

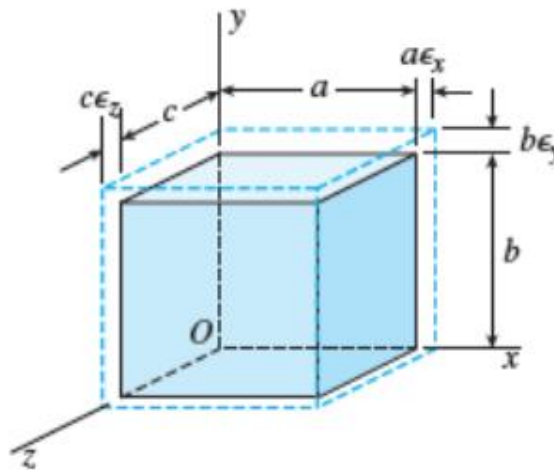
**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CELAYA.**

**MECÁNICA DE MATERIALES.**



*TAREA 3.*

**LEY GENERALIZADA DE HOOKE / RELACIÓN DE POISSON.**



**SANTOYO CRUZ VANESSA.**

**14031698**

**27/01/17**

## LEY GENERALIZADA DE HOOKE.

### PROPIEDADES ELÁSTICAS DE LOS MATERIALES.

Las ecuaciones de transformación de esfuerzo obtenidas hasta el momento no requirieron de las propiedades de los materiales. Ahora nos ocuparemos de obtener las deformaciones unitarias en el material, lo que significa que se deben considerar sus propiedades. Sin embargo, llevaremos a cabo nuestro análisis en materiales que cumplan dos condiciones importantes:

- El material es uniforme en todo el cuerpo y tiene las mismas propiedades en todas las direcciones (material homogéneo e isotrópico)
- El material sigue la ley de Hooke (material linealmente elástico).

Con una relación de esfuerzo-deformación lineal es posible escribir las expresiones generales del esfuerzo-deformación (**Ley Generalizada de Hooke**) como sigue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= K_{11}\epsilon_{xx} + K_{12}\epsilon_{yy} + K_{13}\epsilon_{zz} + K_{14}\gamma_{xy} + K_{15}\gamma_{yz} + K_{16}\gamma_{zx} \\
 \sigma_{yy} &= K_{21}\epsilon_{xx} + K_{22}\epsilon_{yy} + K_{23}\epsilon_{zz} + K_{24}\gamma_{xy} + K_{25}\gamma_{yz} + K_{26}\gamma_{zx} \\
 \sigma_{zz} &= K_{31}\epsilon_{xx} + K_{32}\epsilon_{yy} + K_{33}\epsilon_{zz} + K_{34}\gamma_{xy} + K_{35}\gamma_{yz} + K_{36}\gamma_{zx} \\
 \tau_{xy} &= K_{41}\epsilon_{xx} + K_{42}\epsilon_{yy} + K_{43}\epsilon_{zz} + K_{44}\gamma_{xy} + K_{45}\gamma_{yz} + K_{46}\gamma_{zx} \\
 \tau_{yz} &= K_{51}\epsilon_{xx} + K_{52}\epsilon_{yy} + K_{53}\epsilon_{zz} + K_{54}\gamma_{xy} + K_{55}\gamma_{yz} + K_{56}\gamma_{zx} \\
 \tau_{zx} &= K_{61}\epsilon_{xx} + K_{62}\epsilon_{yy} + K_{63}\epsilon_{zz} + K_{64}\gamma_{xy} + K_{65}\gamma_{yz} + K_{66}\gamma_{zx}
 \end{aligned}$$

Tensorialmente las ecuaciones anteriores se escriben:

$$[\sigma] = [K][\epsilon]$$

Donde **K11** a **K 66** son los coeficientes de elasticidad del material y es independiente de las magnitudes de la deformación y del esfuerzo, siempre y cuando el límite elástico del material no se exceda. Si el límite elástico se excede, la relación lineal entre deformación y esfuerzo ya no se satisface, y las ecuaciones no son válidas.

## RELACIONES ESFUERZO DEFORMACIÓN PARA MATERIALES ELÁSTICOS.

Las relaciones de esfuerzo-deformación se reducen entonces a:

$$\sigma_{xx} = \lambda \epsilon_1 + 2\mu \epsilon_{xx} \quad \sigma_{yy} = \lambda \epsilon_1 + 2\mu \epsilon_{yy} \quad \sigma_{zz} = \lambda \epsilon_1 + 2\mu \epsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}$$

donde:  $J_1$  = Primer invariante de deformación =  $(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$ .

$\lambda$  = La constante de Lamé.

$\mu$  = El módulo de cortante.

Pueden resolverse para dar las deformaciones como una función de esfuerzo:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{\mu} \tau_{zx}$$

Los coeficientes elásticos  $\mu$  y  $\lambda$  mostrados en las ecuaciones son de un fácil tratamiento matemático en las relaciones generales lineales del esfuerzo deformación. Experimentalmente, la constante de Lamé  $\lambda$  raramente se usa debido a que no tiene importancia física; sin embargo, el módulo de cortante tiene importancia física y puede medirse fácilmente. Considere el caso bidimensional de cortante puro donde:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{xy} = \text{Esfuerzo cortante aplicado}$$

De las ecuaciones tenemos:

$$\mu = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

De lo anterior se nota que el módulo cortante  $\mu$  es la proporción del esfuerzo cortante a la deformación cortante en un estado bidimensional de cortante puro. En una prueba convencional de esfuerzo que a menudo se usa para determinar las propiedades mecánicas de materiales, se usa una barra larga y delgada que se somete a un estado de esfuerzo uniaxial en la dirección  $x$ . En este caso

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \quad \sigma_{xx} = \text{Esfuerzo normal aplicado}$$

De las ecuaciones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx}$$

En textos elementales de resistencia de materiales, se escriben a menudo las relaciones del esfuerzo-deformación para el caso de deformación uniaxial como sigue:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

Igualando los coeficientes tenemos:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  es la razón de Poisson, definida como:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$$

## REFERENCIAS.

- <https://es.scribd.com/doc/87826329/Ley-Generalizada-de-Hooke>
- [http://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/p/poissons\\_ratio.aspx](http://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/p/poissons_ratio.aspx)
- <http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/28/28656/cap3.pdf>