Dinámica de cuerpo rígido

Pedro Jorge De Los Santos

Versión: 2024-09-09 13:48:04-06:00

Universidad Politécnica de Guanajuato
Ingeniería Robótica

¿Qué veremos?

- Una introducción a la dinámica del cuerpo rígido
- Centro de masa
- Momentos de inercia de masa
- Productos de inercia

Una introducción a la dinámica del cuerpo rígido

Ecuaciones de Newton

La dinámica de un cuerpo rígido se puede modelar utilizando las ecuaciones de Newton-Euler:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

$$\Sigma M_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

Donde $\mathbf{a}_G$ es la aceleración del centro de masa y $\dot{\mathbf{H}}_G$ la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa. $\Sigma\mathbf{F}$ es la sumatoria de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma\boldsymbol{\tau}_G$ la suma de los momentos con respecto al centro de masa.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

La dinámica de un cuerpo rígido también se puede modelar utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{dq_i} = \tau_i \quad ; \qquad \text{Para } i = 1, 2, \cdots, n$$

Donde $\mathcal{L}$ es una función escalar llamada *lagrangiano*, dada por la diferencia entre la energía cinética ($\mathcal{K}$) y potencial ($\mathcal{P}$) del cuerpo rígido, es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$$

A q_i y $\dot{q}_i$ se les denomina *coordenada generalizada* y *velocidad generalizada*, de forma respectiva. El término τ_i corresponde a la *fuerza generalizada*.

Coordenadas generalizadas

Un conjunto de coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ es aquel que describe de manera completa la posición de un sistema de n grados de libertad. Las velocidades generalizadas son las derivadas de las coordenadas generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$.

La experiencia demuestra que dadas simultáneamente las coordenadas y velocidades generalizadas se determina completamente el estado del sistema y permite, en principio, predecir su movimiento futuro.

Las relaciones entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas se llaman *ecuaciones de movimiento*.

Energía potencial

La energía potencial de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional se puede calcular mediante:

$$\mathcal{P} = -m\mathbf{g}^T\mathbf{r}_G \tag{1}$$

Donde $\mathbf{g}$ es un vector que describe la gravedad en el sistema inercial y $\mathbf{r}_G$ es el vector que describe la posición del centro de masa del cuerpo rígido en el sistema inercial.

Energía cinética

La energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional se puede escribir como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^T \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I_G \boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

Donde $\mathbf{v}_G$ es la velocidad del centro de masa, $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de velocidad angular del cuerpo rígido y I_G es el tensor de inercia del cuerpo rígido expresado en el sistema de referencia inercial.

Tensor de inercia

El **tensor de inercia** es una matriz simétrica que describe la manera en que la masa del cuerpo rígido está distribuida con respecto a un determinado sistema de referencia. El tensor de inercia está conformado de la siguiente manera:

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde los términos I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} se denominan **momentos de inercia**, y los términos restantes se denominan **productos de inercia**. Dado que es una matriz simétrica, esto implica que $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ y $I_{yz} = I_{zy}$.

Centro de masa

Centro de masa

El centro de masa es un punto hipotético de un sistema de partículas o de un sólido, tal que dicho sistema se comporta como si toda su masa estuviera concentrada en ese único punto. Es importante destacar que el centro de masa no siempre coincide con un punto material físico en el objeto.

CDM de un sistema de partículas

Para un sistema de n partículas, cada una de masa m_i y con una posición dada por $\mathbf{r}_i$, las coordenadas $\mathbf{R}$ del centro de masa deben satisfacer la condición:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}\right) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Resolviendo para $\mathbf{R}$ se tiene que:

$$\mathbf{R} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{4}$$

CDM de un sistema de partículas

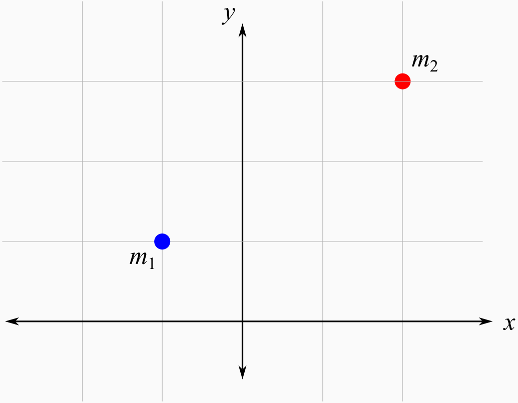
O bien, expresado en términos de las componentes escalares:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}; \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}; \tag{5}$$

Donde x_i, y_i, z_i son las coordenadas de la ubicación de la partícula i cuya masa es m_i.

Ejemplo

Calcule el centro de masa del sistema de partículas que se muestran en la Figura. Cada partícula tiene una masa de 0.5 kg. Las unidades de longitud de la rejilla son metros.



Ejemplo

$$m_1 = m_2 = 0.5 \text{ kg}$$

$$(x_1, y_1) = (-1, 1) \ \text{ m}$$

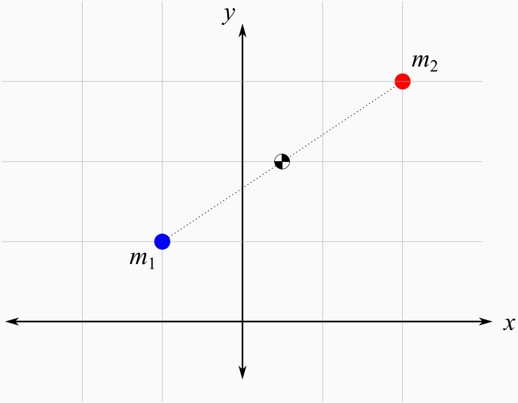
$$(x_2, y_2) = (2, 3) \ \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.5)\,(-1) + (0.5)\,(2)}{0.5 + 0.5} = 0.5 \ \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.5)\,(1) + (0.5)\,(3)}{0.5 + 0.5} = 2.0 \ \text{ m}$$

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = (0.5, 2) \ \text{ m}}$$

Ejemplo



El centro de masa de un sistema de dos partículas se ubicará siempre sobre la línea que une la ubicación de las partículas.

Centro de masa de un cuerpo rígido

Las ecuaciones 5 se pueden generalizar para un cuerpo rígido, bajo la asunción de que un cuerpo rígido se puede considerar como un conjunto infinito de partículas cuyas distancias son invariables entre sí, así la sumatoria la podemos reemplazar por una integral, es decir:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_m \tilde{x}\, dm}{\displaystyle\int_m dm}; \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\int_m \tilde{y}\, dm}{\displaystyle\int_m dm}; \quad \bar{z} = \frac{\displaystyle\int_m \tilde{z}\, dm}{\displaystyle\int_m dm}; \tag{6}$$

En las ecuaciones anteriores los términos $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ denotan la ubicación del centro de masa del elemento diferencial utilizado para la integración.

Centro de masa de un cuerpo rígido

El diferencial de masa dm se puede expresar como:

$$dm = \rho \, dV$$

En el caso general, la densidad podría no ser constante y depender de la ubicación, es decir $\rho = \rho(x, y, z)$.

Centro de masa de un cuerpo rígido

Para la mayoría de situaciones en ingeniería, los componentes mecánicos están fabricados con materiales homogéneos (densidad constante), lo cual implica que el centro de masa coincidará con el centroide del volumen del sólido, de tal manera que las coordenadas del centro de masa se pueden determinar mediante:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_V \tilde{x}\, dV}{\displaystyle\int_V dV}; \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\int_V \tilde{y}\, dV}{\displaystyle\int_V dV}; \quad \bar{z} = \frac{\displaystyle\int_V \tilde{z}\, dV}{\displaystyle\int_V dV}; \tag{7}$$

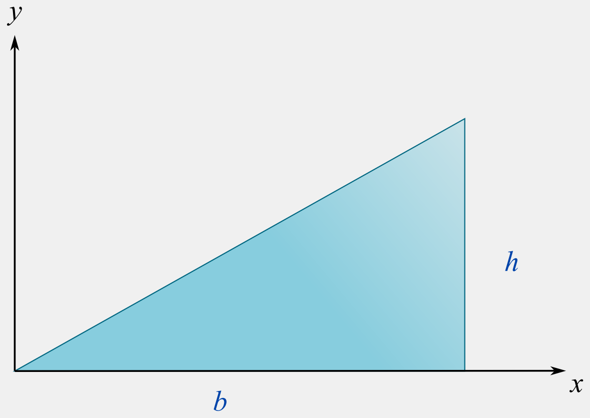
Centro de masa de un cuerpo rígido

Para cuerpos rígidos con forma de placas delgadas, de espesor uniforme y homogéneas, el centro de masa coincidirá con el centroide del área de la placa, así, las coordenadas del centro de masa se pueden determinar mediante:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_A \tilde{x}\, dA}{\displaystyle\int_A dA}\,; \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\int_A \tilde{y}\, dA}{\displaystyle\int_A dA}\,; \quad \bar{z} = \frac{\displaystyle\int_A \tilde{z}\, dA}{\displaystyle\int_A dA}\,; \tag{8}$$

Ejemplo

Calcule el centro de masa de la placa triangular que se muestra en la figura.



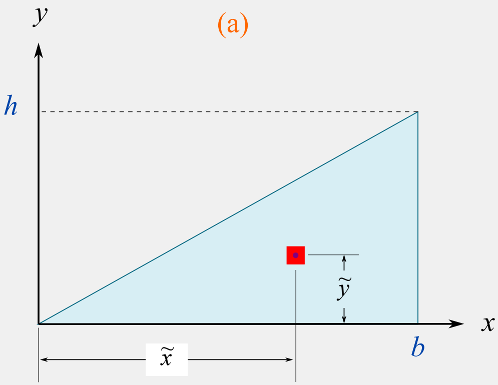
Ejemplo

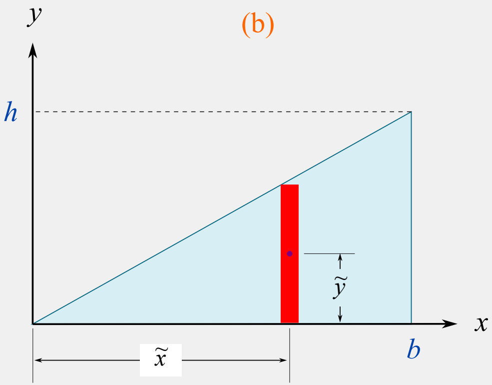
Al tratarse de una placa delgada y homogénea, las coordenadas del centro de masa se pueden determinar como:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_A \tilde{x}\, dA}{\displaystyle\int_A dA}\,; \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\int_A \tilde{y}\, dA}{\displaystyle\int_A dA}\,;$$

Ejemplo

Se pueden utilizar diversas formas para los elementos diferenciales:





Ejemplo

Utilizando el elemento diferencial (a)

$$\int_A dA = \int_0^b \int_0^{hx/b} dy\, dx = \frac{bh}{2}$$

$$\int_A \tilde{x}\, dA = \int_0^b \int_0^{hx/b} x\, dy\, dx = \frac{hb^2}{3}$$

$$\int_A \tilde{y}\, dA = \int_0^b \int_0^{hx/b} y\, dy\, dx = \frac{h^2 b}{6}$$

Ejemplo

Sustituyendo los valores calculados:

$$\bar{x} = \frac{\frac{hb^2}{3}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2hb^2}{3bh} = \frac{2}{3}b$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{h^2b}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2h^2b}{6bh} = \frac{1}{3}h$$

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2b}{3}, \frac{h}{3}\right)}$$

Ejemplo

Utilizando el elemento diferencial (b)

$$\int_A dA = \frac{h}{b}\int_0^b x\,dx = \frac{bh}{2}$$

$$\int_A \tilde{x}\,dA = \frac{h}{b}\int_0^b x^2\,dx = \frac{hb^2}{3}$$

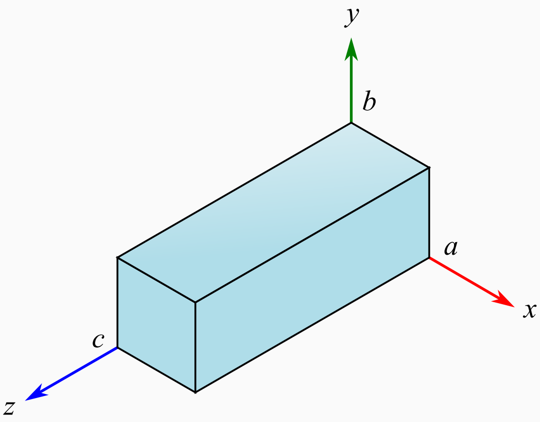
$$\int_A \tilde{y}\,dA = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x^2\,dx = \frac{h^2 b}{6}$$

Lo cual nos lleva al mismo resultado:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2b}{3}, \frac{h}{3}\right)}$$

Ejemplo: prisma rectangular

Calcule el centro de masa del sólido con forma de prisma rectangular que se muestra en la figura.



Ejemplo: prisma rectangular

El centro de masa del prisma rectangular está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_m \tilde{x}\,dm}{\displaystyle\int_m dm}; \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\int_m \tilde{y}\,dm}{\displaystyle\int_m dm}; \quad \bar{z} = \frac{\displaystyle\int_m \tilde{z}\,dm}{\displaystyle\int_m dm};$$

Ejemplo: prisma rectangular

$$\int_m dm = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a dx\, dy\, dz = \rho abc = m$$

$$\int_m \tilde{x}\, dm = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a x\, dx\, dy\, dz = \frac{\rho a^2 bc}{2} = \frac{ma}{2}$$

$$\int_m \tilde{y}\, dm = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a y\, dx\, dy\, dz = \frac{\rho ab^2 c}{2} = \frac{mb}{2}$$

$$\int_m \tilde{z}\, dm = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a z\, dx\, dy\, dz = \frac{\rho abc^2}{2} = \frac{mc}{2}$$

Ejemplo: prisma rectangular

Sustituyendo los valores calculados:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{a}{2}}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{b}{2}}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{c}{2}}$$

Cuerpos compuestos

Un cuerpo compuesto es aquel que está formado por la unión de dos o más cuerpos simples. Estos cuerpos simples pueden ser de diferentes formas y tamaños, y al unirse forman un cuerpo más complejo. Por ejemplo, un cuerpo compuesto puede estar formado por la unión de varios cubos, cilindros o prismas.

Cuerpos compuestos

Para calcular el centro de masa de un cuerpo compuesto, es necesario dividir el cuerpo en una n cantidad de componentes simples, de los cuales sea sencillo determinar por separado su masa y centro de masa. Luego, las coordenadas del centro de masa estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \, m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad ; \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i \, m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad ; \qquad \bar{z} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i \, m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{9}$$

Donde $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ corresponden a las coordenadas del centro de masa del $i-$ésimo cuerpo simple, y m_i corresponde a su masa.

Cuerpos compuestos

Expresiones similares se pueden plantear en el caso de que el sólido sea homogéneo (mismo material o misma densidad constante):

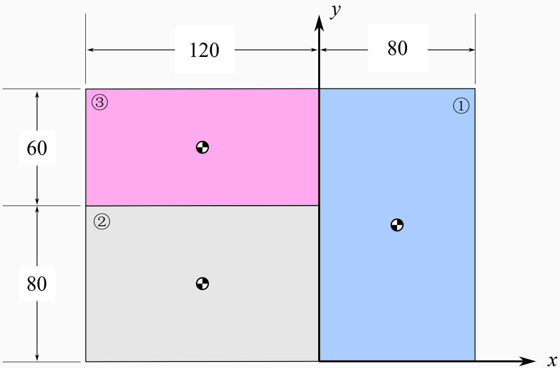
$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \, V_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i} \quad ; \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i \, V_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i} \quad ; \qquad \bar{z} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i \, V_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i} \tag{10}$$

Y en el caso de que el sólido sea una placa delgada y homogénea:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \, A_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad ; \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i \, A_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad ; \qquad \bar{z} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i \, A_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{11}$$

Ejemplo

En la Figura se muestra un cuerpo compuesto por tres partes rectangulares, delgadas y homogéneas. Se sabe que $m_1 = 0.121$ *kg,* $m_2 = 0.104$ *kg y* $m_3 = 0.226$ *kg. Calcule el centro de masa.*



Ejemplo

$$(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (40, 70) \ \text{ mm}$$

$$(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (-60, 40) \ \text{ mm}$$

$$(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (-60, 110) \ \text{ mm}$$

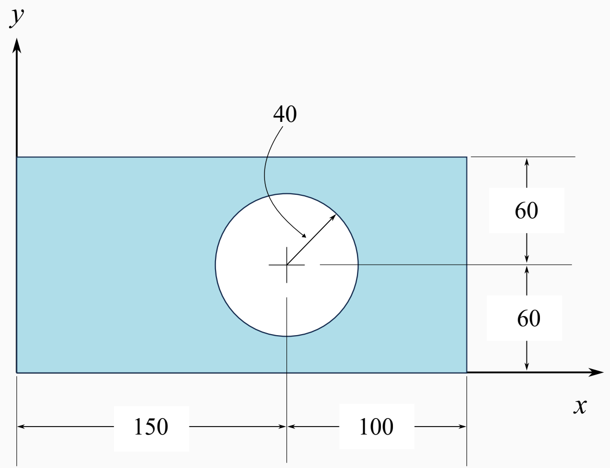
$$\bar{x} = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \tilde{x}_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(40)(0.121) + (-60)(0.104) + (-60)(0.226)}{0.121 + 0.104 + 0.226} = -33.17 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\tilde{y}_1 m_1 + \tilde{y}_2 m_2 + \tilde{y}_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(70)(0.121) + (40)(0.104) + (110)(0.226)}{0.121 + 0.104 + 0.226} = 83.13 \text{ mm}$$

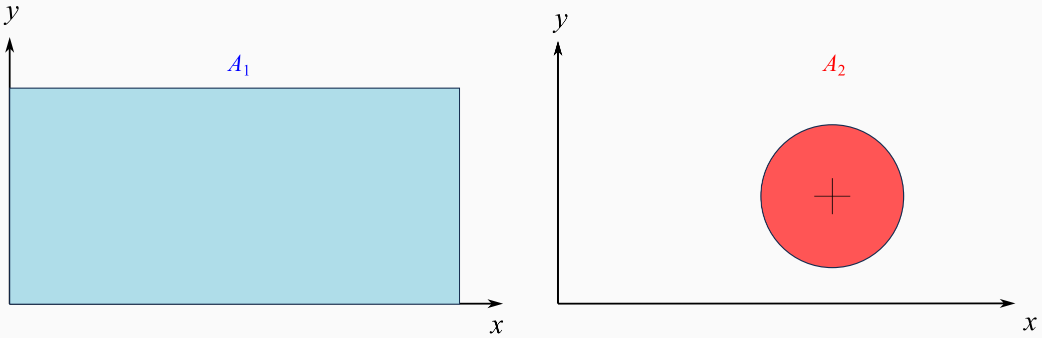
$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = (-33.17, 83.13) \ \text{ mm}}$$

Ejemplo

En la Figura se muestra una placa plana delgada y homogénea, cuya masa es de 0.270 kg. Calcule el centro de masa.



Ejemplo



Ejemplo

$$(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (125, 60)\ \text{mm}$$

$$(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (150, 60)\ \text{mm}$$

$$\bar{x} = \frac{\tilde{x}_1 A_1 + \tilde{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(125)\,(30000) + (150)\,(-5026.5)}{30000 - 5026.5} = 119.97\ \text{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\tilde{y}_1 A_1 + \tilde{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(60)\,(30000) + (60)\,(-5026.5)}{30000 - 5026.5} = 60\ \text{mm}$$

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = (119.97, 60)\ \text{mm}}$$

Momento de inercia de masa

Momento de inercia

El momento de inercia de masa de un cuerpo rígido (o sistema de partículas) es una cantidad que determina el par necesario para una aceleración angular deseada alrededor de un eje de rotación, similar a cómo la masa determina la fuerza necesaria para una aceleración deseada. Depende de la distribución de masa del cuerpo y del eje elegido, un momento de inercia más grande implica que se requiere más torque para cambiar la velocidad de rotación del cuerpo en una cantidad determinada.

Momento de inercia

El momento de inercia (I) de una masa puntual (m) con respecto a un eje se define como el producto de la masa por la distancia al eje (d) elevada al cuadrado, es decir.

$$I = md^2 \tag{12}$$

Momento de inercia

El momento de inercia de cualquier otra entidad se construye a partir de esa definición básica. Por ejemplo, para un sistema de partículas la definición anterior se puede expresar como:

$$I = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i \tag{13}$$

Donde r_i corresponde a la distancia de cada partícula de masa m_i al eje.

Momento de inercia

Si introducimos un sistema de referencia cartesiano xyz y calculamos los momentos de inercia con respecto a cada uno de sus ejes, se tiene que:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} r_{x_i}^2 m_i \,; \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} r_{y_i}^2 m_i \,; \quad I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} r_{z_i}^2 m_i \,;$$

Momento de inercia

El momento de inercia de una distribución continua de masa (sólido rígido) se encuentra utilizando integración en lugar de la sumatoria. Si el sólido se divide en un elemento infinitesimal de masa dm, y si r es la distancia desde el elemento de masa al eje de rotación, el momento de inercia se puede determinar como sigue:

$$I = \int_m r^2 \, dm \tag{14}$$

Momento de inercia

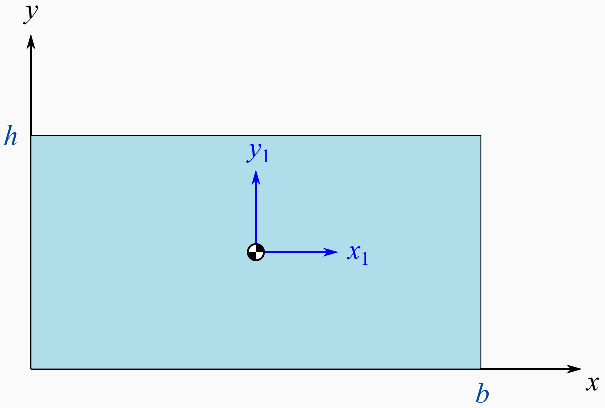
Si se calcula el momento de inercia con respecto a los ejes de un sistema cartesiano, entonces:

$$I_{xx} = \int_m r_x^2 \, dm \, ; \quad I_{yy} = \int_m r_y^2 \, dm \, ; \quad I_{zz} = \int_m r_z^2 \, dm \, ; \tag{15}$$

Tome en cuenta que estas integrales se efectúan sobre la distribución de la masa. La formulación de las integrales a calcular depende mucho de cómo se establezca el elemento diferencial de masa y de la densidad del sólido.

Ejemplo: momento de inercia

Calcula el momento de inercia de masa de la placa rectangular con respecto a los ejes x, y, z. *Considera que la placa es de espesor delgado y uniforme, y que además es homogénea.*



Ejemplo: momento de inercia

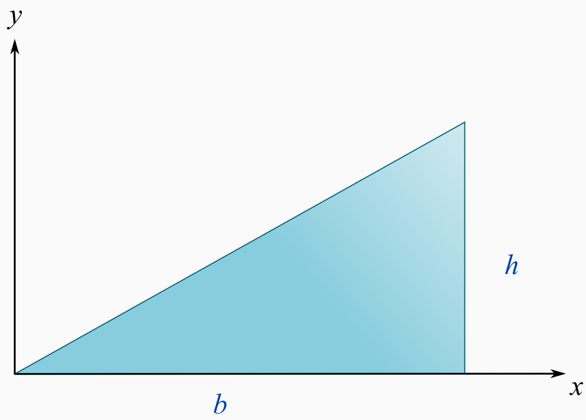
$$I_{xx} = \int_m r_x^2 \, dm = \rho t \int_0^b \int_0^h y^2 \, dy \, dx = \frac{\rho t h^3 b}{3} = \boxed{\frac{mh^2}{3}}$$

$$I_{yy} = \int_m r_y^2 \, dm = \rho t \int_0^b \int_0^h x^2 \, dy \, dx = \frac{\rho t h b^3}{3} = \boxed{\frac{mb^2}{3}}$$

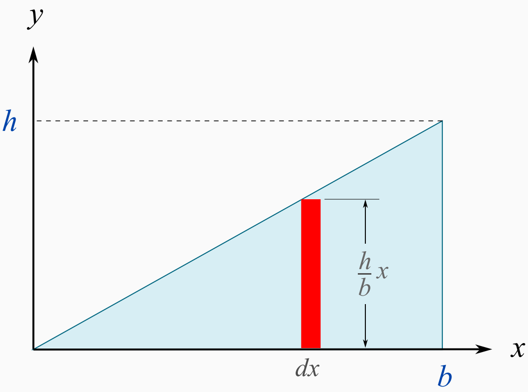
$$I_{zz} = \int_m r_z^2 \, dm = \rho t \int_0^b \int_0^h \left(x^2 + y^2\right) \, dy \, dx = \frac{\rho t b h}{3} \left(b^2 + h^2\right) = \boxed{\frac{m}{3} \left(b^2 + h^2\right)}$$

Ejemplo: momento de inercia

Calcula el momento de inercia I_{xx} *de la placa triangular mostrada en la Figura. Considera que la placa es de espesor delgado y uniforme, y que además es homogénea.*



Ejemplo: momento de inercia



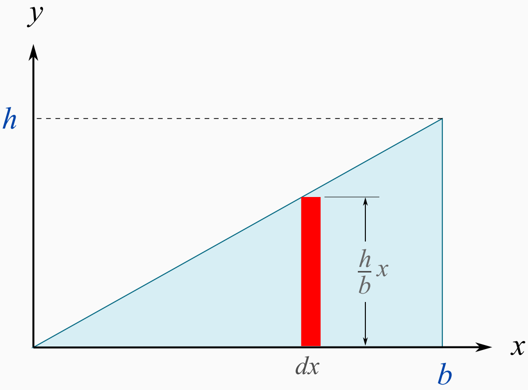
Utilizando un elemento diferencial rectangular:

$$dm = \rho t\left(\frac{h}{b}x\right)\,dx = \frac{\rho t h}{b}x\,dx$$

$$dI_{xx} = \frac{\left(\frac{h}{b}x\right)^2}{3}\,dm = \left(\frac{h^2}{3b^2}x^2\right)\left(\frac{\rho t h}{b}x\,dx\right) =$$

$$dI_{xx} = \frac{\rho t h^3}{3b^3}x^3\,dx$$

Ejemplo: momento de inercia



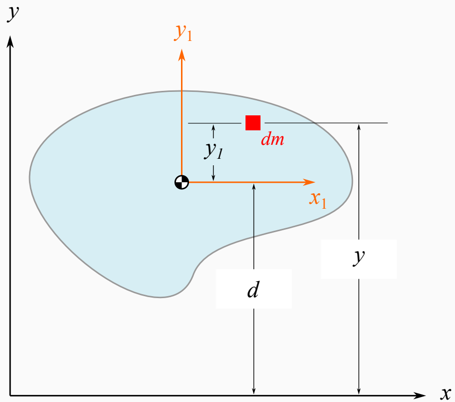
$$dI_{xx} = \frac{\rho t h^3}{3b^3} x^3 \, dx$$

$$I_{xx} = \frac{\rho t h^3}{3b^3} \int_0^b x^3 \, dx = \frac{\rho t h^3 b}{12}$$

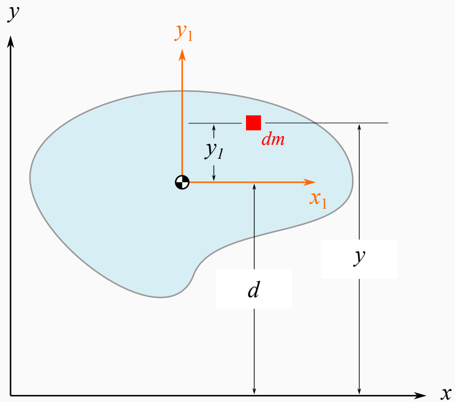
$$\boxed{I_{xx} = \frac{m h^2}{6}}$$

Teorema de ejes paralelos

Si se conoce el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje que pasa por su centro de masa, entonces se puede también determinar fácilmente el momento de inercia con respecto de cualquier otro eje que sea paralelo.



Teorema de ejes paralelos

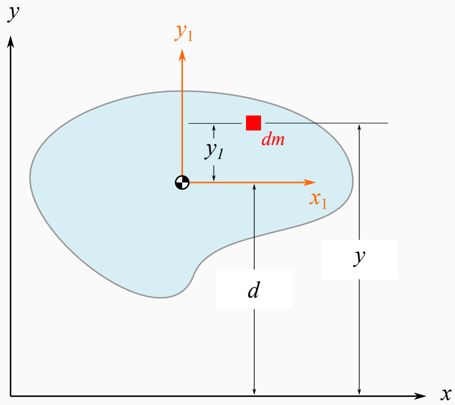


$$I_{xx} = \int_m r_x^2 \, dm$$

$$I_{xx} = \int_m (y_1 + d)^2 \, dm$$

$$I_{xx} = \int_m y_1^2 \, dm + 2d \int_m y_1 \, dm + d^2 \int_m dm$$

Teorema de ejes paralelos



$$I_{xx} = \int_m y_1^2 \, dm + 2d \int_m y_1 \, dm + d^2 \int_m dm$$

$$\int_m y_1^2 \, dm = \bar{I}_{x_1 x_1}$$

$$2d \int_m y_1 \, dm = 0$$

$$d^2 \int_m dm = md^2$$

$$I_{xx} = \bar{I}_{x_1 x_1} + md^2$$

Teorema de ejes paralelos

El momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a cualquier eje u que sea paralelo a un eje u' que pasa por su centro de masa, es igual al momento de inercia con respecto al eje u' más el producto de la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia perpendicular entre los dos ejes.

$$I_{uu} = \bar{I}_{u'u'} + md^2 \tag{16}$$

Momento de inercia de cuerpos compuestos

Para un sólido compuesto por n partes simples, los momentos de inercia con respecto a los ejes de un sistema cartesiano xyz se pueden determinar mediante:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (I_{xx})_i$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (I_{yy})_i$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} (I_{zz})_i$$

El término $(I_{xx})_i$ es el momento de inercia de la parte i con respecto al eje x, y de manera similar para los correspondientes de y y z.

Momento de inercia de cuerpos compuestos

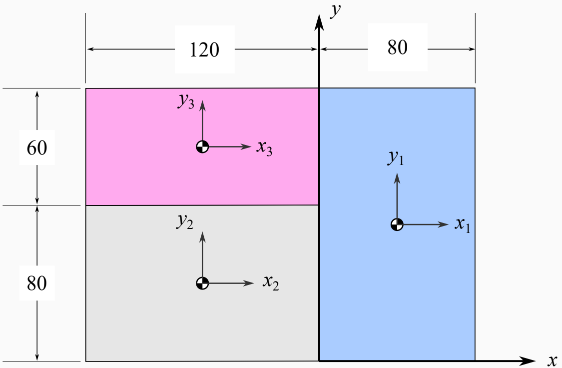
Cada uno de los términos de las sumatorias anteriores se pueden determinar mediante el teorema de los ejes paralelos, es decir:

$$(I_{xx})_i = \bar{I}_{x_i x_i} + m_i d_{xx_i}^2$$
$$(I_{yy})_i = \bar{I}_{y_i y_i} + m_i d_{yy_i}^2$$
$$(I_{zz})_i = \bar{I}_{z_i z_i} + m_i d_{zz_i}^2$$

En lo anterior, $\bar{I}_{x_i x_i}$ corresponde al momento de inercia de la parte i con respecto al eje x_i que pasa su centro de masa, m_i es la masa de dicha parte y d_{xx_i} es la distancia más corta entre los ejes x y x_i. Y así de manera análoga para los otros dos ejes.

Ejemplo

En la Figura se muestra un cuerpo compuesto por tres partes rectangulares, delgadas y homogéneas. Se sabe que $m_1 = 0.121$ kg, $m_2 = 0.104$ kg y $m_3 = 0.226$ kg. Calcule los momentos de inercia I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} del sólido compuesto.



Ejemplo

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2 + (I_{xx})_3$$

$$(I_{xx})_1 = \bar{I}_{x_1x_1} + m_1 d_{xx_1}^2 = \frac{1}{12}(0.121)(140)^2 + (0.121)(70)^2 = 790.53 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{xx})_2 = \bar{I}_{x_2x_2} + m_2 d_{xx_2}^2 = \frac{1}{12}(0.104)(80)^2 + (0.104)(40)^2 = 221.87 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{xx})_3 = \bar{I}_{x_3x_3} + m_3 d_{xx_3}^2 = \frac{1}{12}(0.226)(60)^2 + (0.226)(110)^2 = 2802.4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$\boxed{I_{xx} = 3814.8 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2}$$

Ejemplo

$$I_{yy} = (I_{yy})_1 + (I_{yy})_2 + (I_{yy})_3$$

$$(I_{yy})_1 = \bar{I}_{y_1 y_1} + m_1 d_{yy_1}^2 = \frac{1}{12}(0.121)(80)^2 + (0.121)(40)^2 = 258.13 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{yy})_2 = \bar{I}_{y_2 y_2} + m_2 d_{yy_2}^2 = \frac{1}{12}(0.104)(120)^2 + (0.104)(60)^2 = 499.2 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{yy})_3 = \bar{I}_{y_3 y_3} + m_3 d_{yy_3}^2 = \frac{1}{12}(0.226)(120)^2 + (0.226)(60)^2 = 1084.8 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$\boxed{I_{yy} = 1842.13 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2}$$

Ejemplo

$$I_{zz} = (I_{zz})_1 + (I_{zz})_2 + (I_{zz})_3$$

$$(I_{zz})_1 = \bar{I}_{z_1z_1} + m_1 d_{zz_1}^2 = \frac{1}{12}(0.121)\left(80^2 + 140^2\right) + (0.121)\left(40^2 + 70^2\right) = 1048.67 \text{ kg·mm}^2$$

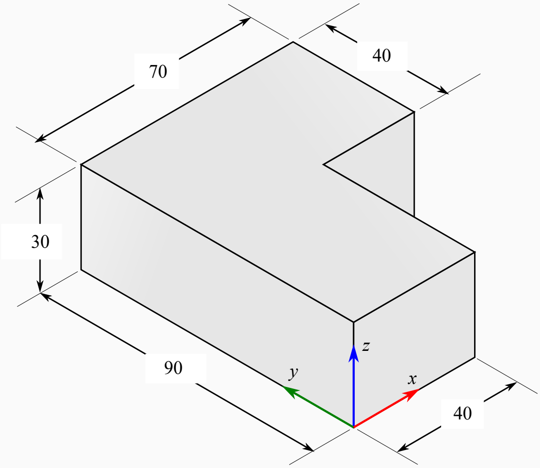
$$(I_{zz})_2 = \bar{I}_{z_2z_2} + m_2 d_{zz_2}^2 = \frac{1}{12}(0.104)\left(120^2 + 80^2\right) + (0.104)\left(60^2 + 40^2\right) = 721.07 \text{ kg·mm}^2$$

$$(I_{zz})_3 = \bar{I}_{z_3z_3} + m_3 d_{zz_3}^2 = \frac{1}{12}(0.226)\left(120^2 + 60^2\right) + (0.226)\left(60^2 + 110^2\right) = 3887.2 \text{ kg·mm}^2$$

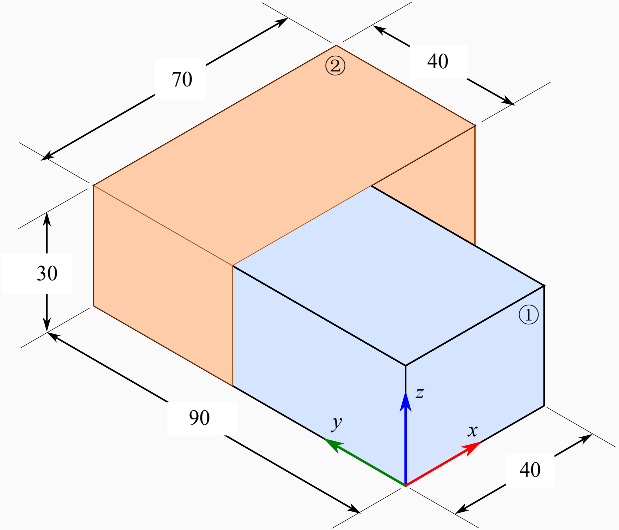
$$\boxed{I_{zz} = 5656.94 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2}$$

Ejemplo

En la Figura se muestra un sólido fabricado en un tipo de acero cuya densidad es $\rho = 7850$ *kg/m*^{3}*. Calcule los momentos de inercia* I_{xx}, I_{yy} *e* I_{zz}.



Ejemplo



Ejemplo

$$m_1 = \rho V_1 = (7850)\left(40 \times 10^{-3}\right)\left(50 \times 10^{-3}\right)\left(30 \times 10^{-3}\right) = 0.471 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho V_2 = (7850)\left(70 \times 10^{-3}\right)\left(40 \times 10^{-3}\right)\left(30 \times 10^{-3}\right) = 0.6594 \text{ kg}$$

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2$$

$$(I_{xx})_1 = \bar{I}_{x_1x_1} + m_1 d_{xx_1}^2 = \frac{1}{12}(0.471)\left(50^2 + 30^2\right) + (0.471)\left(25^2 + 15^2\right) = 533.8 \text{ kg·mm}^2$$

$$(I_{xx})_2 = \bar{I}_{x_2x_2} + m_2 d_{xx_2}^2 = \frac{1}{12}(0.6594)\left(40^2 + 30^2\right) + (0.6594)\left(70^2 + 15^2\right) = 3516.8 \text{ kg·mm}^2$$

$$\boxed{I_{xx} = 4050.6 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2}$$

Ejemplo

$$I_{yy} = (I_{yy})_1 + (I_{yy})_2$$

$$(I_{yy})_1 = \bar{I}_{y_1 y_1} + m_1 d_{yy_1}^2 = \frac{1}{12}(0.471)\left(40^2 + 30^2\right) + (0.471)\left(20^2 + 15^2\right) = 392.5 \text{ kg·mm}^2$$

$$(I_{yy})_2 = \bar{I}_{y_2 y_2} + m_2 d_{yy_2}^2 = \frac{1}{12}(0.6594)\left(70^2 + 30^2\right) + (0.6594)\left(35^2 + 15^2\right) = 1274.84 \text{ kg·mm}^2$$

$$\boxed{I_{yy} = 1667.34 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2}$$

Ejemplo

$$I_{zz} = (I_{zz})_1 + (I_{zz})_2$$

$$(I_{zz})_1 = \bar{I}_{z_1 z_1} + m_1 d_{zz_1}^2 = \frac{1}{12}(0.471)\left(40^2 + 50^2\right) + (0.471)\left(25^2 + 20^2\right) = 643.7 \text{ kg·mm}^2$$

$$(I_{zz})_2 = \bar{I}_{z_2 z_2} + m_2 d_{zz_2}^2 = \frac{1}{12}(0.6594)\left(70^2 + 40^2\right) + (0.6594)\left(70^2 + 35^2\right) = 4396 \text{ kg·mm}^2$$

$$\boxed{I_{zz} = 5039.7 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2}$$

Productos de inercia

Productos de inercia

Los productos de inercia son cantidades que nos sirven para describir la distribución de la masa en un sólido. Estos productos son esenciales para entender el comportamiento de un cuerpo cuando se somete a rotación alrededor de un eje en un sistema de coordenadas tridimensional. Los productos de inercia pueden entenderse también como una medida de la simetría del cuerpo con respecto a un sistema de referencia.

Productos de inercia

Comenzaremos con los productos de inercia de un sistema de partículas ubicadas en el espacio, los cuales pueden determinarse mediante las siguientes expresiones:

$$I_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i \quad ; \quad I_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} x_i z_i m_i \quad ; \quad I_{yz} = -\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i \quad ;$$

Donde x_i, y_i, z_i corresponden a las coordenadas de la ubicación de cada partícula de masa m_i.

Productos de inercia

Simetría y productos de inercia

- Si un sistema de partículas (o un cuerpo rígido) es simétrico con respecto a un plano, entonces los productos de inercia que contengan al eje perpendicular a este plano serán cero.
- Si un sistema de partículas (o un cuerpo rígido) es simétrico con respecto a dos planos, entonces todos los productos de inercia son cero.

Productos de inercia

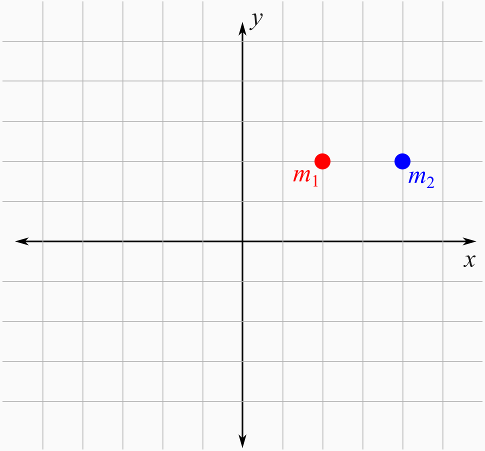
Signos del producto de inercia

- Si la masa se concentra en los cuadrantes I y/o III, entonces el producto de inercia I_{xy} será negativo.
- Si la masa se concentra en los cuadrantes II y/o IV, entonces el producto de inercia I_{xy} será positivo.

Lo anterior puede dilucidarse observando que para una sola partícula $I_{xy} = -xym$, y dado que m es una cantidad positiva, entonces el signo de I_{xy} dependerá únicamente de la combinación de los signos de x y y; a partir de esto puede inferirse que si $x > 0$ y $y > 0$ (cuadrante I) entonces I_{xy} será negativo, y así de manera similar para los cuadrantes restantes.

Productos de inercia

$$m_1 = m_2 = 0.5 \text{ kg}$$

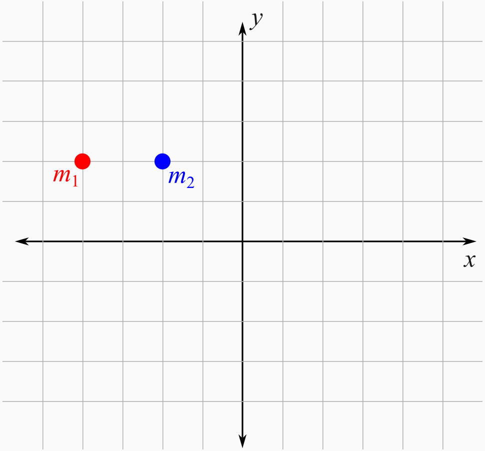


$$I_{xy} = -\left[(2)(2)(0.5) + (4)(2)(0.5)\right]$$

$$I_{xy} = -6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Productos de inercia

$$m_1 = m_2 = 0.5 \text{ kg}$$

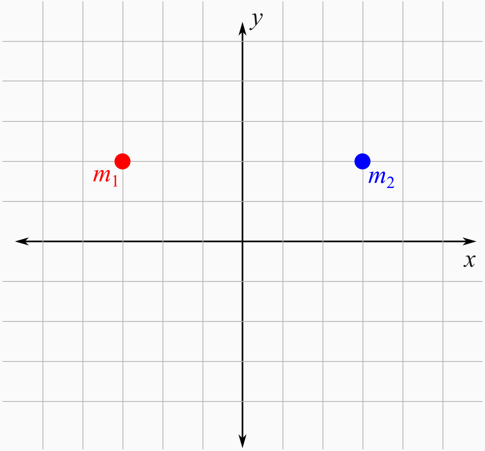


$$I_{xy} = -\left[(-4)(2)(0.5) + (-2)(2)(0.5)\right]$$

$$I_{xy} = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Productos de inercia

$$m_1 = m_2 = 0.5 \text{ kg}$$

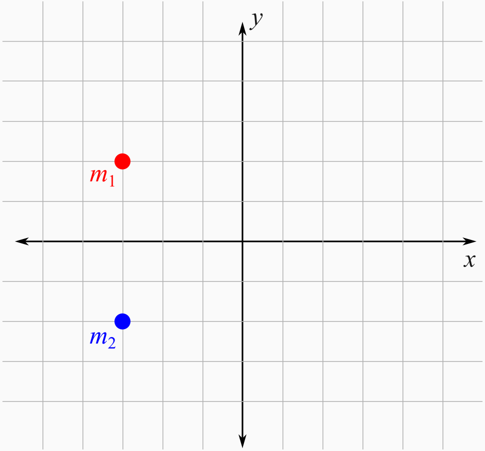


$$I_{xy} = -\left[(-3)(2)(0.5) + (3)(2)(0.5)\right]$$

$$I_{xy} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Productos de inercia

$$m_1 = m_2 = 0.5 \text{ kg}$$

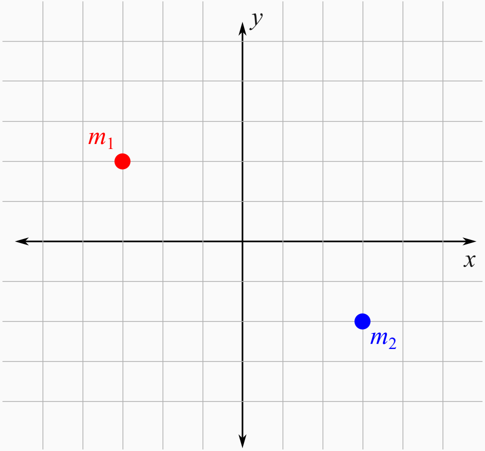


$$I_{xy} = -\left[(-3)(2)(0.5) + (-3)(-2)(0.5)\right]$$

$$I_{xy} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Productos de inercia

$$m_1 = m_2 = 0.5\ \text{kg}$$



$$I_{xy} = -\left[(-3)(2)(0.5) + (3)(-2)(0.5)\right]$$

$$I_{xy} = 6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Productos de inercia

Para un cuerpo rígido, los productos de inercia se pueden determinar mediante las siguientes expresiones:

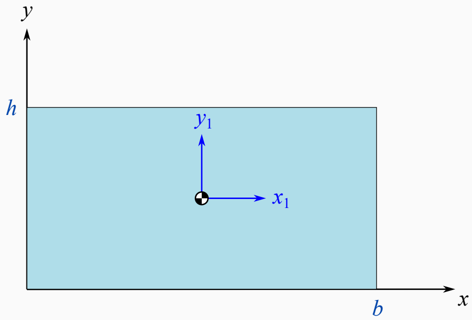
$$I_{xy} = -\int_m xy\, dm \tag{17}$$

$$I_{xz} = -\int_m xz\, dm \tag{18}$$

$$I_{yz} = -\int_m yz\, dm \tag{19}$$

Productos de inercia

En la Figura se muestra una placa rectangular delgada y homogénea. Calcule los productos de inercia I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, $I_{x_1y_1}$, $I_{x_1z_1}$, $I_{y_1z_1}$.



Productos de inercia

Dado que xy es un plano de simetría, entonces:

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Calculamos I_{xy}:

$$I_{xy} = -\int_m xy\,dm = -\rho t \int_0^b \int_0^h xy\,dy\,dx = -\frac{\rho t h^2 b^2}{4} = -\frac{mbh}{4}$$

$$\boxed{I_{xy} = -\frac{mbh}{4}}$$

Bibliografía

- Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M. (2020). Robot modeling and control (Second edition). John Wiley Sons, Inc.
- Oriolo, G., Sciavicco, L., Siciliano, B., Villani, L. (2010). Robotics: Modelling, planning and control. Springer.
- Hibbeler, R.C. (2010). Ingeniería mecánica - Dinámica (12va ed). Pearson Educación.
- Williams, J.H. (2006). Fundamentals of Applied Dynamics. John Wiley Sons.
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1996). Mechanics (3rd ed). Butterworth-Heinemann.