4.2 Producto cruz

El momento de una fuerza se formulará mediante vectores cartesianos en la siguiente sección. Sin embargo, antes de hacerlo, es necesario ampliar nuestro conocimiento del álgebra vectorial e introducir el método del producto cruz de la multiplicación vectorial.

El *producto cruz* de dos vectores **A** y **B** da como resultado el vector **C**, el cual se escribe

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{4-2}$$

y se lee "**C** es igual a **A** cruz **B**".

Magnitud. La *magnitud* de **C** se define como el producto de las magnitudes de **A** y **B** y el seno del ángulo θ entre sus colas ($0° \leq \theta \leq 180°$). Así, $C = AB$ sen θ.

4

Dirección. El vector **C** tiene una *dirección* perpendicular al plano que contiene a **A** y **B** de tal manera que **C** se especifica mediante la regla de la mano derecha; es decir, al cerrar los dedos de la mano derecha desde el vector **A** (cruz) hacia el vector **B**, el pulgar señala entonces la dirección de **C**, como se muestra en la figura 4-6.

Dado que se conoce la magnitud y la dirección de **C**, podemos escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \text{ sen } \theta)\mathbf{u}_C \tag{4-3}$$

donde el escalar AB sen θ define la *magnitud* de **C** y el vector unitario $\mathbf{u}_C$ define la *dirección* de **C**. Los términos de la ecuación 4-3 se ilustran de manera gráfica en la figura 4-6.

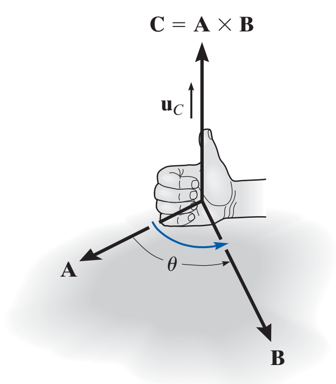

Fig. 4-6

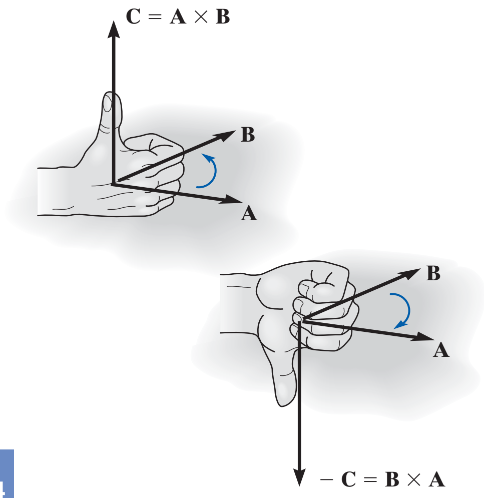

Fig. 4-7

Leyes de operación

- La ley conmutativa *no* es válida, es decir $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. En vez de eso,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Esto se muestra en la figura 4-7 por la regla de la mano derecha. El producto cruz $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ produce un vector que tiene la misma magnitud pero actúa en dirección opuesta a $\mathbf{C}$; esto es, $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$.

- Si el producto cruz se multiplica por un escalar a, obedece la ley asociativa:

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

Esta propiedad es fácil de demostrar puesto que la magnitud del vector resultante ($|a|AB$ sen θ) y su dirección son las mismas en cada caso.

- El producto cruz de vectores también obedece la ley distributiva de la suma,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

- La demostración de esta identidad se deja como ejercicio (vea el problema 4-1). Es importante observar que debe mantenerse el *orden adecuado* de los productos cruz, dado que no son conmutativos.

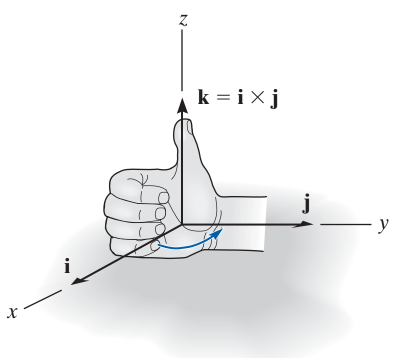

Fig. 4-8

Formulación vectorial cartesiana. La ecuación 4-3 puede usarse para encontrar el producto cruz de cualquier par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, para determinar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la magnitud del vector resultante es $(i)(j)(\text{sen } 90°) = (1)(1)(1) = 1$, y su dirección se determina por la regla de la mano derecha. Como se muestra en la figura 4-8, el vector resultante señala en la dirección $+\mathbf{k}$. Así, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (1)\mathbf{k}$. Del mismo modo,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

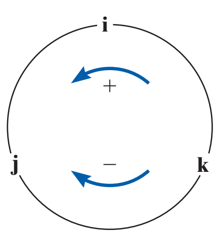

Fig. 4-9

Estos resultados *no* deben memorizarse; antes bien, entender de manera clara cómo se obtiene cada uno cuando se emplean la regla de la mano derecha y la definición del producto cruz. El esquema sencillo que se muestra en la figura 4-9 ayuda a obtener los mismos resultados cuando se requiere. Si el círculo se construye como se muestra, entonces, al "cruzar" dos vectores unitarios en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del círculo, se obtiene el tercer vector unitario *positivo*; por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Al "cruzar" en el *sentido de las manecillas del reloj*, se obtiene un vector unitario *negativo*; por ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Considere ahora el producto cruz de dos vectores generales **A** y **B** los cuales se expresan en forma vectorial cartesiana. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})\\ &= A_xB_x(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+A_xB_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+A_xB_z(\mathbf{i}\times\mathbf{k})\\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+A_yB_y(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+A_yB_z(\mathbf{j}\times\mathbf{k})\\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+A_zB_y(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+A_zB_z(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\end{aligned}$$

Al realizar las operaciones de productos cruz y combinar términos resulta

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \qquad (4\text{-}4)$$

Esta ecuación también puede escribirse en una forma de determinante más compacta como

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}} \qquad (4\text{-}5)$$

Así, para determinar el producto cruz de dos vectores cartesianos **A** y **B** cualesquiera, es necesario desarrollar un determinante cuya primera fila de elementos conste de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** y cuyas segunda y tercera filas representen las componentes x, y, z de los dos vectores **A** y **B**, respectivamente.*

*Un determinante con tres filas y tres columnas se puede desarrollar si se usan tres menores, cada uno de los cuales se multiplica por uno de los tres términos en la primera fila. Hay cuatro elementos en cada menor, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}$$

Por *definición*, esta notación determinante representa los términos $(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$, lo cual es simplemente el producto de los dos elementos de la flecha inclinada hacia abajo y a la derecha $(A_{11}A_{22})$ *menos* el producto de los dos elementos de la flecha inclinada hacia abajo y hacia la izquierda $(A_{12}A_{21})$. Para un determinante de 3 × 3, como el de la ecuación 4-5, los tres menores se pueden generar de acuerdo con el siguiente esquema:

Para el elemento **i**: $\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$

Recuerde el signo negativo

Para el elemento **j**: $\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$

Para el elemento **k**: $\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

Al sumar los resultados y tomar nota de que el elemento **j** *debe incluir el signo menos* se obtiene la forma desarrollada de **A** × **B** dada en la ecuación 4-4.