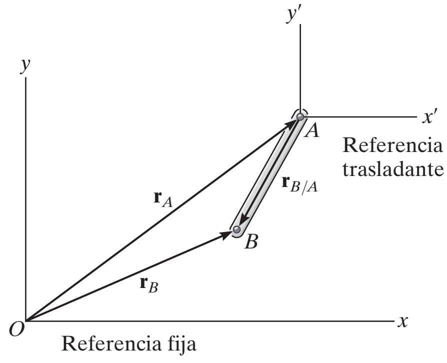
16.5 Análisis de movimiento relativo: velocidad

El movimiento plano general de un cuerpo rígido se describe como una *combinación* de traslación y rotación. Para ver estos movimientos "componentes" *por separado* utilizaremos un *análisis de movimiento relativo* que implica dos conjuntos de ejes de coordenadas. El sistema de coordenadas x, y está fijo y mide la posición *absoluta* de dos puntos A y B en el cuerpo, representado aquí como una barra, figura 16-10*a*. Se hará que el origen de los sistemas de coordenadas x', y' coincida con el "punto base" A seleccionado, el cual por lo general tiene un movimiento *conocido*. Los ejes de este sistema de coordenadas se *trasladan* con respecto al marco fijo pero no giran con la barra.



(a)

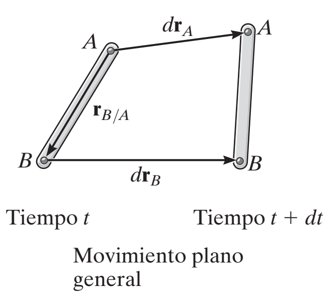
Fig. 16-10

Posición. El vector de posición $\mathbf{r}_A$ en la figura 16-10*a* especifica la ubicación del "punto base" A y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ localiza el punto B con respecto al punto A. Mediante adición vectorial, la *posición* de B es por tanto

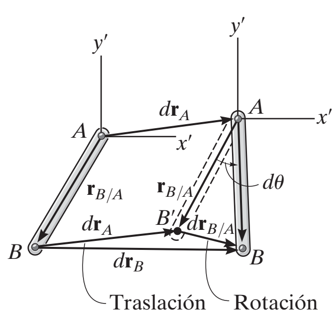
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Desplazamiento. Durante un instante de tiempo dt, los puntos A y B experimentan los desplazamientos $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ como se muestra en la figura 16-10*b*. Si consideramos el movimiento plano general por sus partes componentes entonces *toda la barra* primero se *traslada* una cantidad $d\mathbf{r}_A$ de modo que A, el punto base, se mueve a su *posición final* y el punto B a B', figura 16-10*c*. La barra *gira* entonces alrededor de A una cantidad $d\theta$ de modo que B' experimenta un *desplazamiento relativo* $d\mathbf{r}_{B/A}$ y se mueve a su posición final B. Debido a la rotación sobre A, $d\mathbf{r}_{B/A} = r_{B/A}\,d\theta$ y el desplazamiento de B es

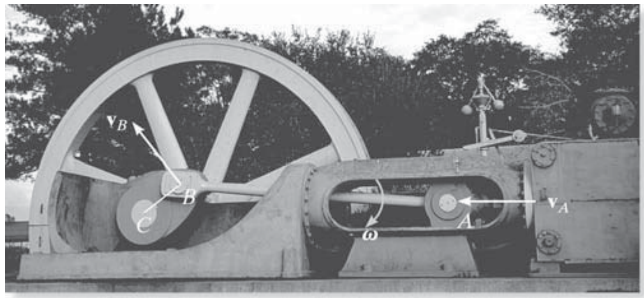
$$\underbrace{d\mathbf{r}_B}_{\text{debido a la traslación y rotación}} = \underbrace{d\mathbf{r}_A}_{\text{debido a la traslación de } A} + \underbrace{d\mathbf{r}_{B/A}}_{\text{debido a la rotación alrededor de } A}$$



(b)



(c)



A medida que el bloque corredizo A se desplaza horizontalmente hacia la izquierda a una velocidad $\mathbf{v}_A$, hace girar la manivela CB en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de modo que $\mathbf{v}_B$ es tangente a su trayectoria circular, es decir, hacia arriba a la izquierda. La biela AB que conecta está sometida a movimiento plano general y en el instante que se muestra su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$.

Velocidad. Para determinar la relación entre las velocidades de los puntos A y B es necesario considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de posición o simplemente dividir la ecuación de desplazamiento entre dt. De esto resulta

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$ y $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ se miden con respecto a los ejes fijos x, y y representan las *velocidades absolutas* de los puntos A y B, respectivamente. Como el desplazamiento relativo lo provoca una rotación, la magnitud del tercer término es $dr_{B/A}/dt = r_{B/A}\, d\theta/dt = r_{B/A}\dot{\theta} = r_{B/A}\omega$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Denotaremos este término como la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A}$, puesto que representa la velocidad de B con respecto a A medida por un observador fijo en los ejes trasladantes x', y'. Dicho de otra manera, *la barra parece moverse como si girara con una velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *con respecto al eje* z' *que pasa por* A. Por consiguiente, la magnitud de $\mathbf{v}_{B/A}$ es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ y su *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$. Por consiguiente, tenemos

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \tag{16-15}$$

donde

$\mathbf{v}_B =$ velocidad del punto B
$\mathbf{v}_A =$ velocidad del punto base A
$\mathbf{v}_{B/A} =$ velocidad de B con respecto a A

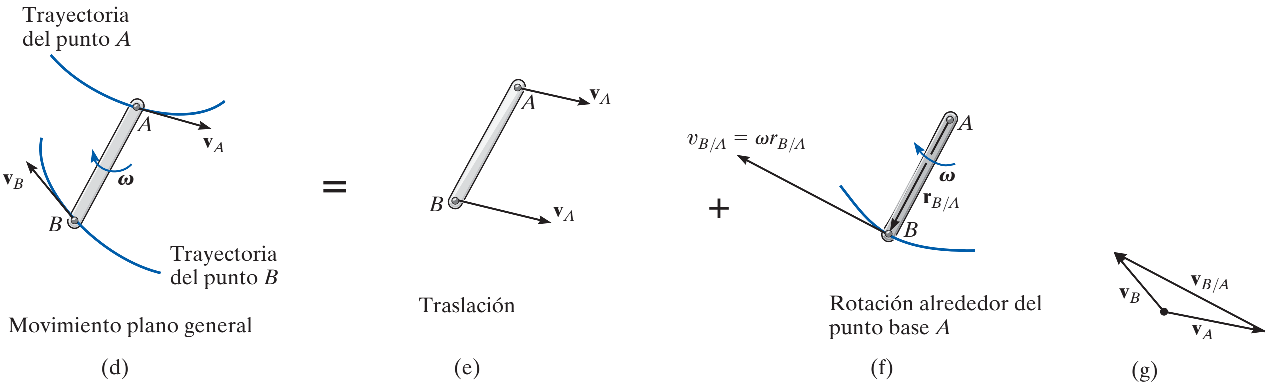


Fig. 16-10 (cont.)

Lo que esta ecuación establece es que la velocidad de B, figura 16-10d, se determina al considerar que toda la barra se traslada con una velocidad de $\mathbf{v}_A$, figura 16-10e y que gira alrededor de A con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, figura 16-10f. La adición vectorial de estos dos efectos, aplicada a B, resulta $\mathbf{v}_B$, como se muestra en la figura 16-10g.

Como la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ representa el efecto del *movimiento circular*, alrededor de A, este término puede expresarse por medio del producto vectorial $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-9. Por consiguiente, para su aplicación mediante un análisis vectorial cartesiano, también podemos escribir la ecuación 16-15 como

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}} \qquad (16\text{-}16)$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B
$\mathbf{v}_A$ = velocidad del punto base A
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector de posición dirigido de A a B

La ecuación de velocidad 16-15 o 16-16 puede usarse de una manera práctica para estudiar el movimiento plano general de un cuerpo rígido el cual está o conectado por pasador a, o en contacto con otros cuerpos en movimiento. Cuando se aplica esta ecuación, los puntos A y B en general deben seleccionarse, como puntos en el cuerpo que están conectados por medio de un pasador a otros cuerpos, o como puntos en contacto con cuerpos adyacentes que tienen un *movimiento conocido*. Por ejemplo, el punto A en el eslabón AB en la figura 16-11a debe moverse a lo largo de una trayectoria horizontal, mientras que el punto B lo hace en una trayectoria circular. Por consiguiente pueden establecerse las *direcciones* de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ puesto que siempre son *tangentes* a sus trayectorias de movimiento, figura 16-11b. En el caso de la rueda mostrada en la figura 16-12, la cual rueda *sin deslizarse*, el punto A en ella puede seleccionarse en el suelo. Aquí, la velocidad de A es cero (momentáneamente) puesto que el suelo no se mueve. Además, el centro de la rueda, B, se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal de modo que $\mathbf{v}_B$ es horizontal.

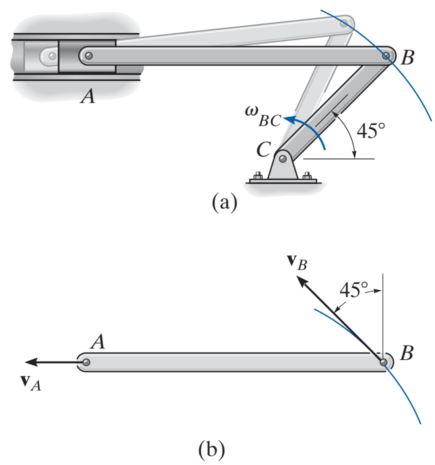


Fig. 16-11

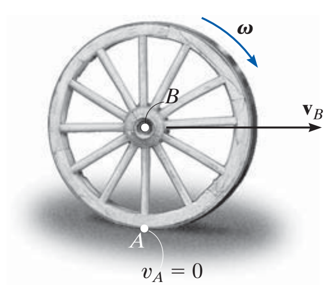


Fig. 16-12

Procedimiento para el análisis

La ecuación de velocidad relativa puede aplicarse mediante análisis vectorial cartesiano o bien si se escriben directamente las ecuaciones de componentes escalares x y y. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Análisis vectorial

Diagrama cinemático.

- Establezca las direcciones de las coordenadas x, y fijas y trace un diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ de los puntos A y B, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si las magnitudes de $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ o $\boldsymbol{\omega}$ son incógnitas, puede suponerse el sentido de estos vectores.

Ecuación de velocidad.

- Para aplicar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial y luego iguale los componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ respectivos para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta en una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, indica que el sentido del vector es opuesto al que se muestra en el diagrama cinemático.

Análisis escalar

Diagrama cinemático.

- Si la ecuación de velocidad se va a aplicar en forma escalar, entonces deben establecerse la magnitud y la dirección de la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$. Trace un diagrama cinemático como se muestra en la figura 16-10g, el cual muestra el movimiento relativo. Como se considera que el cuerpo debe estar "sujeto por medio de un pasador" momentáneamente en el punto base A, la magnitud de $\mathbf{v}_{B/A}$ es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$. La dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$ siempre es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$ de acuerdo con el movimiento de rotación $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo.*

Ecuación de velocidad.

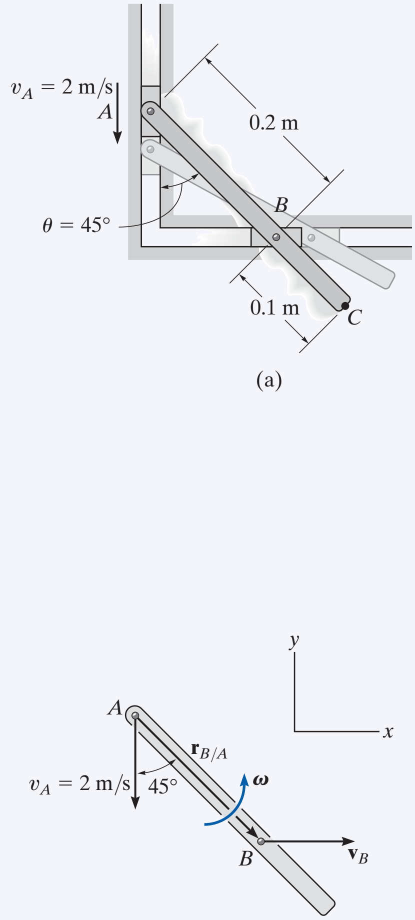
- Escriba la ecuación 16-15 en forma simbólica $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, y debajo de cada uno de los términos represente los vectores gráficamente de modo que muestren sus magnitudes y direcciones. Las ecuaciones escalares se determinan con los componentes x y y de estos vectores.

*La notación $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})}$ puede ser útil para recordar que A está "conectado con un pasador".

16

EJEMPLO 16.6

El eslabón que se muestra en la figura 16-13*a* está guiado por los bloques A y B, los cuales se mueven en la ranuras fijas. Si la velocidad de A es de 2 m/s hacia abajo, determine la velocidad de B cuando $\theta = 45°$.



(b)

Fig. 16-13

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Como los puntos A y B sólo pueden moverse a lo largo de las ranuras fijas y $\mathbf{v}_A$ está dirigida hacia abajo, la velocidad $\mathbf{v}_B$ debe dirigirse horizontalmente hacia la derecha, figura 16-13*b*. Este movimiento hace que el eslabón gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj; es decir, de acuerdo con la regla de la mano derecha la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es hacia fuera, perpendicular al plano del movimiento. Si se conocen la magnitud y dirección de $\mathbf{v}_A$ y las líneas de acción de $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$, es posible aplicar la ecuación de velocidad $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ a los puntos A y B para determinar las dos magnitudes desconocidas v_B y ω. Como se necesita $\mathbf{r}_{B/A}$, también se muestra en la figura 16-13*b*.

Ecuación de velocidad. Al expresar cada uno de los vectores en la figura 16-13*b* en función de sus componentes **i, j, k** y aplicar la ecuación 16-16 a A, el punto base, y B, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0.2 \text{ sen } 45°\mathbf{i} - 0.2 \cos 45°\mathbf{j})]$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega \text{ sen } 45°\mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

Si se igualan los componentes **i** y **j** se tiene

$$v_B = 0.2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0.2\omega \text{ sen } 45°$$

Por tanto,

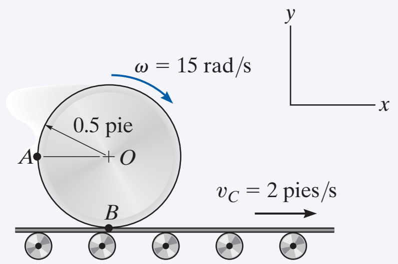
$$\omega = 14.1 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

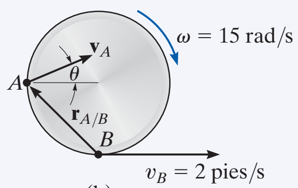
Como ambos resultados son *positivos*, las *direcciones* de $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$ son las *correctas* como se muestra en la figura 16-13*b*. Debe recalcarse que estos resultados son *válidos sólo* en el instante $\theta = 45°$. Con otro cálculo de $\theta = 44°$ se obtiene $v_B = 2.07$ m/s y $\omega = 14.4$ rad/s; mientras que cuando $\theta = 46°$, $v_B = 1.93$ m/s y $\omega = 13.9$ rad/s, etcétera.

NOTA: una vez *conocidas* la velocidad de un punto (A) en el eslabón y la velocidad angular, se puede determinar la velocidad de cualquier otro punto en el eslabón. A manera de ejercicio, vea si puede aplicar la ecuación 16-16 a los puntos A y C, o a los puntos B y C, y demuestre que cuando $\theta = 45°$, $v_C = 3.16$ m/s, dirigida a un ángulo de 18.4° hacia arriba de la horizontal.

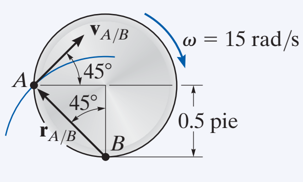
EJEMPLO 16.7



(a)



(b)



Movimiento relativo
(c)

Fig. 16-14

El cilindro de la figura 16-14*a* rueda sin deslizarse sobre la superficie de una banda transportadora, la cual se mueve a 2 pies/s. Determine la velocidad del punto A. El cilindro tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj $\omega = 15$ rad/s en el instante que se muestra.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Como no hay deslizamiento, el punto B en el cilindro tiene la misma velocidad que la transportadora, figura 16-14*b*. Además, la velocidad angular del cilindro es conocida, así que podemos aplicar la ecuación de velocidad a B, el punto base, y A para determinar $\mathbf{v}_A$.

Ecuación de velocidad.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$

de modo que

$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ pies/s} \qquad (1)$$

$$(v_A)_y = 7.50 \text{ pies/s} \qquad (2)$$

Por tanto,

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.50}{9.50} = 38.3° \;\measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Como un procedimiento alternativo, las componentes escalares de $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ pueden obtenerse directamente. De acuerdo con el diagrama cinemático que muestra el movimiento "circular" relativo, el cual produce $\mathbf{v}_{A/B}$, figura 16-14*c*, tenemos

$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0.5 \text{ pie}}{\cos 45°}\right) = 10.6 \text{ pies/s}$$

Por tanto,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\begin{bmatrix}(v_A)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(v_A)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \text{ pies/s} \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10.6 \text{ pies/s} \\ \measuredangle\, 45°\end{bmatrix}$$

Al igualar las componentes x y y se obtienen los mismos resultados que antes, es decir,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45° = 9.50 \text{ pies/s}$$

$$(+\uparrow) \qquad (v_A)_y = 0 + 10.6 \text{ sen } 45° = 7.50 \text{ pies/s}$$

EJEMPLO 16.8

El collarín C de la figura 16-15*a* desciende a 2 m/s. Determine la velocidad angular de CB en este instante.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. El movimiento descendente de C hace que B se mueva a la derecha a lo largo de una trayectoria curva. Además, CB y AB giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Ecuación de velocidad. Eslabón CB (movimiento plano general): vea la figura 16-15*b*.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

$$v_B = 0.2\omega_{CB} \qquad (1)$$

$$0 = -2 + 0.2\omega_{CB} \qquad (2)$$

$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Las ecuaciones de componentes escalares de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$ se obtienen directamente. El diagrama cinemático en la figura 16-15*c* muestra el movimiento "circular" relativo producido por $\mathbf{v}_{B/C}$. Tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \text{ m}) \\ \measuredangle 45^\circ \end{bmatrix}$$

Al resolver estos vectores en las direcciones x y y se obtiene

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v_B = 0 + \omega_{CB}\left(0.2\sqrt{2}\cos 45^\circ\right)$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega_{CB}\left(0.2\sqrt{2}\,\text{sen}\,45^\circ\right)$$

las cuales son las mismas que las ecuaciones 1 y 2.

NOTA: como el eslabón gira alrededor de un eje fijo y v_B es conocida, figura 16-15*d*, su velocidad angular se determina con $v_B = \omega_{AB} r_{AB}$ o 2 m/s = ω_{AB}(0.2 m), ω_{AB} = 10 rad/s.

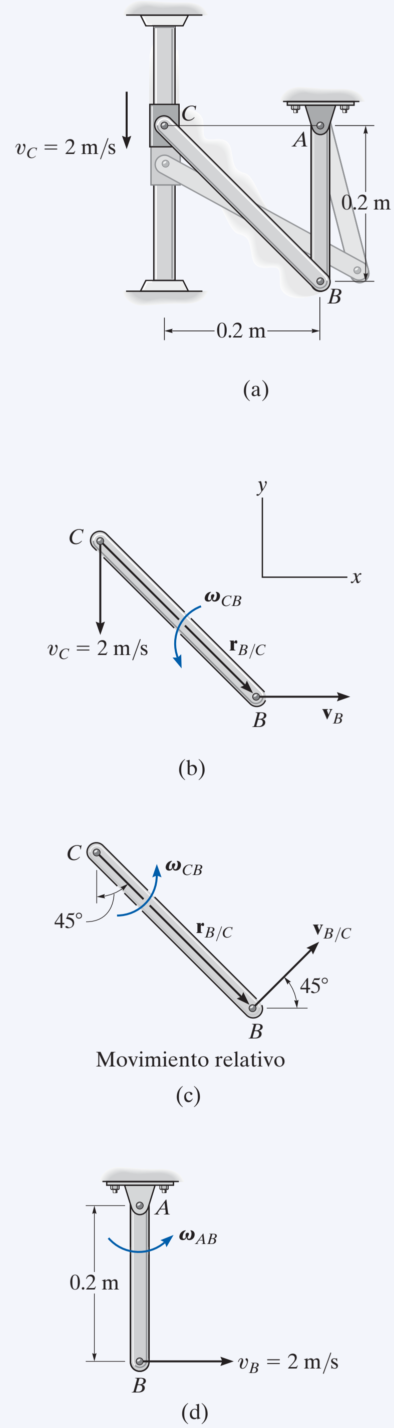
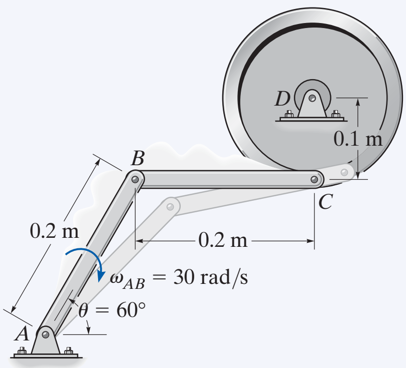
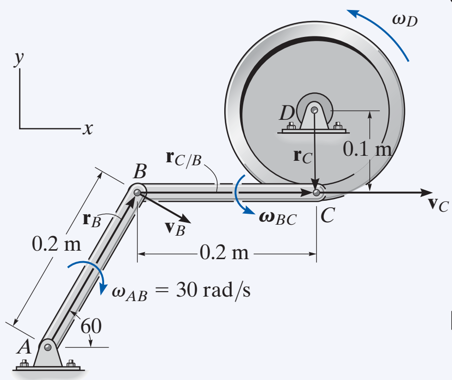


Fig. 16-15

EJEMPLO 16.9



(a)



(b)

Fig. 16-16

La barra AB de la articulación que se muestra en la figura 16-16a tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 30 rad/s cuando $\theta = 60°$. Determine las velocidades angulares del elemento BC y la rueda en este instante.

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Por inspección, las velocidades de los puntos B y C están definidas por la rotación del eslabón AB y la rueda alrededor de sus ejes fijos. Los vectores de posición y la velocidad angular de cada elemento se muestran en el diagrama cinemático en la figura 16-16b. Para llegar a la solución, escribiremos la ecuación cinemática apropiada para cada elemento.

Ecuación de velocidad. Eslabón AB (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$= (-30\mathbf{k}) \times (0.2 \cos 60°\mathbf{i} + 0.2 \text{ sen } 60°\mathbf{j})$$
$$= \{5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

Eslabón BC (movimiento plano general):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} + (0.2\omega_{BC} - 3.0)\mathbf{j}$$
$$v_C = 5.20 \text{ m/s}$$
$$0 = 0.2\omega_{BC} - 3.0$$
$$\omega_{BC} = 15 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ ***Resp.***

Rueda (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_C$$
$$5.20\mathbf{i} = (\omega_D\mathbf{k}) \times (-0.1\mathbf{j})$$
$$5.20 = 0.1\omega_D$$
$$\omega_D = 52.0 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ ***Resp.***