INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CELAYA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

PEDRAZA HERNÁNDEZ JOSÉ RAMÓN.

MATERIA: Mecánica de materiales.

TITULO: Ley de Hooke generalizada.
Relación de Poisson.

Introducción.

Después de analizar lo que es una prueba de tensión en un modelo matemático del sólido de tal forma que el efecto que provocan las cargas externas se caracteriza mediante un tensor de tensiones y los desplazamientos relativos entre partículas a través de un tensor de pequeñas deformaciones. Es importante notar que la obtención del tensor de tensiones y el de pequeñas deformaciones ha sido independiente uno del otro. Sin embargo, tanto las tensiones como las deformaciones son causa y efecto, por lo que lógicamente deberán existir ecuaciones que las relacionen entre sí, denominándose a tales relaciones leyes de comportamiento.

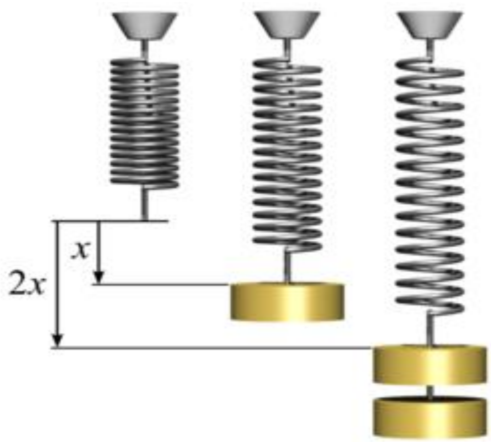
En esta tarea, nos enfocaremos en lo que es la ley de Hooke generalizada.

Ley de elasticidad de Hooke.

La ley de elasticidad de Hooke o ley de Hooke, originalmente formulada para casos de estiramiento longitudinal, establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo F.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{F}{AE}$$

Siendo ς el alargamiento, L la longitud original, E: módulo de Young, A la sección transversal de la pieza estirada. La ley se aplica a materiales elásticos hasta un límite denominado límite elástico.

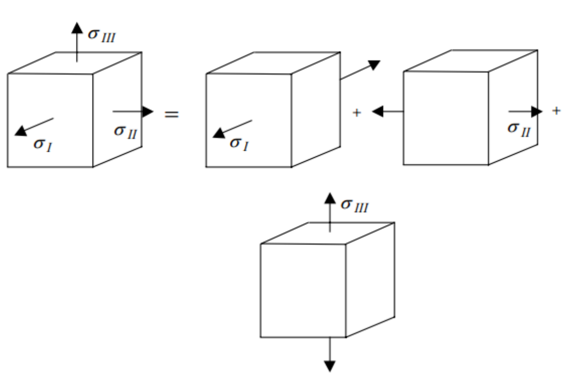


Ley de Hooke generalizada o multiaxial.

Se vio que, en mi trabajo anterior, que la ley de Hooke podía expresarse como:

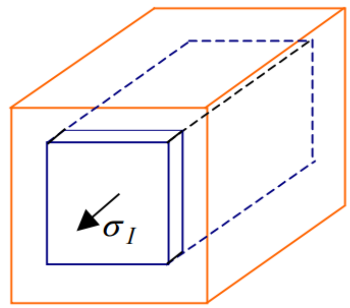
$$\sigma = E\,\varepsilon$$

obtenida a través de un ensayo de tracción unidireccional. Sin embargo, los estados de tensión en un punto de un sólido elástico son, salvo casos especiales, tridimensionales por lo que se hace necesaria una extrapolación de resultados del caso unidireccional altridimensional. A tal fin se supondrá un punto de un sólido sometido a un estado de tensiones principales tridimensional y se aplicará superposición de efectos de los resultados del ensayo de tracción



Relación con la ley de Poisson.

Supóngase que se considera sólo la acción de σ I: entonces el cubo se alargará en la dirección principal I y al mismo tiempo, por efecto Poisson, se acortará en las otras dos direcciones principales, II y III, de acuerdo con la figura siguiente:



El alargamiento en la dirección I se expresa como:

$$\varepsilon_I\ (\sigma_I) = \frac{\sigma_I}{E}$$

y el decremento en las direcciones II y III debido a σ I se expresa como:

$$\varepsilon_{II}\ (\sigma_I) = -\nu\frac{\sigma_I}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{III}\ (\sigma_I) = -\nu\frac{\sigma_I}{E}$$

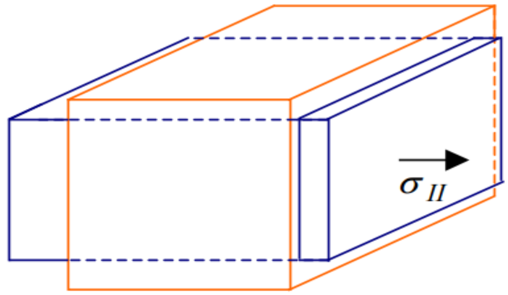
Donde ν es el Módulo de Poisson del material considerado, ya que recordando su definición:

$$\nu = \frac{Contracción\ lateral\ unitaria}{Al\arg amiento\ axil\ unitario} \Rightarrow$$

$$Aplicandola\ \ al\ caso\ en\ cuestión:$$

$$Contracción\ lateral\ unitaria\ \ (\varepsilon_{II}) = \nu \cdot Al\arg amiento\ axil\ unitario = -\nu \cdot (\varepsilon_I)$$

De igual forma si se considera sólo el efecto de σ II se tiene:



El alargamiento en la dirección II debido a σ II es:

$$\varepsilon_{II}\ (\sigma_{II}) = \frac{\sigma_{II}}{E}$$

y el decremento en las direcciones I y III debido a σ II es:

$$\varepsilon_{I}\ (\sigma_{II}) = -\nu\frac{\sigma_{II}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{III}\ (\sigma_{II}) = -\nu\frac{\sigma_{II}}{E}$$

De igual forma debido a la acción de σ III el alargamiento en la dirección III es:

$$\varepsilon_{III}\ (\sigma_{III}) = \frac{\sigma_{III}}{E}$$

y el decremento en las direcciones I y II debido a σ III es:

$$\varepsilon_{I}\ (\sigma_{III}) = -\nu\frac{\sigma_{III}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{II}\ (\sigma_{III}) = -\nu\frac{\sigma_{III}}{E}$$

Sumando las contribuciones aisladas de σ I σ II σ III, y se reproduce el caso original objeto de este estudio, resultando:

$$\varepsilon_{I} = \frac{1}{E}\left[\,\sigma_{I} - \nu\left(\sigma_{II} + \sigma_{III}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left[\,\sigma_{II} - \nu\left(\sigma_{I} + \sigma_{III}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{III} = \frac{1}{E}\left[\,\sigma_{III} - \nu\left(\sigma_{II} + \sigma_{I}\right)\right]$$

Las ecuaciones 3-13 constituyen la ley de Hooke generalizada en ejes principales para materiales isótropos y homogéneos. Isótropo porque se supone que tanto el Módulo de Elasticidad como el de Poisson no varían con la dirección. Homogéneo porque las propiedades en un punto determinado son independientes de la posición del mismo en el sólido.

Estas ecuaciones se pueden expresar en notación de índices de la siguiente forma:

$$\varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E}\sigma_i - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}$$

donde el índice i toma valores I, II, o III y el término σ kk es la suma de la diagonal principal del tensor de tensiones.

Conclusión.

La ley de Hooke generalizada, se manifiesta cuando los estados de tensión en un punto de un sólido elástico son, salvo casos especiales, tridimensionales por lo que se hace necesaria una extrapolación de resultados del caso unidireccional altridimensional. A tal fin se supondrá un punto de un sólido sometido a un estado de tensiones principales tridimensional y se aplicará superposición de efectos de los resultados del ensayo de tracción.

Referencias:

http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/28/28656/cap3.pdf
http://ajmoreno.webs.ull.es/resistencia%20de%20materiales/hookeG.pdf