

Instituto Tecnológico de Celaya  
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Mecánica de Materiales  
**III. Flexión \***

Pedro Jorge De Los Santos  
delossantosmfq@gmail.com

## Índice

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b> |
| <b>2. Tipos de vigas, cargas y apoyos</b>                                  | <b>2</b> |
| <b>3. Flexión pura y flexión no uniforme</b>                               | <b>3</b> |
| <b>4. Cortante y momento en vigas: conceptos básicos y diagramas</b>       | <b>4</b> |
| 4.1. Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector . . . . . | 7        |
| 4.2. Construcción de diagramas de cortante y momento . . . . .             | 9        |
| 4.2.1. Reglas para trazar diagramas de cortante y momento . . . . .        | 12       |

## 1 Introducción

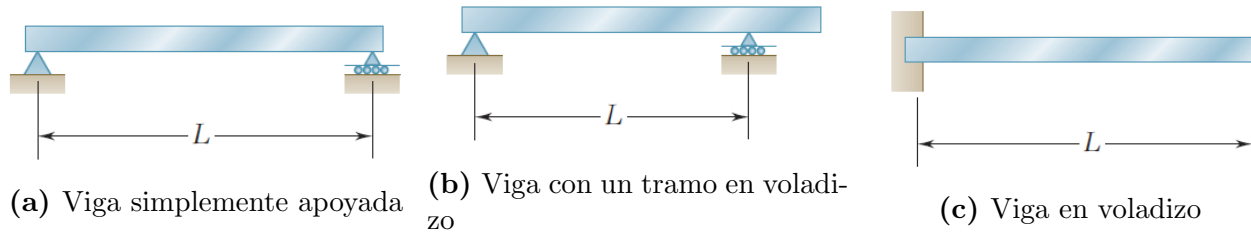
Los elementos estructurales suelen clasificarse de acuerdo con los tipos de cargas que soportan. Por ejemplo, una barra cargada axialmente soporta fuerzas con sus vectores dirigidos a lo largo del eje de la barra y una barra en torsión soporta pares de torsión que tienen sus vectores momento dirigidos a lo largo del eje. En esta unidad iniciamos nuestro estudio de las vigas, que son elementos estructurales sometidos a cargas laterales, es decir, fuerzas o momentos que tienen sus vectores perpendiculares al eje de la barra.

---

\*Éstas notas no sustituyen la bibliografía básica, tómelas simplemente como una referencia rápida sobre el contenido abordado en la unidad temática correspondiente a Flexión.

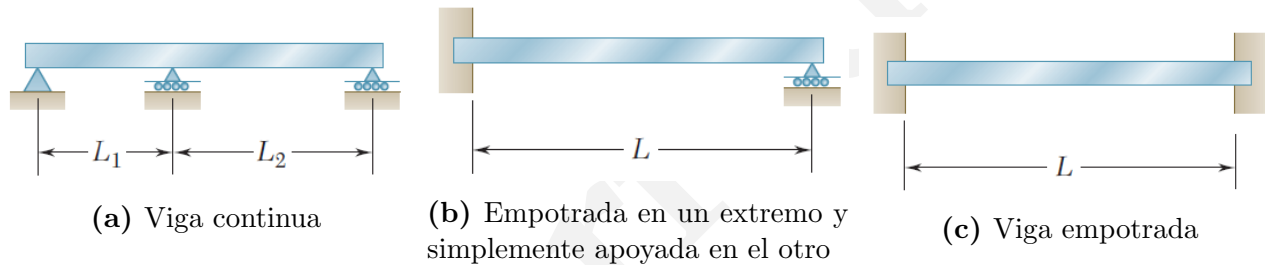
## 2 Tipos de vigas, cargas y apoyos

Las vigas se pueden clasificar de acuerdo con la manera en que se encuentran apoyadas, tal como se muestra en la figura 1. Note que las reacciones en los soportes de las vigas involucran un total de tres incógnitas y pueden determinarse a partir de las ecuaciones de la estática ( $\Sigma F_x = 0$ ;  $\Sigma F_y = 0$ ;  $\Sigma M = 0$ ).



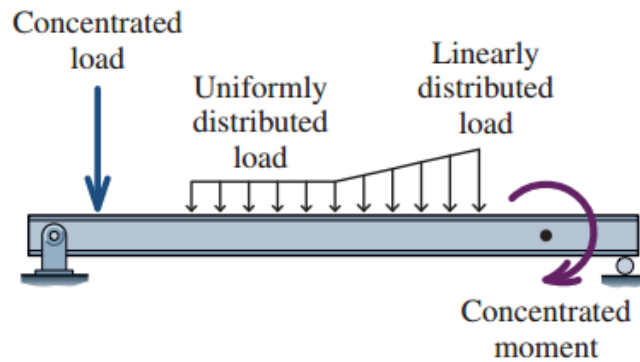
**Figura 1** Vigas estáticamente determinadas

Existen casos en que las reacciones en las vigas no pueden ser determinadas directamente de las ecuaciones de la estática, siendo los más comunes aquellos que se muestran en la figura 2. En estos casos, es necesario conocer adicionalmente el comportamiento elástico de la viga cuando se deforma.



**Figura 2** Vigas estáticamente indeterminadas

Existen algunos tipos de cargas comunes en las vigas (ver figura 3). Las cargas que actúan en una porción muy pequeña de una viga son llamadas **cargas concentradas** o **cargas puntuales**. Las cargas que están *esparcidas* en una porción de la viga se conocen como **cargas distribuidas**. Las cargas distribuidas que son constantes en magnitud son llamadas **cargas distribuidas uniformes**. En algunos casos la carga distribuida puede variar linealmente en la porción que actúa, conociéndose en este caso como **carga linealmente distribuida**. Una viga también puede estar sujeta **momentos concentrados**, los cuales tienden a flexionar y rotar la viga.



**Figura 3** Tipos de cargas comunes en vigas

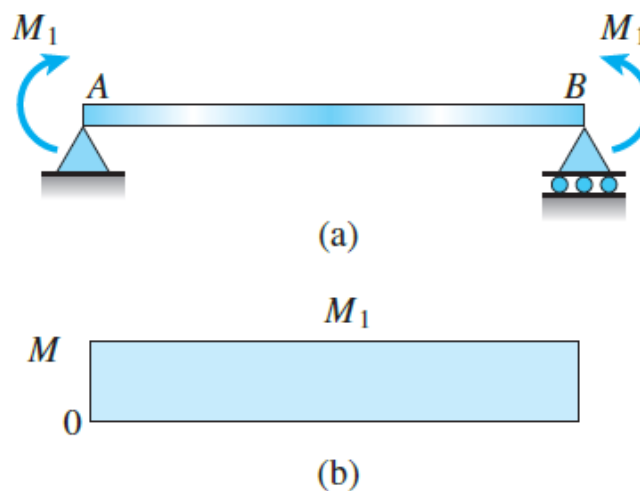
### 3 Flexión pura y flexión no uniforme

Al analizar vigas, con frecuencia es necesario distinguir entre dos casos de flexión:

- Flexión pura
- Flexión no uniforme

**Flexión pura** se refiere a la flexión de una viga ante un momento flector constante. Por tanto, la flexión pura ocurre sólo en regiones de una viga donde la fuerza cortante es cero, una condición derivada de las relaciones de cortante y momento que se verán posteriormente.

Como ejemplo de flexión pura podemos considerar una viga cargada por dos pares  $M_1$  que tienen la misma magnitud pero que actúan en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 4. Esa condición de carga produce un momento flexionante constante  $M = M_1$  en toda la longitud de la viga.

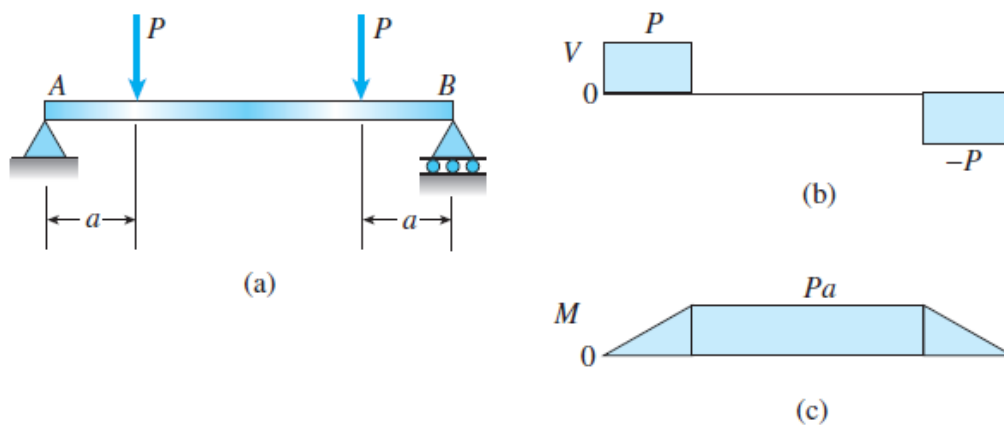


**Figura 4** Flexión pura

**Flexión no uniforme** se refiere a la flexión en presencia de fuerzas cortantes, lo cual significa que el momento flexionante cambia conforme nos movemos a lo largo del eje de la viga.

La viga simplemente apoyada de la figura 5 es un ejemplo de una viga que está parcialmente en flexión pura y parcialmente en flexión no uniforme, como se observa en los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

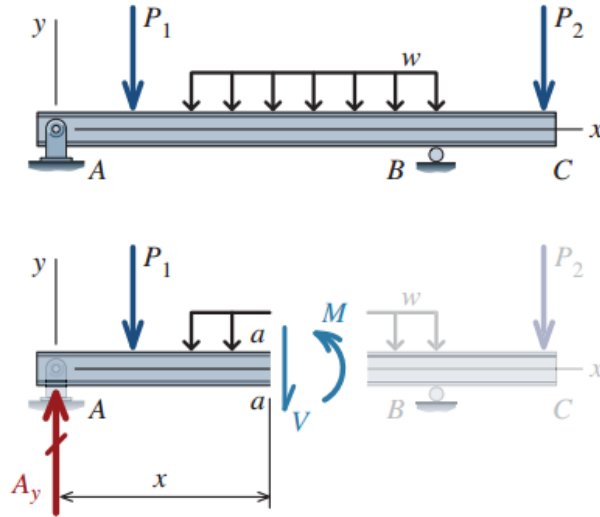
La parte central de la viga está en flexión pura debido a que la fuerza cortante es cero y el momento flector constante. Las porciones cercanas a los extremos de la viga están en flexión no uniforme debido a la presencia de las fuerzas cortantes y que el momento flexionante es variable.



**Figura 5** Flexión no uniforme

## 4 Cortante y momento en vigas: conceptos básicos y diagramas

Para determinar los esfuerzos desarrollados por la aplicación de cargas, se hace necesario primero determinar las fuerzas internas (fuerza cortante  $V$  y momento flexionante  $M$ ) que actúan en la viga en cualquier punto de interés. El enfoque general para calcular las fuerzas internas se ilustra en la figura 6, una viga simplemente apoyada con un tramo en voladizo está sometida a dos fuerzas puntuales  $P_1$  y  $P_2$  además de una carga distribuida  $w$ . Un diagrama de cuerpo libre puede obtenerse cortando una sección a una distancia  $x$  del apoyo en A. El plano de corte expone una fuerza cortante interna  $V$  y un momento flexionante interno  $M$ . Es importante recordar que si la viga está en equilibrio, entonces cualquier porción de ésta que consideremos cumplirá esa condición. Consecuentemente, la porción que se ha cortado deberá estar en equilibrio estático y entonces pueden utilizarse esas ecuaciones para determinar los valores para  $V$  y  $M$  actuando en una coordenada  $x$  cualesquiera.

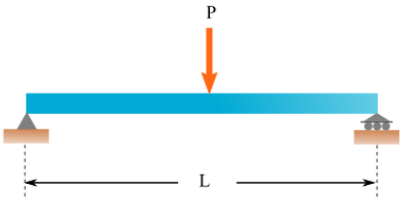
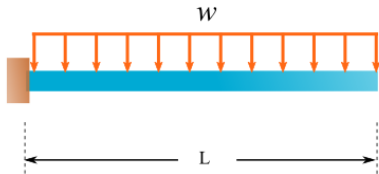
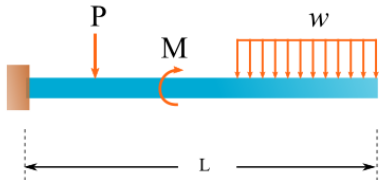


**Figura 6** Seccionado de una viga

Como se ha mencionado, producto de las fuerzas externas aplicadas las vigas desarrollan fuerzas internas que varían a lo largo de la longitud de la viga. Para analizar de manera apropiada los esfuerzos producidos en una viga, es necesario determinar el valor de  $V$  y  $M$  para todos los puntos que definen la longitud de la viga. Lo anterior se gráfica, normalmente, en función de la distancia  $x$  y suelen llamarse **diagrama de cortante** y **diagrama de momento**, estos diagramas condensan la información acerca de todas las fuerzas cortantes y momentos flexionantes actuando en la viga, haciendo que el trabajo de indentificar los valores máximos para  $V$  y  $M$  sea más sencillo, luego, esos valores extremos son utilizados para calcular los esfuerzos máximos, tanto normales como cortantes.

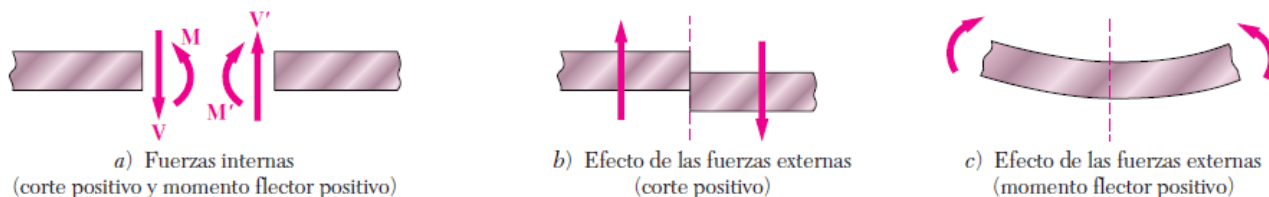
Dado que habrá diversos tipos de cargas actuando en la viga, las funciones que describen el comportamiento del cortante y momento flexionante,  $V(x)$  y  $M(x)$ , pueden no ser continuas en toda la viga. Por ello en muchos casos se hace necesario que esas ecuaciones se escriban para los diversos tramos de la viga en forma de *funciones a trozos*. Entiéndase por tramos aquellas porciones de la viga que están delimitadas por la ubicación de cargas puntuales y reacciones en los apoyos, o bien la porción que ocupa una carga distribuida. En la tabla 1 se muestran algunas configuraciones de cargas y el número de tramos en cada caso.

**Tabla 1** Vigas y tramos

| Disposición de carga   | No. de tramos |
|--|---------------|
|   | 2             |
|   | 1             |
|  | 4             |

Una consideración importante es la convención de signos a utilizar, ya que permite homogeneizar los procedimientos. En general, el cortante  $V$  y el momento flector  $M$  en un punto dado de una viga se consideran positivos cuando las fuerzas internas y los pares que actúan en cada porción de la viga se dirigen como se indica en la figura 7a. A modo de recordatorio puede advertir lo siguiente:

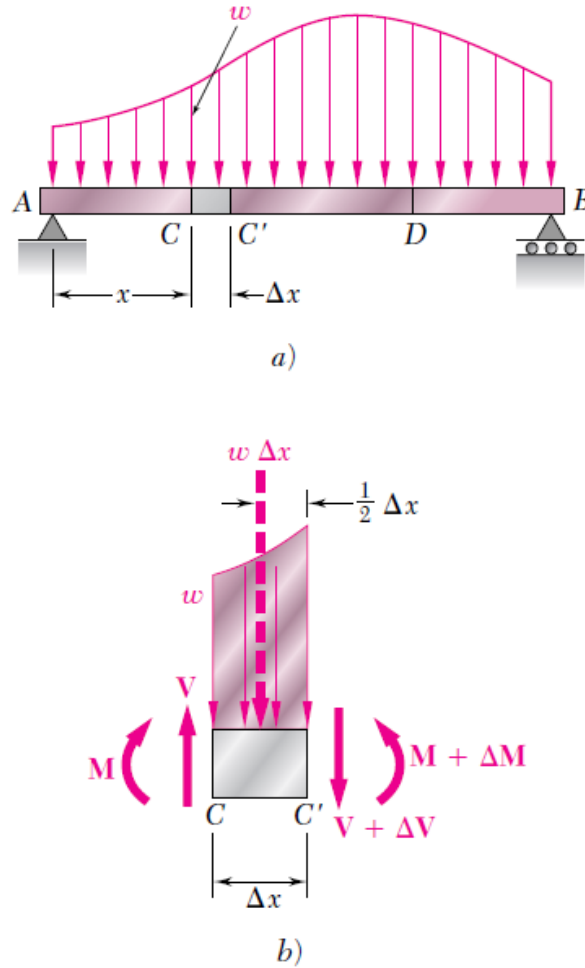
- El cortante en cualquier punto de la viga es positivo cuando las fuerzas externas aplicadas sobre la viga tienden a cortarla como se muestra en el esquema de la figura 7b.
- El momento flector en un punto de la viga es positivo cuando las fuerzas externas aplicadas sobre la viga tienden a flexionarla como se indica en la figura 6c.



**Figura 7** Convención de signos

#### 4.1 Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector

Considere una viga simplemente apoyada como la mostrada en la figura 8 cargada como se indica. Si *cortamos* una sección delimitada por CC' y dibujamos su diagrama de cuerpo libre (ver figura 8b), las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud  $w\Delta x$  y fuerzas y pares internos en C y en C'. Ya que el corte y el momento flector se han supuesto positivos, las fuerzas y pares se dirigirán como se indica en la figura 8b.



**Figura 8** Convención de signos

Indicando que la sumatoria de fuerzas en dirección vertical es cero, se tiene:

$$V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\Delta x$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre  $\Delta x$  y tomando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se tiene que:

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (1)$$

La ecuación indica que para una viga cargada como se muestra en la figura 8a, la pendiente  $dV/dx$  de la curva cortante es negativa; el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

Integrando la ecuación anterior entre los puntos C y D se escribe:

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w dx \quad (2)$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre C y D})$$

Debe observarse que la ecuación 1 no es válida en un punto donde se aplique una carga concentrada, debido a las discontinuidades presentes. Lo mismo aplica para la ecuación 2, que funcionará sólo para cargas cuya distribución es sucesiva.

Tomando nuevamente como referencia la figura 8, y escribiendo ahora que la suma de momentos alrededor de C' es cero, se tiene:

$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x - \frac{1}{2}w(\Delta x)^2$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre  $\Delta x$  y tomando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se tiene que:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (3)$$

La ecuación 3 indica que la pendiente  $dM/dx$  de la curva de momento flector es igual al valor del cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde el cortante tenga un valor bien definido, esto es, en cualquier punto donde no se encuentre aplicada una carga concentrada. La ecuación 3 también muestra que  $V = 0$  en puntos donde  $M$  es máximo. Esta consideración será muy útil para determinar los posibles puntos críticos de la viga.

Integrando la ecuación 3 entre los puntos C y D se tiene:

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx \quad (4)$$

$$M_D - M_C = (\text{área bajo la curva de cortante entre C y D})$$

Las ecuaciones anteriores todavía son válidas si se aplica una carga puntual, en tanto la curva de momento no tenga discontinuidades. No obstante, si se aplica un par dejan de ser válidas, puesto que

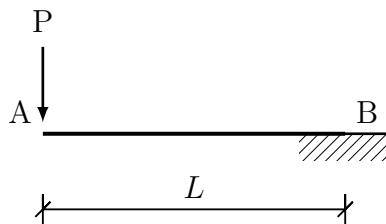


los pares causan un cambio súbito (discontinuidad) en la gráfica del momento flector.

## 4.2 Construcción de diagramas de cortante y momento

Los diagramas de cortante y momento son gráficas en coordenadas rectangulares de las funciones cortante  $V(x)$  y momento  $M(x)$ , y como tal se grafica en el eje horizontal las coordenada  $x$  y en el vertical el valor que toma la función en esa coordenada.

Vamos a tomar un ejemplo básico para mostrar las consideraciones elementales. Suponga que tenemos una viga empotrada en un extremo y con un carga concentrada  $P$  en el otro, como se muestra en la figura.



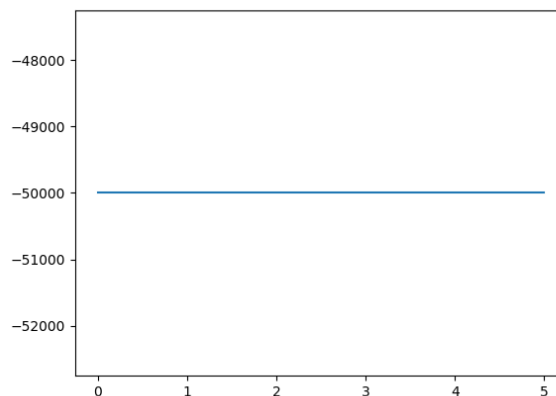
Si seccionamos podemos obtener que las relaciones para el cortante y momento son:

$$V = -P$$

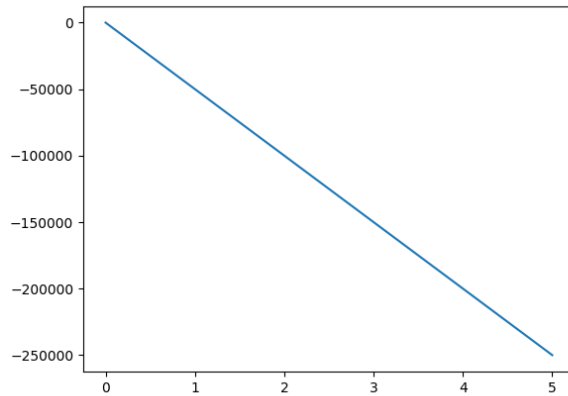
$$M = -Px$$

¿Cómo llevamos estas expresiones a los diagramas de cortante y momento?. Simple, sólo considere graficar esas funciones en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ .

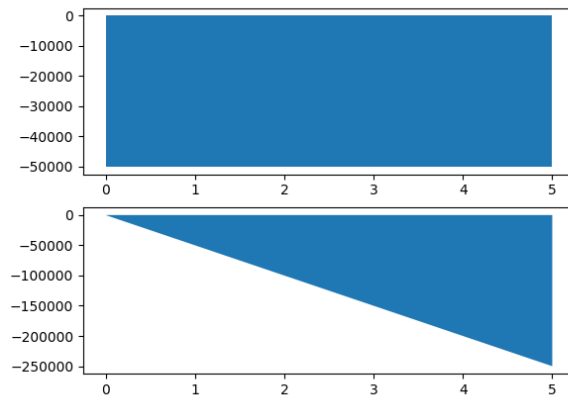
Notará que  $V$  es una función constante y tendrá por tanto la apariencia de una linea recta horizontal ubicada en  $V = -P$ , considerando que  $V$  es la ordenada.



En tanto, de  $M(x)$  podemos decir que es una función lineal con pendiente negativa ( $-P$ ) que pasa por el origen.

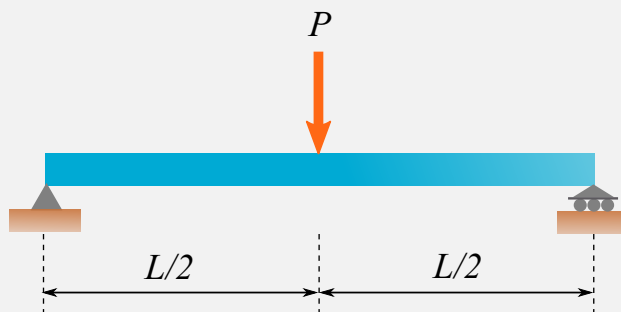


Normalmente, se acostumbra a *rellenar* el área entre las curvas y los ejes coordenados, para los diagramas de cortante y momento.



### Ejemplo resuelto

*Para la viga y carga mostrada en la figura, dibuje los diagramas de cortante y momento*



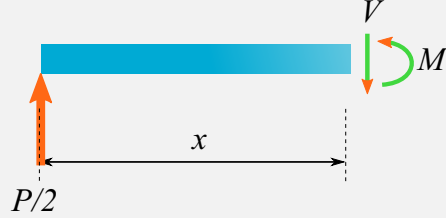
### Solución

Para poder trazar los diagramas de cortante y momento debemos primeramente obtener las expresiones correspondientes en cada sección de la viga. Y antes de eso, calcular las reacciones en A

y B. Por simetría de la carga se tiene que  $R_A = R_B$  y están dadas por:

$$R_A = R_B = P/2$$

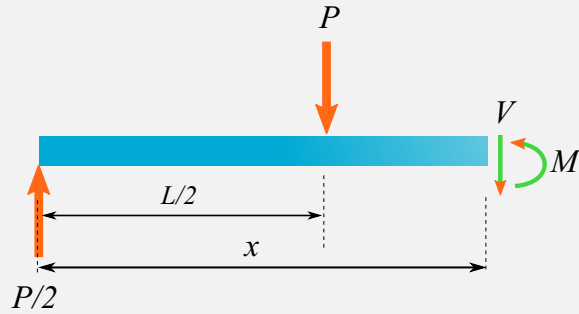
Para la sección A-C ( $0 \leq x \leq L/2$ )



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad P/2 - V = 0 \quad \rightarrow \quad V = \frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \Sigma M = 0; \quad -(P/2)(x) + M = 0 \quad \rightarrow \quad M = \frac{Px}{2}$$

Para la sección C-B ( $L/2 \leq x \leq L$ )

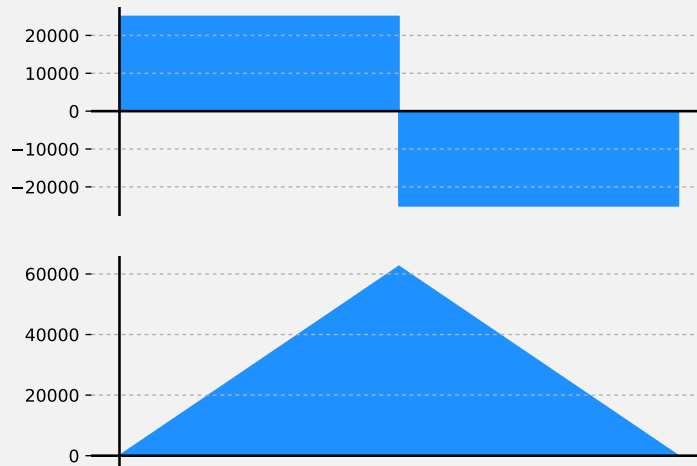


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad P/2 - P - V = 0 \quad \rightarrow \quad V = -\frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \Sigma M = 0; \quad -(P/2)(x) + P(x - L/2) + M = 0 \quad \rightarrow \quad M = -\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2}$$

Note que en este caso, al ser una viga compuesta de dos tramos, tanto la función cortante como la de momento flector son funciones definidas a trozos, donde:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{P}{2} & \text{para } 0 \leq x \leq L/2 \\ -\frac{P}{2} & \text{para } L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad M(x) = \begin{cases} \frac{Px}{2} & \text{para } 0 \leq x \leq L/2 \\ -\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2} & \text{para } L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$



#### 4.2.1. Reglas para trazar diagramas de cortante y momento

Las que se listan enseguida son recomendaciones que deberá tener en cuenta al momento de trazar diagramas de cortante y momento.

##### Reglas para el diagrama de cortante

- El diagrama de cortante es discontinuo en los puntos sujetos a fuerzas concentradas  $P$ . Una fuerza  $P$  hacia arriba causa que el diagrama de cortante presente un *salto* hacia arriba. Una fuerza  $P$  hacia abajo causa que el diagrama de cortante presente un *salto* hacia abajo.
- El cambio en la fuerza de cortante interna entre dos puntos cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$  es igual al área bajo la curva de la carga distribuida.
- En cualquier punto  $x$ , la pendiente del diagrama de cortante es igual a la intensidad de carga distribuida  $w$ .

##### Reglas para el diagrama de momento

- El diagrama de cortante es discontinuo en los puntos sujetos a momentos o pares concentrados  $M_O$ . Un momento  $M_O$  en sentido horario causa que el diagrama de momento presente un *salto* hacia arriba. Un momento  $M_O$  en sentido antihorario causa que el diagrama de cortante presente un *salto* hacia abajo.
- El cambio en el momento flexionante interno entre dos puntos cualesquiera  $x_1$  y  $x_2$  es igual al área bajo la curva del diagrama de cortante.
- En cualquier punto  $x$ , la pendiente del diagrama de momento es igual a la intensidad de la fuerza cortante interna  $V$ .

## Formas generales de los diagramas

De manera general, la forma de los diagramas de cortante y momento pueden relacionarse a partir de la ecuación:

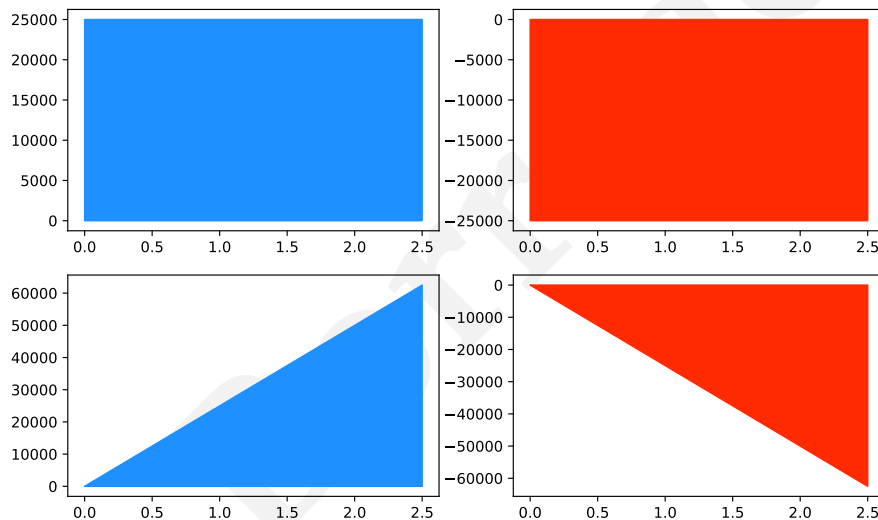
$$\frac{dM}{dx} = V$$

$M(x)$  es normalmente una función polinómica de grado  $n$ , luego, consecuentemente,  $V(x)$  viene a ser una función polinómica de grado  $n - 1$ . De modo que es relativamente sencillo deducir la forma que tendrá una gráfica de momento a partir de la gráfica, y viceversa. Si  $M(x)$  es un polinomio de grado  $n$ :

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Entonces,

$$V(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

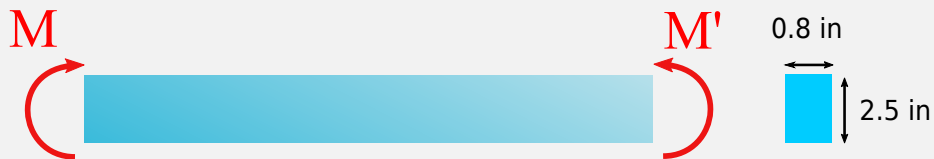




De lo anterior, si tenemos una fuerza cortante constante, entonces tendremos una

### Ejemplo resuelto

Una barra de acero de 0.8x2.5 in de sección transversal rectangular está sometida a dos pares iguales y opuestos actuando en el plano vertical de simetría de la barra. Calcule el valor del momento flector  $M$  que causa la fluencia en la barra. Asuma  $\sigma_Y = 36$  ksi



### Solución

Dado que el eje neutro pasa a través del centroide de la sección transversal, se tiene que  $c = 1.25$  in. Además, se sabe que el momento de inercia para un área rectangular viene dada por:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.8)(2.5)^3 = 1.042 \text{ in}^4$$

El esfuerzo máximo para una viga viene dado por:

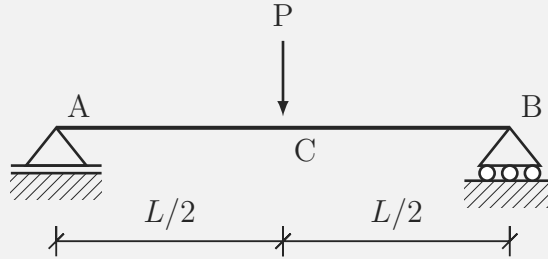
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

Luego, el valor de  $\sigma_m$  será el valor de la resistencia a la fluencia  $\sigma_y$ , entonces:

$$M = \frac{\sigma_m I}{c} = \frac{(1.042)(36 \times 10^3)}{1.25} = 30 \text{ kip}\cdot\text{in}$$

### Ejemplo resuelto

Para la viga mostrada en la figura, calcule la deflexión en el punto C. Utilice funciones de singularidad.



**Solución:**

Por simetría de la carga, podemos observar que ambas reacciones son iguales y de magnitud equivalente a la mitad de la carga puntual aplicada, es decir:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

Estableciendo la función de carga:

$$w(x) = -\frac{P}{2}\langle x \rangle^{-1} + P\langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} - \frac{P}{2}\langle x - L \rangle^{-1}$$

Integrando para obtener las expresiones para el cortante y momento:

$$V(x) = \frac{P}{2}\langle x \rangle^0 - P\langle x - \frac{L}{2} \rangle^0$$

$$M(x) = \frac{P}{2}\langle x \rangle^1 - P\langle x - \frac{L}{2} \rangle^1$$

Podemos escribir la ecuación diferencial para la curva elástica de la viga:

$$EIy'' = M(x) = \frac{P}{2}\langle x \rangle^1 - P\langle x - \frac{L}{2} \rangle^1$$

Integrando e incluyendo las constantes de integración:

$$EI\theta = \frac{P}{4}\langle x \rangle^2 - \frac{P}{2}\langle x - \frac{L}{2} \rangle^2 + C_1$$

$$EIy = \frac{P}{12}\langle x \rangle^3 - \frac{P}{6}\langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 + C_1x + C_2$$

Evalutando la condición de frontera para el apoyo en A,  $[x = 0; y = 0]$ , se tiene que  $C_2 = 0$ .

Evaluable la condición de frontera para el apoyo en B,  $[x = L; y = 0]$ , se tiene:

$$0 = \frac{P}{12} \langle L \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle L - \frac{L}{2} \rangle^3 + C_1(L)$$

$$0 = \frac{PL^3}{12} - \frac{PL^3}{48} + C_1(L)$$

$$C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

Entonces, la ecuación de la curva elástica viene dada por:

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{12} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 - \frac{PL^2 x}{16} \right)$$

Para calcular la deflexión en C basta con hacer  $x = L/2$  en la ecuación anterior, tomando en cuenta las consideraciones para una función de singularidad:

$$y_C = y(L/2) = -\frac{PL^3}{48}$$

## Referencias

- [1] Beer, F. P. (2013). Mecanica de materiales. Mexico, D.F: McGraw-Hill Interamericana.
- [2] Gere, J. M., Goodno, B. J., León, C. J. (2014). Mecánica de materiales. Australia: Thomson Learning.
- [3] Gere, J., Timoshenko, S. (1998). Mecánica de materiales. México, D.F: Thomson Learning.
- [4] Hibbeler, R. C., Murrieta, M. J. E., Molina, S. O., Saldana, S. S. (2011). Mecanica de materiales. Naucalpan de Juarez, Mexico: Pearson educacion.