Mecánica de Materiales

II. Torsión

Pedro Jorge De Los Santos

4 de marzo de 2017

Instituto Tecnológico de Celaya
Departamento de Ingeniería Mecánica

Introducción

Torsión

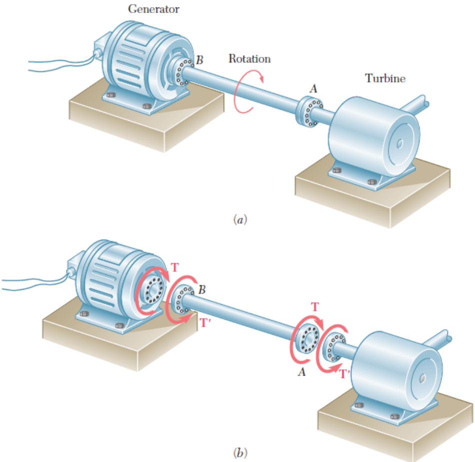


Fig. 3.2 Transmission shaft.

Análisis preliminar de esfuerzos

Consideremos un eje sometido a torsión. Efectuando un corte perpendicular:

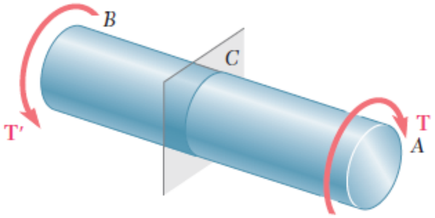
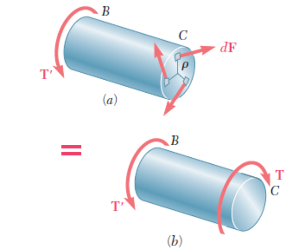


Fig. 3.3 Shaft subject to torques.

Análisis preliminar de esfuerzos



$$\int \rho \, dF = T$$

dado que $dF = \tau \, dA$, entonces:

$$\int \rho \, (\tau \, dA) = T$$

Deformaciones en un eje circular

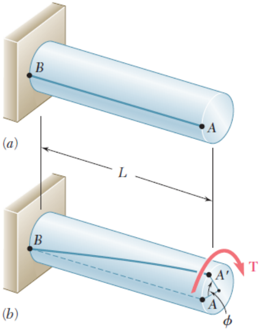
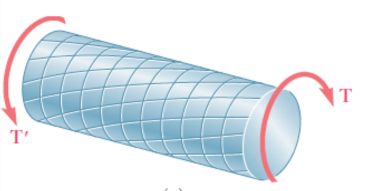


Fig. 3.7 Shaft with fixed support.

- ϕ - Ángulo de giro
- L - Longitud
- T - Par de torsión

Deformaciones en un eje circular



(a)

Propiedades de ejes sometidos a torsión

Cuando un eje circular se somete a torsión todas sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión.

Deformaciones en un eje circular

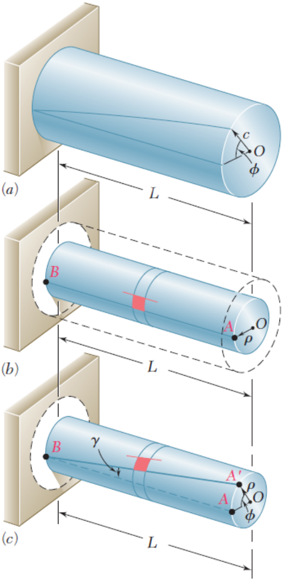


Fig. 3.13 Shearing strain.

Para valores pequeños de γ, puede expresarse la longitud de arco AA' como $AA' = L\gamma$, pero también se tiene que $AA' = \rho\phi$, entonces, $L\gamma = \rho\phi$, o:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

Deformaciones en un eje circular

La deformación a cortante es máxima en la superficie del eje, en donde $\rho = c$, entonces:

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$

Aplicando un poco de álgebra se tiene:

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

Esfuerzos en el rango elástico

Ley de Hooke para esfuerzos a cortante:

$$\tau = G\gamma$$

Multiplicando la ecuación obtenida para γ por G, se tiene:

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{max}$$

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$$

Esfuerzos en el rango elástico

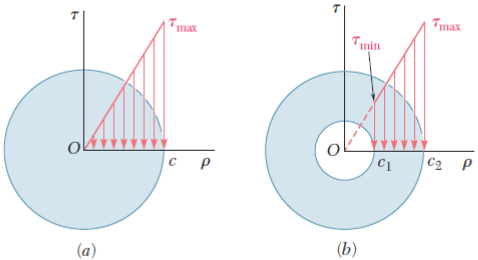


Fig. 3.14 Distribution of shearing stresses.

$$\tau_{min} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{max}$$

Esfuerzos en el rango elástico

De la formulación infinitésimal se tiene:

$$T = \int \rho\tau \, dA = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 \, dA$$

donde $\int \rho^2 \, dA = J$, siendo J el momento polar de inercia respecto a O. Así:

$$T = \frac{\tau_{max} J}{c} \quad \rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

Generalizando:

$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}}$$

Ángulo de giro en el rango elástico

Igualando las siguientes ecuaciones:

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \quad ; \gamma_{max} = \tau_{max}/G$$

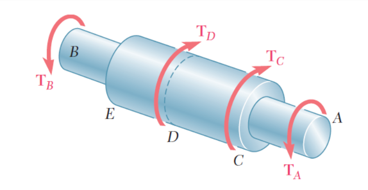
se puede obtener una expresión para el ángulo de giro:

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{JG}}$$

Donde ϕ se expresa en radianes. La relación muestra que, dentro del rango elástico, el ángulo de giro ϕ es proporcional al par de torsión T aplicado al eje.

Ángulo de giro en el rango elástico

La fórmula anterior para el ángulo de giro puede utilizarse si el eje es homogéneo, si tiene una sección transversal uniforme y sólo si está cargado en sus extremos. Si el eje es sometido a par de torsión en lugares distintos a los extremos, o si consta de varias porciones con secciones transversales distintas y/o diversos materiales, debe dividirse en partes que satisfagan individualmente las condiciones requeridas por la ecuación establecida.



Ángulo de giro en el rango elástico

El ángulo total de giro del eje, se obtiene sumando algebraicamente, los ángulos de giro de cada parte componente, expresándose como:

$$\boxed{\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}}$$

El par de torsión interno T_i en cualquier parte del eje se obtiene haciendo un corte a través de esa parte y dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción del eje situada a un lado de la sección.

Ángulo de giro en el rango elástico

En el caso de un eje con sección circular variable, la ecuación del ángulo de giro puede aplicarse a un disco con grosor dx. Y el ángulo de giro total estaría dado por la integración de todos esos discos infinitésimales desde 0 a L, es decir:

$$\boxed{\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG}}$$

Donde, normalmente, J será una función dependiente de x, es decir $J(x)$.

Ejes de transmisión

Las especificaciones principales que deben cumplirse en el diseño de un eje de transmisión son la potencia que debe transmitirse y la velocidad de rotación del eje.

La potencia P asociada con la rotación de un cuerpo rígido sujeto a un par T es:

$$\boxed{P = T\omega}$$

Donde ω es la velocidad angular del cuerpo expresada en rad/s.

Ejes de transmisión

Recuerde también que $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de rotación, es decir, el número de revoluciones o ciclos por segundo. De lo cual se tiene:

$$\boxed{P = 2\pi f T}$$

En el Sistema Internacional de Unidades la potencia se mide en watts (W), el torque en $N \cdot m$ y la frecuencia en Hz (s^{-1})

Referencias

1. Beer, F. P. (2013). Mecanica de materiales. Mexico, D.F: McGraw-Hill Interamericana.
2. Gere, J. M., Goodno, B. J., León, C. J. (2014). Mecánica de materiales. Australia: Thomson Learning.
3. Gere, J., Timoshenko, S. (1998). Mecánica de materiales. México, D.F: Thomson Learning.
4. Hibbeler, R. C., Murrieta, M. J. E., Molina, S. O., Saldana, S. S. (2011). Mecanica de materiales. Naucalpan de Juarez, Mexico: Pearson educacion.

El contenido de esta presentación está basado en las referencias bibliográficas básicas del curso. Si no se indica de manera explícita, las imágenes y diagramas corresponden a la referencia [1].