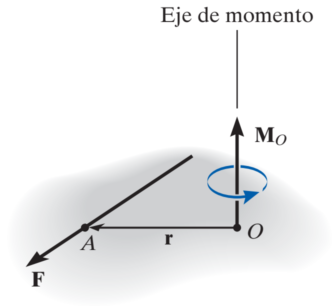
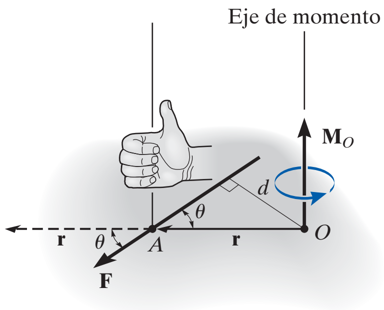


(a)

4



(b)

Fig. 4-10

4.3 Momento de una fuerza, formulación vectorial

El momento de una fuerza **F** con respecto al punto O, o realmente con respecto al eje del momento que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a O y a **F**, figura 4-10*a*, puede expresarse por el producto cruz vectorial, a saber,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-6}$$

Aquí **r** representa un vector de posición trazado *desde O* hasta *cualquier punto* que se encuentre sobre la línea de acción de **F**. Ahora mostraremos que en realidad el momento $\mathbf{M}_O$, al ser determinado por este producto cruz, tiene la magnitud y la dirección adecuadas.

Magnitud. La magnitud del producto cruz se define con la ecuación 4-3 como $M_O = rF \operatorname{sen} \theta$, donde el ángulo θ se mide entre las *colas* de **r** y **F**. Para establecer este ángulo, se debe tratar a **r** como un vector deslizante, de manera que θ se pueda construir correctamente; figura 4-10*b*. Como el brazo de momento $d = r \operatorname{sen} \theta$, entonces

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = F(r \operatorname{sen} \theta) = Fd$$

lo que concuerda con la ecuación 4-1.

Dirección. La dirección y el sentido de $\mathbf{M}_O$ en la ecuación 4-6 están determinados mediante la regla de la mano derecha, tal como se aplica ésta al producto cruz. Así, al deslizar **r** a la posición de la línea discontinua y cerrar los dedos de la mano derecha de **r** hacia **F**, "**r** cruz **F**", el pulgar está dirigido hacia arriba o perpendicularmente al plano que contiene a **r** y a **F**, esto es, en la *misma dirección* que $\mathbf{M}_O$, el momento de la fuerza respecto al punto O, figura 4-10*b*. Observe que el "curveo" de los dedos como el curveo alrededor del vector momento, indica el sentido de rotación causado por la fuerza. Como el producto cruz no obedece la ley conmutativa, es importante conservar el orden de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para producir el sentido correcto de la dirección para $\mathbf{M}_O$.

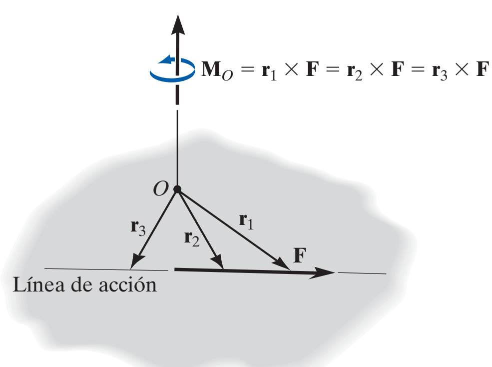


Fig. 4-11

Principio de transmisibilidad. A menudo, la operación del producto cruz se usa en tres dimensiones porque no se requiere la distancia perpendicular o el brazo de momento desde el punto O hasta la línea de acción de la fuerza. En otras palabras, podemos usar cualquier vector de posición **r** medido desde el punto O hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza **F**, figura 4-11. Así,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}$$

Como **F** se puede aplicar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción y aún así crear el *mismo momento* con respecto al punto O, entonces **F** puede considerarse un *vector deslizante*. Esta propiedad se llama *principio de transmisibilidad* de una fuerza.

Formulación vectorial cartesiana. Si establecemos ejes coordenados x, y, z, el vector posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ pueden expresarse como vectores cartesianos, figura 4-12a. Al aplicar la ecuación 4-5, tenemos

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}} \qquad (4\text{-}7)$$

donde

r_x, r_y, r_z representan las componentes x, y, z del vector de posición trazado desde el punto O hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza

F_x, F_y, F_z representan las componentes x, y, z del vector fuerza

Si se desarrolla el determinante, como en la ecuación 4-4 tenemos

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k} \qquad (4\text{-}8)$$

El significado físico de esas tres componentes de momento resulta evidente al estudiar la figura 4-12b. Por ejemplo, la componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{M}_O$ puede determinarse a partir de los momentos de $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ con respecto al eje x. La componente $\mathbf{F}_x$ *no* genera un momento o tendencia a girar con respecto al eje x puesto que esta fuerza es *paralela* al eje x. La línea de acción de $\mathbf{F}_y$ pasa por el punto B y entonces la magnitud del momento de $\mathbf{F}_y$ con respecto al punto A sobre el eje x es r_zF_y. Por la regla de la mano derecha, esta componente actúa en la dirección $\mathbf{i}$ *negativa*. De igual forma, $\mathbf{F}_z$ pasa por el punto C y por lo tanto aporta una componente de momento de $r_yF_z\mathbf{i}$ con respecto al eje. Así, $(M_O)_x = (r_yF_z - r_zF_y)$ como se muestra en la ecuación 4-8. Como ejercicio, establezca las componentes $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de $\mathbf{M}_O$ de esta manera y demuestre que en realidad la forma desarrollada del determinante, ecuación 4-8, representa el momento de la fuerza respecto del punto O. Una vez determinada $\mathbf{M}_O$ observe que siempre será *perpendicular* al plano sombreado en azul que contiene los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$, figura 4-12a.

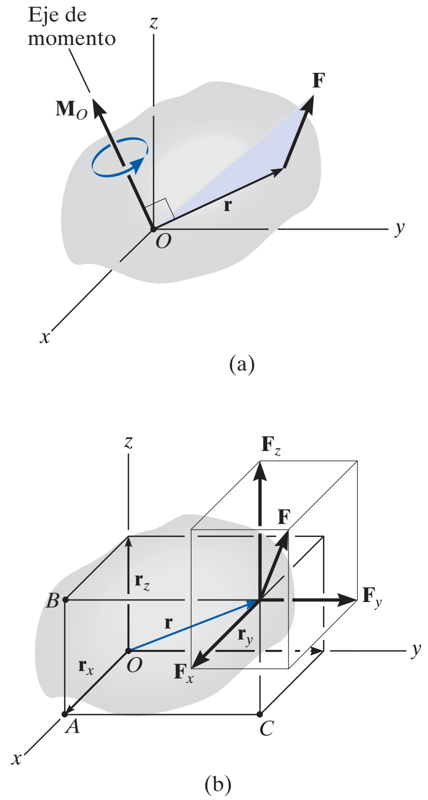


Fig. 4-12

Momento resultante de un sistema de fuerzas. Si un sistema de fuerzas actúa sobre un cuerpo, figura 4-13, el momento resultante de las fuerzas respecto al punto O puede ser determinado mediante la adición del momento de cada fuerza. Esta resultante se puede escribir simbólicamente como

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (4\text{-}9)$$

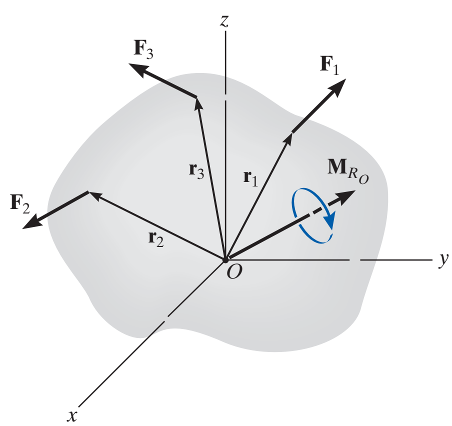
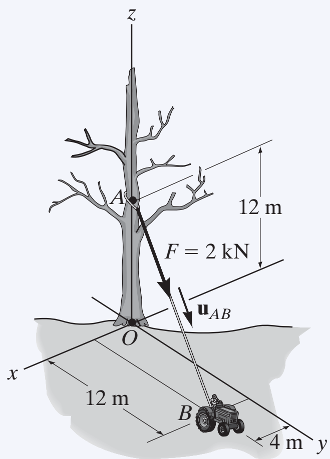


Fig. 4-13

EJEMPLO 4.3

Determine el momento producido por la fuerza **F** que se muestra en la figura 4-14*a*, respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



(a)

SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura 4-14*a*, puede usarse $\mathbf{r}_A$ o bien $\mathbf{r}_B$ para determinar el momento respecto al punto *O*. Estos vectores de posición son

$$\mathbf{r}_A = \{12\mathbf{k}\}\text{ m} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\}\text{ m}$$

La fuerza **F** expresada como un vector cartesiano es

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 2\text{ kN}\left[\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(4\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2 + (-12\text{ m})^2}}\right]$$

$$= \{0.4588\mathbf{i} + 1.376\mathbf{j} - 1.376\mathbf{k}\}\text{ kN}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$$= [0(-1.376) - 12(1.376)]\mathbf{i} - [0(-1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{j} + [0(1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{k}$$

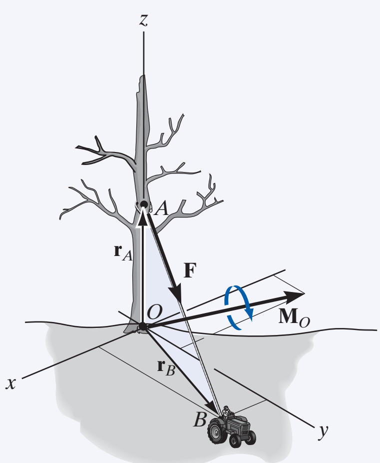
$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}\text{ kN}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***

o bien

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$$= [12(-1.376) - 0(1.376)]\mathbf{i} - [4(-1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{j} + [4(1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{k}$$

$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}\text{ kN}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***



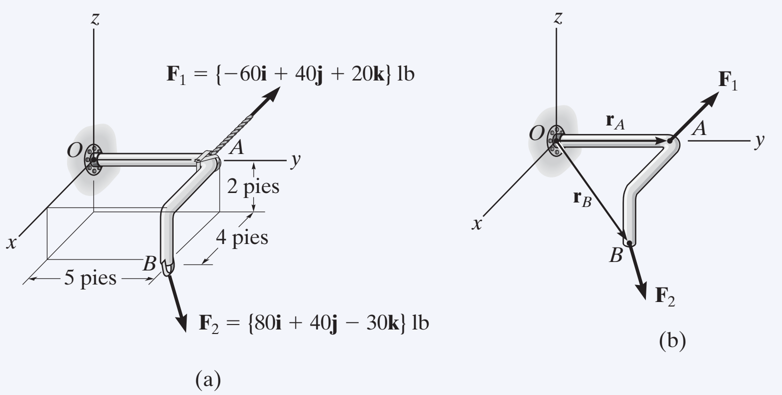
(b)

Fig. 4-14

NOTA: como se muestra en la figura 4-14*b*, $\mathbf{M}_O$ actúa perpendicular al plano que contiene a **F**, $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. Después de trabajar con este problema a partir de $M_O = Fd$, observe la dificultad que puede surgir al obtener el brazo de momento *d*.

EJEMPLO 4.4

Dos fuerzas actúan sobre la barra en la figura 4-15*a*. Determine el momento resultante que generan con respecto al soporte en *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



SOLUCIÓN

Los vectores de posición están dirigidos desde el punto *O* hacia cada fuerza, como se muestra en la figura 4-15*b*. Esos vectores son

$$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\} \text{ pie}$$

$$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ pie}$$

Por lo tanto, el momento resultante con respecto a *O* es

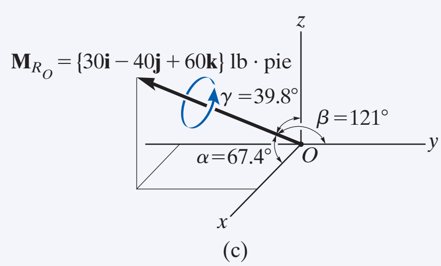


Fig. 4-15

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{R_O} &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_3 \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix} \\
&= [5(20) - 0(40)]\mathbf{i} - [0]\mathbf{j} + [0(40) - (5)(-60)]\mathbf{k} \\
&\quad + [5(-30) - (-2)(40)]\mathbf{i} - [4(-30) - (-2)(80)]\mathbf{j} + [4(40) - 5(80)]\mathbf{k} \\
&= \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}
\end{aligned}$$

Resp.

NOTA: este resultado se presenta en la figura 4-15*c*. Los ángulos directores coordenados se determinaron a partir del vector unitario para M_{R_O}. Tenga en cuenta que las dos fuerzas tienden a ocasionar que la barra gire con respecto al eje de momento en la manera que muestra la flecha curva sobre el vector de momento.

4