Ley de Hooke generalizada // Relación de Poisson

Objetivo:

Entender y comprender mejor la ley de Hooke generalizada, y en que consiste la relación de poisson, comenzando con un breve resumen de la ley de Hooke:

Esta ley establece que el alargamiento de un muelle es directamente proporcional al módulo de la fuerza que se le aplique, siempre y cuando no se deforme permanentemente dicho muelle.

$F=k \cdot (x-x_0)$

Donde:

F es el módulo de la fuerza que se aplica sobre el muelle.

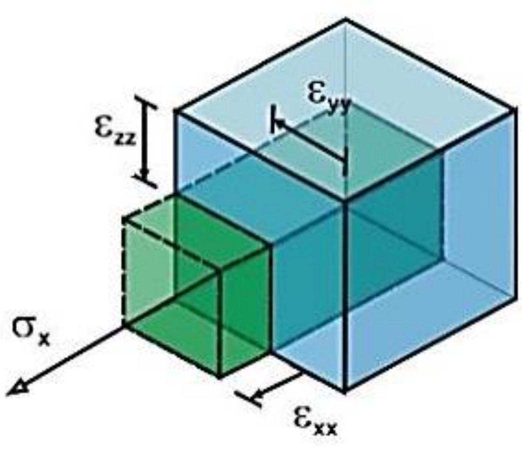
k es la constante elástica del muelle, que relaciona fuerza y alargamiento. Cuanto mayor es su valor más trabajo costará estirar el muelle. Depende del muelle, de tal forma que cada uno tendrá la suya propia.

x_0 es la longitud del muelle sin aplicar la fuerza.

x es la longitud del muelle con la fuerza aplicada.

Si al aplicar la fuerza, deformamos permanentemente el muelle decimos que hemos superado su límite de elasticidad.

La ley de Hooke generalizada permite obtener el campo de esfuerzos, a partir del campo de deformaciones presentes en el cuerpo.



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Expresando las anteriores ecuaciones de forma matricial:

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\,(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\,(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\,(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \underline{\sigma}$$

Matriz de elasticidad:

$$\boxed{\underline{\epsilon} = \underline{\underline{E}}\ \underline{\sigma}}$$

Como de observa solo se necesitan dos propiedades del material para tener totalmente definida la matriz de elasticidad. Lo anterior solo es válido en el caso de materiales isotrópicos.

Ordenando la anterior ecuación de forma que la salida sea el vector de esfuerzos:

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{((1+\nu)\ (1-2\,\nu))} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{pmatrix} \underline{\epsilon}$$

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}\ \underline{\epsilon}}$$

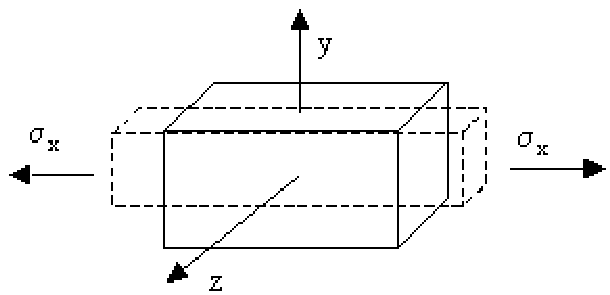
Esta es la expresión más general para la Ley de Hooke en materiales isotrópicos, se pueden deducir expresiones particulares para el caso bidimensional. Un material Isótropo es aquel en que la dirección de estudio es independiente de la aplicación de la carga, dicho en palabras de simetría: es un material que tiene infinitos planos de simetría elástica.

Un material anisótropo es el que no tiene ninguna dirección especial y por tanto no tiene ningún plano de simetría elástica.

Entre ambos límites, existen una serie de materiales que poseen simetría respecto a un plano (material monoclínico), respecto a tres planos (material ortótropo), y los que tienen una simetría de revolución respecto a una dirección dada (material transversalmente isótropo).

La relación de poisson o coeficiente de poisson (v) es un parámetro característico de cada material que indica la relación entre las deformaciones longitudinales que sufre el material en sentido perpendicular a la fuerza aplicada y las deformaciones longitudinales en dirección de la fuerza aplicada sobre el mismo. Así, si sobre el cuerpo de la figura se aplica una fuerza de tracción en dirección x se produce un alargamiento relativo ex en esa dirección y un acortamiento relativo ey y ez en las dos direcciones transversales, definiéndose el coeficiente de Poisson como:

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$$



El coeficiente de Poisson está comprendido entre 0 y 0.5, siendo su valor alrededor de 0.3 para gran parte de materiales, como el acero.

Conclusión:

La importancia de saber estos temas en la carrera de ingeniería mecatronica es relevante, ya que en el campo laboral es indispensable saber el comportamiento de los materiales bajo varias circunstancias o factores que influyen en los cambios que sufre el material con el tiempo o a los esfuerzos en los que se encuentra sometido.

Referencias:

https://www.fisicalab.com/apartado/ley-hooke#contenidos

http://es.slideshare.net/alfonso.cubillos/mecnica-de-slidos-y-principio-del-trabajo-virtual

http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/28/28656/cap3.pdf

http://www.mecapedia.uji.es/coeficiente_de_Poisson.htm