129 ; 2292,9990[$$

## Exemplo - Testes de hipóteses

Pretende-se verificar se é possível admitir que o coeficiente de regressão  $\beta_2 \neq 0$  com um nível de significância de 5%.

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$$

**Estatística de teste:**  $T_0 = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{22}}}$  onde  $\hat{\sigma}^2 = MQ_E = 360,5951$  e

$$t_0 = \frac{9,8131}{\sqrt{360,5951 \times 0,0331}} = 2,8409$$

**Decisão:**

$|t_0| > t_{0,975,[9]} \approx 2.2622$ , rejeita-se  $H_0$ . O teste é conclusivo, o que quer dizer que a um nível de significância de 5% há evidência estatística suficiente para se afirmar que o coeficiente de regressão  $\beta_2 \neq 0$ .