

Equilibrio de cuerpos rígidos

Universidad Politécnica de Guanajuato

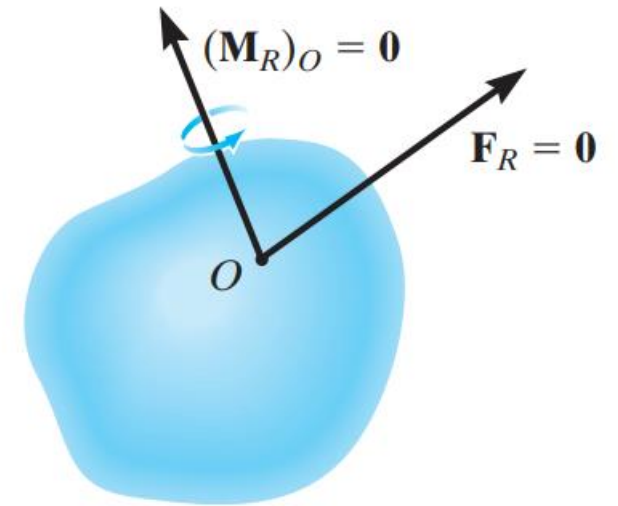
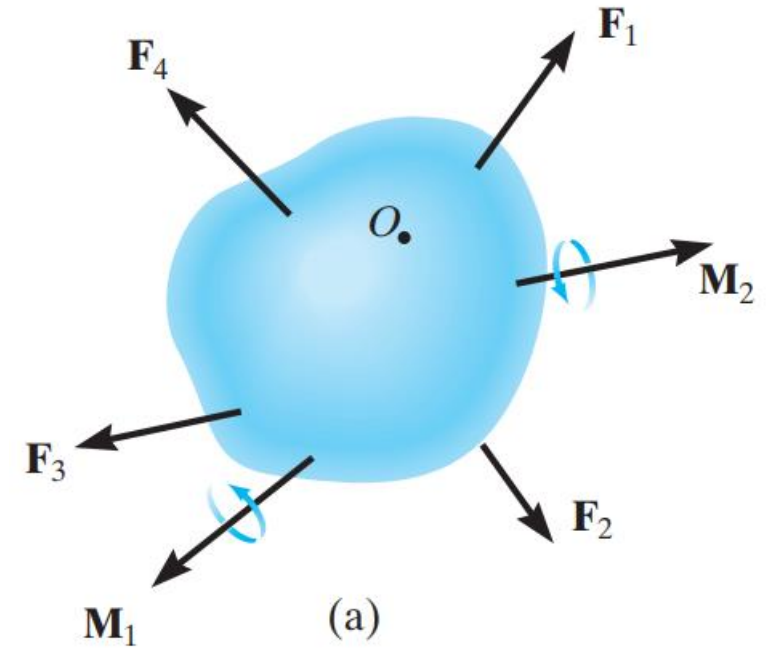
Mecánica de cuerpo rígido

Condiciones para el equilibrio

Un cuerpo rígido sujeto a un sistema de fuerzas está en equilibrio estático si tanto la fuerza como el momento de par resultantes son iguales a cero, es decir:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

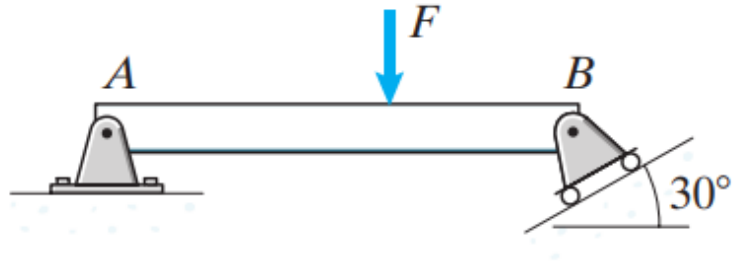


Equilibrio en dos dimensiones

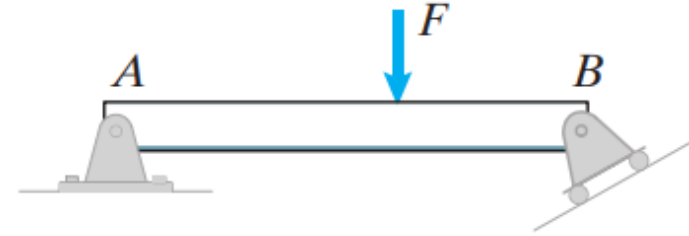
Diagramas de cuerpo libre

- La aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio requiere de una especificación completa de todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan sobre un cuerpo.
- La mejor manera de tomar en cuenta esas fuerzas es trazar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo, el cual lo representa aislado o “libre” de su entorno.
- Sobre este bosquejo es necesario mostrar todas las fuerzas y los momentos de par que ejerce el entorno sobre el cuerpo, de manera que cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio se pueda tener en cuenta estos efectos.

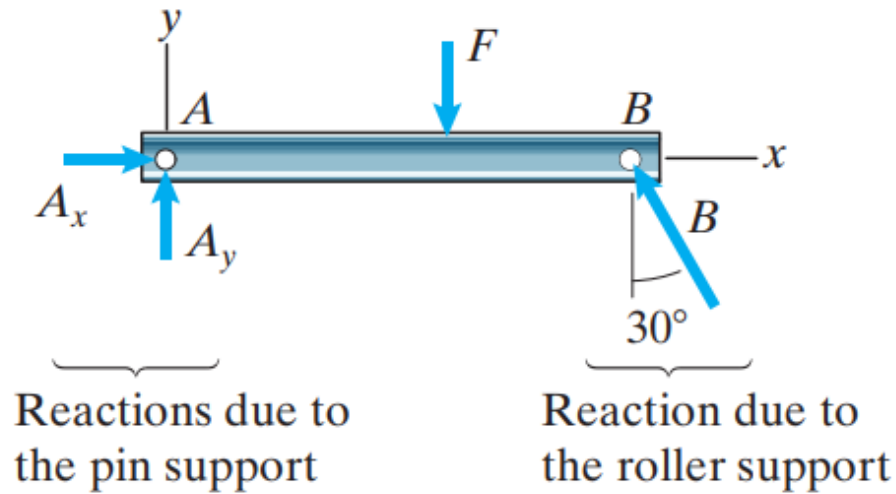
Diagramas de cuerpo libre



(a)



(b)



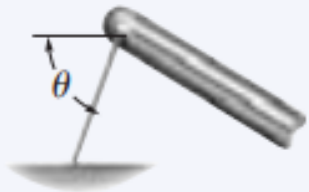
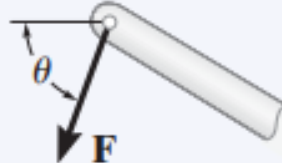
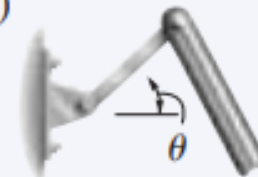
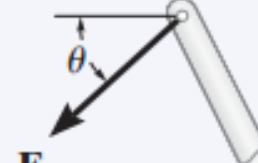
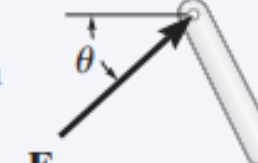

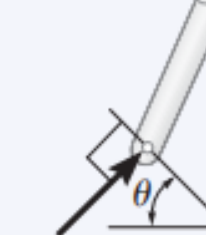
(c)

Reacciones en soportes

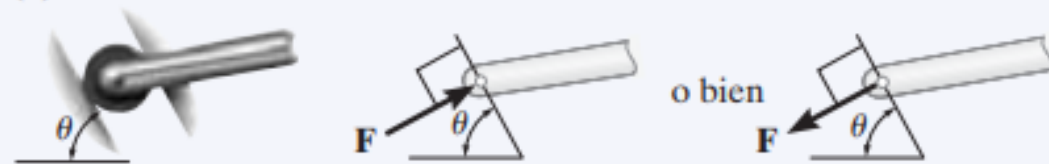
Un **soporte** es un elemento o una estructura que proporciona apoyo físico y restringe el movimiento de un componente o de un sistema mecánico. Los soportes se utilizan para estabilizar y mantener en posición los componentes mecánicos, evitando un movimiento no deseado.

Una **reacción** es una fuerza o un momento que se desarrolla en respuesta a la acción de otras fuerzas o momentos aplicados en un sistema mecánico. Las reacciones son generadas por los soportes o por las conexiones entre los diferentes componentes mecánicos.

TABLA 5-1 Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas bidimensionales

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa alejándose del elemento en la dirección del cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>eslabón sin peso</p>	 <p>o bien</p> 	<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.</p>
<p>(3)</p>  <p>rodillo</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>

(4)



rodillo o pasador
confinado en una ranura lisa

Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.

(5)



soporte mecedora

Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.

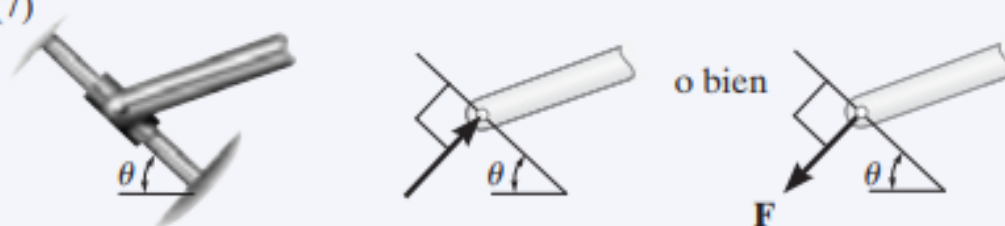
(6)



superficie de contacto lisa

Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.

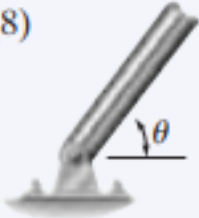
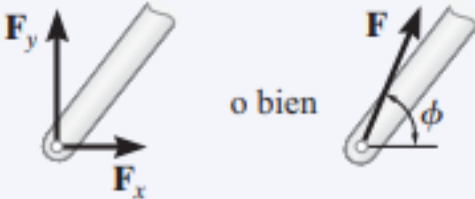

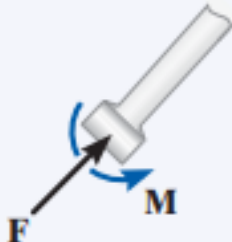

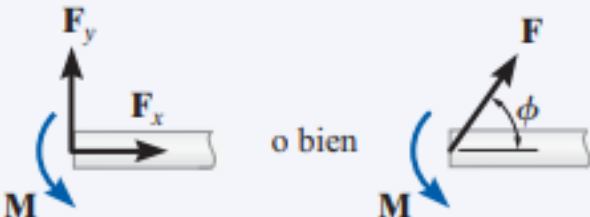
(7)



elemento conectado mediante un
pasador a un collar sobre una barra lisa

Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.

TABLA 5-1 Continuación

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(8)</p>  <p>pasador liso o articulación lisa</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección ϕ de la fuerza resultante. Observe que ϕ y θ no son necesariamente iguales [no suelen serlo, a menos que la barra mostrada sea un eslabón como en (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>elemento con conexión fija a un collar sobre una barra lisa</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>
<p>(10)</p>  <p>soporte fijo</p>		<p>Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección ϕ de la fuerza resultante.</p>

Reacciones en soportes



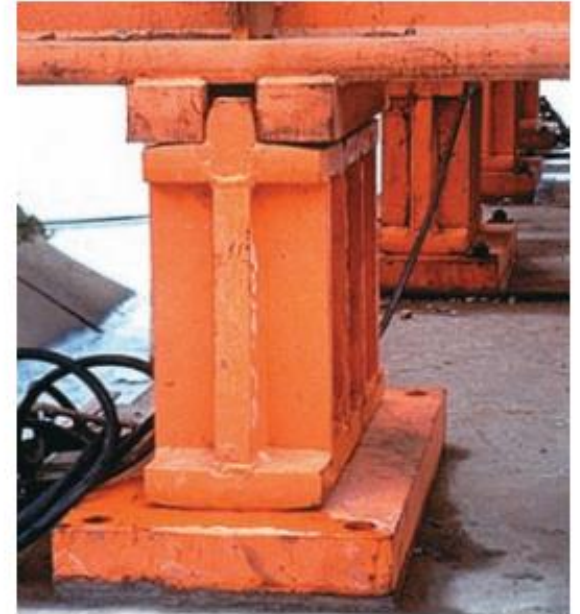
The cable exerts a force on the bracket in the direction of the cable. (1)



The rocker support for this bridge girder allows horizontal movement so the bridge is free to expand and contract due to a change in temperature. (4)



Typical pin support for a beam. (8)



Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataforma de traveses. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la trabe moverse en forma horizontal.

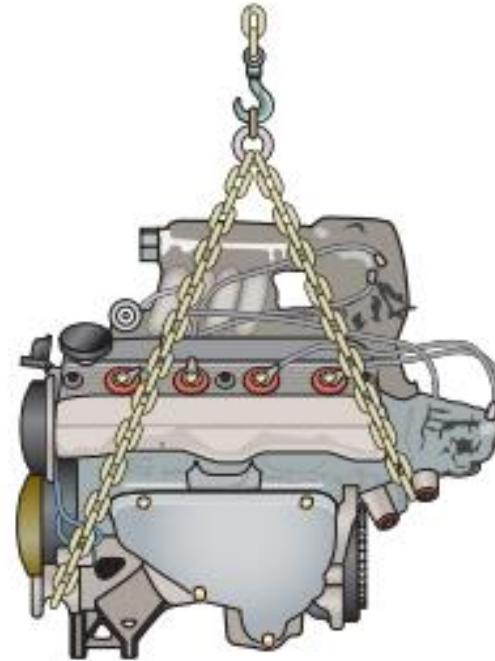
Reacciones en soportes

Como regla general:

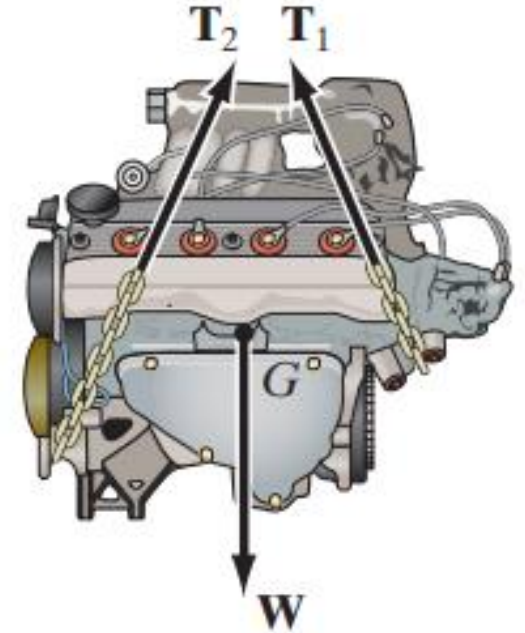
- Si un soporte evita la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces se desarrolla una fuerza sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si se evita una rotación, se ejerce un momento de par sobre el cuerpo.

Fuerzas internas

Las fuerzas internas no deben incluirse en el diagrama de cuerpo libre si se toma en cuenta todo el cuerpo.



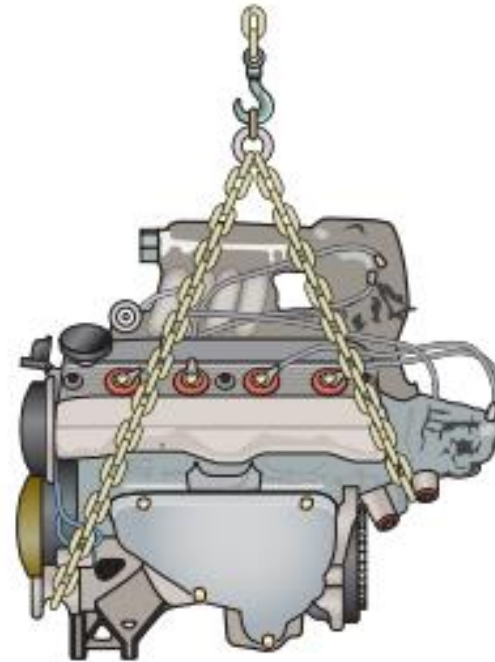
(a)



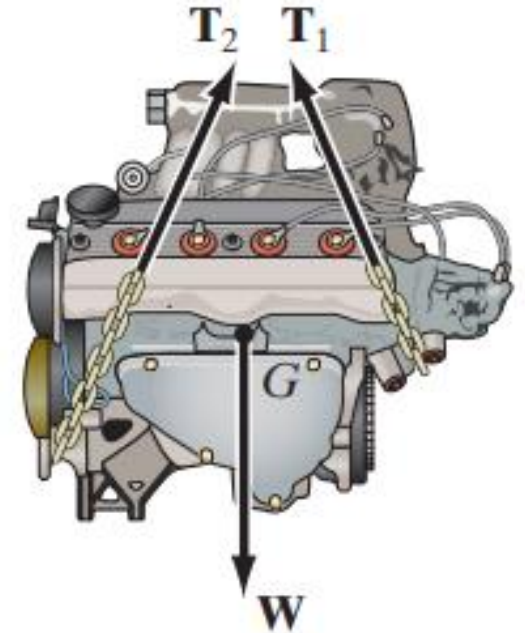
(b)

Peso y centro de gravedad

Cuando un cuerpo está sometido a un campo gravitatorio, el peso total del cuerpo se puede representar mediante una fuerza resultante W que actúa en su centro de gravedad G .



(a)



(b)

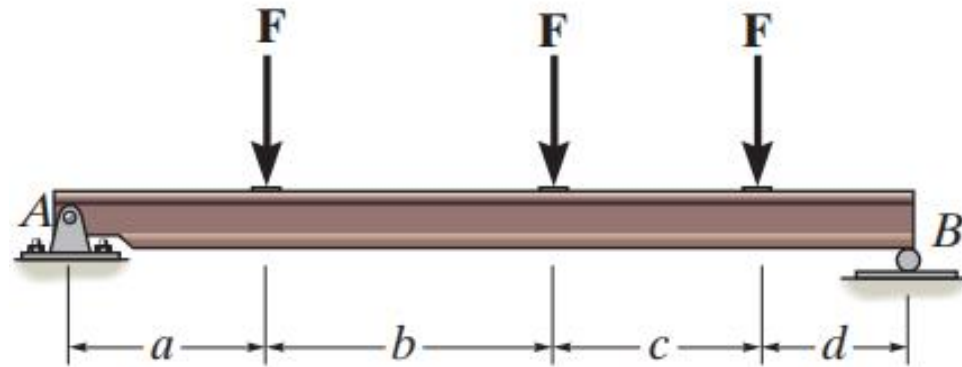
Modelos idealizados

- Cuando un ingeniero realiza un análisis de fuerzas de cualquier objeto, debe considerar un modelo analítico correspondiente o modelo idealizado que dé resultados que se aproximen lo más posible a la situación real.
- Para ello, tiene que hacerse una selección cuidadosa de manera que el tipo de soportes, el comportamiento del material y las dimensiones del objeto queden justificados.
- En casos complejos, este proceso puede requerir el desarrollo de varios modelos diferentes del objeto que debe analizarse. En cualquier caso, este proceso de selección requiere tanto habilidad como experiencia.

Modelos idealizados



(a)



(b)

Modelos idealizados

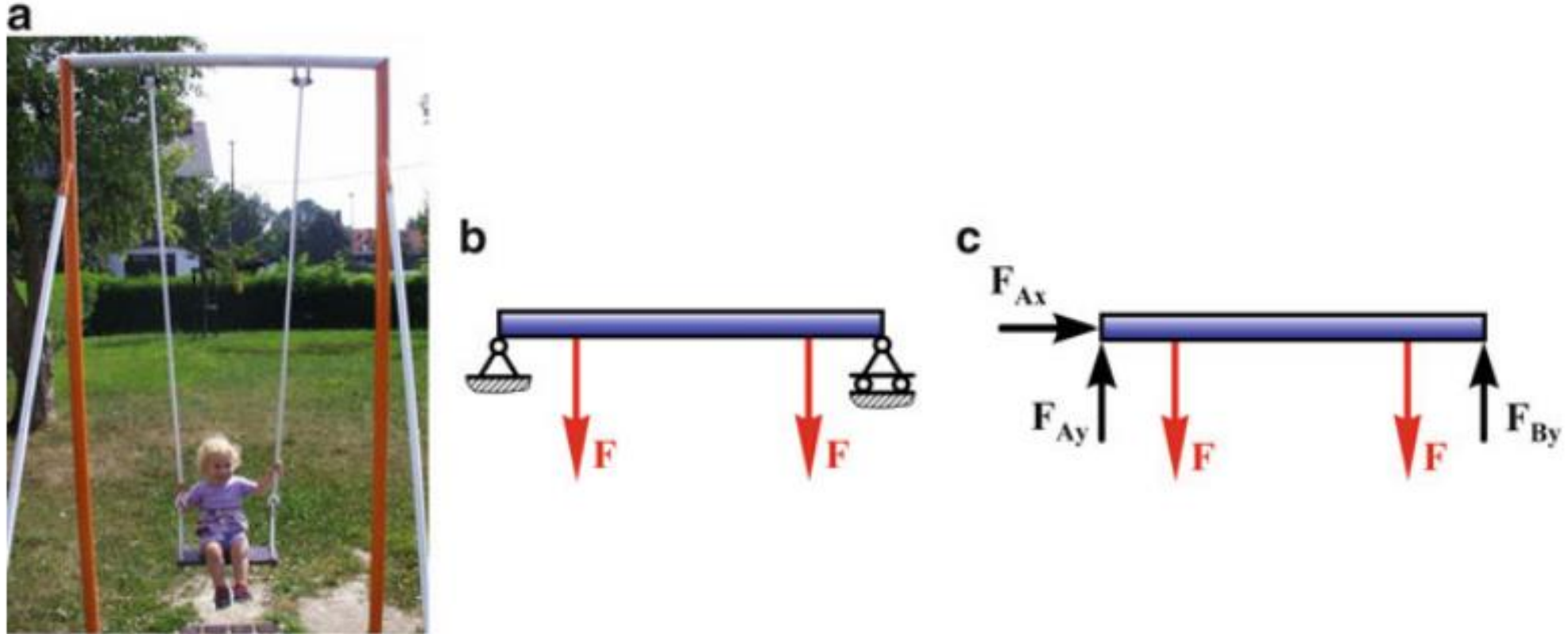


Fig. 3.1 Child on a swing: design of the upper bar. (a) Physical reality, (b) physical model, (c) free body diagram

Modelos idealizados

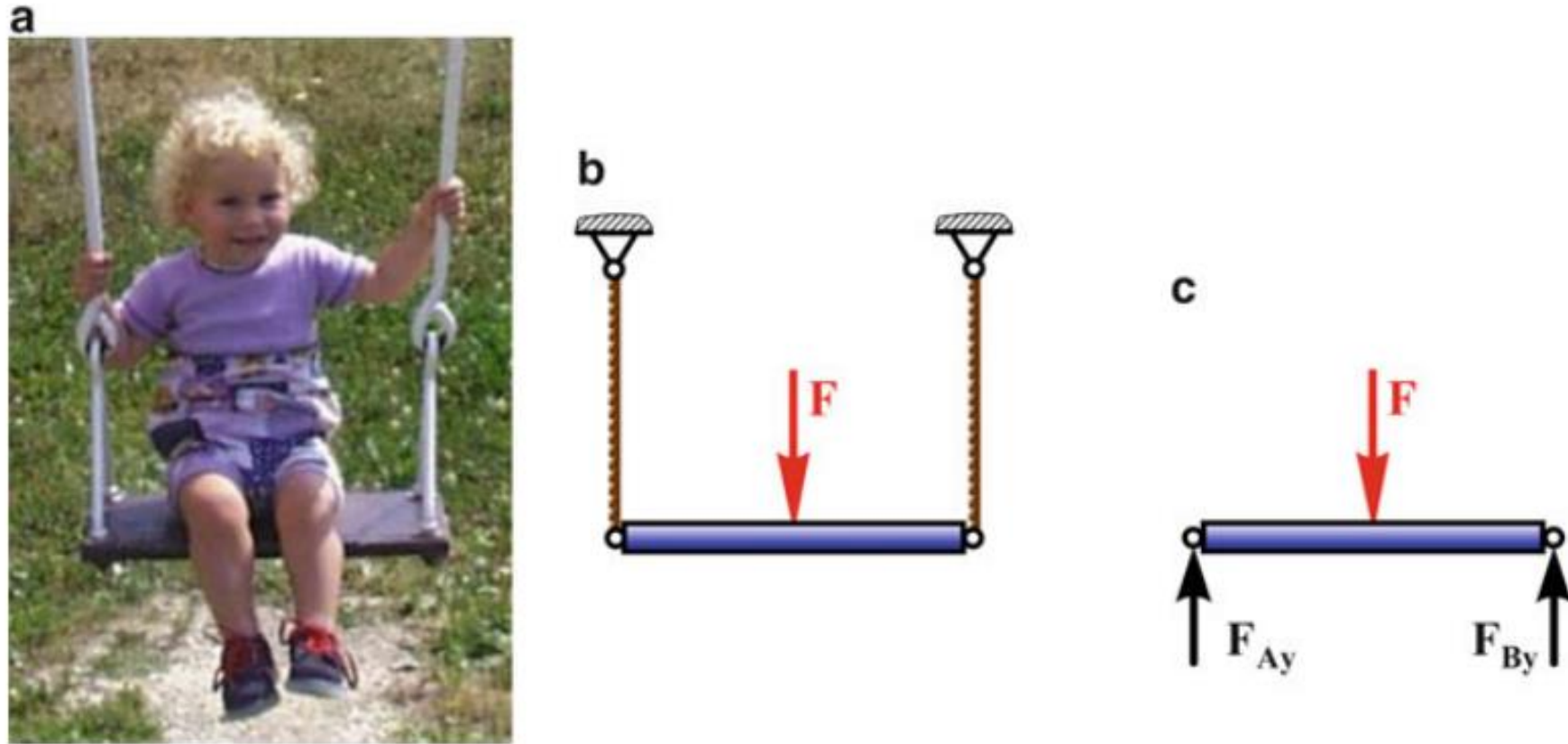


Fig. 3.2 The child on the swing. (a) Physical reality, (b) physical model, (c) free body diagram

Modelos idealizados

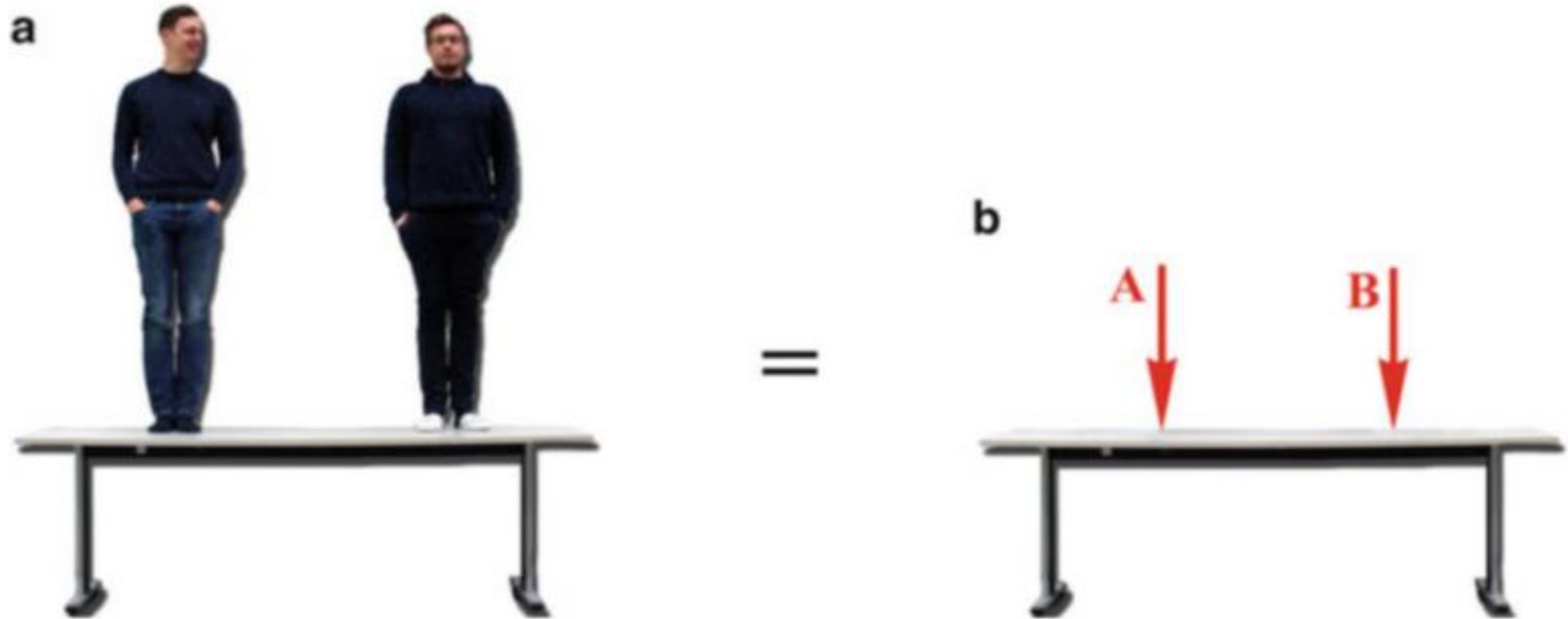


Fig. 3.3 Two boys standing on a bench

Modelos idealizados

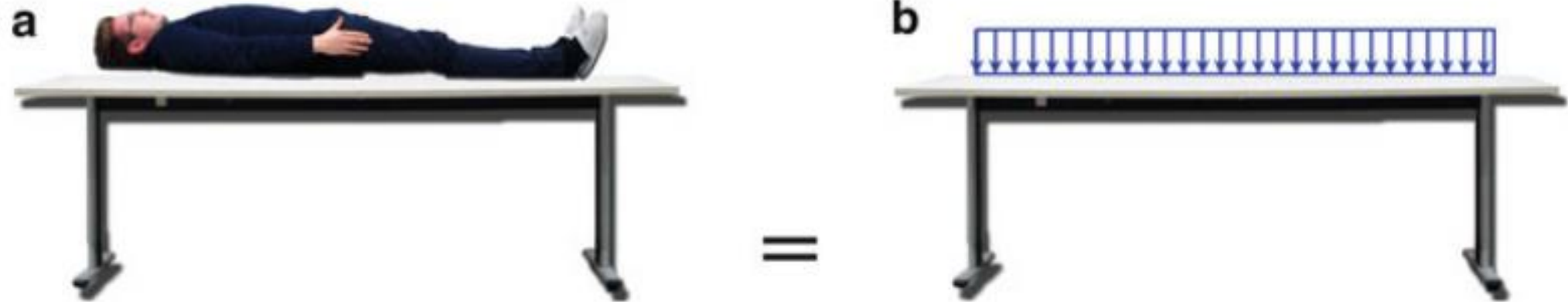


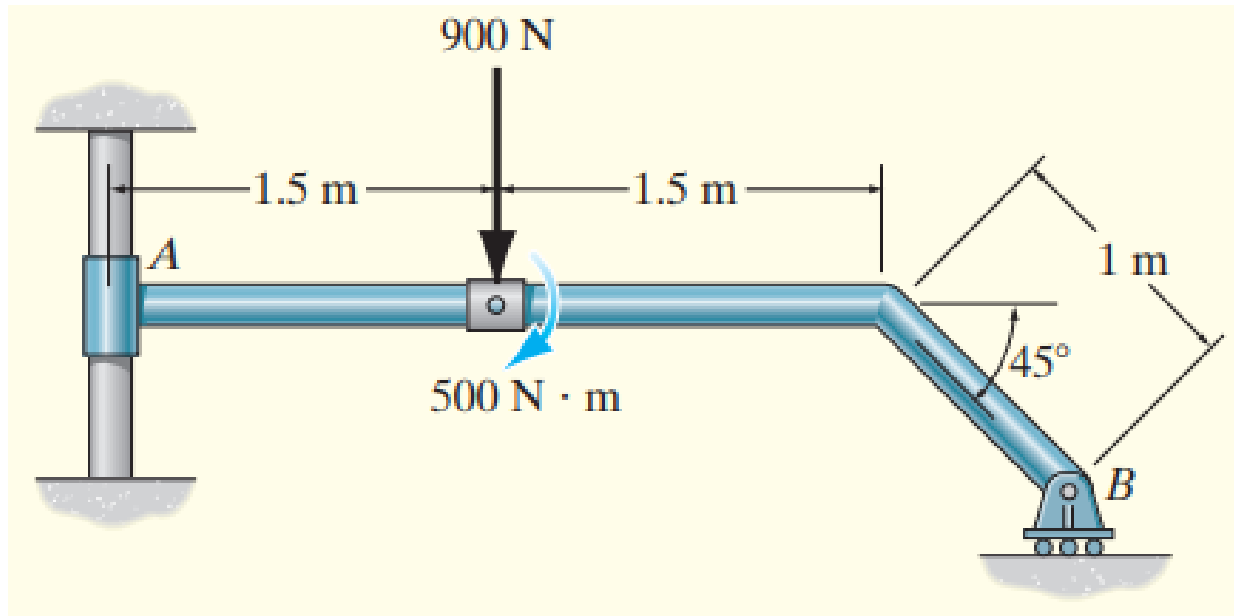
Fig. 3.4 A boy lying on a bench

Procedimiento para el trazo del DCL

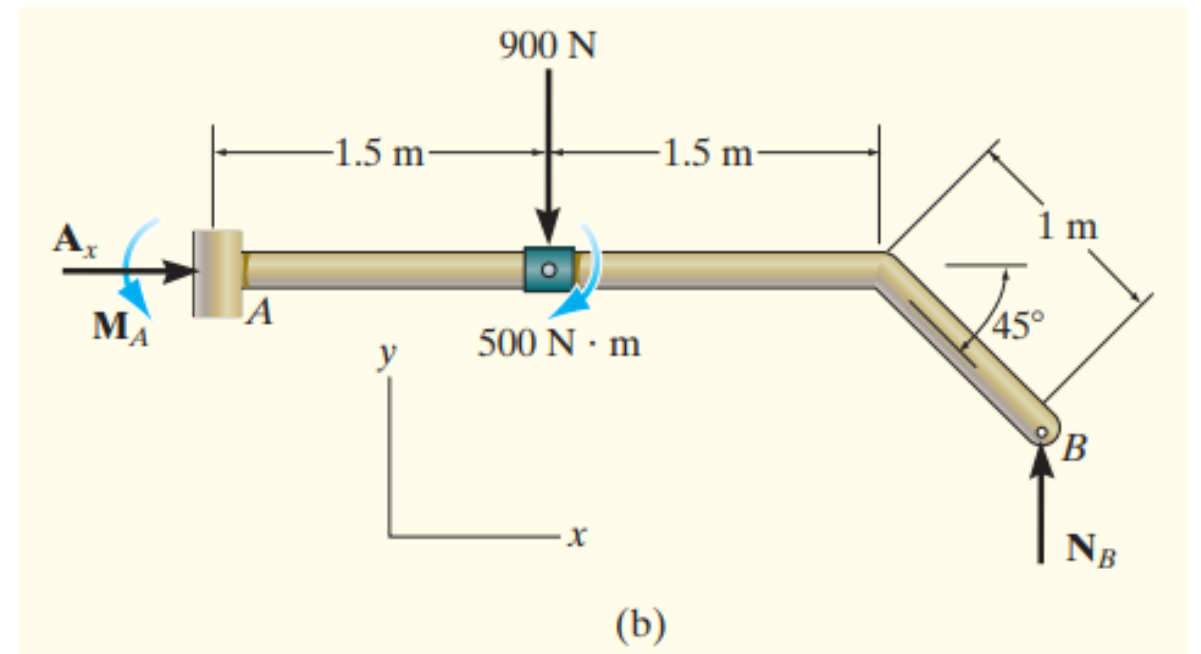
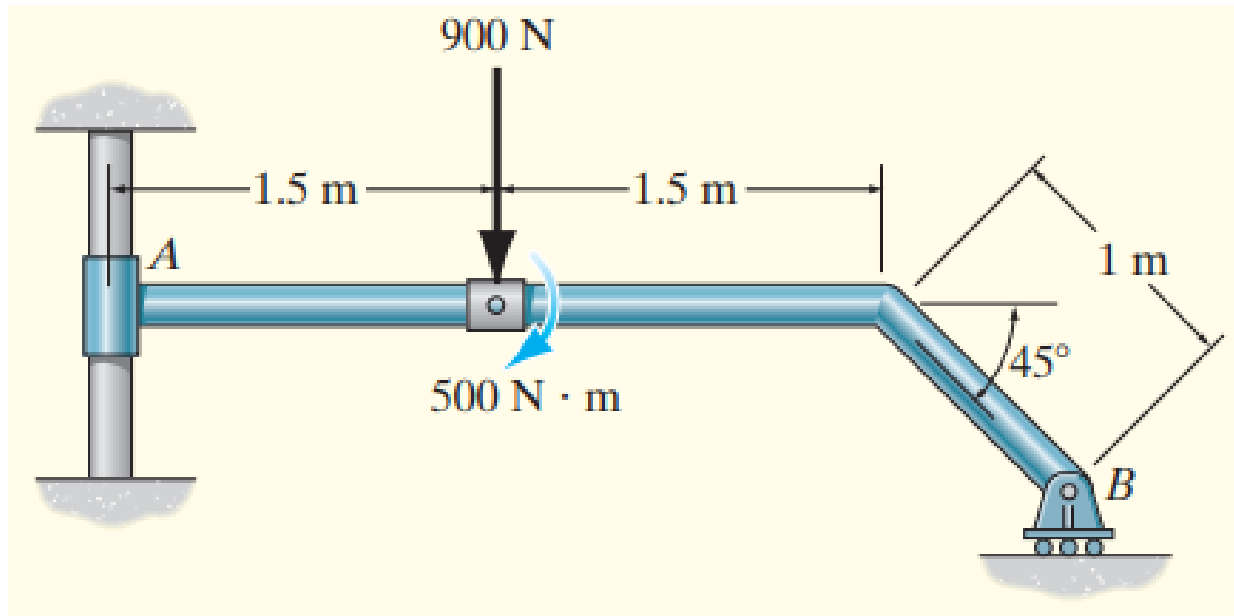
Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o cualquier grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben darse los siguientes pasos:

1. Trazar el contorno del cuerpo rígido
2. Mostrar e identificar todas las fuerzas y momentos de par que actúan sobre el cuerpo rígido (usualmente, fuerzas externas o cargas aplicadas, reacciones en los soportes y el peso del cuerpo)
3. Indicar las dimensiones del cuerpo que sean necesarias para el cálculo de momentos
4. Establecer un sistema de coordenadas

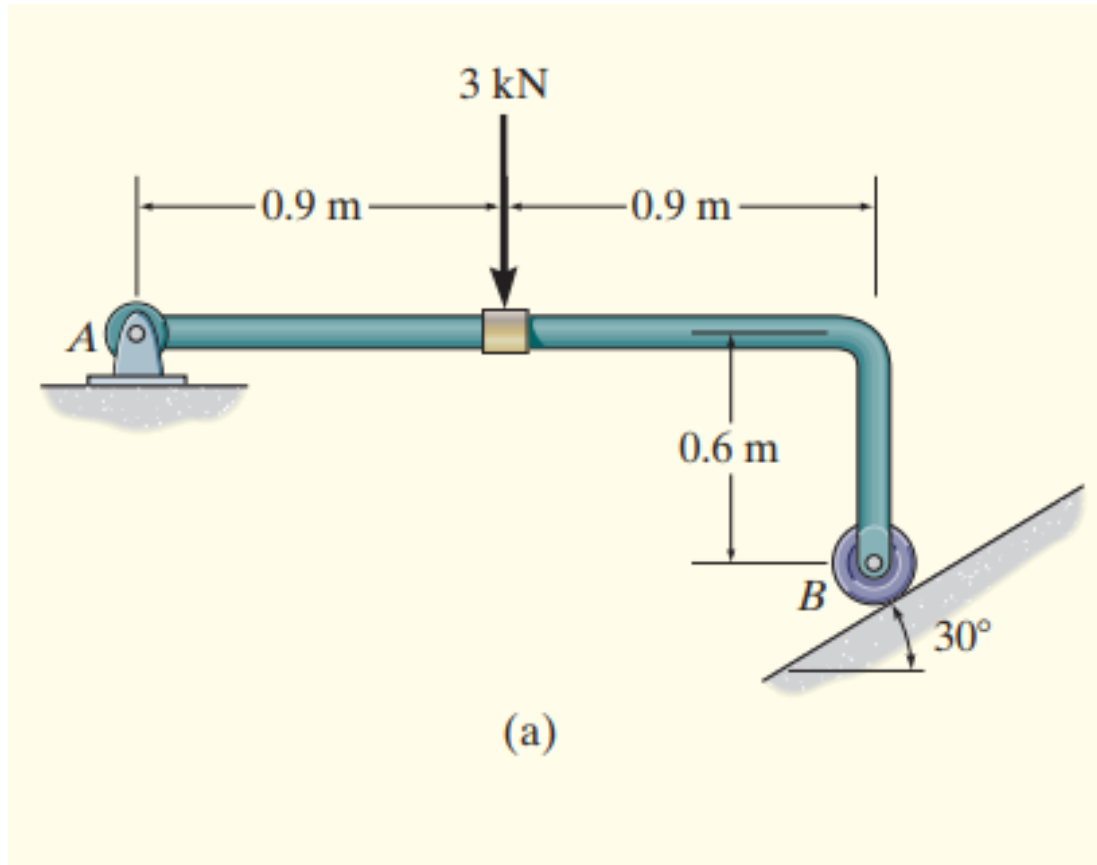
Diagramas de cuerpo libre



Diagramas de cuerpo libre



Diagramas de cuerpo libre



Diagramas de cuerpo libre

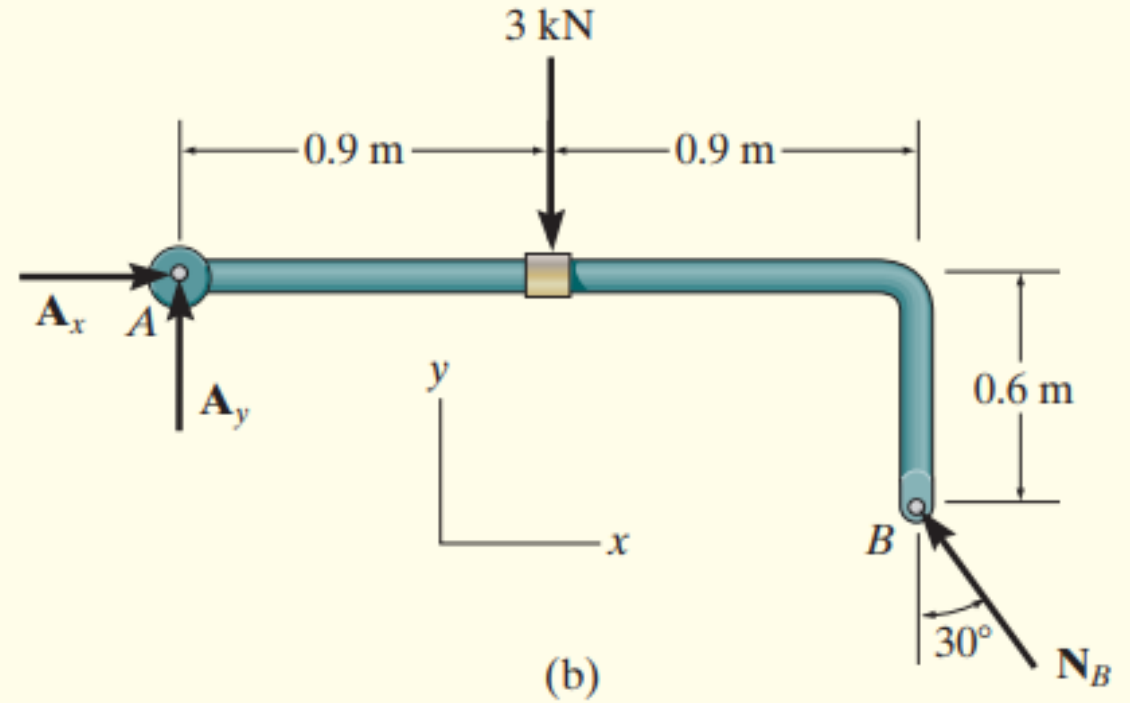
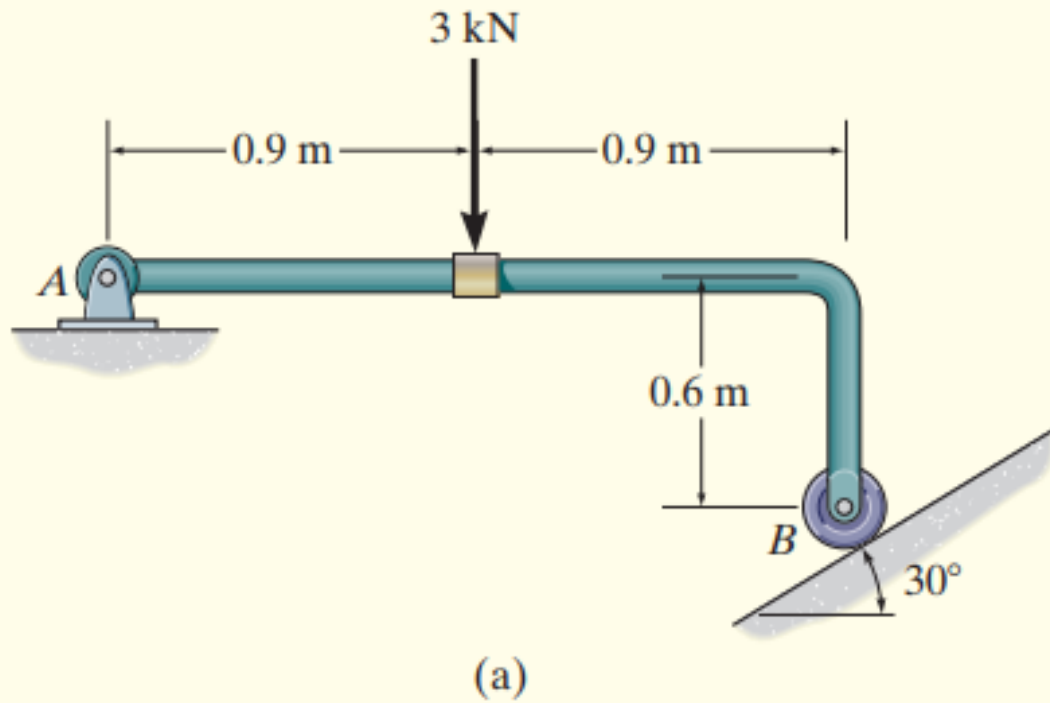


Fig. 5-16

Diagramas de cuerpo libre

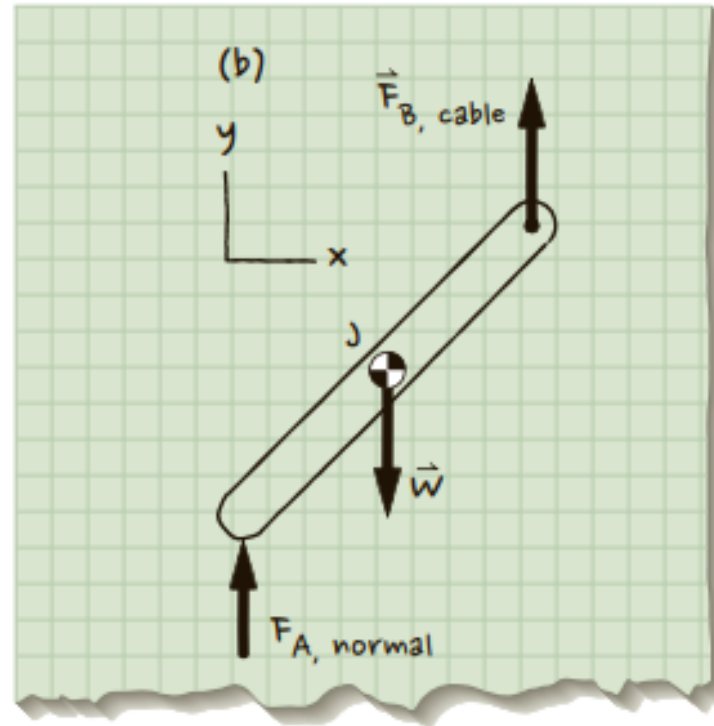
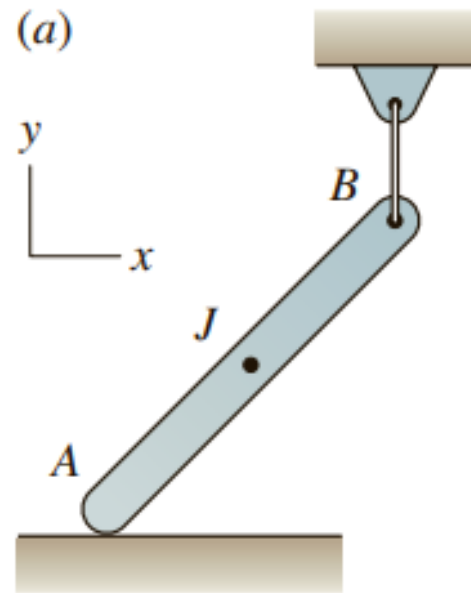


Figure 4.2.1 (a) The supports consist of a **normal contact without friction** at A, and a **cable** attached to the system at B; (b) The free-body diagram of bar AJB.

Diagramas de cuerpo libre

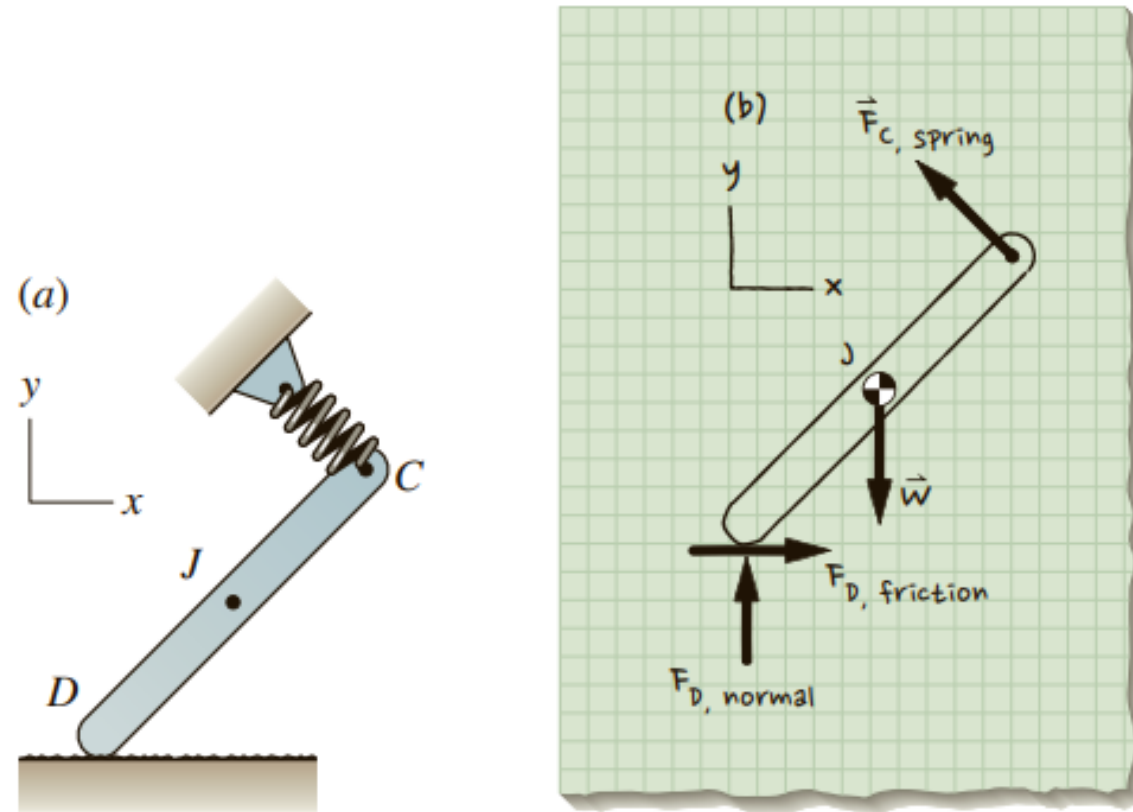


Figure 4.2.2 (a) The supports consist of a **spring** attached to the system at C, and a **normal contact with friction** at D; (b) The free-body diagram of bar CJD.

Diagramas de cuerpo libre

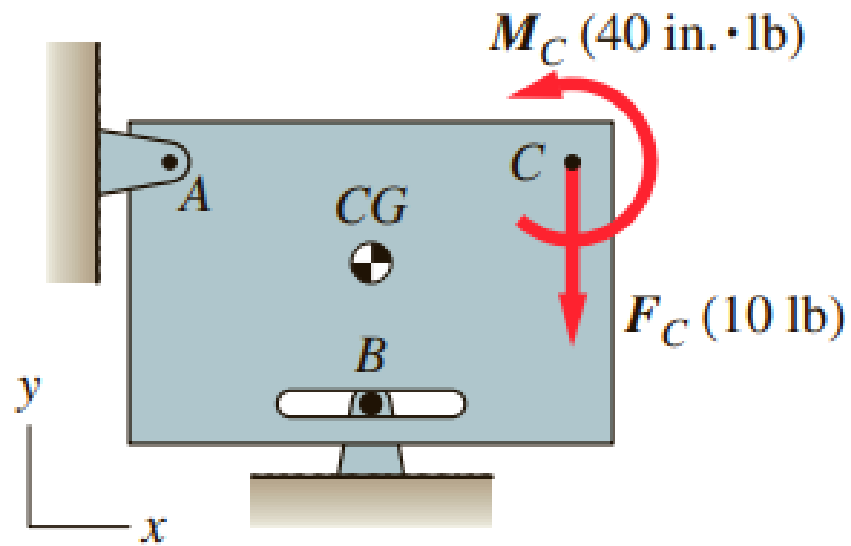


Figure 1 A supported block.

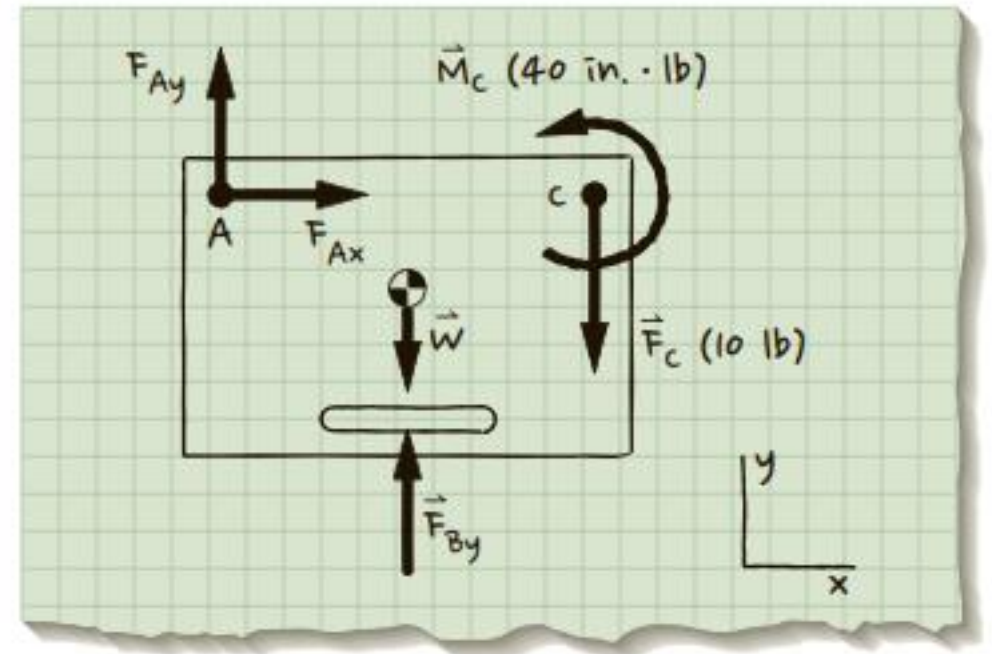


Figure 3 Free-body diagram of system.

Ecuaciones de equilibrio

Cuando el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, las cuales se encuentran en el plano $x - y$, las fuerzas se pueden descomponer en sus componentes x y y . En consecuencia, las condiciones de equilibrio en dos dimensiones son:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_O = 0$$

Ecuaciones de equilibrio: alternativa 2

Es posible utilizar un segundo conjunto de ecuaciones de equilibrio en el plano, a saber:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

Al usar estas ecuaciones se requiere que una línea que pase por los puntos A y B no sea paralela al eje y .

Ecuaciones de equilibrio: alternativa 3

Un tercer conjunto de ecuaciones de equilibrio en el plano está dado por:

$$\Sigma M_A = 0$$

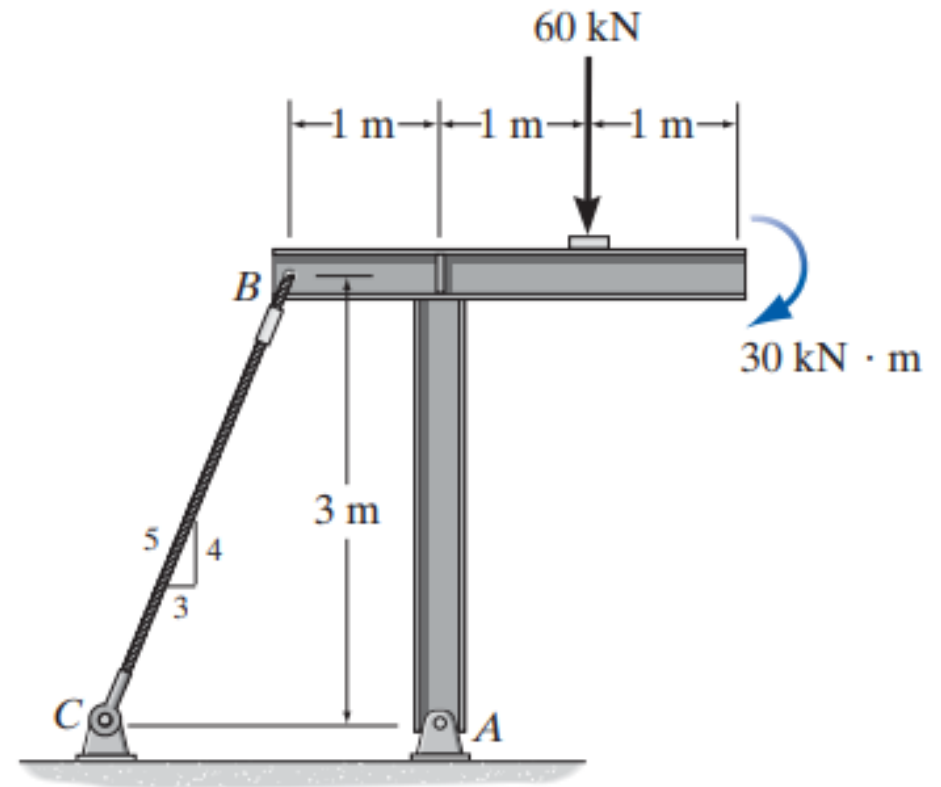
$$\Sigma M_B = 0$$

$$\Sigma M_C = 0$$

Aquí es necesario que los puntos A , B y C no se encuentren en la misma línea.

Ejemplo

- 5-21.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la tensión desarrollada en el cable BC que se usa para sostener el bastidor de acero.



Prob. 5-21

Ejemplo

4.37 La barra AC soporta dos cargas de 400 N como se muestra en la figura. Los rodillos en A y C descansan sobre superficies sin fricción y el cable BD está unido en B . Determine *a*) la tensión en el cable BD , *b*) la reacción en A y *c*) la reacción en C .

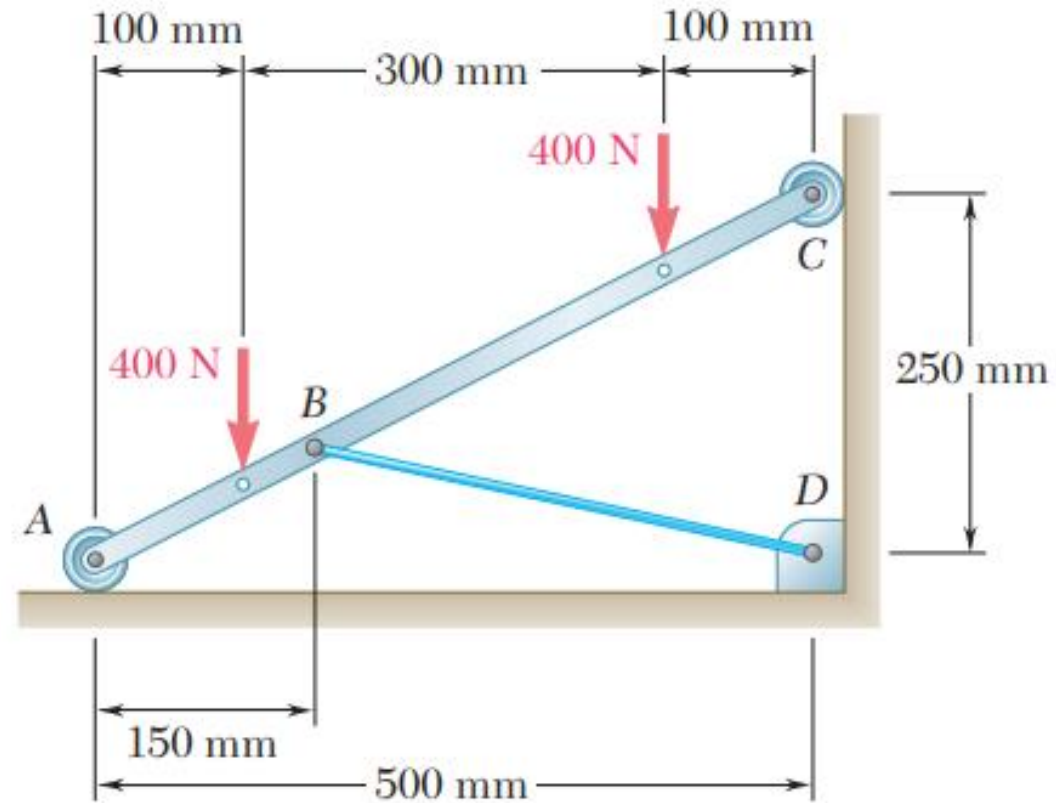
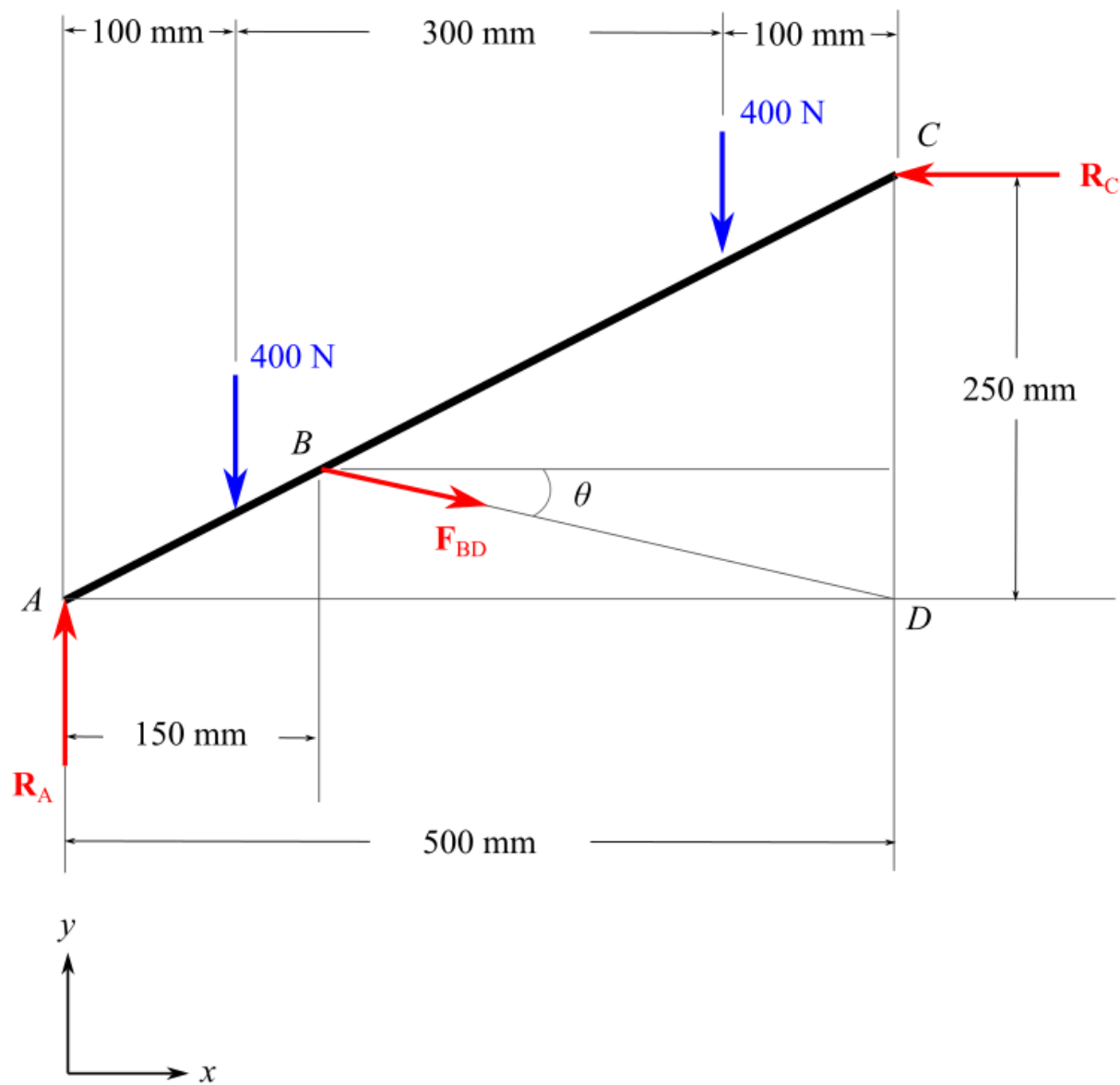


Figura P4.37

Trazando el DCL



Ejemplo

4.49 Si se sabe que la tensión en el alambre BD es de $1\,300\text{ N}$, determine la reacción del bastidor mostrado en el apoyo fijo C .

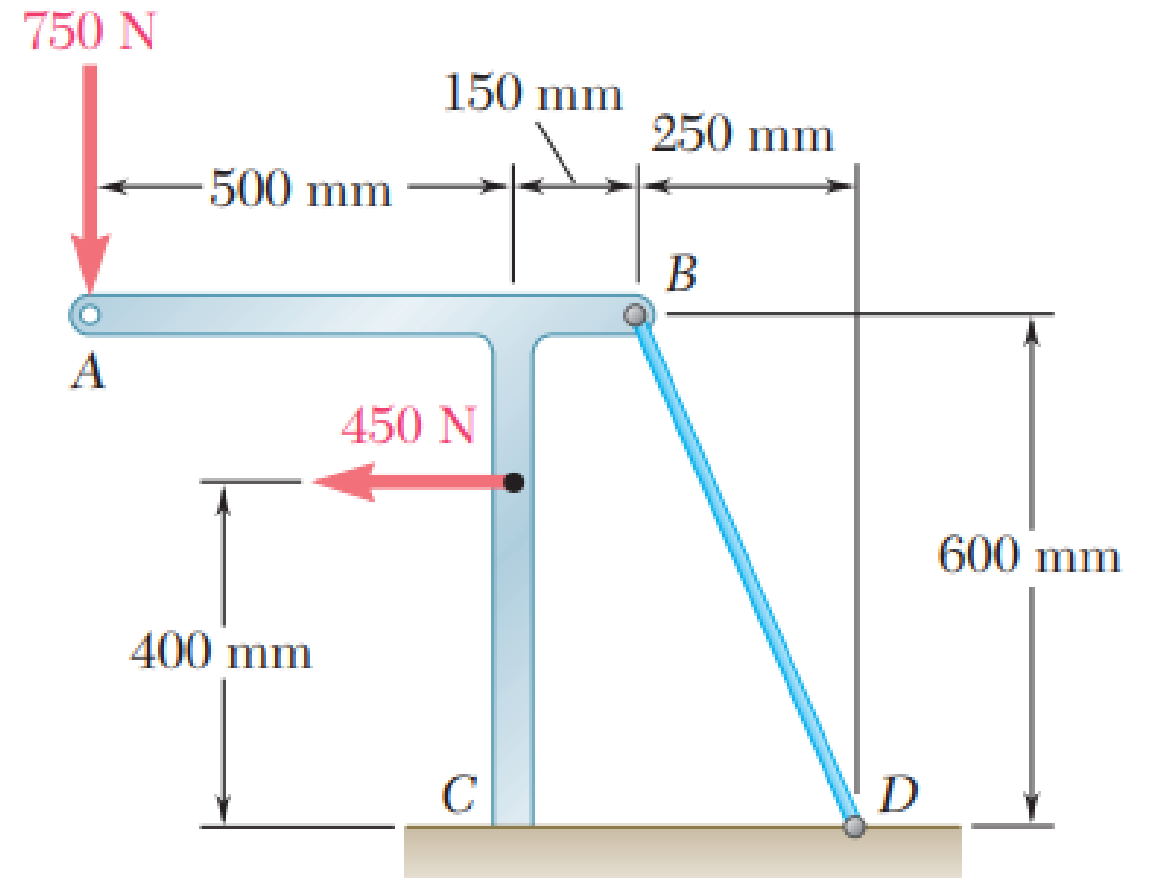
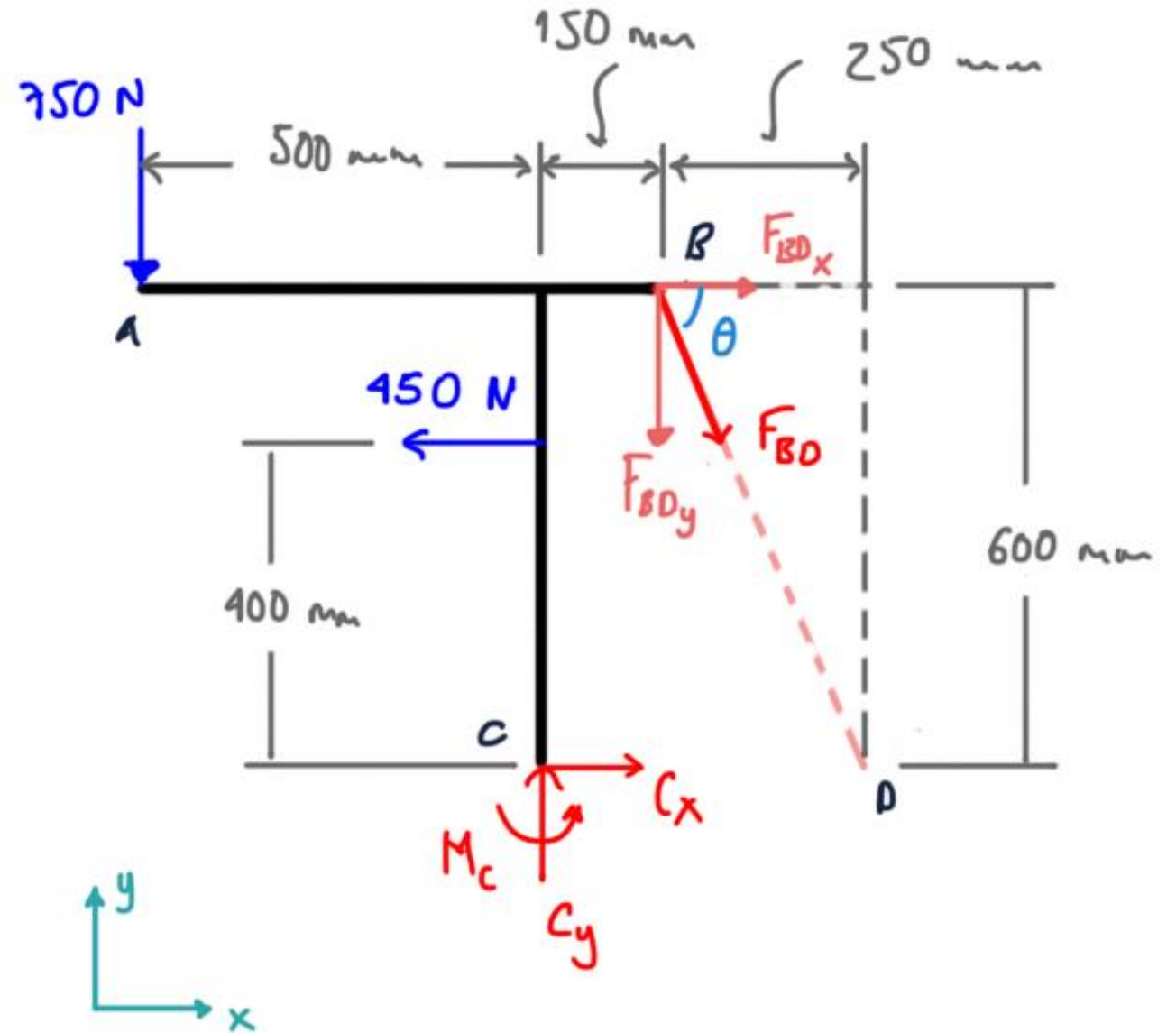


Figura P4.49 y P4.50

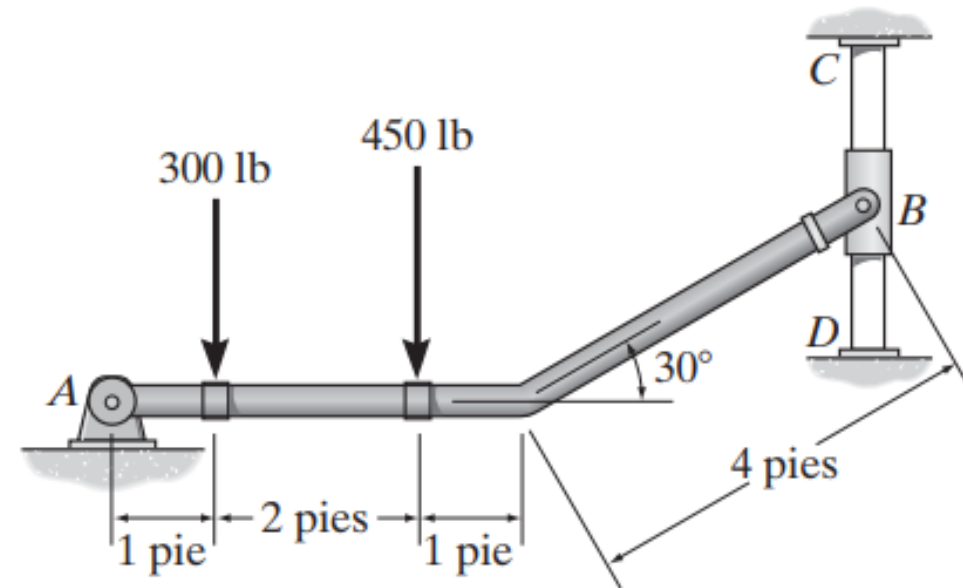
Ejemplo

Trazando el DCL



Ejemplo

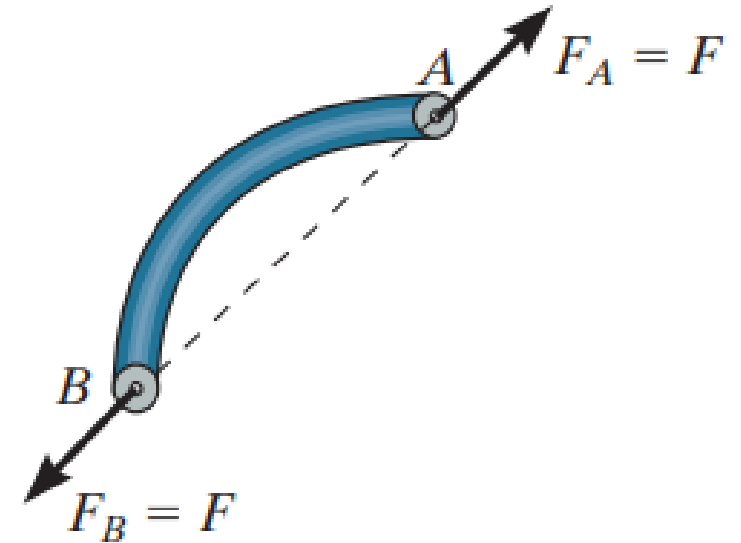
- 5-41.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la reacción del collar liso B sobre la barra.



Prob. 5-41

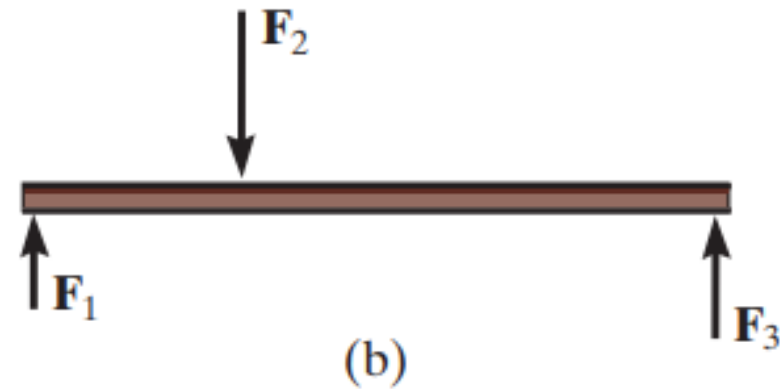
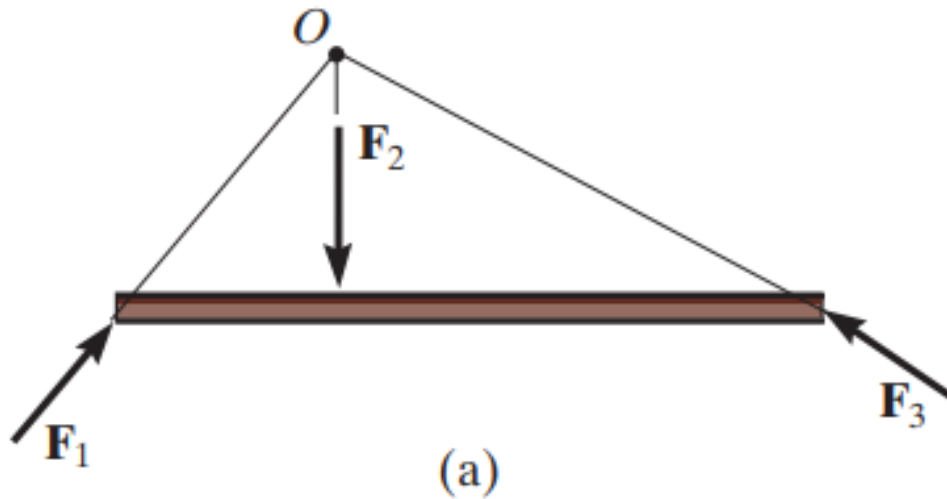
Elementos de dos fuerzas

- Un elemento de dos fuerzas tiene fuerzas aplicadas en sólo dos puntos sobre el elemento.
- Para que cualquier elemento de dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas que actúan sobre él deben tener la misma magnitud, actuar en direcciones opuestas y tener la misma línea de acción, dirigida a lo largo de la línea que une los puntos donde actúan estas fuerzas.



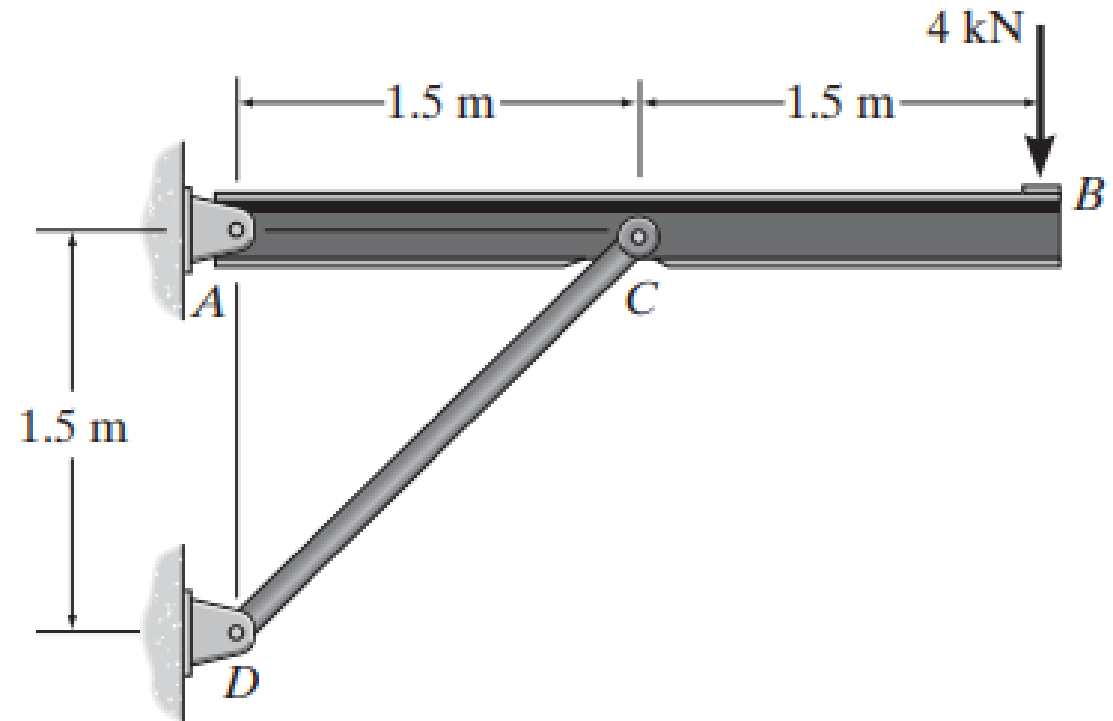
Elementos de tres fuerzas

- Si un elemento está sometido a sólo tres fuerzas, se denomina elemento de tres fuerzas.
- El equilibrio de momento se puede satisfacer sólo si las tres fuerzas forman un sistema de fuerzas concurrentes o paralelas.



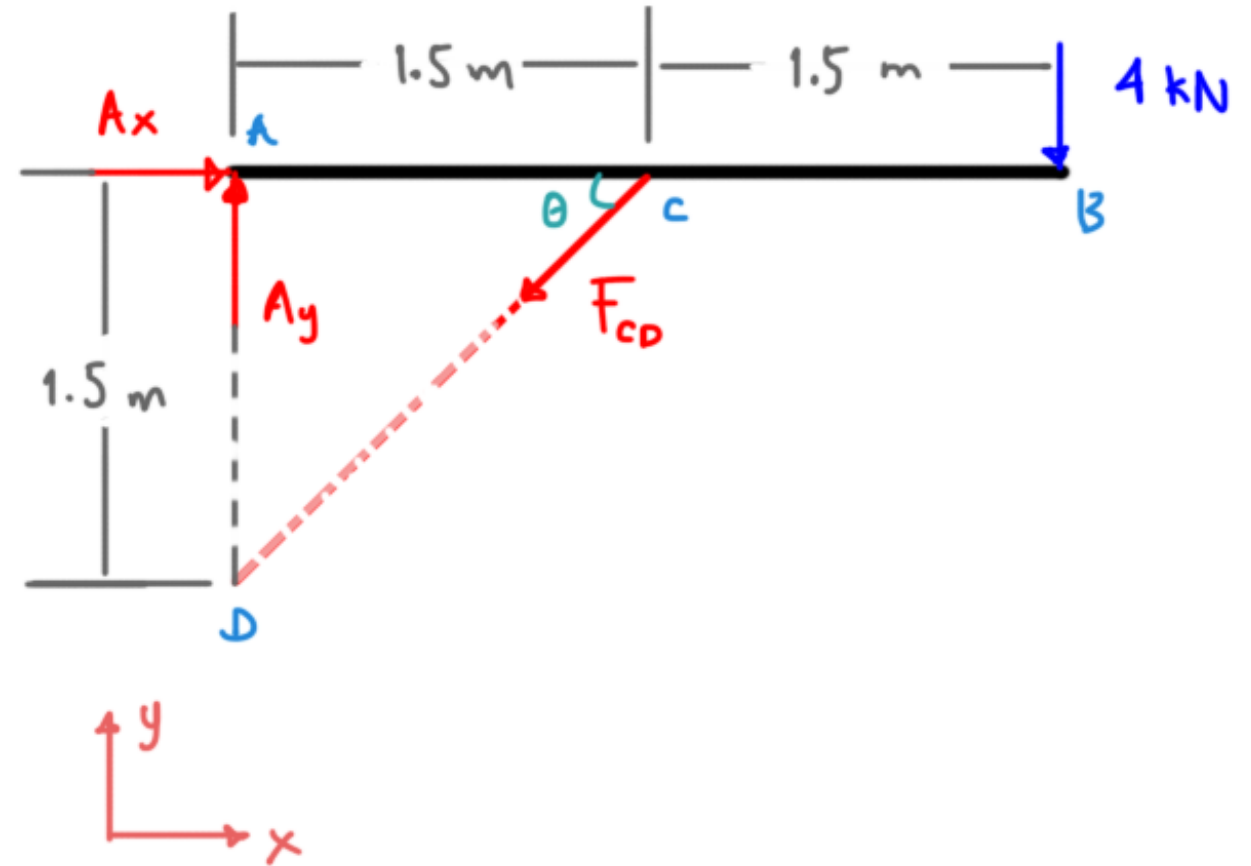
Ejemplo

F5-2. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la reacción sobre la viga en C .



Ejemplo

Trazando el DCL



Ejemplo

4.68 Determine las reacciones en B y C cuando $a = 1.5$ in.

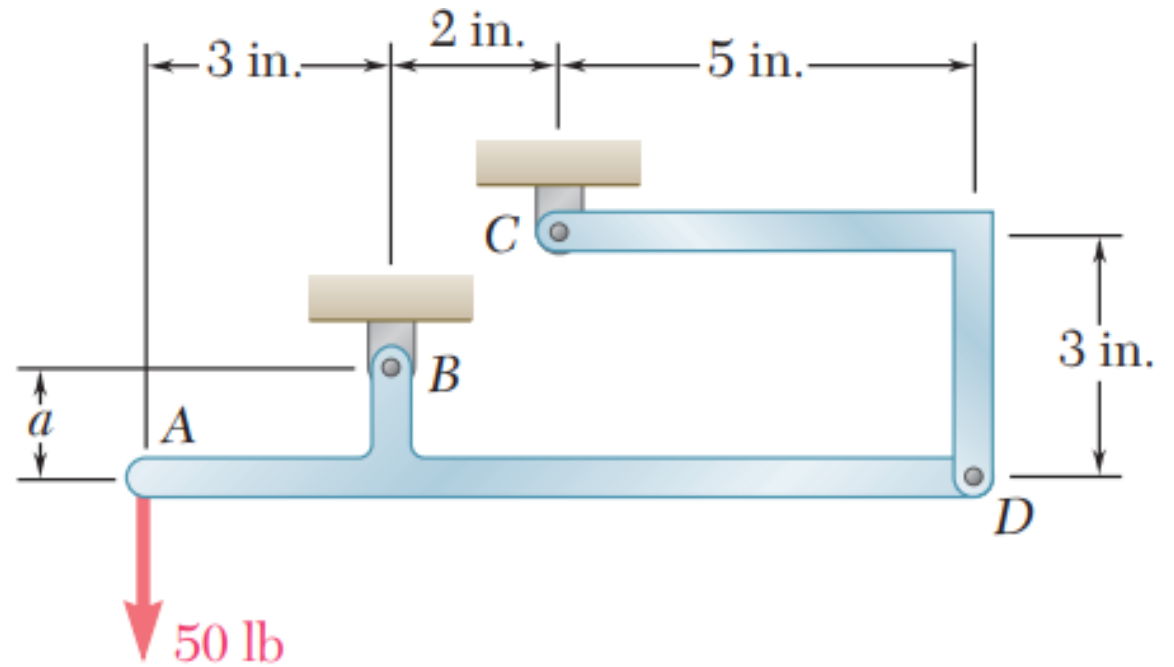
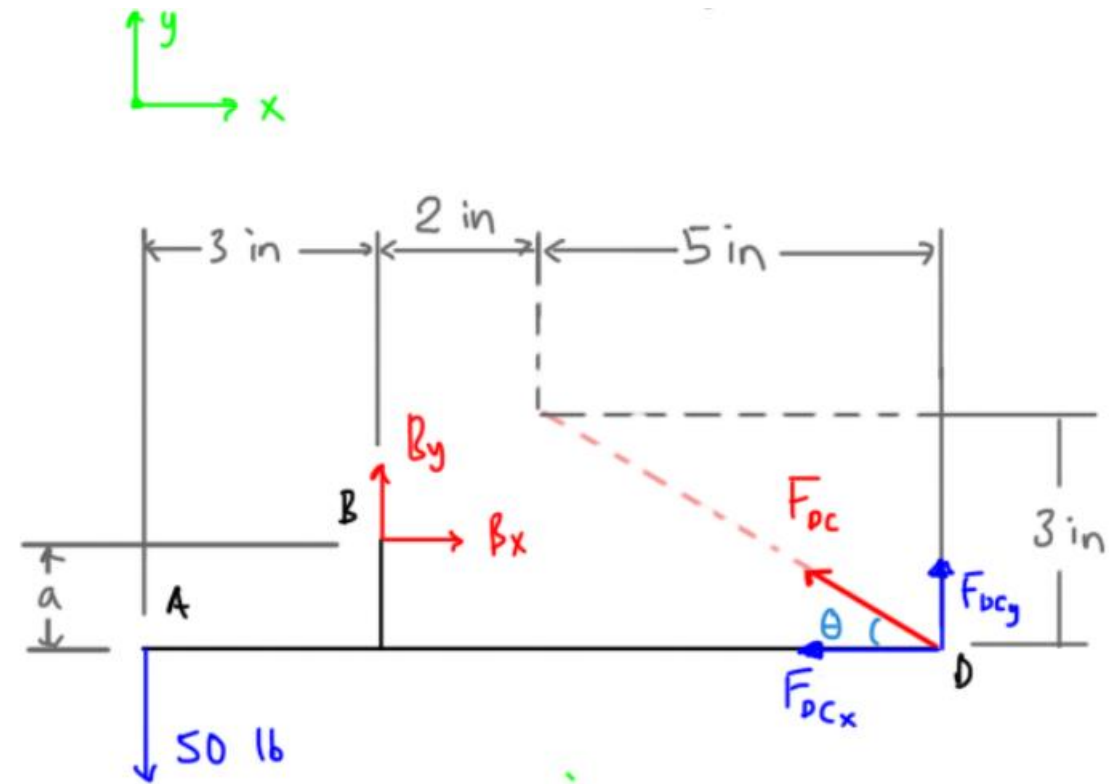


Figura **P4.68**

Ejemplo

DCL



Ejemplo

4.61 Determine las reacciones en A y B cuando $a = 180$ mm.

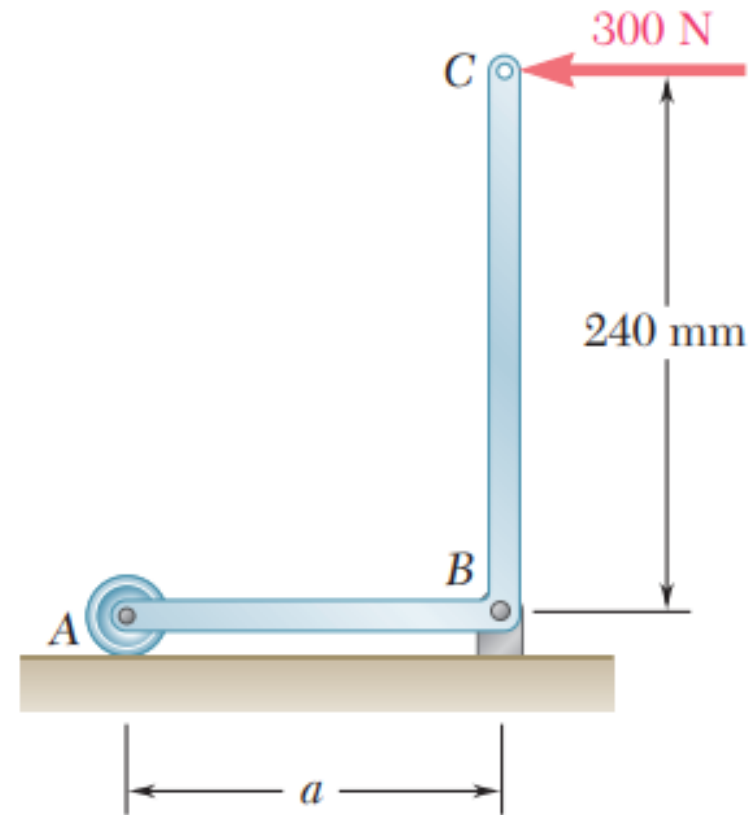


Figura P4.61 y P4.62





Equilibrio en tres dimensiones

Equilibrio en tres dimensiones

El procedimiento para analizar un cuerpo rígido en tres dimensiones es similar al caso bidimensional, es decir, comenzamos trazando el diagrama de cuerpo libre, reemplazando los soportes por las reacciones correspondientes; enseguida planteamos las ecuaciones de equilibrio y resolvemos para los valores desconocidos.

Reacciones en soportes

TABLA 5-2 Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas tridimensionales

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa alejándose del elemento en la dirección conocida del cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>Soporte superficial liso</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>

(3)



rodillo

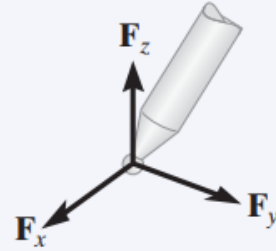


Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.

(4)



rótula esférica

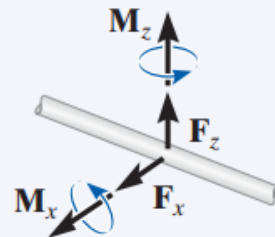


Tres incógnitas. Las reacciones son tres componentes rectangulares de fuerza.

(5)

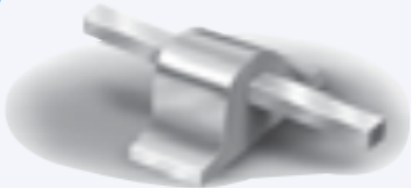
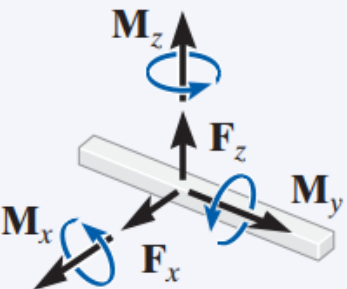

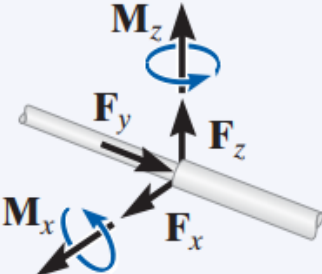


chumacera simple



Cuatro incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y dos componentes de momento de par que actúan perpendicularmente al eje. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.

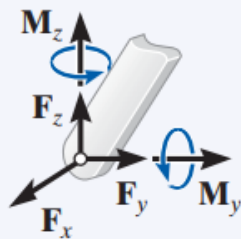
TABLA 5-2 Continuación

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(6)</p>  <p>chumacera simple con flecha cuadrada</p>		<p>Cinco incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y tres componentes de momento de par. <i>Nota:</i> por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.</p>
<p>(7)</p>  <p>chumacera de empuje simple</p>		<p>Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. <i>Nota:</i> en general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.</p>

(8)



pasador liso simple

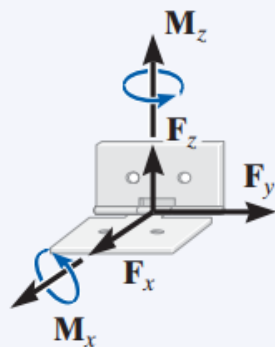


Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.

(9)



bisagra simple

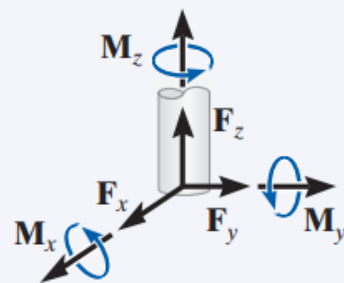


Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.

(10)



soporte fijo

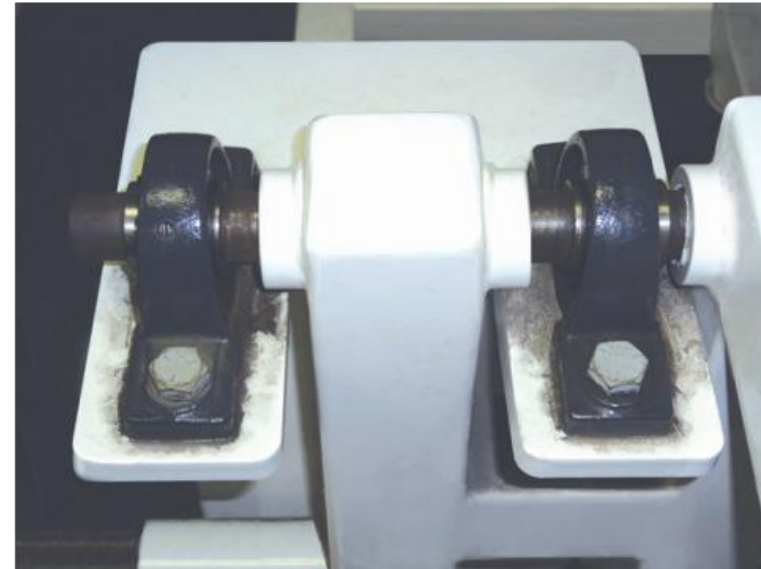


Seis incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y tres componentes de momento de par.

Soportes



This ball-and-socket joint provides a connection for the housing of an earth grader to its frame. (4)



These journal bearings are used to support the drive shaft on a machine. (5)

Soportes



The thrust bearing supports the ends of the shaft. (7)

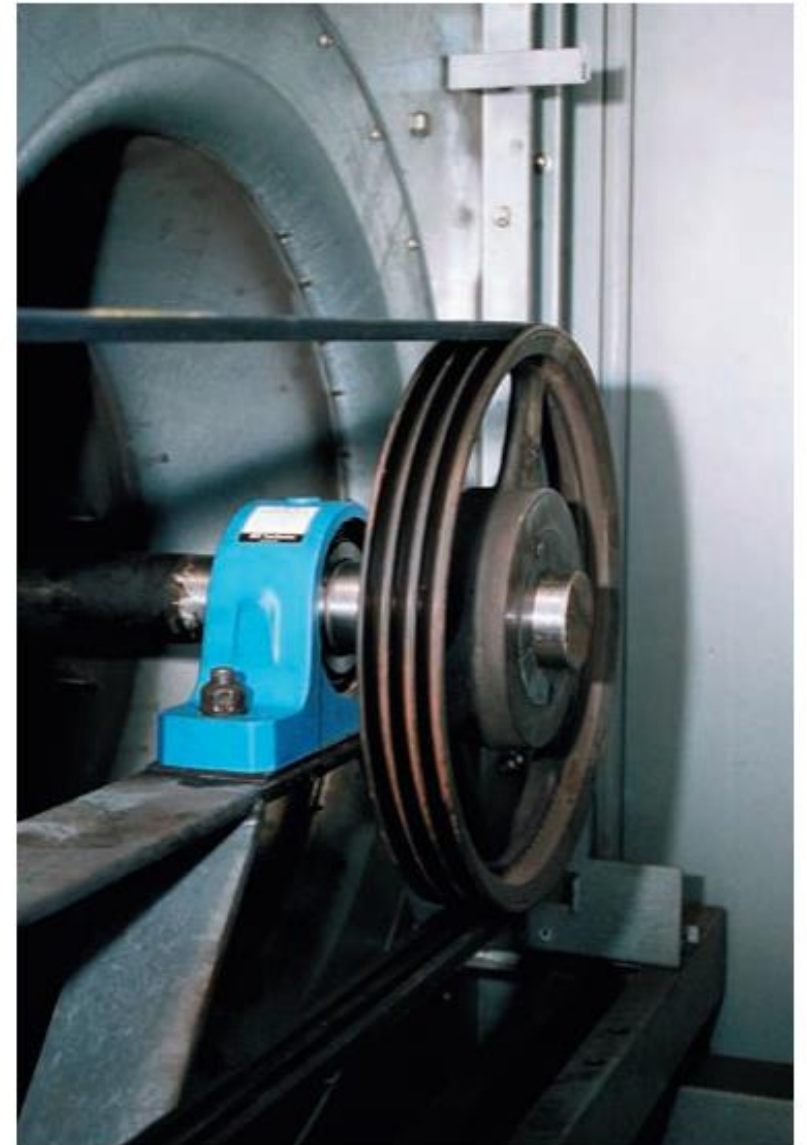


This pin is used to support the end of the strut used on a tractor. (8)

Soportes



Fotografía 4.6 Las juntas universales que se encuentran comúnmente en las flechas motrices de los autos y camiones de tracción trasera, permiten la transmisión del movimiento rotacional entre dos ejes no colineales.

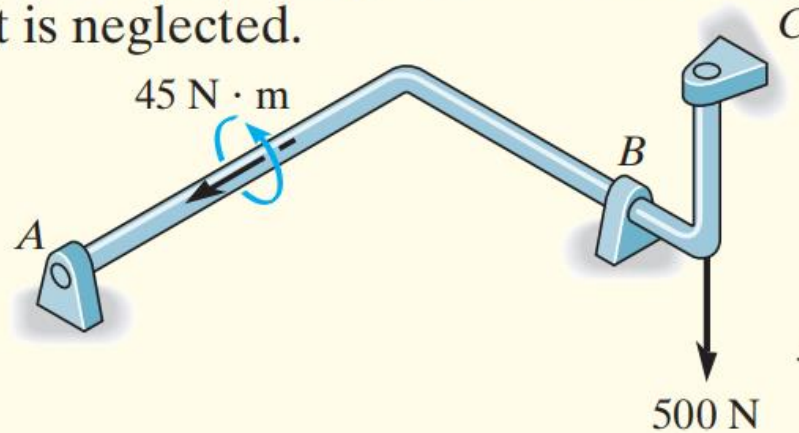


Fotografía 4.7 La caja de cojinetes que se muestra en la fotografía sostiene al eje de un ventilador usado en una instalación industrial.

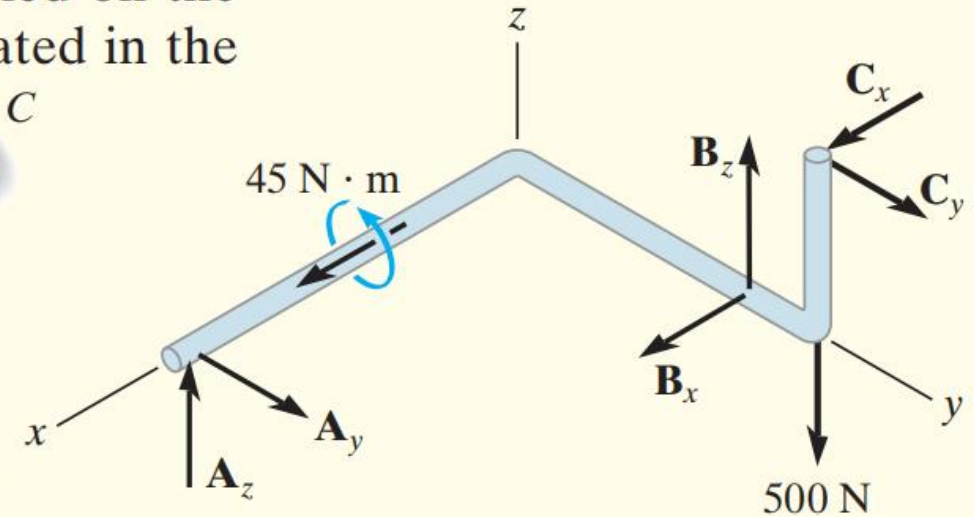
Diagramas de cuerpo libre

Consider the two rods and plate, along with their associated free-body diagrams, shown in Fig. 5–23. The x , y , z axes are established on the diagram and the unknown reaction components are indicated in the *positive sense*. The weight is neglected.

SOLUTION

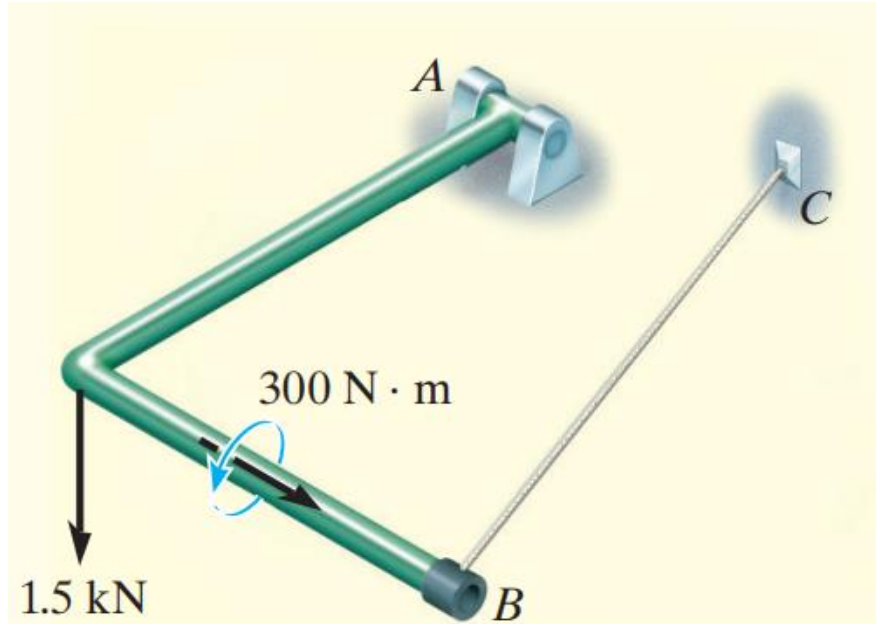


Properly aligned journal bearings at A , B , C .



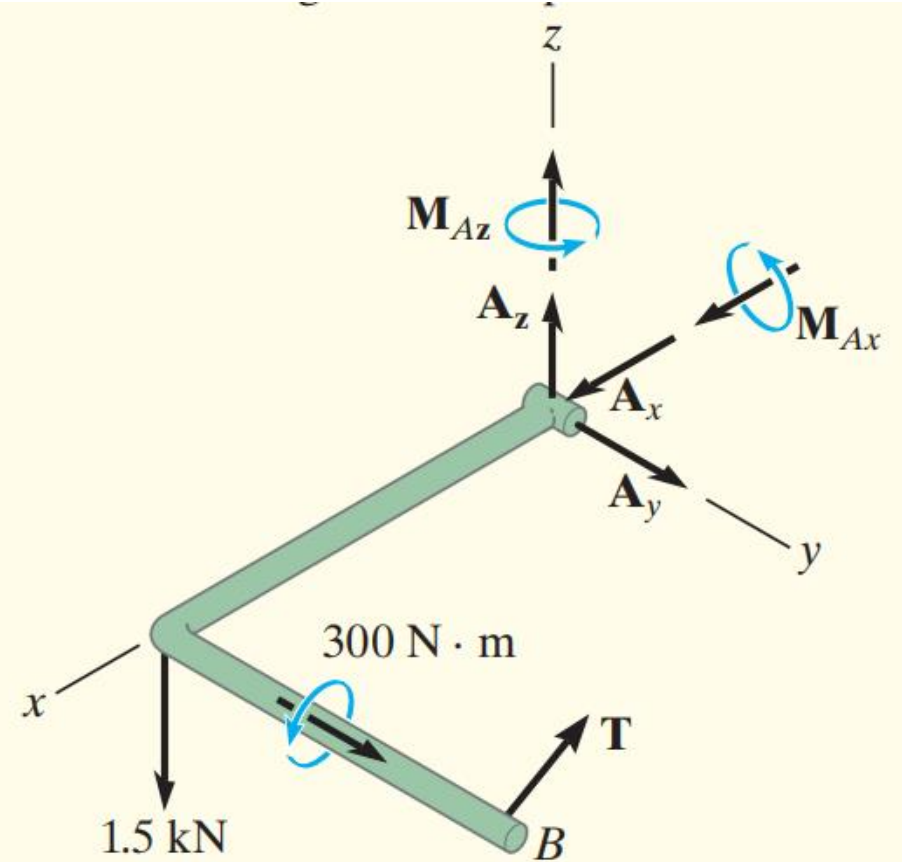
The force reactions developed by the bearings are *sufficient* for equilibrium since they prevent the shaft from rotating about each of the coordinate axes. No couple moments at each bearing are developed.

Diagramas de cuerpo libre



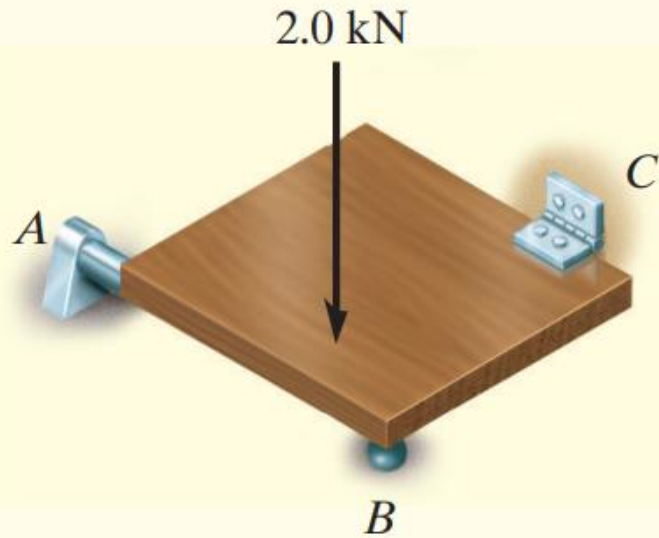
Pin at A and cable BC .

2.0 m



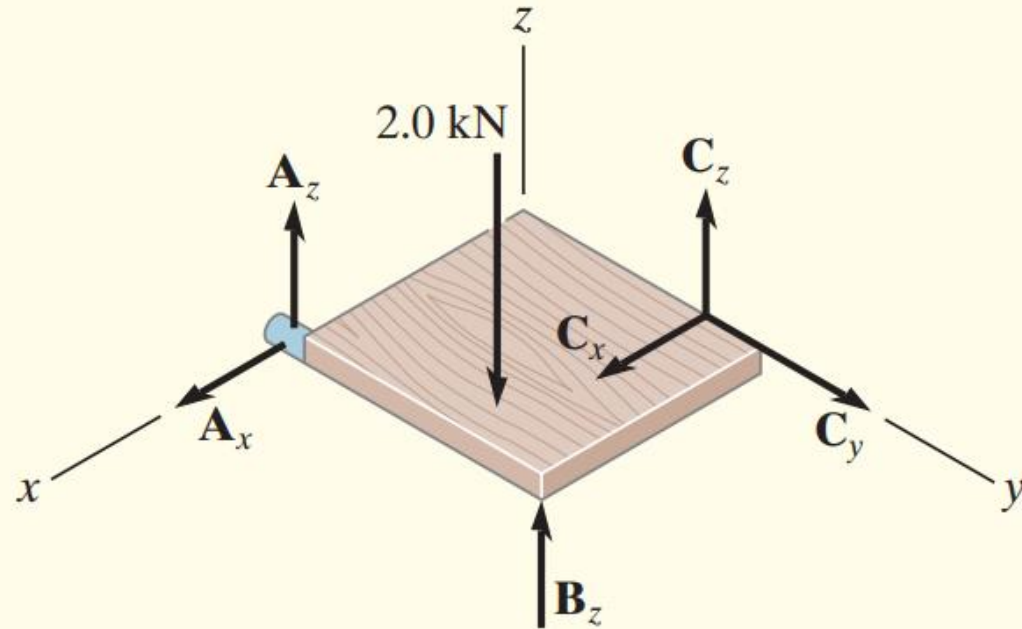
Moment components are developed by the pin on the rod to prevent rotation about the x and z axes.

Diagramas de cuerpo libre



Properly aligned journal bearing at *A* and hinge at *C*. Roller at *B*.

by the pin on the rod to prevent rotation about the *x* and *z* axes.



Only force reactions are developed by the bearing and hinge on the plate to prevent rotation about each coordinate axis. No moments are developed at the hinge.

Ecuaciones de equilibrio estático

Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden expresarse matemáticamente en forma vectorial como:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Donde $\Sigma \mathbf{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en el cuerpo o fuera de él.

Ecuaciones de equilibrio estático

Si todas las fuerzas y momentos de par aplicados se expresan en forma vectorial cartesiana, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Como las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son independientes entre sí, las ecuaciones anteriores se satisfacen siempre que:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

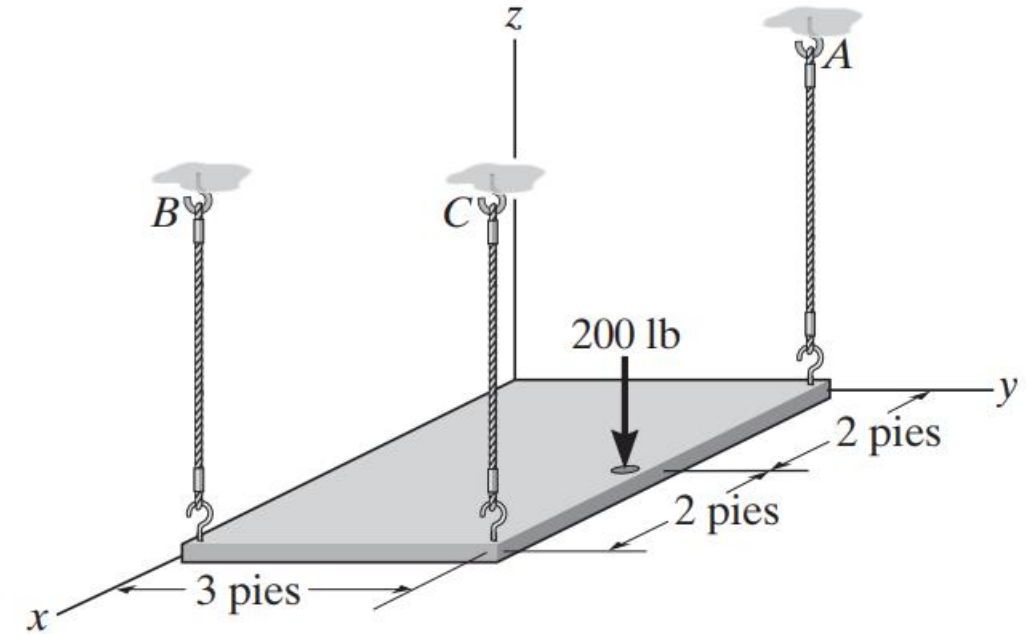
$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

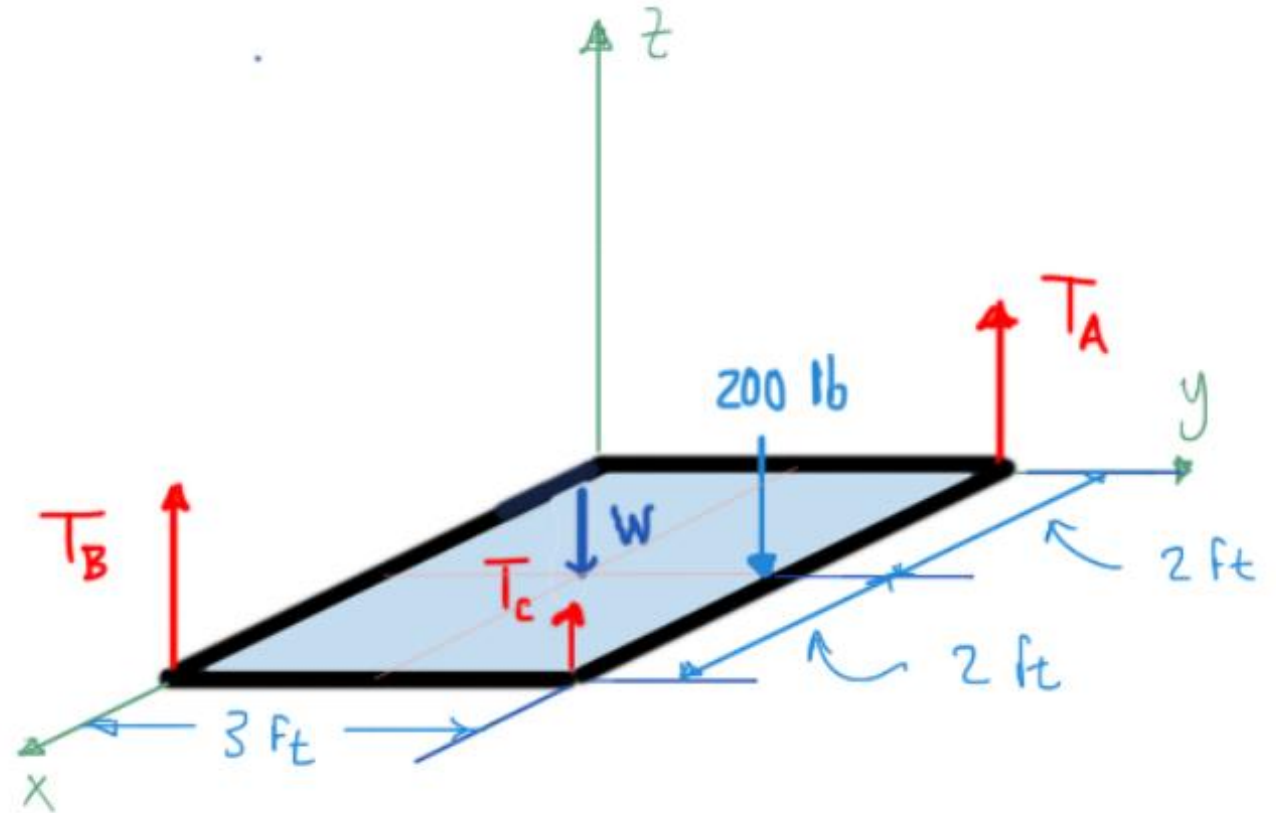
Ejemplo

F5-7. La placa uniforme tiene un peso de 500 lb. Determine la tensión en cada uno de los cables de soporte.



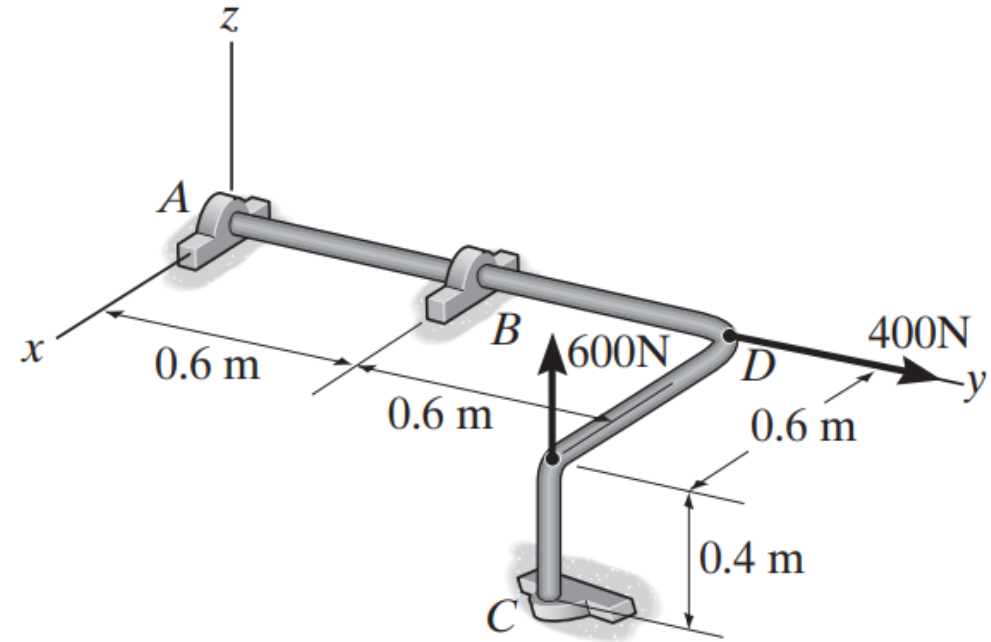
Ejemplo

Diagrama de cuerpo libre



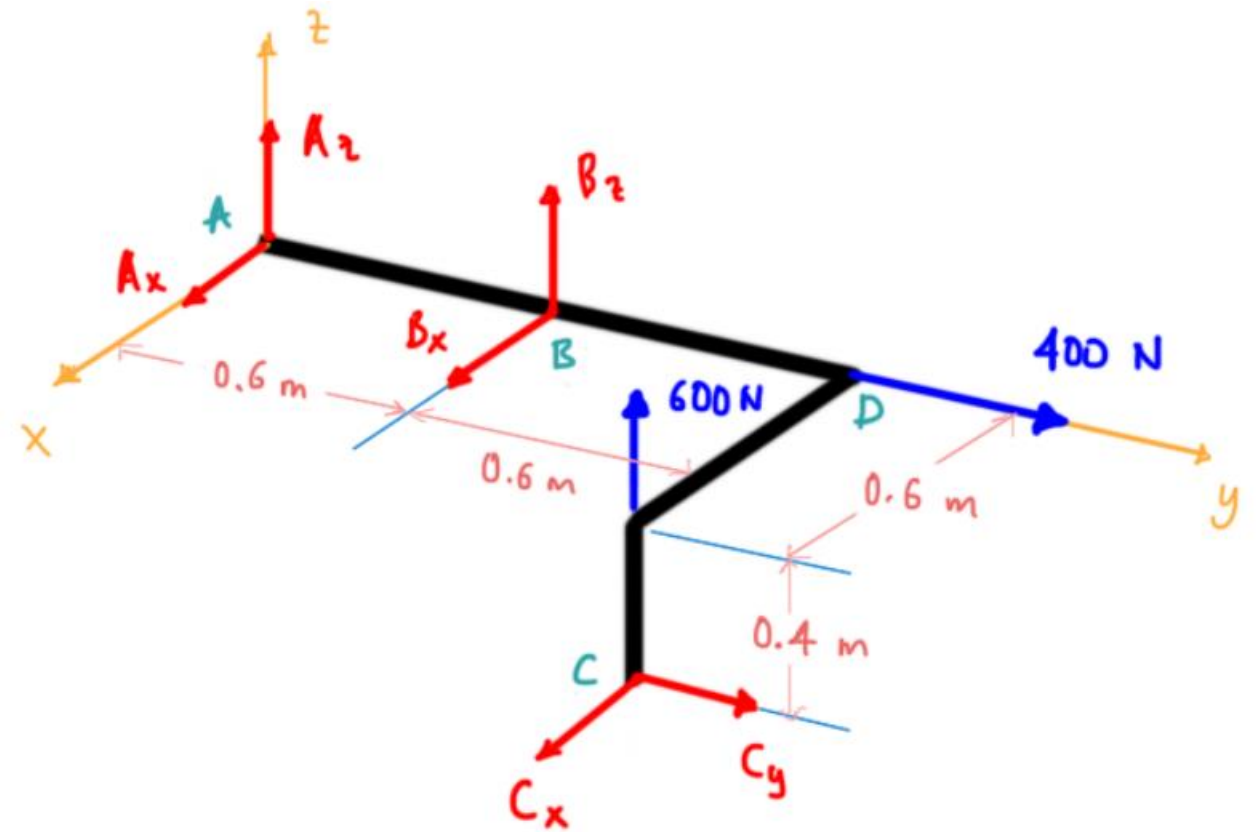
Ejemplo

F5-9. La barra se sostiene mediante chumaceras lisas en A , B y C y está sometida a las dos fuerzas mostradas. Determine las reacciones en los soportes.



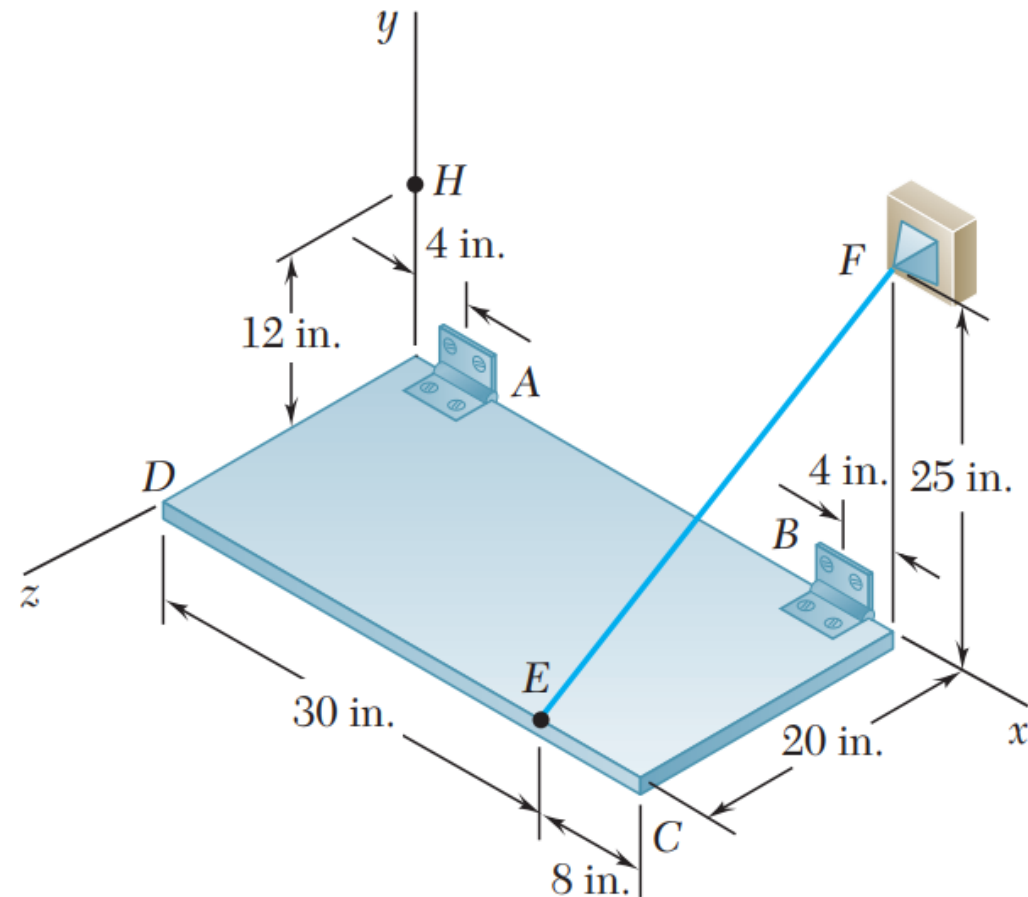
Ejemplo

Diagrama de cuerpo libre



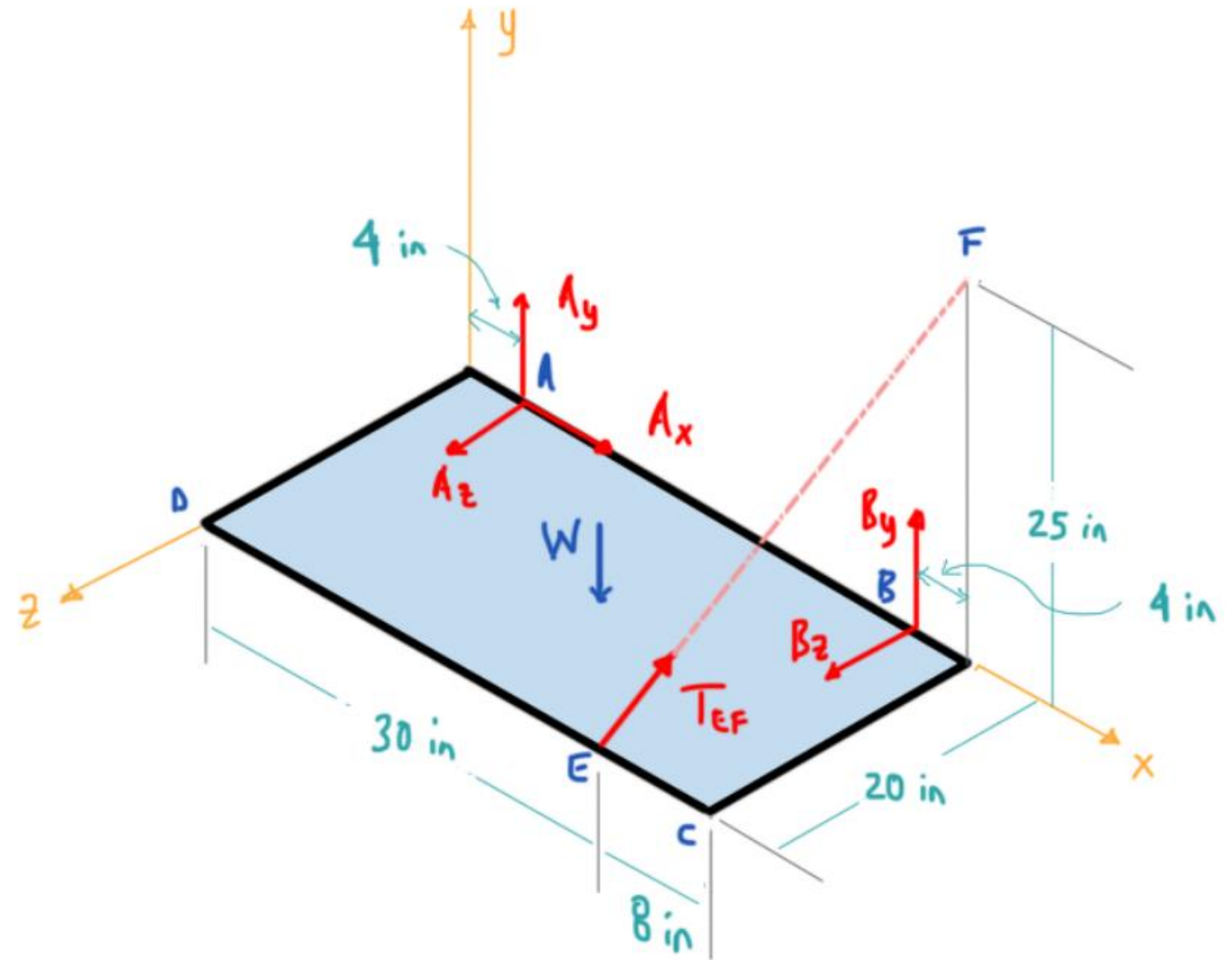
Ejemplo

4.117 La placa rectangular de la figura pesa 75 lb y se mantiene en la posición mostrada mediante bisagras en A y B y por medio del cable EF . Si se supone que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine $a)$ la tensión en el cable y $b)$ las reacciones en A y B .



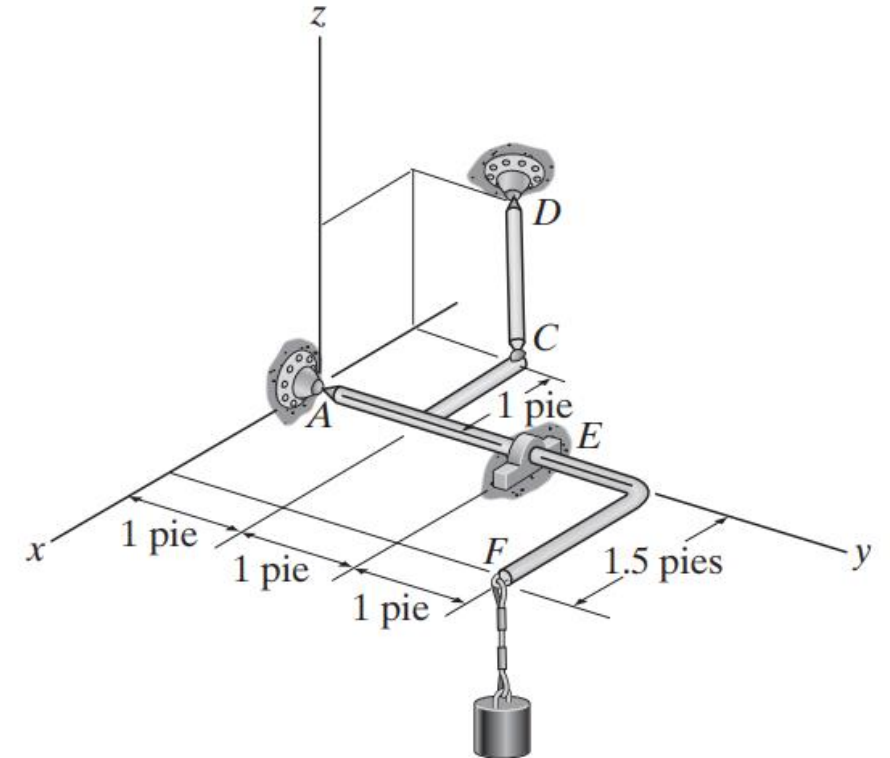
Ejemplo

Diagrama de cuerpo libre



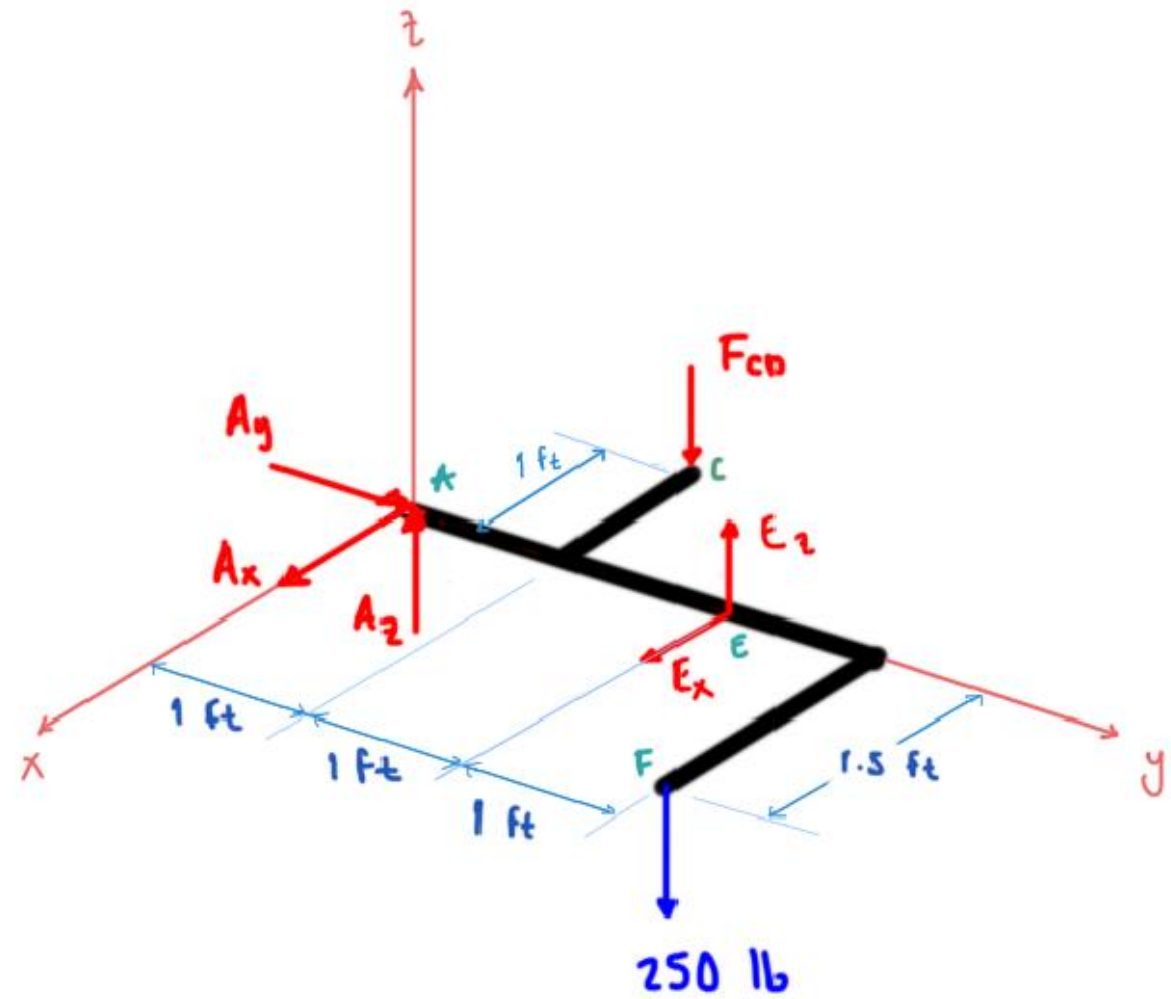
Ejemplo

5-71. El ensamble de barras se usa para sostener el cilindro de 250 lb. Determine las componentes de reacción en la junta de rótula esférica A , en la chumacera lisa E y la fuerza desarrollada a lo largo de la barra CD . Las conexiones en C y D son juntas de rótula esférica.



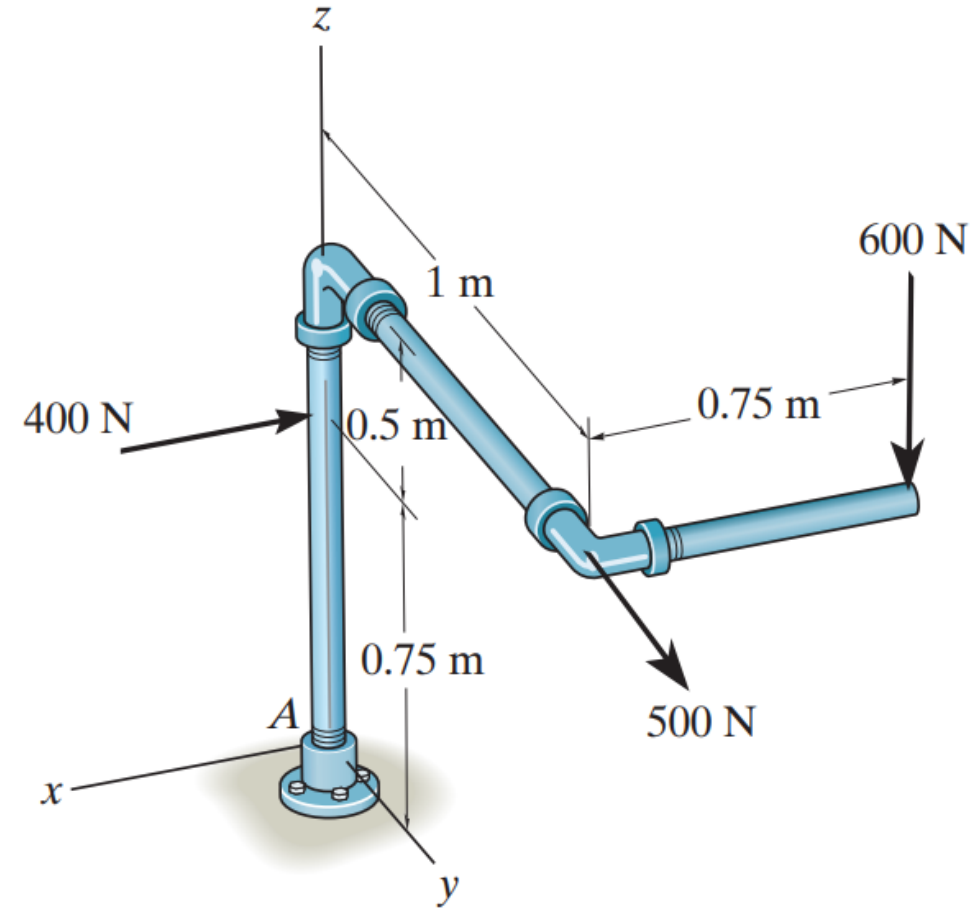
Ejemplo

Diagrama de cuerpo libre



Ejemplo

5–66. Determine the components of reaction at the fixed support A . The 400 N, 500 N, and 600 N forces are parallel to the x , y , and z axes, respectively.



Ejemplo

4.137 Dos placas rectangulares se sueldan para formar el ensamble mostrado en la figura. El ensamble se sostiene mediante rótulas en B y D y por medio de una bola sobre una superficie horizontal en C . Para la carga mostrada determine la reacción en C .

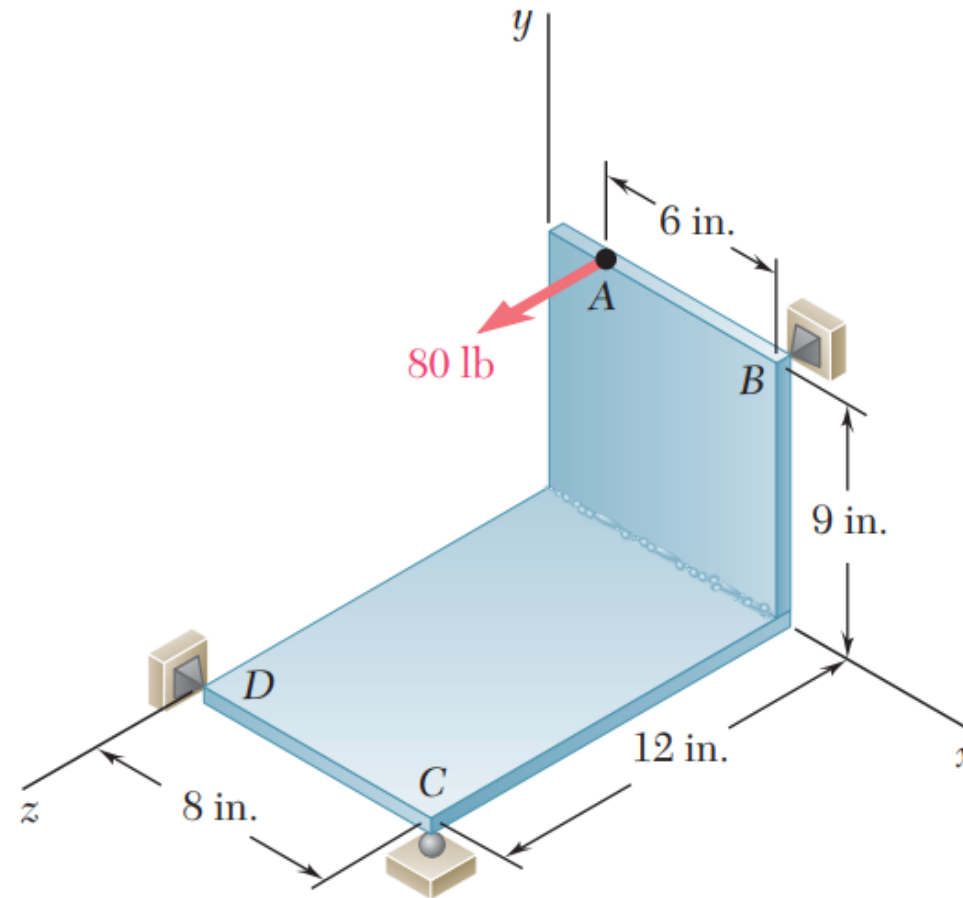


Figura P4.137