INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CELAYA

RAÚL ALONSO CASTELÁN ALVA

MECÁNICA DE MATERIALES

INVESTIGACIÓN

LEY DE HOOKE GENERALIZADA. RELACIÓN DE POISSON

27 DE ENERO DE 2017

Ley de Hooke generalizada. Relación de Poisson

Introducción

El coeficiente de Poisson es una constante elástica que proporciona una medida del estrechamiento de la sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a las del estiramiento, su nombre es en honor al físico francés Simeon Poisson.

Y la ley de Hooke formulada originalmente para casos de estiramiento longitudinal, establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo.

En este capítulo se establecerán las relaciones constitutivas que describen el comportamiento de los materiales.

Se consideraran procesos isotérmicos y se utilizará tensores cartesianos en su descripción.

Objetivos

Conocer sobre las bases de la mecánica de materiales, viendo de primera mano la Ley de Hooke generalizada y la relación de Poisson ya que son conceptos básicos para entender la resolución de problemas que incluyen deformación unitaria en vigas y estructuras

Saber sobre cómo se aplican estos conceptos y fórmulas en la vida diaria de un ingeniero multidisciplinario

Desarrollo

Robert Hooke, británico contemporáneo de Issac Newton enumera la Ley que lleva su nombre, comprende numerosas disciplinas, siendo utilizada en ingeniería y construcción, así como en la ciencia de los materiales

Se describe la concepción moderna de la ley de Hooke y se analiza su versión más generalizada, que esta misma puede ser “reducida” al caso de cuerpos homogéneos e isotrópicos estableciéndose las ecuaciones básicas de la elasticidad

Hooke concluyó que el esfuerzo es proporcional a la deformación

Ley de Hooke Generalizada Un medio se dice que es elástico si posee un estado natural, en el cual esfuerzos y deformaciones son cero, y al cual se puede “volver” luego de que las fuerzas aplicadas son removidas.

Bajo cargas aplicadas, los esfuerzos y las deformaciones “cambian” juntos, y las relaciones entre estos, denominadas relaciones constitutivas, son una importante característica de los medios.

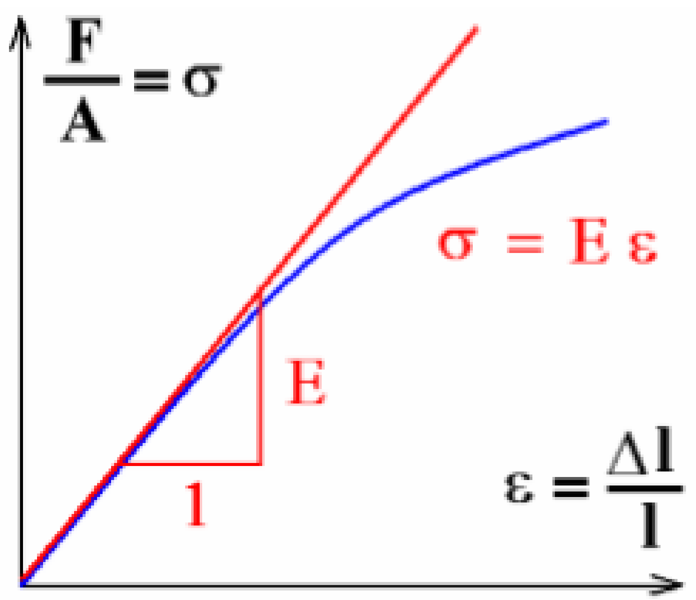
Estas relaciones constitutivas iniciaron su desarrollo hace más de 300 años atrás, con las determinaciones experimentales desarrolladas por Robert Hooke sobre “cuerpos elásticos”.

Hooke concluyó que el esfuerzo es proporcional a la deformación.

Ejemplo: Ensayo barra a tracción: Un caso ilustrativo de este concepto, corresponde al análisis unidimensional de un ensayo de tracción de una barra de acero.

En este caso, la tensión por unidad de área transversal de la barra, es proporcional al alargamiento unitario de ésta, tal como se esquematiza en la figura adjunta.

Se aprecia que, en cierta zona la relación entre el alargamiento unitario y la tensión, se puede considerar "lineal", pudiendo identificarse el valor de la pendiente de esta recta, como la constante que relaciona estas variables.



4.3 Forma Tensorial de la Ley de Hooke Generalizada

La forma ***"moderna"*** de la Ley de Hooke Generalizada establece que ***cada componente del tensor de tensiones es una combinación lineal de todos los componentes del tensor de deformación:***

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot e_{kl}\,, \qquad c_{ijkl} = ctes.$$

4.3.1 Caso general de un cuerpo linealmente elástico

Se dice que un cuerpo es ***linealmente elástico*** si obedece a la relación constitutiva recién enunciada.

Como se sabe, las cantidades c_{ijkl} corresponden, a un tensor de cuarto orden, con $3^4 = 81$ componentes.

4.3.2 Simetría del Tensor de Tensiones

Si se considera la simetría del tensor de tensiones $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, se puede establecer la siguiente simetría del tensor c_{ijkl} :

$$c_{jikl} = c_{ijkl}\,.$$

4.3.3 Simetría del Tensor de Deformaciones

Análogamente al caso anterior, si se considera la simetría del tensor de deformaciones $e_{ji} = e_{ij}$, se puede establecer la siguiente simetría del tensor c_{ijkl} :

$$c_{iilk} = c_{iikl}\,.$$

4.3.4 Existencia de una Función Energía de Deformación

Adicionalmente a lo anterior, consideraremos el ***argumento termodinámico*** de la ***existencia de una función de energía interna*** por unidad de volumen.

La existencia de esta función podría establecerse a partir de la primera ley de la termodinámica, que relaciona el cambio de la energía interna de un cuerpo (ya sea cinética o de deformación), con el trabajo hecho sobre él (mecánico o de calentamiento).

Para el caso de procesos adiabáticos o isotérmicos, la ***función energía de deformación*** puede establecerse como:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} .$$

Esta función posee la propiedad de $\dfrac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} = c_{ijpq} e_{pq}$, lo cual implica la siguiente simetría del tensor c_{ijkl} :

$$c_{klij} = c_{ijkl} .$$

Con esta última consideración, el número de constantes elásticas independientes del tensor c_{ijkl} se reduce a 21, pudiendo representarse como:

Referencias

www.cursos.cl/ingeniería.de .los.materiales

www.ajmoreno.webs.ull.es