

Simulación por elementos finitos del proceso de formado de un tubo de acero AISI 1018

Pedro Jorge De Los Santos Lara

7 de octubre de 2016

Agradecimientos

Índice general

Nomenclatura	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
Introducción	IX
Capítulo 1: Marco de referencia	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Planteamiento del problema	2
1.3 Justificación	2
1.4 Objetivo general	3
1.5 Objetivos particulares	3
1.6 Alcances	3
1.7 Estado del arte	3
Capítulo 2: Marco teórico	6
2.1 Procesos de formado	6
2.1.1 Tipos de formado	6
2.1.2 Operaciones de doblado	7
2.1.2.1 Tolerancia de doblado	9
2.1.2.2 Fuerza de doblado	9
2.1.2.3 Recuperación elástica	10
2.1.3 Herramientales (troqueles)	11
2.1.3.1 Tipos de troqueles	12
2.1.3.2 Componentes de un troquel	12
2.2 Teoría de plasticidad	13
2.2.1 Esfuerzos, deformaciones y tasa de deformación	14
2.2.2 Esfuerzo y deformación verdadera	17
2.2.3 Criterio de fluencia	18
2.2.3.1 Criterio de Tresca	19
2.2.3.2 Criterio de Von Mises	20
2.2.4 Reglas de flujo	21
2.2.5 Endurecimiento por deformación	22
2.2.5.1 Endurecimiento isotrópico	23

2.2.5.2	Endurecimiento cinemático	23
2.3	El método de los elementos finitos	24
2.3.1	Una introducción al método	24
2.3.2	Discretización de un modelo continuo	25
2.3.3	Teoría de contactos	27
2.3.4	Integración implícita vs explícita	29
2.3.5	Implementación del método en problemas de ingeniería	30
2.4	Extensometría	32
2.4.1	El puente de Wheatstone	33
2.4.2	Arreglos de galgas extensiométricas	36
Capítulo 3:	Metodología aplicada	40
3.1	Descripción de la metodología aplicada	40
3.2	Análisis por elementos finitos	41
3.2.1	El proceso a simular	41
3.2.2	Modelo constitutivo	42
3.2.3	Mallado	46
3.2.3.1	Primer ensamble	46
3.2.3.2	Segundo ensamble	48
3.2.4	Condiciones de frontera	48
3.2.5	Contactos	50
3.3	Análisis experimental	51
Capítulo 4:	Resultados	52
4.1	Del análisis de elementos finitos	52
4.1.1	Esfuerzos	52
4.1.2	Deformaciones	52
4.1.3	Fuerza de formado	52
4.2	Del análisis experimental	52
Conclusiones		52
Anexos		55

Índice de figuras

1.1	Proceso de doblado UO, a) Doblado en U b) Descarga c) Doblado en O [1]	4
1.2	Modelo de elementos finitos del doblado en U [2]	5
1.3	Modelo de elementos finitos del doblado en O [2]	5
2.1	Doblado de lámina	7
2.2	Doblado en V	8
2.3	Doblado en U	8
2.4	Doblado de bordes	9
2.5	Esquema de la fuerza de doblado	10
2.6	Recuperación elástica de una pieza metálica sometida a doblez	10
2.7	Componentes de un troquel. <i>Fuente:</i> [3]	12
2.8	Ensayo de tensión uniaxial a) Especimen b) Curva esfuerzo-deformación	14
2.9	Círculos de Mohr para dos estados de esfuerzos que difieren por un esfuerzo hidrostático, σ_m y que son equivalentes en términos de la fluencia	19
2.10	Círculo de von Mises y hexágono de Tresca	21
2.11	Curva esfuerzo-deformación	22
2.12	Endurecimiento isotrópico	23
2.13	Endurecimiento cinemático	24
2.14	Endurecimiento cinemático: desplazamiento por el <i>back-stress</i>	24
2.15	Esquema del contacto entre dos cuerpos	27
2.16	Esquema del análisis de contactos	28
2.17	Diagrama de la implementación del FEM en la solución de problemas de ingeniería	31
2.18	Galga extensiométrica	32
2.19	Puente de Wheatstone	33
2.20	Cuarto de puente	34
2.21	Uso de una galga <i>dummy</i> para eliminar los efectos de la temperatura	34
2.22	Circuito de medio puente	35
2.23	Circuito de puente completo	35
2.24	Estado uniaxial de esfuerzo	36
2.25	Estado de esfuerzo isotrópico	37
2.26	Estado de esfuerzo biaxial, direcciones principales conocidas	37
2.27	Estado de esfuerzo biaxial	38
3.1	Metodología del proyecto	40

3.2	a) Modelo CAD del tubo interior manufacturado por estampado b) Modelo CAD del buje RB-131	41
3.3	Muelle parabólica	41
3.4	Vista completa del troquel	42
3.5	Partes a) inferior y b) superior del troquel	42
3.6	Curvas de esfuerzo-deformación, ingenieril y verdadera, del acero AISI 1018	45
3.7	Curva esfuerzo-deformación ingresada en ANSYS/LS-DYNA	45
3.8	Elemento SOLID164	46
3.9	Elemento SHELL163	46
3.10	Blank segmentado en cuatro regiones	47
3.11	Mallado del blank en vista a) trimétrica b) frontal	48
3.12	Mallado de a) formador inferior b) formador superior c) leva	48
3.13	Partes del ensamble 1	49
3.14	Mallado del ensamble, segundo paso	49
3.15	Vector de tiempo desplazamiento	50

Índice de tablas

3.1	Propiedades del acero AISI 1018	44
3.2	Conversión de esfuerzos y deformaciones	45
3.3	Parámetros utilizados para el elemento SHELL163	47
3.4	Constantes reales para el elemento SHELL163	47

Nomenclatura

CAE	Computer Aided Engineering
CAD	Computer Aided Design
FEA	Finite Element Analysis
FEM	Finite Element Method
AISI	American Iron and Steel Institute
SAE	Society of Automotive Engineers
ASTM	American Society for Testing Materials
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Esfuerzos principales
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Esfuerzo en la dirección X,Y,Z
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Deformaciones principales
S_y	Esfuerzo de fluencia
k_R	Factor de springback
t	Espesor de lámina metálica
RBUX, RBUY, RBUZ	Desplazamiento de cuerpo rígido en dirección X,Y,Z
UX, UY, UZ	Desplazamiento en dirección X,Y,Z

Resumen

Resumen del trabajo de tesis. No mayor a 20 líneas.

Abstract

Abstract for thesis. That is, just a translation (ES-EN) from previous section

Introducción

Introducción al trabajo de tesis

Marco de referencia

1.1. Antecedentes

Los procesos de estampado forman parte importante de la industria metal-mecánica, muchas piezas metálicas se fabrican utilizando estos procesos, debido a los altos volúmenes de producción y a la rapidez de fabricación respecto a otros métodos como la fundición, forja o el mecanizado. Es empleado en gran variedad de sectores: electrodomésticos, automotriz, aeronáutico, naval, electrónico e informático y su objetivo es aprovechar al máximo el material para elaborar la mayor cantidad de piezas con el menor tiempo y costo posible.

El proceso de estampado, vital dentro del sector automotriz en México, genera una demanda de mercado con un valor de unos \$17,000 millones de dólares. Este monto es conformado por la suma de la proveeduría nacional, que aporta \$6,000 millones de dólares y las importaciones de piezas y componentes que utilizan este proceso de manufactura, valuadas en poco más de \$11,000 millones de dólares. Esto significa que la proveeduría nacional (fabricantes en el país) abastece el 35.2 % de la demanda que se presenta dentro de dicho proceso de la cadena de valor del sector automotriz. [4]

Las operaciones de troquelado y estampado pueden parecer actividades en las cuales no hay mayor ciencia o desarrollo de ingeniería, y muchas veces, los herramientas utilizados se fabrican mediante una aproximación dada por la experiencia de un jefe de taller o un mecánico matricero, y posteriormente se realizan pruebas para ajustar en donde sea necesario. Está claro que para una industria pequeña esto puede funcionar, dado que la exigencia en la producción y las pérdidas económicas derivadas de un diseño inadecuado son mínimas. Pero, normalmente, en las industrias del sector automotriz los requerimientos en tiempo y costo dejan menos margen de maniobra e implican que los procesos de

diseño sean desarrollados mediante una metodología que garantice la disponibilidad del producto en tiempo y forma.

En ese contexto, las herramientas computacionales, es decir paquetes de software CAD, CAE o CAM, proporcionan una ventaja competitiva considerable, puesto que permiten a las empresas agilizar los procesos de diseño y manufactura de los herramientas utilizados, que en conjunto con los procedimientos de producción y los aspectos de logística, posibilitan establecer una metodología ágil para el desarrollo de nuevos productos o de los ya existentes.

1.2. Planteamiento del problema

La empresa Bypasa S.A. de C.V. diseña y fabrica componentes utilizados en partes anti-vibratorias, para el sector automotriz, específicamente bujes y abrazaderas utilizadas en las suspensiones, partiendo desde la creación de los materiales poliméricos requeridos, la selección de la geometría y la validación del diseño. Sin embargo los herramientas: moldes y troqueles, que utiliza en sus procesos de producción son diseñados y fabricados por empresas extranjeras y/o nacionales. Por esto se está desarrollando un proyecto cuyo objetivo es poner en operación un centro de diseño, fabricación y validación de moldes y troqueles.

El modelado y simulación, por medio de métodos numéricos computacionales, de los procesos de fabricación involucrados en el desarrollo de los herramientas es una parte importante del proyecto, puesto que permitirá tomar decisiones respecto a los diseños en etapas tempranas, minimizando los costos derivados de los ajustes realizados después de ejecutar *corridas* de prueba.

Se requiere simular el proceso de formado de un tubo de acero AISI 1018 que será fabricado con un herramienta diseñado en el nuevo centro de desarrollo, con la finalidad de determinar la forma de la geometría final del producto, comparar con las especificaciones, determinar si es necesario un rediseño, además de obtener algunos datos como la fuerza de formado requerida para el proceso.

1.3. Justificación

La simulación por elemento finito en el proceso de diseño de herramientas, así como en la simulación de procesos de estampado es una herramienta muy útil, puesto que representa un ahorro significativo de costos y tiempo, a la vez que permite establecer una metodología de trabajo más efectiva, minimizando las actividades de tipo prueba-error para la realización de ajustes.

Además de lo anterior, la simulación presenta la ventaja de poder variar parámetros que influyen en los procesos de estampado, de manera conveniente, sin que esto derive en gastos excesivos de recursos, con la finalidad de entender de mejor manera la influencia de ciertas

propiedades o condiciones, e inclusive optimizar las características de un componente.

1.4. Objetivo general

Simular y validar el proceso de formado de un tubo de acero AISI 1018.

1.5. Objetivos particulares

- Simular el desarrollo de formado del tubo.
- Identificar fallas potenciales o características no deseables en el tubo.
- Validar los resultados de la simulación.

1.6. Alcances

- Desarrollo de un modelo de elemento finito del proceso de formado del tubo.
- Simulación del modelo utilizando un análisis tipo dinámico-explicito.
- Validación de la simulación.

1.7. Estado del arte

La posibilidad de desarrollar simulaciones de los procesos de estampados metálicos fue durante mucho tiempo un deseo inalcanzable para la industria de estampados. Los ingenieros de procesos esperaban ser capaces de identificar posibles defectos en el formado en etapas tempranas de diseño y/o desarrollo de los herramientas, y minimizar la necesidad de modificaciones costosas de las herramientas en una serie de procesos de ensayo y error.

El modelado de problemas de estampado de partes metálicas requiere una precisión considerable en la caracterización de efectos como el comportamiento no lineal de un material, grandes deformaciones y condiciones de contacto entre la herramienta y la parte a estampar, que derivan en algoritmos complejos.[5]

La primera formulación teóricamente correcta de problemas de formado de metales fue presentada por Wang y Budiansky [6] en 1978. El método presentado fue una formulación total lagrangiana e involucraba elementos triangulares membrana de deformación constante. La solución implementada fue un esquema incremental Euleriano hacia adelante. Los métodos basados en un esquema de solución como el anterior son llamados como métodos estáticos-explicitos.

En el inicio de la década de los 90's hubo un incremento considerable en la utilización de la simulación de estampado metálico dentro de la industria y a mediados de esta década

la mayoría de las compañías en la industria automotriz establecieron las simulaciones de estampado como aspectos elementales en el desarrollo de sus procesos. Actualmente existen programas de computadora altamente especializados en la simulación de estampados, siendo AutoForm uno de los más utilizados, este surgió como un proyecto de investigación en el ETH de Zurich en los inicios de los 90's. El código está basado en un enfoque estático-implícito, pero utiliza algunos algoritmos innovativos que le permiten una estabilidad y eficiencia computacional competitiva respecto a los códigos de tipo dinámico-explicito. [5]

Para la simulación numérica de procesos de formado de tubo mediante doblados sucesivos en UO, similares al proceso a desarrollar, se tienen algunos trabajos anteriores, mismos que se describen a continuación.

Huang Leu [1] desarrollaron un código de análisis elasto-plástico por elemento finito, basado en una formulación lagrangiana modificada, para simular proceso de doblado UO en placas metálicas, bajo condiciones de deformación plana. Para realizar el análisis del proceso completo, dividieron este en tres pasos de carga o configuraciones que se muestran en la figura 1.1, doblado en U, descarga y doblado final en O. Aplicaron además simetría debido a la disposición de las herramientas y el blank a formar, simplificando aún más el análisis. Utilizaron un coeficiente de fricción de $\mu = 0.02$ y el espesor de la chapa fue de 6 mm.

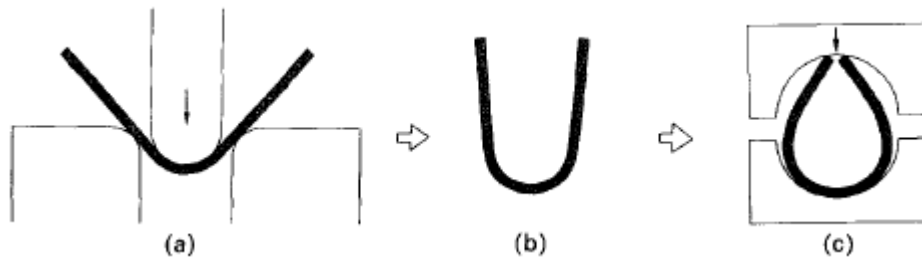


Figura 1.1 Proceso de doblado UO, a) Doblado en U b) Descarga c) Doblado en O [1]

Chen y Huang [2] de manera similar a [1] simularon un proceso de doblado UO, con las mismas etapas: doblado en U, descarga y doblado en O. El espesor de lámina de la pieza de trabajo fue de 6 mm y un ancho de 10 mm. Utilizaron una ecuación exponencial para la relación esfuerzo-deformación. En las figuras 1.2 y 1.3 se muestran el modelo FEM de los pasos de formado correspondientes. Los resultados obtenidos fueron la distribución de esfuerzos de Von Mises y la forma geométrica resultante, medidas para ciertos intervalos de desplazamiento del punzón formador superior.

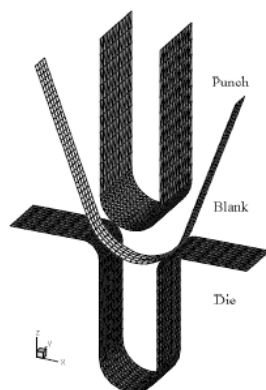


Figura 1.2 Modelo de elementos finitos del doblado en U [2]

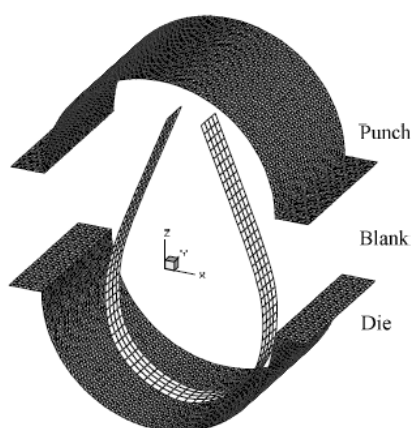


Figura 1.3 Modelo de elementos finitos del doblado en O [2]

Marco teórico

2.1. Procesos de formado

El formado de metales incluye varios procesos de manufactura en los cuales se usa la deformación plástica para cambiar la forma de las piezas metálicas. La deformación es el resultado del uso de una herramienta que generalmente es un troquel para formar metales, mediante el cual se aplican esfuerzos que exceden la resistencia a la fluencia, induciendo una deformación plástica [7]

Normalmente, se aplica un esfuerzo de compresión para deformar plásticamente el metal, no obstante, algunos procesos de formado estiran, cortan o doblan el metal. Para que un metal sea adecuado como materia prima en un proceso de formado, este debe poseer ciertas propiedades mecánicas, tales como una baja resistencia a la fluencia y alta ductilidad, para facilitar la deformación plástica. Además, debe tenerse en cuenta el factor de la temperatura, mismo que determina la clasificación de trabajo en frío y caliente (referente a la temperatura de cristalización). También la velocidad de formación y el fenómeno de fricción entre la pieza metálica y el herramental son factores adicionales que afectan el desempeño del formado de metales.

2.1.1. Tipos de formado

Los procesos de formado se pueden clasificar en dos categorías generales, a saber: procesos de deformación volumétrica y procesos de trabajo de láminas metálicas. [7]

Los **procesos de deformación volumétrica** se caracterizan por deformaciones signifi-

cativas que derivan en grandes cambios de forma, y la relación entre el área superficial y el volumen de trabajo es relativamente pequeña. Algunos tipos de formado que entran dentro de esta clasificación son: rolado, forjado, extrusión y estirado. [7]

Los **procesos de trabajo de láminas metálicas** son operaciones de formado o preformado de láminas, tiras y rollo de metal. La razón entre el área superficial y el volumen del material inicial es alta, por lo que esta relación es un medio útil para distinguir la deformación de los procesos descritos anteriormente. Estas operaciones se ejecutan siempre en frío y se utiliza un herramental compuesto en la mayoría de los casos de un conjunto de formadores, conocidos comúnmente como punzones y matrices en el ámbito industrial. Se pueden distinguir de manera general tres tipos de operaciones que entran en esta clasificación: doblado, estirado y corte. [7]

En este caso centraremos el interés en esta última clasificación, puesto que el proceso de formado del tubo se realiza utilizando una combinación de corte-doblado.

2.1.2. Operaciones de doblado

El doblado es un tipo de formado que consiste en deformar una hoja metálica, comúnmente conocida como pieza de trabajo, alrededor de un eje, con un cierto radio de doblado, utilizando elementos formadores que ejercen una fuerza sobre la pieza.

En la figura 2.1 se puede ver un esquema simplificado de una operación de doblado, en la cual pueden observar algunos parámetros fundamentales de este proceso, tales como el radio (R) y ángulo de doblado (α), el espesor (t) y ancho (W) de la pieza, así como la ubicación cualitativa del eje neutro que usualmente se localiza en un rango de $1/3$ a $1/2$ del espesor en hojas metálicas de acero.

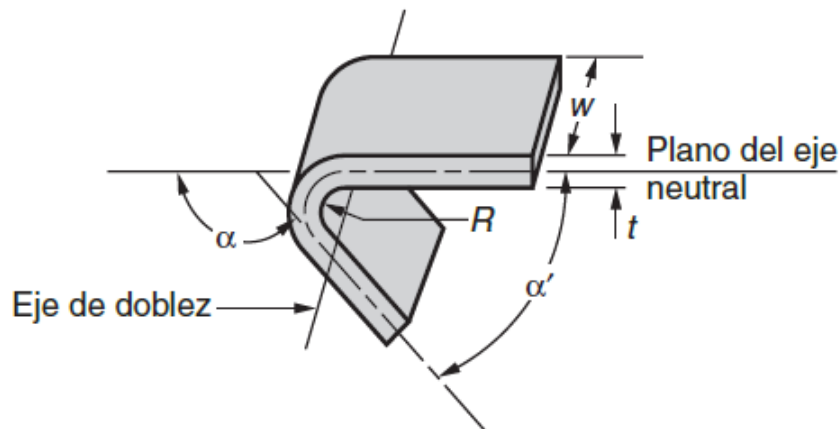


Figura 2.1 Doblado de lámina

Las operaciones de doblado se realizan usando como herramientas diversos componentes que normalmente son conocidos como *formadores*. Los métodos de doblado más comunes

son el doblado en V, el doblado en U y el doblado de bordes.

En el doblado en V la lámina metálica se dobla entre el punzón o formador y una matriz en forma de V, como se muestra en la figura 2.2. Los ángulos de doblado pueden incluir una variedad de rangos.

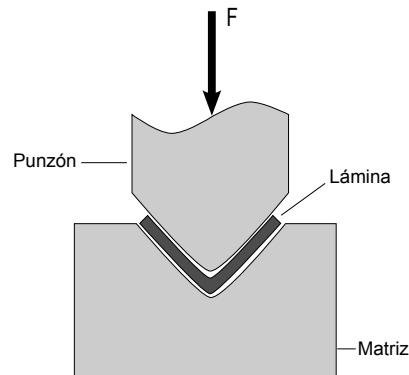


Figura 2.2 Doblado en V

El doblado en U es muy similar al anterior, con la diferencia que el radio del doblado suele ser más amplio, como se muestra en la figura 2.3.

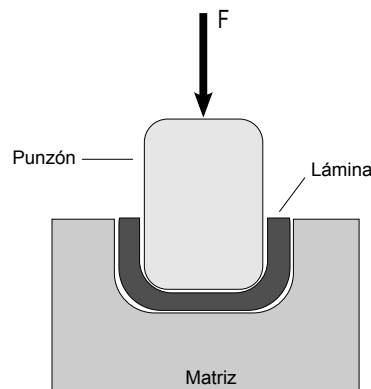


Figura 2.3 Doblado en U

El doblado de bordes involucra una carga voladiza sobre la lámina de metal. Se utiliza un *pisador* que aplica una fuerza de sujeción F_p , para sostener la placa de metal en una posición adecuada para llevar a cabo el doblado, mientras el punzón se desliza en la parte del voladizo para forzar el doblado de la pieza sobre el borde de la matriz (ver figura 2.4. Normalmente este tipo de doblado se limita a ángulos de 90° o menores.

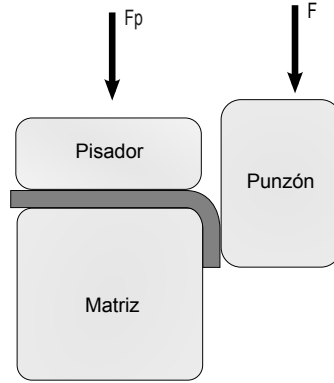


Figura 2.4 Doblado de bordes

2.1.2.1. Tolerancia de doblado

En el proceso de doblado es importante tomar en cuenta algunas características relativas a la pieza de trabajo. Tomando como referencia la figura 2.1, una hoja metálica de espesor t se dobla a través de un ángulo llamado ángulo de doblado α . El resultado es una pieza doblada con un ángulo incluido α' , tal que $\alpha + \alpha' = 180$. El radio de doblado R se especifica normalmente en la parte interna de la pieza, en lugar de sobre el eje neutral, y se determina por el radio de la herramienta utilizada para ejecutar la operación. El doblado se hace sobre el ancho de la pieza de trabajo w . [7]

Si el radio de doblado es pequeño respecto al espesor del material el metal tiende a estirarse durante el doblado. Es importante poder estimar la magnitud del estirado que ocurre, de manera que la longitud de la pieza final pueda coincidir con la dimensión especificada. El problema es determinar la longitud del eje neutral antes del doblado, para tomar en cuenta el estirado de la sección doblada final. Esta longitud se llama *tolerancia de doblado* y se puede estimar como sigue: [7]

$$A_b = 2\pi \frac{\alpha}{360} (R + K_{ba}t) \quad (2.1)$$

Donde A_b es la tolerancia de doblado en mm , α el ángulo de doblado en grados, R el radio de doblado, t el espesor del material y K_{ba} es un factor para estimar el estirado. Los siguientes valores de diseño se recomiendan para K_{ba} : [7]

$$\begin{cases} K_{ba} = 0.33 & \text{Si } R < 2t \\ K_{ba} = 0.5 & \text{Si } R > 2t \end{cases}$$

Estos valores de K_{ba} predicen que el estiramiento ocurre solamente si el radio de doblado es más pequeño en relación con el espesor de la lámina.

2.1.2.2. Fuerza de doblado

La fuerza requerida para llevar a cabo un proceso de doblado depende de la configuración del herramental, así como de las propiedades mecánicas y geométricas de la pieza de

trabajo. Con la ecuación 2.2 se puede estimar la fuerza máxima de doblado.

$$F = \frac{KS_twt^2}{D} \quad (2.2)$$

Donde F es la fuerza de doblado, S_t la resistencia a la tensión del material, w y t el ancho y espesor de la pieza de trabajo, respectivamente, D es la longitud de la parte abierta de la matriz, tal como se esquematiza en la figura 2.5. K es una constante cuyo valor depende del tipo de doblado, normalmente 1.33 para doblado en V y 0.33 para doblado de bordes. [7]

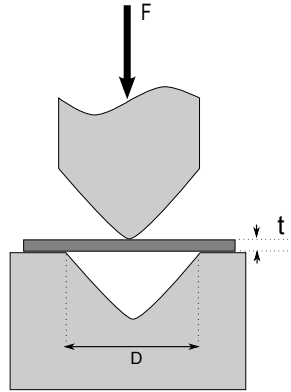


Figura 2.5 Esquema de la fuerza de doblado

2.1.2.3. Recuperación elástica

Cuando se diseña un troquel, es necesario considerar la recuperación elástica o *springback* que ocurre después de la descarga, debido a que el material tiende a recuperar su forma inicial e implica que el ángulo de doblado en el herramental α_i no corresponda exactamente con el ángulo deseado α_f . La recuperación elástica ocurre en todos los tipos de formado que implican un tipo de doblado.

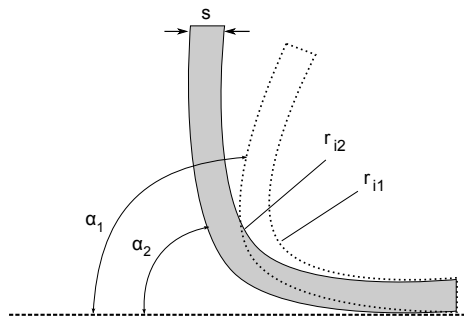


Figura 2.6 Recuperación elástica de una pieza metálica sometida a doblez

La relación dada entre los ángulos α_i y α_f se conoce como factor de *springback* k_R , y depende de las características del material y la relación entre el radio de doblado y el espesor de la pieza de trabajo. La relación se puede expresar como sigue: [8]

$$k_R = \frac{\alpha_f}{\alpha_i} = \frac{r_i + 0.5s}{r_f + 0.5s} \quad (2.3)$$

Donde, usando como referencia gráfica la figura 2.6, α_i es el ángulo por el herramental, α_f el ángulo deseado en la pieza de trabajo (o después del springback), s es el espesor de la pieza de trabajo, r_i el radio interno en el herramental y r_f el radio interno en la pieza de trabajo.

Luego, el ángulo necesario en el troquel o matriz viene dado por:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_f}{k_R} \quad (2.4)$$

El radio interior requerido en el troquel puede ser calculado como:

$$r_i = \frac{r_f}{1 + \frac{r_f \cdot S_t}{s \cdot E}} \quad (2.5)$$

Donde S_t es la resistencia a la tensión del material y E el módulo elástico correspondiente.

La ecuación 2.3 permite calcular la recuperación elástica a si se conoce previamente ambos radios internos (antes y después de la descarga). Pero es posible predecir la relación r_i/r_f mediante la siguiente ecuación: [9]

$$\frac{r_i}{r_f} = 4(Cr_i)^3 - 3(Cr_i) + 1 \quad (2.6)$$

Donde C es una constante dada por:

$$C = \frac{S_y}{Es} \quad (2.7)$$

Siendo S_y la esfuerzo de fluencia del material. Esta ecuación nos permite observar que la recuperación elástica aumenta cuando lo hacen la relación r/s y el esfuerzo de fluencia S_y , así como al disminuir el módulo elástico.

2.1.3. Herramentales (troqueles)

Los herramentales utilizados en los procesos de formado (comúnmente llamados troqueles) son construidos teniendo en cuenta algunos aspectos elementales, a saber [10]:

1. Trabajo a realizar
2. Características de la prensa
3. Material a troquelar
4. Número de piezas a producir

otros elementos adicionales.

Base inferior. Es el elemento sobre el cual van montados todos los componentes que hacen la parte de la matriz, y a su vez, está fuertemente sujeta en la bancada de la prensa durante la fase de trabajo. Algunos de los elementos contenidos en la base inferior son: placa porta-matrices, guías, sufrideras, topes de avance, entre otros.

Sufrideras. La función básica de las placas superior e inferior de choque o sufrideras consiste en absorber sobre su superficie los sucesivos golpes de los elementos en el troquel. Estos impactos se producen cada vez que los punzones transforman la lámina con la matriz. Cuando el punzón impacta contra el material, la resistencia que opone este es transmitida a la superficie de las sufrideras sobre las que se apoyan las placas porta matriz y porta punzones. Estas placas están construidas en materiales ya templados y que conservan su tenacidad y cohesión, uno muy empleado es el acero SAE/AISI 1045.

Porta punzones. La finalidad de la placa porta punzones es la de alojar y fijar en su interior todos los punzones que lleve la matriz. Estos punzones pueden ser de cualquier tipo o tamaño pero han de tener una sola característica en común: deben estar firmemente sujetos y guiados en el interior de dicha placa impidiendo que puedan moverse o desprenderse.

Porta matriz. La placa porta matrices aloja y posiciona en su interior todos los elementos de pequeñas dimensiones que lleve la propia matriz, de esta manera dichos componentes quedarán ajustados en su interior.

Placa pisadora. Durante el movimiento descendente del troquel, la placa pisadora presiona la lámina dejándola inmovilizada antes de que los punzones lleguen a tocarla y mientras penetran el material y lo transforman. Una vez cortada la lámina, la función de la placa es mantener la pieza bien sujeta hasta que los punzones hayan salido de ella, de lo contrario, los punzones la arrastrarían hacia arriba sujeta a ellos, con el riesgo de fractura.

Punzones. Los punzones tienen por objeto realizar las máximas transformaciones en la lámina a fin de obtener piezas con una calidad acorde a las medidas requeridas, hay tanto tipos de estos como variantes del troquelado.

Matrices. Las matrices son los elementos complementarios a los punzones, tienen la forma negativa de estos. Es común que cuando las matrices no realizan una operación de corte si no más bien un doblado o cualquier otra transformación que no implique remoción de material, se conozcan también como formadores.

2.2. Teoría de plasticidad

La teoría de plasticidad estudia la fluencia de materiales bajo estados de esfuerzos complejos. Permite conocer si un material cederá bajo ciertas condiciones de esfuerzo y determinar el cambio en la forma o geometría en caso de que la fluencia ocurra. También permite usar

datos de ensayos de tensión para predecir el endurecimiento por carga durante la deformación bajo complejos estados de esfuerzo. Estas relaciones son parte fundamental de los códigos de computadora utilizados para predecir la capacidad de una estructura para absorber impactos, así como en procesos de formado o estampado que involucran la deformación plástica de placas metálicas. [11]

2.2.1. Esfuerzos, deformaciones y tasa de deformación

Las cantidades elementales que pueden ser usadas para describir los mecanismos de deformación cuando un sólido se deforma de una configuración a otra bajo la influencia de cargas externas son los esfuerzos, deformaciones y la tasa de deformación. [12]

Considere el ensayo de tensión uniaxial de un espécimen cilíndrico cuya longitud inicial es l_0 y un área transversal A_0 . El espécimen se reduce en la dirección axial por acción de la fuerza P a la longitud l y sección transversal A en el tiempo t , como se observa en la figura 2.8. El comportamiento del material se caracteriza como una curva carga-desplazamiento, y se convierte a una de esfuerzo-deformación como se muestra en la figura 2.8. La deformación se asume homogénea hasta que se presentan grietas. [12]

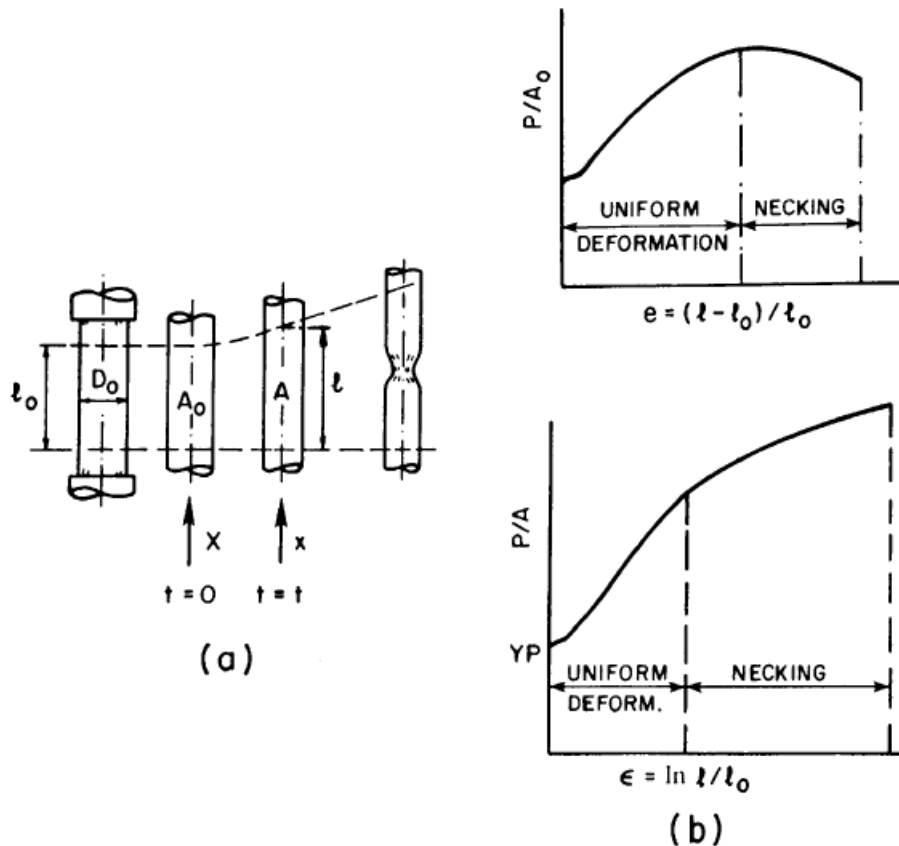


Figura 2.8 Ensayo de tensión uniaxial a) Especimen b) Curva esfuerzo-deformación

Hay dos formas de describir la deformación de un medio continuo: la lagrangiana y la euleriana. La descripción lagrangiana utiliza las coordenadas X_i de una partícula típica en el estado de referencia (o sin deformar) como las variables independientes, mientras en el caso de la descripción euleriana la descripción de las variables independientes son las coordenadas x_i de un punto material en el estado deformado. Cuando la deformación es infinitesimal, los productos de las derivadas de desplazamiento pueden ser *despreciados*, y entonces no se hace una distinción entre ambos enfoques. [12]

En la teoría de deformación infinitesimal, las esfuerzos y las tasas de deformación son expresadas con respecto a un sistema fijo de coordenadas en la configuración actual del material en un tiempo determinado. Para el caso de tensión uniaxial se tiene: [12]

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.8)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{l}}{l} \quad (2.9)$$

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \quad (2.10)$$

Los esfuerzos definidos en la ecuación anterior son llamados esfuerzos verdaderos o esfuerzo de Cauchy. La cantidad total de deformación se obtiene integrando las deformaciones infinitesimales:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l d\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad (2.11)$$

y es llamada deformación logarítmica o verdadera.

En la descripción lagrangiana de la deformación finita, la medida de los esfuerzos, deformaciones y tasa de deformación son expresadas como sigue. Sea la posición de una partícula en su configuración deformada en el tiempo t la designada por:

$$x = \chi(X, t) \quad (2.12)$$

donde X es una posición de referencia de una partícula y t el tiempo. En tensión uniaxial sea X una posición a lo largo del eje longitudinal del espécimen de la figura 2.8, entonces:

$$x = X + \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right) X \quad (2.13)$$

La elongación se define como el gradiente del desplazamiento relativo a la posición de referencia y se expresa como:

$$\frac{\partial(x - X)}{\partial X} = \frac{l - l_0}{l_0} = e \quad (2.14)$$

Esto es el esfuerzo ingenieril o de ingeniería.

La componente de deformación lagrangiana E_{11} está definida por:

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial X} - 1 \right) = \frac{1}{2} [(1+e)^2 - 1] = e + \frac{1}{2}e^2 \quad (2.15)$$

Los componentes de la tasa de deformación son las derivadas del tiempo de las componentes de deformación dadas por las ecuaciones 2.14 y 2.15, y son:

$$\dot{e} = \frac{\dot{l}}{l_0} \quad (2.16)$$

y

$$\dot{E}_{11} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial \dot{x}}{\partial X} = (1+e)\dot{e} \quad (2.17)$$

siendo:

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{X=\text{const.}} \quad (2.18)$$

Para el análisis de procesos de formado, la formulación de flujo está basada la teoría de deformación infinitesimal, mientras la formulación sólida considera deformaciones finitas.

El tensor de la tasa de deformacion $[\dot{\varepsilon}_{ij}]$, donde $i, j = x, y, z$ es simétrico y los componentes del tensor están definidos por:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} \quad (2.20)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \quad (2.21)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} \quad (2.22)$$

Donde u_i son componentes de velocidad y γ_{ij} son componentes de la tasa deformación por cortante ingenieril. Utilizando notación de subíndices, la ecuación 2.19 puede ser reescrita como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.23)$$

Donde las comas denotan la derivación respecto a las coordenadas que siguen.

El tensor de esfuerzos de Cauchy $[\sigma_{ij}]$, donde $i, j = 1, 2, 3$ o x, y, z , es también simétrico y es representado por los nueve componentes como sigue:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

El esfuerzo puede también especificarse por sus tres componentes principales, o por los tres invariantes. Los esfuerzos principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, son raíces de la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.25)$$

Donde I_1 , I_2 e I_3 son cantidades independientes de la dirección de los ejes seleccionados y son llamados los tres invariantes del tensor de esfuerzos σ_{ij} , y están definidos por las relaciones:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.26)$$

$$I_2 = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (2.27)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.28)$$

El primer y segundo invariantes tienen importancia física en la teoría de plasticidad.

2.2.2. Esfuerzo y deformación verdadera

Las deformaciones en compresión y tensión son las mismas sólo si son consideradas en forma de límite, como $\Delta l \rightarrow dl \rightarrow 0$. La ecuación 2.10 define la deformación en términos de diferenciales. Además, la ecuación 2.11 define la deformación verdadera o logarítmica como una integral de 2.10 sobre el rango de deformación $[l_0, l]$, donde l_0 es la longitud inicial y l la longitud actual.

Un metal dúctil sujeto a deformaciones finitas tendrá el mismo comportamiento esfuerzo-deformación en tensión y compresión si se gráfica el esfuerzo verdadero contra la deformación verdadera. [13]

Normalmente los datos obtenidos de un ensayo de tensión corresponden a los valores nominales o ingenieriles de deformación y esfuerzo. No obstante, en muchos casos, los paquetes de simulación por elementos finitos utilizan como dato de entrada, para la definición de materiales, una curva de deformación verdadera vs esfuerzo verdadero, con lo cual se hace necesario conocer la relación existente entre estos.

La relación entre la deformación verdadera y la deformación nominal puede establecerse como sigue:

$$\varepsilon_{nom} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \quad (2.29)$$

Luego si sumamos la unidad a ambos lados y aplicamos la función logaritmo natural, se tiene:

$$\ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_{nom}) \rightarrow \varepsilon = \ln(1 + \varepsilon_{nom}) \quad (2.30)$$

La relación entre el esfuerzo verdadero y el esfuerzo nominal puede establecerse considerando la naturaleza incompresible de la deformación plástica y asumiendo que la elasticidad es también incompresible, entonces:

$$l_0 A_0 = l A \quad (2.31)$$

Luego, el área actual viene dada por:

$$A = A_0 \frac{l_0}{l} \quad (2.32)$$

Sustituyendo esta definición de A en la ecuación 2.8:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \frac{l}{l_0} = \sigma_{nom} \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (2.33)$$

Donde el término l/l_0 puede ser reescrito como $1 + \varepsilon_{nom}$. Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$\sigma = \sigma_{nom}(1 + \varepsilon_{nom}) \quad (2.34)$$

Comúnmente la deformación verdadera es la deformación total, es decir, la deformación elástica más la deformación plástica. Luego, se hace necesario cuantificar solamente lo correspondiente a la deformación plástica, para tener una curva de plasticidad mejor definida. La siguiente ecuación relaciona la deformación plástica con la deformación total verdadera: [13]

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_t - \varepsilon_{el} = \varepsilon_t - \sigma/E \quad (2.35)$$

Donde ε_{pl} es la deformación plástica, ε_t la deformación total verdadera y ε_{el} la deformación elástica.

2.2.3. Criterio de fluencia

Un criterio de fluencia es una expresión matemática propuesta del estado de esfuerzo que causará la fluencia. La forma más general es: [11]

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) = C \quad (2.36)$$

Donde C es una constante del material. Para materiales isotrópicos esto puede ser expresado en términos de los esfuerzos principales como: [11]

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \quad (2.37)$$

Para la mayoría de los metales dúctiles isotrópicos comúnmente se hacen las siguientes consideraciones: [14]

- El esfuerzo de fluencia en tensión y compresión es el mismo.
- El volumen permanece constante durante la deformación plástica

- La magnitud del esfuerzo normal promedio, no afecta la fluencia.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.38)$$

La consideración que la fluencia es independiente de σ_m es razonable porque la deformación usualmente ocurre por deslizamiento o mecanismos de corte. Por lo tanto los criterios de fluencia para materiales isotrópicos tienen la forma: [14]

$$f[(\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_3 - \sigma_1), (\sigma_1 - \sigma_2)] = C \quad (2.39)$$

Esto es equivalente a considerar que la fluencia depende sólo del tamaño del círculo de Mohr, y no de su posición, la figura 2.9 muestra esto. Si el estado de esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, causará la fluencia, otro estado de esfuerzos $\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m, \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m, \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m$, que difiere sólo por σ_m , también causará la fluencia. Estos esfuerzos $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ se conocen como esfuerzos desviatorios. [14]

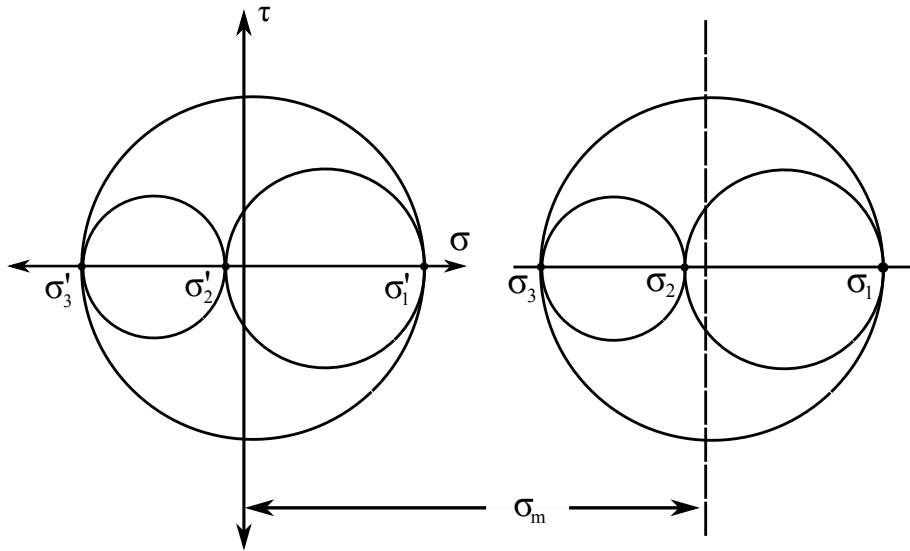


Figura 2.9 Círculos de Mohr para dos estados de esfuerzos que difieren por un esfuerzo hidrostático, σ_m y que son equivalentes en términos de la fluencia

2.2.3.1. Criterio de Tresca

El criterio más simple es uno de los primeros propuestos por Tresca. Afirma que la cedencia ocurrirá cuando el máximo esfuerzo cortante alcance un valor crítico. El máximo esfuerzo cortante viene dado por:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (2.40)$$

entonces, el criterio de Tresca puede expresarse como:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = C \quad (2.41)$$

Si se mantiene la convención de que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, puede reescribirse lo anterior como:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = C \quad (2.42)$$

La constante C puede ser encontrada mediante un ensayo de tensión uniaxial. En un ensayo de tensión, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y la cedencia $\sigma_1 = Y$, donde Y es el esfuerzo de fluencia. Sustituyendo en $C = Y$ en la ecuación 2.42. Por lo tanto el criterio de Tresca puede ser expresado como:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad (2.43)$$

Para cortante puro, $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$, donde k es esfuerzo de fluencia por cortante. Sustituyendo $k = Y/2$ en la ecuación 2.43, entonces:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k = C \quad (2.44)$$

2.2.3.2. Criterio de Von Mises

El efecto del esfuerzo principal medio puede ser incluido asumiendo que la fluencia depende de la raíz cuadrada del promedio de los diámetros de los tres círculos de Mohr. Este es el criterio de Von Mises, el cual puede ser expresado como:

$$\left(\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}{3} \right)^{1/2} = C \quad (2.45)$$

Como cada término está elevado al cuadrado, la convención $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ no es necesaria. La constante del material, C , puede ser evaluada mediante un ensayo de tensión uniaxial. En la fluencia, $\sigma_1 = Y$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Sustituyendo, $[0^2 + (-Y)^2 + Y^2]/3 = C^2$, o $C = (2/3)^{1/2}Y$, entonces, la ecuación usualmente se escribe como:

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2Y^2 \quad (2.46)$$

Para cortante puro, $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$ y $\sigma_2 = 0$. Sustituyendo en la ecuación 2.46, $(-k)^2 + [(-k) - k]^2 + k^2 = 2Y^2$, entonces:

$$k = Y/\sqrt{3} \quad (2.47)$$

La ecuación 2.47 puede ser simplificada si uno de los esfuerzos principales es cero (condición de esfuerzo plano). Sustituyendo $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = Y^2$, el cual es una elipse. Con la consiguiente sustitución de $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$,

$$\sigma_1 = \frac{y}{(1 - \alpha + \alpha^2)^{1/2}} \quad (2.48)$$

El criterio de fluencia de Von Mises puede ser expresado en términos de los esfuerzos que no son principales. En este caso es necesario incluir los términos de cortante:

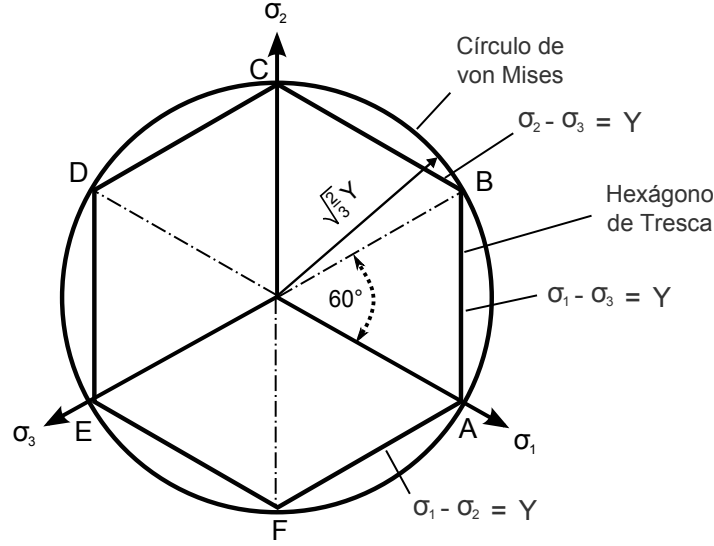


Figura 2.10 Círculo de von Mises y hexágono de Tresca

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 2Y^2 \quad (2.49)$$

donde x, y, z, son esfuerzos en esas direcciones, que no necesariamente son las direcciones principales.

2.2.4. Reglas de flujo

Las deformaciones resultantes en la región elástica son descritas por la ley de Hooke. Hay una relación similar para las deformaciones plásticas, llamadas reglas de flujo. En el caso más general, la forma de una regla de flujo puede escribirse como: [14]

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \quad (2.50)$$

Donde f es la función de σ_{ij} que describe la fluencia. Esto está relacionado con el por qué ha sido llamado el *potencial plástico*. Para el criterio de Von Mises, la diferenciación resulta en: [14]

$$d\varepsilon_1 = d\lambda [\sigma_1 - (1/2)(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (2.51)$$

$$d\varepsilon_2 = d\lambda [\sigma_2 - (1/2)(\sigma_3 + \sigma_1)] \quad (2.52)$$

$$d\varepsilon_3 = d\lambda [\sigma_3 - (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (2.53)$$

En estas expresiones $d\lambda = d\bar{\varepsilon} / \bar{\sigma}$, el cual varía con la posición en la curva $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$. Sin embargo, la relación de las deformaciones plásticas permanece constante: [14]

Para el criterio de Tresca, $f = \sigma_1 - \sigma_3$, entonces las reglas de flujo son simples: [14]

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= dl \\ d\varepsilon_2 &= 0 \\ d\varepsilon_3 &= -dl \end{aligned}$$

2.2.5. Endurecimiento por deformación

En el caso unidimensional, un espécimen se deformará hasta la fluencia y entonces generalmente endurece, como se muestra en la figura 2.11. En el caso de plasticidad perfecta, una vez que el esfuerzo alcanza el punto de fluencia A , le sigue una deformación plástica siempre y cuando el esfuerzo se mantenga en Y . Si el esfuerzo se reduce, una descarga elástica ocurre. En el caso con efectos de endurecimiento, una vez que la fluencia ocurre, el esfuerzo necesita continuar incrementando para producir la deformación plástica. Si el esfuerzo se mantiene constante, por ejemplo en B , no ocurrirá una deformación plástica, además tampoco sucederá una descarga elástica como en el caso idealizado. [15]

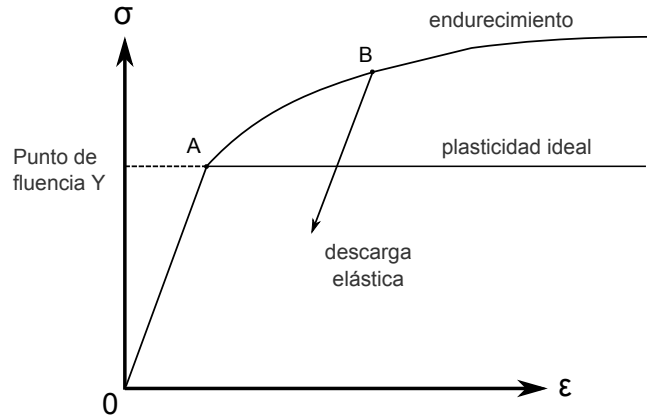


Figura 2.11 Curva esfuerzo-deformación

Estas ideas pueden ser extendidas al caso multiaxial, donde la superficie de fluencia inicial tendrá la forma:

$$f_0(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.54)$$

En el caso de plasticidad perfecta, la superficie de fluencia permanece invariable. En el caso más general, la superficie de fluencia puede cambiar de tamaño, forma y posición, y puede ser descrita por:

$$f(\sigma_{ij}, K_i) = 0 \quad (2.55)$$

Donde K_i representa uno o más parámetros de endurecimiento, los cuales cambian durante la deformación plástica y determinan la evolución de la superficie de fluencia. Estos pueden ser escalares o tensores de orden superior. Al inicio de la fluencia, los parámetros

de endurecimiento son cero, y $f(\sigma_{ij}, 0) = f_0(\sigma_{ij})$.

La descripción de cómo la superficie de fluencia cambia con la deformación plástica es llamada regla de endurecimiento.

2.2.5.1. Endurecimiento isotrópico

El endurecimiento isotrópico es cuando la superficie de fluencia permanece en la misma forma, pero se expande cuando el esfuerzo aumenta, tal como se esquematiza en la figura 2.12.

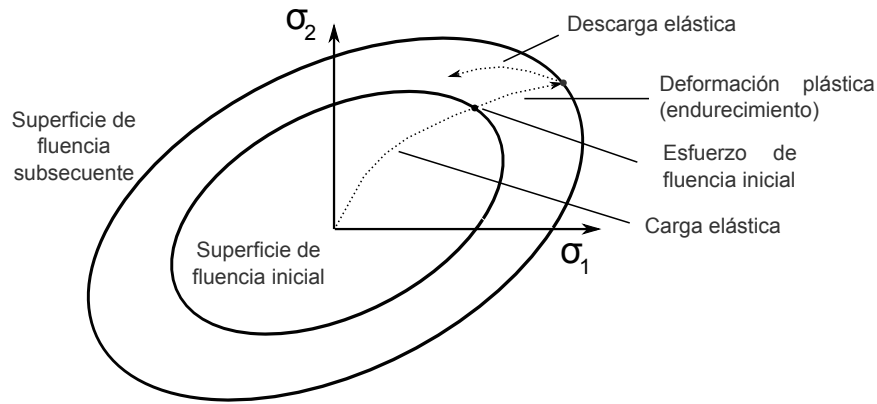


Figura 2.12 Endurecimiento isotrópico

En particular, la función de fluencia toma la forma:

$$f(\sigma_{ij}, K_i) = f_0(\sigma_{ij}) - K = 0 \quad (2.56)$$

La forma de la función de fluencia es especificada por la función de fluencia inicial y su tamaño cambia conforme lo hace el parámetro de endurecimiento K .

2.2.5.2. Endurecimiento cinemático

El modelo isotrópico implica que, si el esfuerzo de fluencia en tensión y compresión son inicialmente iguales, estos permanecen iguales a como la superficie de fluencia se desarrolla con la deformación plástica. Con la finalidad de modelar el efecto de Bauschinger y comportamientos similares, donde un endurecimiento a tensión dará lugar a un ablandamiento en una compresión subsecuente, se puede entonces utilizar la regla de endurecimiento cinemático. En esta la superficie de fluencia permanece de la misma forma y tamaño, pero conlleva una traslación simple en el espacio de esfuerzos, como se muestra en la figura 2.13

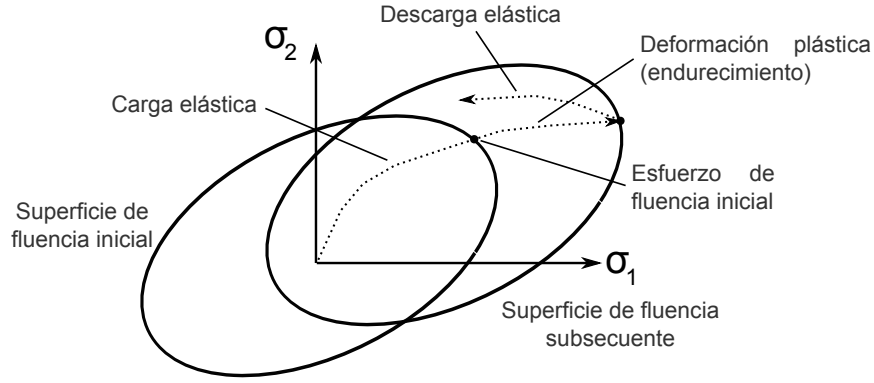


Figura 2.13 Endurecimiento cinemático

La función de fluencia ahora toma la forma general:

$$f(\sigma_{ij}, K_i) = f_0(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \quad (2.57)$$

Aquí el parámetro de endurecimiento es el esfuerzo α_{ij} , conocido como *back-stress*; la superficie de fluencia se desplaza respecto a los ejes del espacio de esfuerzos por α_{ij} , como se muestra en la figura 2.14

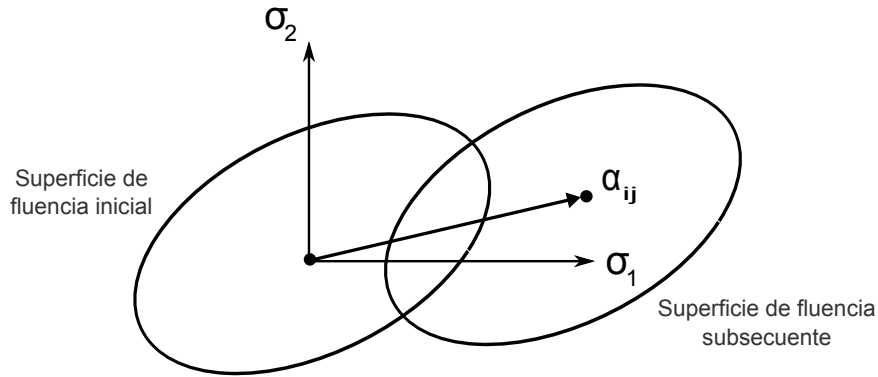


Figura 2.14 Endurecimiento cinemático: desplazamiento por el *back-stress*

2.3. El método de los elementos finitos

2.3.1. Una introducción al método

En el método de elementos finitos se considera un cuerpo continuo o sólido, como un ensamble de pequeñas subdivisiones llamadas elementos finitos. Estos elementos están interconectados a través de nodos comunes. Debido a que la variación real de las variables de campo (desplazamientos, esfuerzos, temperaturas, etc.) se desconoce en el continuo, se asume que la variación de estas en el modelo de elemento finito puede ser aproximada por una simple función. Estas funciones de aproximación, también llamadas modelos

de interpolación, son definidas en términos de los valores nodales de las variables de campo.

En general, el método de los elementos finitos, consiste en formular un sistema de ecuaciones (ecuaciones de equilibrio) para el sistema continuo que ha sido discretizado, donde las incógnitas suelen ser los valores nodales de las variables de campo. Luego, se resuelve este sistema de ecuaciones, con las consideraciones correspondientes a las condiciones de frontera o valores iniciales que simplifiquen el modelo original. La siguiente ecuación muestra, en notación matricial, el sistema de ecuaciones resuelto en una formulación de elemento finito.

$$K \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (2.58)$$

Donde K es la matriz global de rigidez, \mathbf{u} es el vector de desplazamientos nodales y \mathbf{P} el vector de fuerzas nodales en el sistema.

Para problemas lineales, el vector \mathbf{u} puede ser resuelto de manera sencilla, mediante procedimientos básicos del álgebra lineal. Sin embargo, para problemas no lineales, la solución tiene que ser obtenida mediante una secuencia de pasos, en el cual cada uno de estos implica la modificación de la matriz de rigidez K y/o el vector global de carga \mathbf{P} .

En problemas de análisis dinámico, desplazamientos, velocidades, deformaciones, esfuerzos y cargas son dependientes del tiempo. Por ello deben incluirse algunos otros términos, por lo que la ecuación a resolver viene dada por la expresión siguiente:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (2.59)$$

Donde $C\dot{\mathbf{u}}$ representa las fuerzas viscosas, mismas que deben incluirse cuando el sistema esté amortiguado artificialmente y M la matriz de masas.

2.3.2. Discretización de un modelo continuo

En un cuerpo discretizado, su deformación viene definida por un número finito de parámetros que conforman el vector de desplazamientos \mathbf{u} . Un medio continuo tiene infinitas formas posibles de deformarse, independientes unas de otras, ya que cada punto puede desplazarse manteniendo fijos cualquier número finito de los puntos restantes, por grande que sea este último. Luego, la configuración deformada es una función vectorial \mathbf{u} , que indica cuáles son las deformaciones de cualquier punto, y que tiene tres componentes escalares: [16]

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

Esta función es la solución de la ecuación diferencial que gobierna el problema, y si éste está bien planteado, cumplirá las condiciones de contorno impuestas, pero en principio no

puede asegurarse que esta función tenga una expresión analítica manejable, ni siquiera que pueda calcularse. Por lo tanto la función \mathbf{u} no podrá conocerse en general.

Para resolver este problema el método de los elementos finitos recurre a la hipótesis de discretización, que se basa en lo siguiente: [17]

- El continuo se divide por medio de líneas o superficies imaginarias, en un número de elementos finitos.
- Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos nodos, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.
- Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
- Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
- Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos como la descrita en la ecuación 2.58.

Esta hipótesis de discretización es el pilar básico del método de los elementos finitos, el cual es un método discretizante, de parámetros distribuidos. La aproximación descrita se conoce como la formulación en desplazamiento. [16]

Primero, no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamiento escogidas satisfacen las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente, esta condición de compatibilidad puede no cumplirse en el contorno de los elementos. En segundo lugar, al concentrar las fuerzas equivalentes en los nodos, las condiciones de equilibrio sólo se cumplirán para el conjunto del continuo. Normalmente ocurrirá que tales condiciones no se cumplirán en zonas localizadas dentro y en el contorno de cada elemento. [17]

Como consecuencia, será responsabilidad del ingeniero o analista seleccionar la forma de los elementos y de las funciones de desplazamiento para cada paso particular, y aquí el grado de aproximación a la solución del problema dependerá de la habilidad, experiencia e ingenio del mismo.

Actualmente existen una multitud de entornos de simulación por elementos finitos que facilitan en gran medida la tarea de discretización de un modelo sólido, estos incorporan un

preprocesador que se encarga de ejecutar las tareas de mallado/discretización, asignación de propiedades y selección del modelo constitutivo, entre otras. Pero aquí, nuevamente es vital el criterio de quien realiza el modelo, puesto que debe incluir datos de ingeniería coherentes y desarrollar un modelo adecuado al fenómeno físico representado.

2.3.3. Teoría de contactos

Una dificultad particular para análisis no lineales son los contactos entre dos o más cuerpos. Los problemas de contactos abarcan desde pequeños desplazamientos con nula fricción hasta condiciones de fricción en grandes deformaciones. Ahora, es lógico que las no linealidades de un determinado problema no sólo se deban a las geometrías y el material, sino incluso a las derivadas de los contactos o interacciones entre elementos. [18]

Considere N cuerpos que están en contacto en el tiempo t . Sea tS_c el área total de contacto por cada cuerpo L , con $L = 1, \dots, N$; entonces el principio del trabajo virtual para N cuerpos en el tiempo t está dado por:

$$\sum_{L=1}^N \left\{ \int_{tV} \tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^tV \right\} = \sum_{L=1}^N \left\{ \int_{tV} \delta u_i^t f_i^B d^tV + \int_{tS_f} \delta u_i^{st} f_i^S d^tS \right\} + \sum_{L=1}^N \int_{tS_c} \delta u_i^{ct} f_i^c d^tV S \quad (2.61)$$

Donde la parte entre llaves corresponde a los términos usuales de la formulación de elementos finitos, y la última corresponde a la contribución de las fuerzas de contacto. Se puede notar que el efecto de las fuerzas de contacto se incluye como una contribución en las tracciones aplicadas externamente.

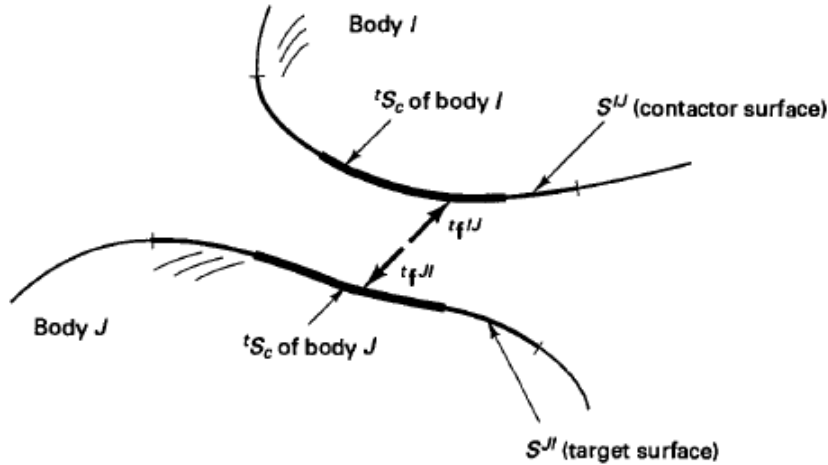


Figura 2.15 Esquema del contacto entre dos cuerpos

En la figura 2.15 muestra un esquema para el caso de dos cuerpos, denotados como I y J respectivamente. Se asume que cada cuerpo está sujeto de modo que si no hay contacto no exista un movimiento de cuerpo rígido. Sea ${}^tF^{IJ}$ el vector de las fuerzas de la superficie de

contacto en el cuerpo I debido al contacto con el cuerpo J , entonces ${}^t f^{IJ} = -{}^t f^{JI}$. Por lo tanto, el trabajo virtual debido a las fuerzas de contacto en 2.61 puede ser escrito como:

$$\int_{S^{IJ}} \delta u_i^{It} f_i^{IJ} dS^{IJ} + \int_{S^{JI}} \delta u_i^{Jt} f_i^{JI} dS^{JI} = \int_{S^{IJ}} \delta u_i^{IJt} f_i^{IJ} dS^{IJ} \quad (2.62)$$

Donde δu_i^I y δu_i^J son las componentes del desplazamiento virtual en las superficies de contacto de los cuerpos I y J , respectivamente, y:

$$\delta u_i^{IJ} = \delta u_i^I - \delta u_i^J \quad (2.63)$$

Comúnmente se llama *pares de contacto* a las superficies S^{IJ} y S^{JI} , mismas que no necesariamente son del mismo tamaño. Es conveniente llamar a S^{IJ} la *superficie contactora* y a S^{JI} la *superficie objetivo*.

Tomando como referencia la figura 2.16, sea \mathbf{n} el vector unitario normal a S^{JI} y sea \mathbf{s} un vector unitario de tal manera que \mathbf{n} y \mathbf{s} formen un base ortonormal derecha. Se puede descomponer la fuerza de contacto ${}^t f^{IJ}$ actuando en S^{IJ} en sus componentes normal y tangencial correspondientes a \mathbf{n} y \mathbf{s} en S^{JI} ,

$${}^t f^{IJ} = \lambda \mathbf{n} + t \mathbf{s} \quad (2.64)$$

Donde λ y t son las componentes normal y tangencial de la fuerza. Por consiguiente:

$$\lambda = ({}^t f^{IJ})^T \mathbf{n}; \quad t = ({}^t f^{IJ})^T \mathbf{s} \quad (2.65)$$

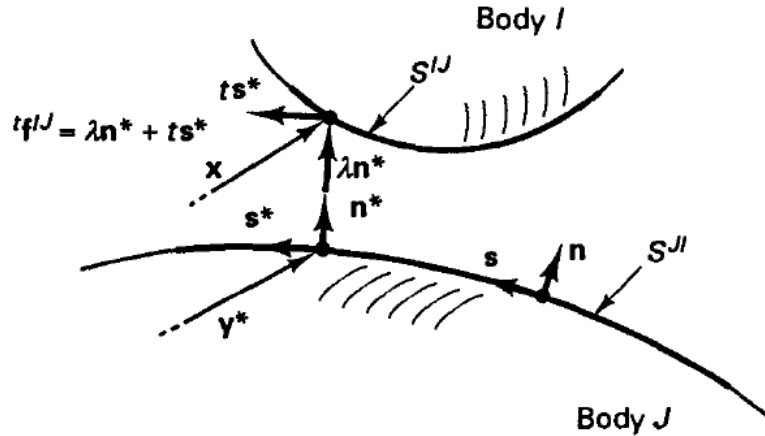


Figura 2.16 Esquema del análisis de contactos

Para definir el valor actual de \mathbf{n} , \mathbf{s} que se utiliza en los cálculos de contacto, considere un punto genérico \mathbf{x} en S^{IJ} y sea $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)$ el punto en S^{JI} que satisface: [18]

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)\|_2 = \min \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\} \quad (2.66)$$

La distancia de \mathbf{x} a S^{JI} está dada por:

$$g(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{n}^* \quad (2.67)$$

Donde \mathbf{n}^* es el vector normal unitario que se utilizó en $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)$ y \mathbf{n}^* , \mathbf{s}^* son usadas en 2.64 correspondiendo al punto \mathbf{x} . La función g es la función de espaciamiento (*gap function*) para el par de la superficie de contacto.

Con estas definiciones, las condiciones para el contacto normal puede ser escrito como:

$$g \geq 0; \quad \lambda \geq 0; \quad g\lambda = 0 \quad (2.68)$$

Donde la última ecuación expresa el hecho que si $g > 0$, entonces se tendrá $\lambda = 0$, y viceversa.

Para incluir las condiciones de fricción, se asume que la ley de Coulomb se cumple en cada nodo de la superficie de contacto y que μ es el coeficiente de fricción. Esta suposición significa por supuesto que los efectos friccionales son incluidos de una forma simplificada. Primero, se define una variable adimensional τ dada por:

$$\tau = \frac{t}{\mu\lambda} \quad (2.69)$$

donde $\mu\lambda$ es la resistencia friccional, y la magnitud de la velocidad tangencial relativa viene expresada por:

$$\dot{u}(\mathbf{x}, t) = (\dot{\mathbf{u}}^J|_{\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)} - \dot{\mathbf{u}}^I|_{(\mathbf{x}, t)}) \cdot \mathbf{s}^* \quad (2.70)$$

Correspondiente a la vector tangencial unitario \mathbf{s} en $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)$. Por lo tanto, $\dot{u}(\mathbf{x}, t)\mathbf{s}^*$ es la velocidad tangencial en el tiempo t del punto material en \mathbf{y}^* relativo al punto material en \mathbf{x} . Con estas definiciones de la ley de Coulomb se tienen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |\tau| \leq 1 \\ |\tau| < 1 \text{ implica que } \dot{u} = 0 \\ |\tau| = 1 \text{ implica que } \text{sign}(\dot{u}) = \text{sign}(\tau) \end{cases} \quad (2.71)$$

2.3.4. Integración implícita vs explícita

Existen, de manera general, dos tipos de métodos para resolver ecuaciones diferenciales en problemas dependientes del tiempo: integración implícita e integración explícita. El método implícito de integración en el tiempo puede ser expresado como: [19]

$$u_{n+1} = f(\dot{u}_{n+1}, \ddot{u}_{n+1}, u_n, \dot{u}_n, \dots) \quad (2.72)$$

y el método explícito como:

$$u_{n+1} = f(u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n, u_{n-1}, \dot{u}_{n-1}, \dots) \quad (2.73)$$

El método implícito requiere conocer las derivadas temporales en el paso $n+1$, las cuales son desconocidas, mientras el método explícito está basado en los valores conocidos en el

paso n . Si el problema es no lineal, el método implícito necesita un procedimiento iterativo para determinar los nuevos desplazamientos. Con el método explícito los nuevos desplazamientos se determinan directamente de los valores conocidos en pasos previos, evitando el uso de iteraciones adicionales. [19]

La simulación de estampados se caracteriza por las diversas no linealidades presentes, debidas al material, y a los contactos entre los diversos cuerpos analizados. Sin embargo, usando la integración explícita estas no linealidades pueden ser tratadas sin mayores problemas. Por ello, en la mayoría de las simulaciones de estampados suelen ser conveniente el uso de algoritmos de integración explícita.

2.3.5. Implementación del método en problemas de ingeniería

El método del elemento finito es utilizado para resolver problemas físicos en análisis de ingeniería y diseño. La figura 2.17 esquematiza el proceso del análisis por elementos finitos. El problema físico típicamente involucra una estructura o ciertos elementos mecánicos sometidos a condiciones de cargas establecidas. La *conversión* del problema físico a un modelo matemático correspondiente requiere que se hagan consideraciones para la simplificación y resolución de las ecuaciones diferenciales resultantes. El análisis de elementos finitos resuelve ese modelo matemático resultante. Puesto que la solución por elemento finito involucra un procedimiento por técnicas de análisis numérico es necesario evaluar la exactitud de la solución. Si no existe un criterio de exactitud o punto de comparación, la solución numérica debe repetirse refinando algunos parámetros (como la densidad de malla) hasta que las variaciones entre soluciones sean aceptables.

Está claro que la solución por elementos finitos resolvera sólo el modelo matemático establecido y la respuesta del sistema reflejará las consideraciones o simplificaciones realizadas a este. La selección de un modelo matemático apropiado es crucial y determina completamente la percepción actual del fenómeno físico que puede obtenerse mediante el análisis. Luego, es claro que, naturalmente, la respuesta de problemas solucionados mediante técnicas de elemento finito no corresponderán exactamente con la situación real, dado que es casi imposible reproducir las condiciones de un entorno tomando en cuenta todas las variables que inciden en el proceso, en la mayoría de los casos se tendrá una comparación basada en la correlación o correspondencia entre la respuesta matemática y la experimental.

Una vez que el modelo matemático ha sido resuelto y los resultados han sido interpretados, se puede entonces considerar 'la refinación o redefinición del modelo matemático para considerar otros factores que permitan obtener una solución más ajustada a la realidad.

Para definir la confiabilidad y efectividad de un modelo seleccionado debemos pensar en un modelo matemático muy completo del problema físico y medir la respuesta de nuestro modelo seleccionado contra la respuesta del modelo completo. En general, un modelo matemático completo incluye una descripción tridimensional del problema e incluye efectos no-lineales.

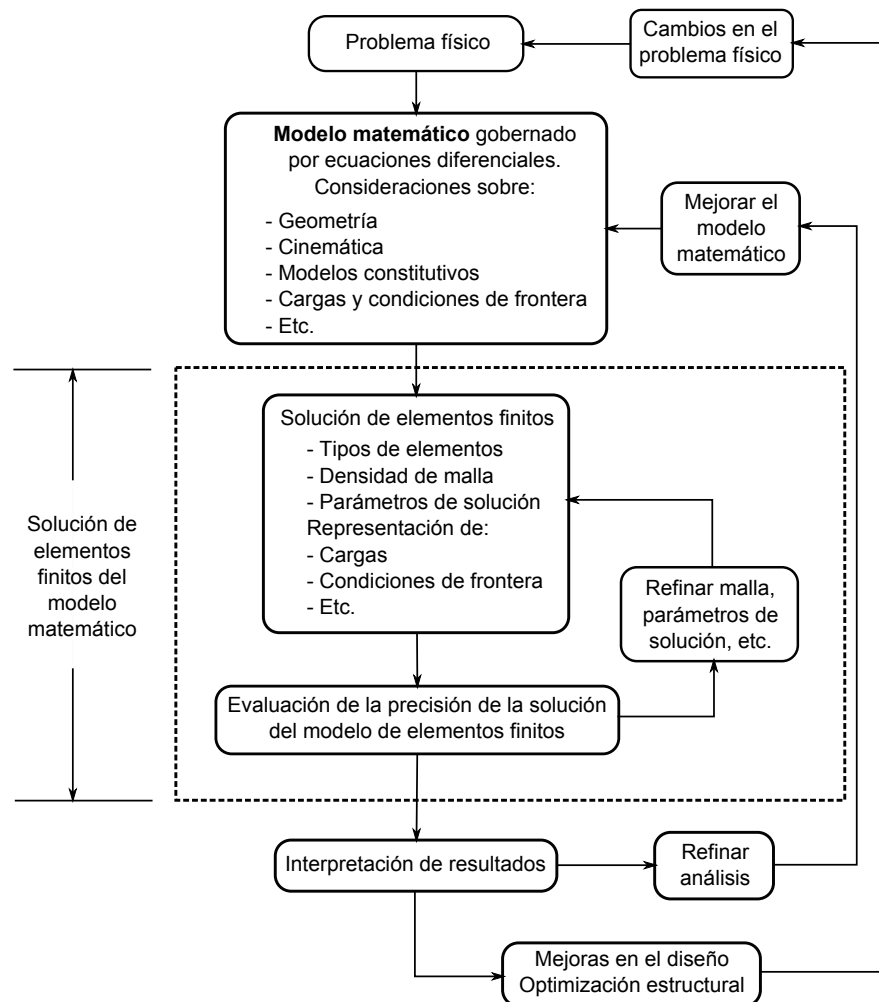


Figura 2.17 Diagrama de la implementación del FEM en la solución de problemas de ingeniería

Para evaluar el resultado obtenido por la solución de un modelo matemático seleccionado, puede ser necesario también resolver problemas de modelado matemático de orden superior, e incluso ir incluyendo cada vez factores más complejos. Por ejemplo, una viga estructural puede primero analizarse usando la teoría de la viga de Bernoulli, luego usando la teoría de una viga de Timoshenko, siguiendo con una análisis bidimensional por la teoría de esfuerzo plano, y finalmente utilizando un modelo tridimensional continuo, y en cada caso la posibilidad de incluir efectos no lineales.

Claramente con esa jerarquía de modelos, enunciada en el párrafo anterior, el análisis incluirá cada vez respuestas más complejas, incrementando consecuentemente el costo de la solución. Es conocido que un análisis tridimensional es alrededor de un orden de

magnitud más costoso que el caso bidimensional, tanto en recursos computacionales como en el tiempo de ingeniería realizada.

2.4. Extensometría

La extensometría es la técnica más utilizada para el análisis experimental de deformaciones. Su fundamento básico es la variación de la resistencia producida en un hilo de conductor cuando se alarga o contrae.

Una galga extensiométrica consiste en un alambre muy fino, o más comunmente, una hoja metálica dispuesta en forma de rejilla. El patrón de rejilla maximiza la cantidad de alambre metálico u hoja sometida a deformación en la dirección paralela (ver figura 2.18). La sección transversal de la rejilla es minimizada para reducir los efectos de las deformaciones por cortante y de Poisson. La rejilla está unida a una base delgada, llamada soporte, la cual está unida directamente a la probeta. Por lo tanto, la deformación experimentada por la probeta es transferida directamente a la galga extensiométrica, la cual responde con una variación lineal en la resistencia eléctrica. Las galgas están disponibles comercialmente, con valores de resistencia nominal de 30 a 3000 Ω , siendo 120, 350 y 1000 Ω los valores más comunes. [20]

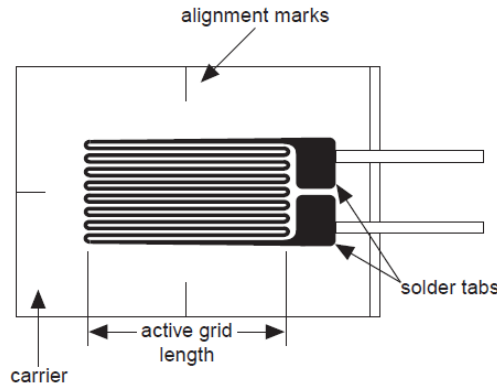


Figura 2.18 Galga extensiométrica

Es muy importante que la galga extensiométrica sea montada apropiadamente en la probeta, así se asegura que la deformación se transfiere de manera correcta.

Un parámetro fundamental de la galga extensiométrica es su sensibilidad a la deformación, expresada cuantitativamente como el factor de galga (GF). El factor de galga es definido como la relación de la variación fraccional en la resistencia eléctrica y la variación fraccional en longitud (deformación): [20]

$$GF = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon} \quad (2.74)$$

El factor de galga para galgas extensiométricas es típicamente alrededor de 2. [20]

Idealmente se podría pensar que la galga cambia solamente por efecto de una deformación inducida. Sin embargo, el material de la galga, así como el propio de la probeta, también responden a cambios por temperatura. Así, es importante tener en cuenta la compensación por temperatura y la sensibilidad de la galga, que normalmente proporciona el fabricante.

En la práctica, la medición de deformaciones raramente involucra cantidades mayores a unas milideformaciones ($\varepsilon \times 10^{-3}$). Por lo tanto, la medición de las deformaciones requiere una medición precisa de pequeñas variaciones en la resistencia. [20]

2.4.1. El puente de Wheatstone

Para medir pequeños cambios en la resistencia, y compensar por la sensibilidad a la temperatura, las galgas normalmente se utilizan en una configuración de puente con una fuente de voltaje o corriente de excitación. El puente de Wheatstone, mostrado en la figura 2.19, consiste en cuatro *ramificaciones* con un voltaje de excitación, V_{EX} , que es aplicado a través del puente. [20]

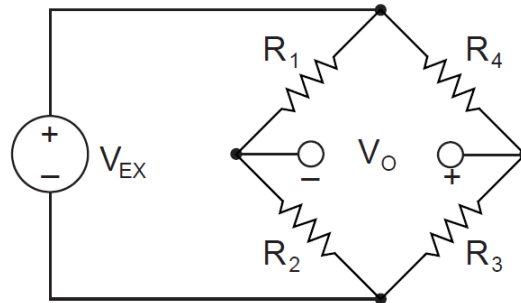


Figura 2.19 Puente de Wheatstone

El voltaje de salida del puente, V_O , está dado por:

$$V_O = \left[\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] \cdot V_{EX} \quad (2.75)$$

De esta ecuación, aparentemente cuando $R_1/R_2 = R_3/R_4$, el voltaje de salida V_O será cero. Bajo estas condiciones, el puente se dice que está balanceado. Cualquier cambio en la resistencia en cualquiera de las ramificaciones del puente resultará en un voltaje de salida diferente de cero. [20]

Por lo tanto, si reemplazamos R_4 en la figura 2.19 con una galga activa, cualquier cambio en la resistencia de la galga producirá un desbalance en el puente y producirá un voltaje de salida diferente de cero. Si la resistencia nominal de la galga es diseñada como

R_G , entonces el cambio inducido por deformación en resistencia, ΔR , puede ser expresado como $\Delta R = R_G \cdot GF \cdot \varepsilon$. Asumiendo que $R_1 = R_2$ y $R_3 = R_G$, la ecuación del puente puede ser reescrita para expresar V_O/V_{EX} como una función de la deformación, como se expresa en la ecuación 2.76. Note la presencia del término $1/(1 + GF \cdot \varepsilon/2)$ que indica la no linealidad de la salida del cuarto de puente con respecto a la deformación. [20]

$$\frac{V_O}{V_{EX}} = -\frac{GF \cdot \varepsilon}{4} \left(\frac{1}{1 + GF \cdot \varepsilon/2} \right) \quad (2.76)$$

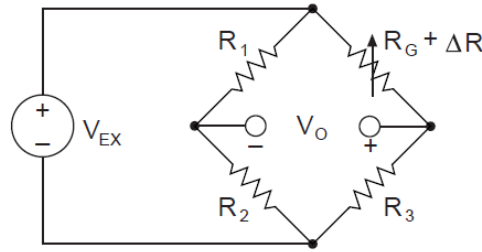


Figura 2.20 Cuarto de puente

Utilizando dos galgas extensiométricas en el puente, el efecto de la temperatura puede ser evitado. Por ejemplo, en la figura 2.21 se muestra una configuración donde una galga es activa ($R_G + \Delta R$), y una segunda galga es colocada de manera transversal a la deformación aplicada. Por lo tanto, la deformación tiene un pequeño efecto en la segunda galga, llamada galga *dummy*. Sin embargo, cualquier cambio en la temperatura afectará a ambas galgas de la misma manera. Dado que los cambios debidos a la temperatura son idénticos en ambas galgas, la relación de estas resistencias no cambia, el voltaje V_O no cambia, y los efectos de los cambios por temperatura son minimizados. [20]

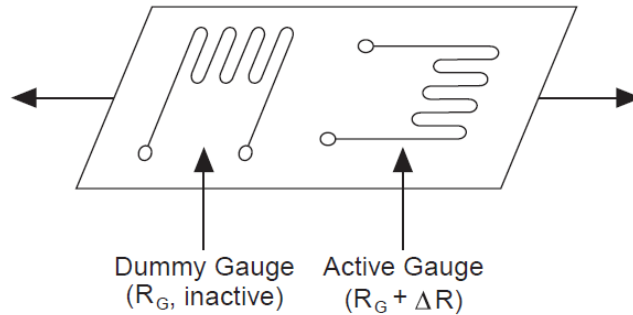


Figura 2.21 Uso de una galga *dummy* para eliminar los efectos de la temperatura

Alternativamente, se puede doblar la sensibilidad a la deformación del puente haciendo ambas galgas activas, aunque en direcciones diferentes. La figura 2.22 muestra un viga a

flexión con un puente montado en tensión ($R_G + \Delta R$) y el otro en compresión ($R_G - \Delta R$). Esta configuración de medio puente produce un voltaje de salida que es lineal y aproximadamente el doble de la salida del circuito de cuarto de puente. [20]

$$\frac{V_O}{V_{EX}} = -\frac{GF \cdot \varepsilon}{2} \quad (2.77)$$

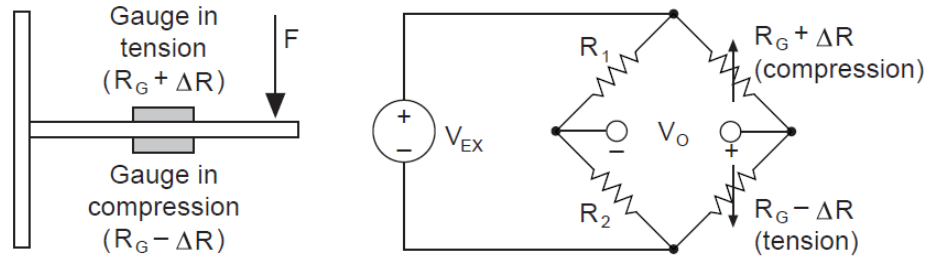


Figura 2.22 Circuito de medio puente

Finalmente, se puede incrementar la sensibilidad del circuito haciendo que las cuatro ramificaciones del puente sean galgas activas, y colocar dos galgas en tensión y dos en compresión. El circuito de puente completo se muestra en la figura 2.23. [20]

$$\frac{V_O}{V_{EX}} = -GF \cdot \varepsilon \quad (2.78)$$

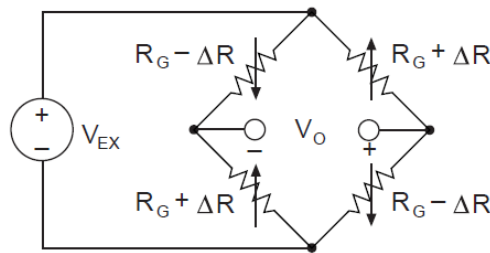


Figura 2.23 Circuito de puente completo

Las ecuaciones anteriores para el circuito del puente de Wheatstone asumen un puente inicialmente balanceado que genera una salida cero cuando no se aplica una deformación. Sin embargo, en la práctica, las tolerancias de las resistencias y la deformación inducida por la instrumentación generarán un voltaje inicial. Normalmente eso se soluciona mediante una compensación, tomando como cero el voltaje inicial.

2.4.2. Arreglos de galgas extensiométricas

La galga extensiométrica debe ser montada en la superficie de la probeta o espécimen, mediante el procedimiento y adhesivo adecuado. El estado bidimensional de esfuerzos existentes en la superficie del espécimen pueden ser expresados en términos de los tres componentes cartesianos de la deformación utilizando la ley de Hooke. En general es necesario medir tres direcciones de deformación en un punto para expresar de manera completa el campo de deformaciones. Sin embargo, en ciertos casos, el estado de deformaciones puede ser establecido con una sola galga. En general, pueden considerarse los casos que a continuación se describen.

Estado de esfuerzo uniaxial

En este caso, como se muestra en la figura 2.24, sólo existe un esfuerzo en la dirección axial horizontal σ_{xx} . Entonces, sólo es necesario utilizar una galga extensiométrica dispuesta en la dirección coincidente al eje sobre el cual está aplicado el esfuerzo. El esfuerzo estará dado por:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (2.79)$$

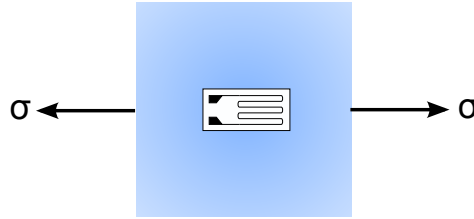


Figura 2.24 Estado uniaxial de esfuerzo

Estado de esfuerzo isotrópico

Un estado de esfuerzo isotrópico implica que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y τ_{xy} . Para determinar el estado de esfuerzo se puede colocar una sola galga en cualquier dirección, como se muestra en la figura 2.25 y la magnitud del esfuerzo vendrá determinada por siguiente expresión:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{E\varepsilon}{1 - \nu} \quad (2.80)$$

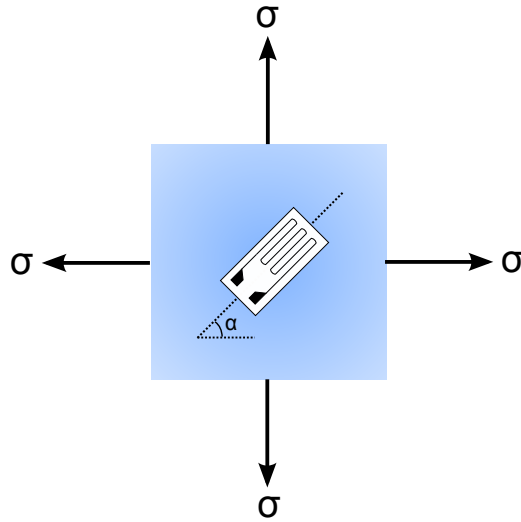


Figura 2.25 Estado de esfuerzo isotrópico

Estado de esfuerzo biaxial

Caso 1. Si se desconoce el estado de esfuerzo, pero las direcciones de los esfuerzos principales son conocidas, entonces se puede utilizar una roseta rectangular de dos elementos, donde estas coincidan con las direcciones principales, tal como se muestra en el esquema de la figura 2.26. Se obtienen las deformaciones principales ε_1 y ε_2 y los esfuerzos correspondientes se calculan usando las ecuaciones 2.81 y 2.82 [21]

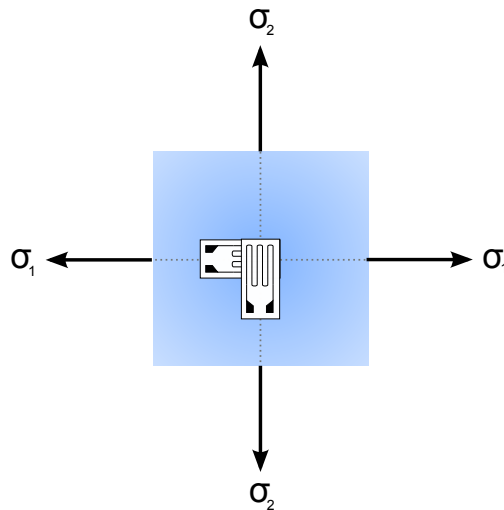


Figura 2.26 Estado de esfuerzo biaxial, direcciones principales conocidas

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \quad (2.81)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \quad (2.82)$$

Estas relaciones proporcionan el estado de esfuerzo, si se conocen, a priori, las direcciones principales.

Caso 2. Si se desconocen las direcciones principales, entonces es necesario utilizar una roseta de tres elementos. Para mostrar que tres elementos son suficientes, considere las tres galgas colocadas a lo largo de los ejes A, B y C, como se muestra en la figura 2.27.

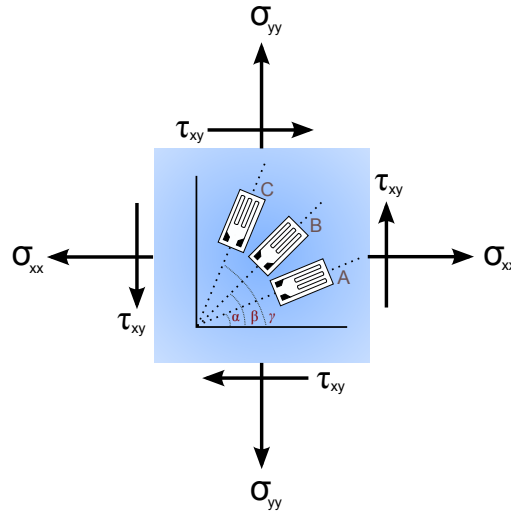


Figura 2.27 Estado de esfuerzo biaxial

Entonces las siguientes ecuaciones de transformación son válidas para las lecturas ε_A , ε_B y ε_C de las galgas respectivas:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy} \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \cos \alpha \sin \alpha \quad (2.83)$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_{xx} \cos^2 \beta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \cos \beta \sin \beta \quad (2.84)$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_{xx} \cos^2 \gamma + \varepsilon_{yy} \sin^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \gamma \sin \gamma \quad (2.85)$$

Los componentes cartesianos de la deformación ε_{xx} , ε_{yy} y γ_{xy} pueden ser determinados resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas resultante. Las deformaciones y direcciones principales pueden ser calculadas utilizando

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (2.86)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (2.87)$$

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \quad (2.88)$$

La solución de la ecuación 2.88 proporciona dos valores para el ángulo θ . Estos son θ_1 y θ_2 , que corresponden al ángulo medido del eje x a los ejes correspondientes de las deformaciones principales ε_1 y ε_2 respectivamente.

Los esfuerzos principales pueden ser calculados a partir de las ecuaciones 2.81 y 2.82. En la práctica, una roseta de tres elementos con ángulos específicos son utilizadas para realizar lecturas que definen de manera completa el estado de esfuerzo y deformaciones.

Metodología aplicada

3.1. Descripción de la metodología aplicada

BORRADOR

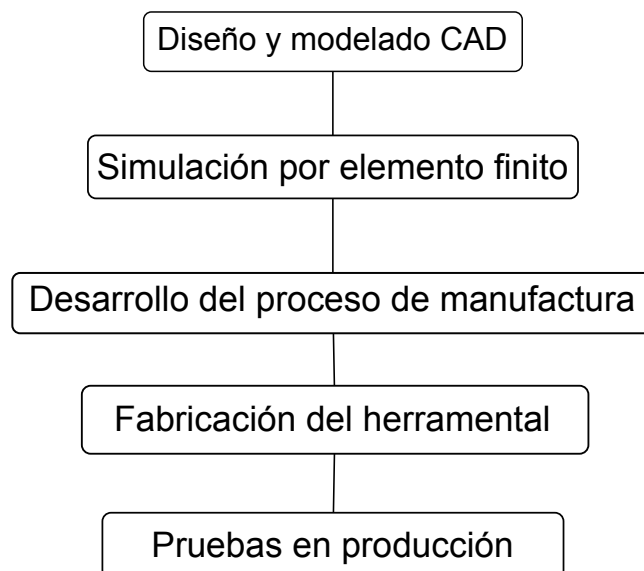


Figura 3.1 Metodología del proyecto

3.2. Análisis por elementos finitos

3.2.1. El proceso a simular

En el capítulo 1 se ha descrito someramente el proceso de formado que se requiere simular. Ahora, en lo subsiguiente, se detallan en mayor grado las características relativas al proceso, materiales utilizados y condiciones de operación que influyen en este.

El tubo interior mostrado en la figura 3.2a se utiliza en un buje como el mostrado en la figura 3.2b, el cual forma parte de un sistema de muelles parabólicos similar al de 3.3.

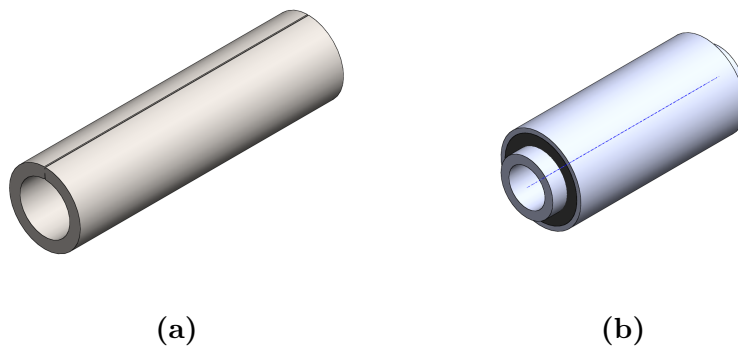


Figura 3.2 a) Modelo CAD del tubo interior manufacturado por estampado b) Modelo CAD del buje RB-131

Para fabricar el tubo interior 3.2a se utiliza un troquel compuesto o semi-progresivo de dos etapas, a saber: un doblado en U y un cerrado o doblado en O, mismo cuyo modelo CAD se muestra en la figura 3.4. El troquel tiene como materia de entrada una placa metálica (*blank*) rectangular de acero AISI 1018, con un largo de 3 in y un ancho de 2.125 in, con un espesor de 0.12 in (ver figura ??). El blank tiene además dos chaflanes en la dirección axial, sobre una de las caras, mismos que sirven para permitir un cierre de tubo adecuado.



Figura 3.3 Muelle parabólico

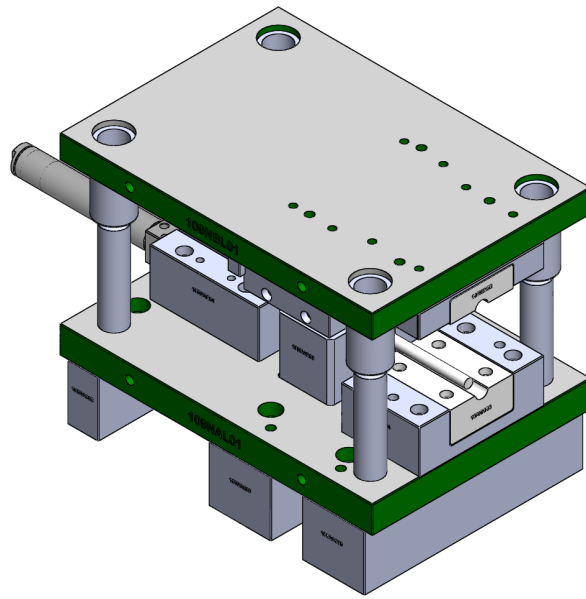


Figura 3.4 Vista completa del troquel

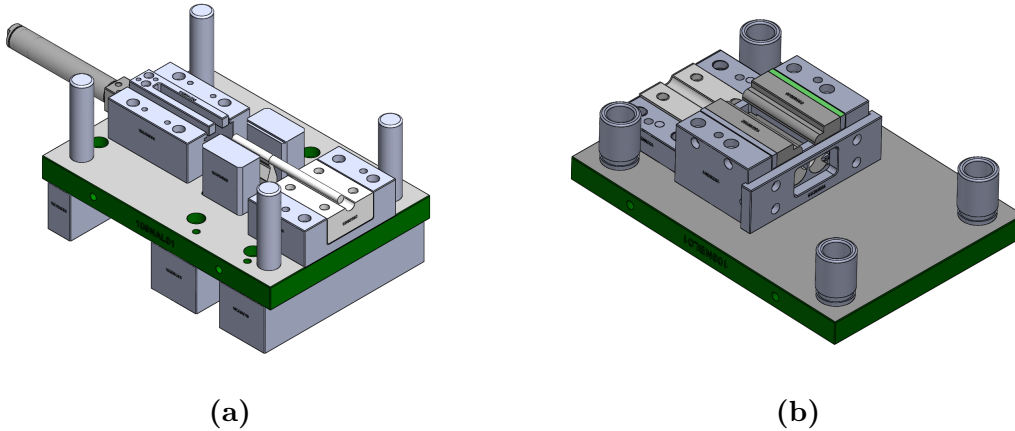


Figura 3.5 Partes a) inferior y b) superior del troquel

3.2.2. Modelo constitutivo

Se utilizó un modelo de tipo *Piecewise Linear Plasticity*, el cual es un modelo multilíneal que permite utilizar una curva esfuerzo-deformación y la dependencia de la tasa de deformación como datos de entrada para definir el comportamiento plástico del material. Para cuantificar la tasa de deformación este modelo utiliza la relación de Cowper-Symonds.

$$\sigma_y(\varepsilon_{eff}^P, \dot{\varepsilon}_{eff}^P) = \sigma_y(\varepsilon_{eff}^P) \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eff}^P}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (3.2)$$

En los componentes del troquel se utilizó un modelo rígido, para el cual sólo es necesario especificar las propiedades elásticas. Los componentes rígidos, normalmente, permiten la aplicación de condiciones de desplazamiento utilizando el identificador (ID) de la parte, además se pueden asignar propiedades de inercia o velocidades iniciales. En este caso, no se especificaron propiedades adicionales, lo cual implica que ANSYS/LS-DYNA calcule automáticamente las propiedades inerciales basadas en el modelo de elemento finito.

Para crear los materiales de cada uno de los componentes se utilizó un pequeño *script*, que se muestra a continuación:

```
! Para el formador inferior
MP,EX,2,29E6 ! psi
MP,NUXY,2,0.3 !
MP,DENS,2,0.00073 ! lbf s^2 / in^4
EDMP,rigid,2,7,7

! Formador superior izquierdo
MP,EX,3,29E6 ! psi
MP,NUXY,3,0.3 !
MP,DENS,3,0.00073 ! lbf s^2 / in^4
EDMP,rigid,3,6,7

! Formador superior derecho
MP,EX,4,29E6 ! psi
MP,NUXY,4,0.3 !
MP,DENS,4,0.00073 ! lbf s^2 / in^4
EDMP,rigid,4,6,7

! Leva izquierda
MP,EX,5,29E6 ! psi
MP,NUXY,5,0.3 !
MP,DENS,5,0.00073 ! lbf s^2 / in^4
EDMP,rigid,5,6,4

! Leva derecha
MP,EX,6,29E6 ! psi
MP,NUXY,6,0.3 !
MP,DENS,6,0.00073 ! lbf s^2 / in^4
EDMP,rigid,6,6,4
```

```

! Para el blank
! Propiedades elásticas
MP,EX,1,29E6 ! psi
MP,NUXY,1,0.3 !
MP,DENS,1,0.00073 ! lbf s^2 / in^4

! define array for effective plastic true strain data
*dim,strn,,6
! define array for effective total true stress data
*dim, strs,,6

! strain (in/in)
strn(1)= 0.0, 0.0293, 0.0772, 0.1562, 0.2356, 0.344943

! stress (psi)
strs(1)=52489.4,60585.8,70710,76809.3,80244.3,82574.1

! curve #1: abscissa=strain & ordinate=stress
edcurve,add,1,strn,strs

! specify power law #8 for material (MAT) #1
TB,PLAW,1,,,8 ! Piecewise Linear Plasticity

! use load curve #1 for stress/strain data
TBDATA,1,52e3 ! Yield stress (psi)
TBDATA,3,.75 ! Failure strain
TBDATA,4,40.0 ! C (strain rate parameter)
TBDATA,5,0.1 ! P (strain rate parameter)
TBDATA,6,1 ! Load Curve ID

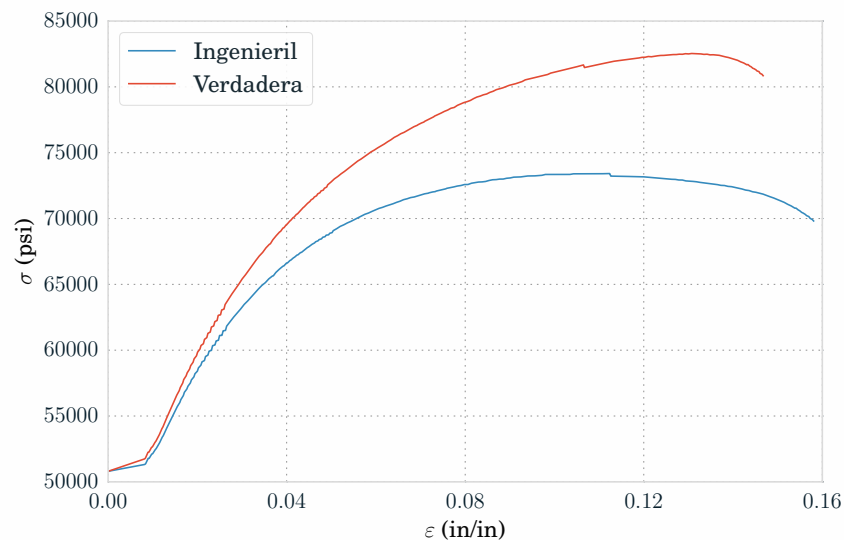
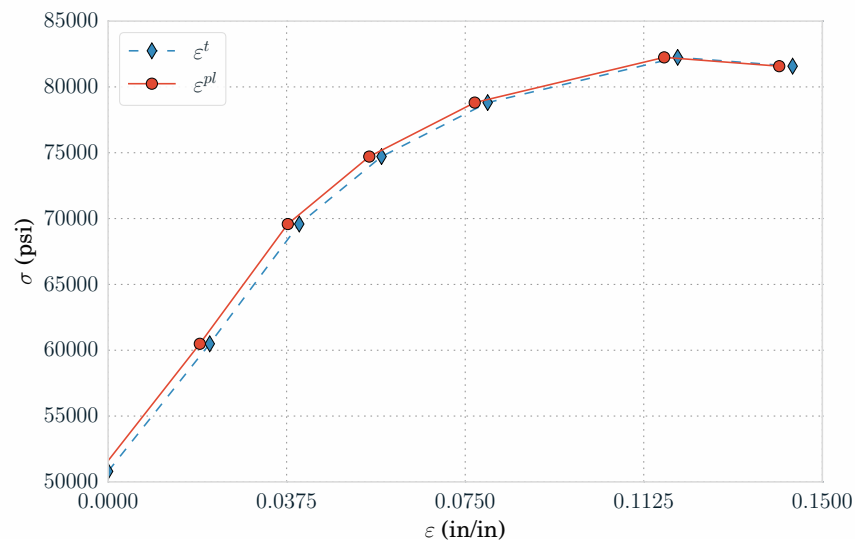
```

Tabla 3.1 Propiedades del acero AISI 1018

Propiedad	Magnitud (unidades)
Módulo elástico	29 000 (ksi)
Densidad	0.00073 ($lbf s^2 / in^4$)
Esfuerzo de fluencia	52 000 (psi)
Coefficiente de Poisson	0.3
C	40 (s^{-1})
P	5

Tabla 3.2 Conversión de esfuerzos y deformaciones

ε_{nom}	σ_{nom} (psi)	ε_t	σ_t (psi)	ε_{pl}
0.0084	51376.41	0.0084	51808.49	0.0000
0.0224	59624.27	0.0221	60957.47	0.0200
0.0418	67059.05	0.0409	69858.77	0.0385
0.0607	70769.55	0.0589	75063.85	0.0563
0.0846	72814.73	0.0812	78971.94	0.0785
0.1287	72924.09	0.1210	82305.77	0.1182
0.1554	70462.94	0.1444	81412.18	0.1416

**Figura 3.6** Curvas de esfuerzo-deformación, ingenieril y verdadera, del acero AISI 1018**Figura 3.7** Curva esfuerzo-deformación ingresada en ANSYS/LS-DYNA

3.2.3. Mallado

3.2.3.1. Primer ensamble

Para el mallado de la pieza de trabajo se utilizó el elemento **SOLID164** (ver figura 3.8), el cual es un sólido de 8 nodos, que puede ser utilizado con el modelo constitutivo descrito en la sección anterior. Este elemento utiliza, por defecto, integración reducida (un punto de integración), el cual tiene la ventaja de reducir el tiempo de cómputo y adiciona robustez para el caso de grandes deformaciones. [22]

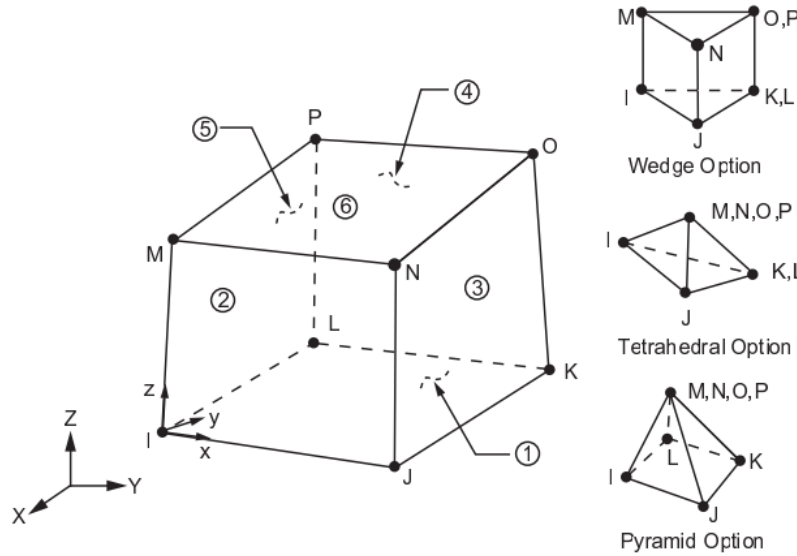


Figura 3.8 Elemento SOLID164

En los componentes del troquel se mallaron solamente las áreas que están en contacto directo con el *blank* durante el proceso de formado, con la finalidad de reducir el número de elementos del modelo. Se utilizaron elementos **SHELL163** para realizar el mallado. Los parámetros requeridos para este elemento se indican en la tabla 3.4

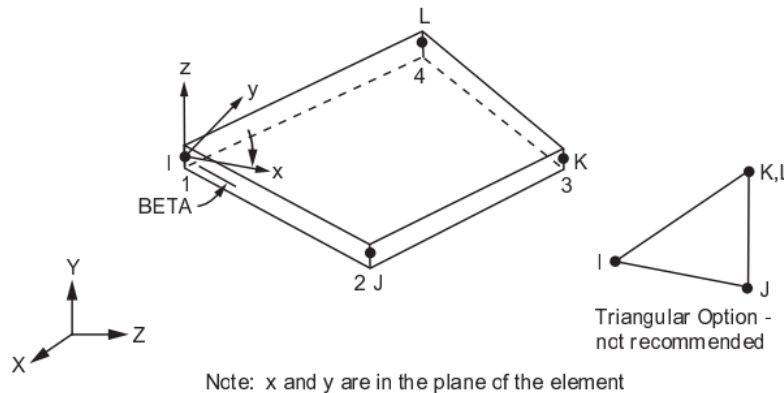


Figura 3.9 Elemento SHELL163

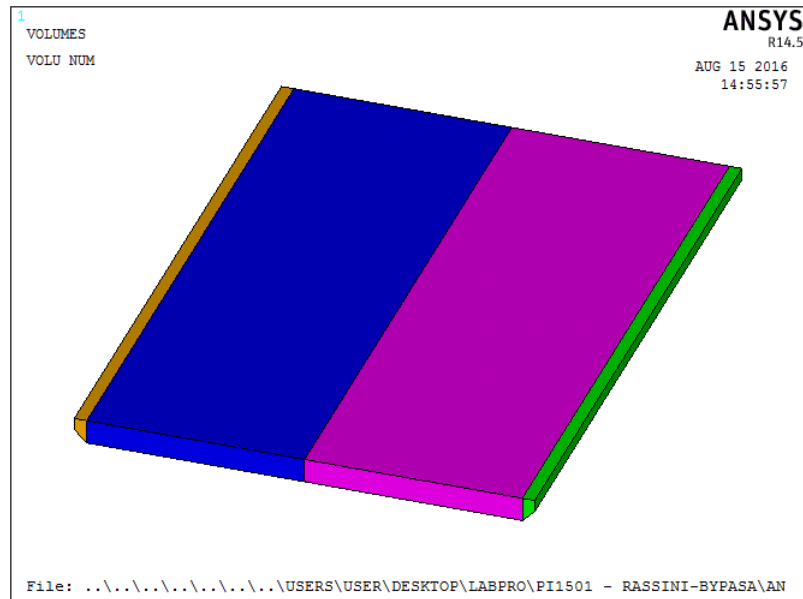
Tabla 3.3 Parámetros utilizados para el elemento SHELL163

Parámetros	Valores
General shell formulation	Belytschko-Tsay
Membrane element formulation	Belytschko-Tsay Membrane
Triangular shell formulation	C^0 triangular shell

Tabla 3.4 Constantes reales para el elemento SHELL163

Parámetros	Valores
Factor cortante (SHRF)	5/6
Puntos de integración (NIP)	1
Espesor en nodo 1 (T1)	0.2
Espesor en nodo 2 (T2)	0.2
Espesor en nodo 3 (T3)	0.2
Espesor en nodo 4 (T4)	0.2

En el *blank* se utilizó un tamaño global de elemento de 0.03 in, y 0.035 in en el caso de las partes rígidas, exceptuando las áreas que están directamente en contacto con el *blank*, en cuyo caso se hizo un refinamiento, dejando el tamaño global en 0.02 in. En el *blank* fue necesario segmentar en cuatro volúmenes, para permitir un mallado más uniforme (ver figura 3.10).

**Figura 3.10** Blank segmentado en cuatro regiones

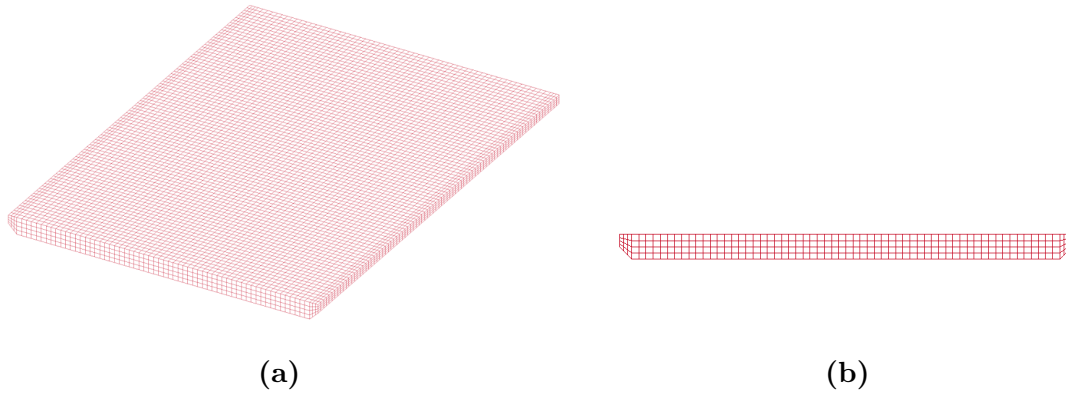


Figura 3.11 Mallado del blank en vista a) trimétrica b) frontal

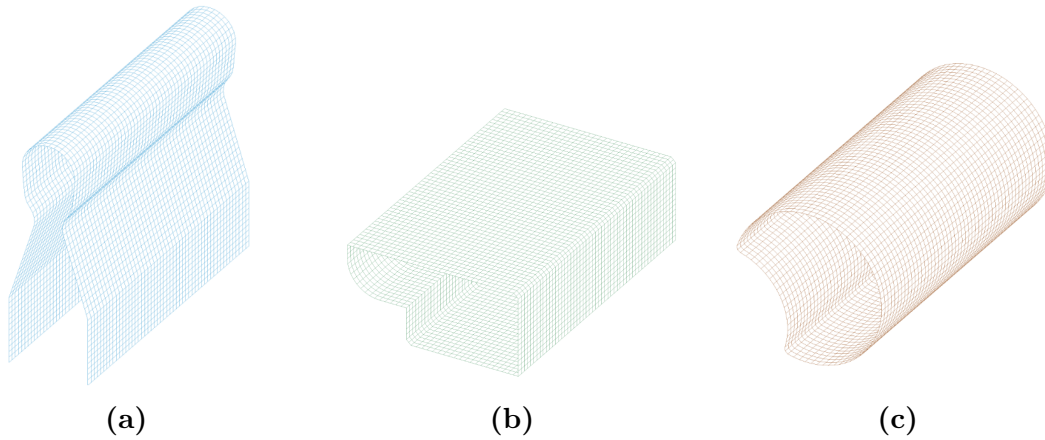


Figura 3.12 Mallado de a) formador inferior b) formador superior c) leva

3.2.3.2. Segundo ensamble

3.2.4. Condiciones de frontera

Para efectos de la simulación el blank fue sujetado en el punto medio de cada extremo, en las direcciones X y Z, para evitar que se desplace de manera no deseada y con esto ayudar en la convergencia de la solución.

Para los componentes del troquel, al ser cuerpos rígidos la mayoría de sus restricciones fueron consideradas en la definición del material. En el caso de los formadores superiores, sólo se especificaron los desplazamientos en la dirección vertical Y, se utilizaron arreglos unidimensionales para especificar la relación tiempo-desplazamiento, en todos los casos se especificó como desplazamiento de cuerpo rígido en la dirección Y (RBUY), aplicándose esta condición a cada uno de los componentes.

La relación tiempo-desplazamiento se definió utilizando una función de tipo *smooth-step*, cuya forma general es $f(t) = A(Bt^2 - Ct^3)$, donde A , B y C son constantes a ajustar para el requerimiento de desplazamiento total, se caracteriza por tener un crecimiento

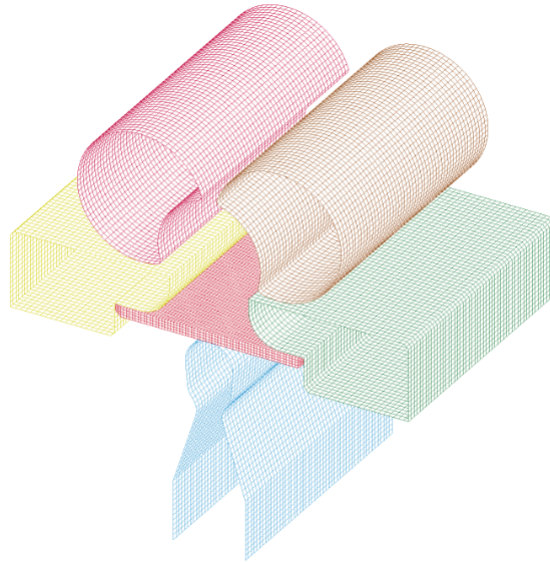


Figura 3.13 Partes del ensamble 1

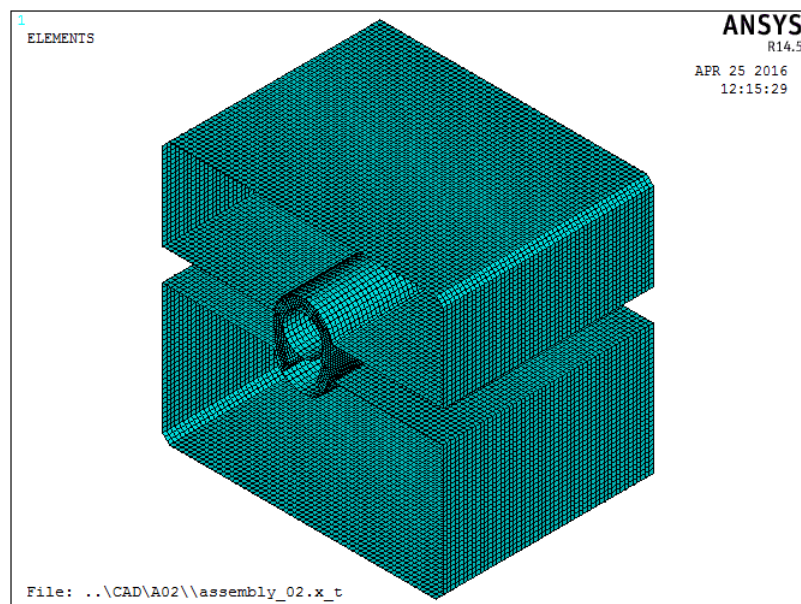


Figura 3.14 Mallado del ensamble, segundo paso

lento al principio y final del intervalo especificado, implicando una velocidad reducida de los formadores al principio y final del recorrido, con la finalidad de que esto facilite la estabilización y convergencia del análisis.

En la figura 3.15 se muestra la gráfica del tiempo-desplazamiento utilizado en el primer paso del troquel. Para el segundo caso se utilizó una curva similar, con algunas variaciones en las constantes para disminuir la amplitud o valor máximo.

```

*DIM,tiempo,ARRAY,400
*DIM,desplazamiento,ARRAY,400

*DO,ii,1,400
    tiempo(ii)=ii/2E3
*ENDDO

_k1 = 3.8E-7
_k2 = 1.15E-4
_k3 = -1.22

*DO,jj,1,200
    desplazamiento(jj)= _k3*(_k2*jj**2 - _k1*jj**3) - (_k3*(_k2 - _k1))
*ENDDO

*DO,kk,1,200
    desplazamiento(200+kk) = (-1)*_k3*(_k2*kk**2 - _k1*kk**3) +
        (_k3*(_k2*200**2 - _k1*200**3))
*ENDDO

*vplot,tiempo,desplazamiento

```

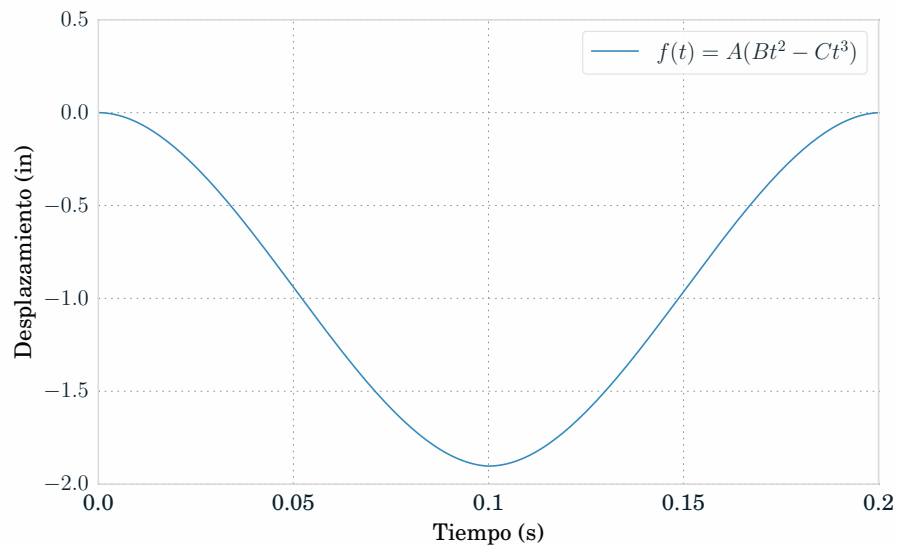


Figura 3.15 Vector de tiempo desplazamiento

3.2.5. Contactos

En la definición de contactos se utilizó un tipo de contacto superficie a superficie general (STS). El programa de simulación utiliza los coeficientes de fricción estático (FS) y

dinámico (FD) para la formulación del coeficiente friccional (μ_c), que viene dado por la ecuación :

$$\mu_c = FD + (FS - FD)e^{-DCv_{rel}} \quad (3.3)$$

Donde DC es el coeficiente de decaimiento exponencial y v_{rel} la velocidad relativa entre las superficies en contacto [23]. Los valores del coeficiente de fricción estático y dinámico se establecieron en 0.2 y 0.1, respectivamente. [24]

En la simulación del segundo paso se utilizó el contacto de tipo Single Surface (SS) para tomar en cuenta el contacto del blank con él mismo (cerrado del tubo) [23], utilizando también los parámetros de fricción indicados anteriormente.

3.3. Análisis experimental

Resultados

4.1. Del análisis de elementos finitos

4.1.1. Esfuerzos

4.1.2. Deformaciones

4.1.3. Fuerza de formado

4.2. Del análisis experimental

Conclusiones

CONCLUSIONES DEL TRABAJO DE TESIS

Bibliografía

- [1] Leu Y., Huang. D. An elasto-plastic finite-element simulation of successive uo-bending processes of sheet metal. *Journal of Materials Processing Technology*.
- [2] Chen Tsung-Chia and Huang You-Min. An elasto-plastic finite element simulation of the uo-tube processes of sheet metal. *Key Engineering Materials*.
- [3] Wikimedia Commons. Componentes de un troquel, 2008.
- [4] México surte 35.2 % de proceso de troquelado. <http://elhorizonte.mx/finanzas/economia/600458/mexico-surte-35-2-de-proceso-de-troquelado>. Consultado en línea: 14/07/2016.
- [5] Banabic Dorel. *Sheet metal forming processes, constitutive modelling and numerical simulation*. Springer, Rumania, 2000.
- [6] Budiansky N., Wang. B. Analysis of sheet metal stamping by finite element method. *Journal of Applied Mechanics*.
- [7] Groover Mikell. *Fundamentos de manufactura moderna*. McGraw Hill, México, 2007.
- [8] Schuler GmbH. *Metal forming handbook*. Springer, Berlín, 1998.
- [9] Serope Kalpakjian. *Manufactura, ingeniería y tecnología*. Pearson Educación, México, 2008.
- [10] Marín C. Troqueles y troquelado, para la producción de grandes series de piezas. *Metal Actual*.
- [11] Hosford William. *Mechanical behavior of materials*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [12] Kobayashi Shiro, Soo ik Oh, and Taylan Altan. *Metal forming and the finite element method*. Oxford University Press, New York, 1989.
- [13] Dassault Systèmes. *Getting started with Abaqus*. 2012.
- [14] Hosford William and Caddell Robert. *Metal forming, mechanics and metallurgy*. Cambridge University Press, New York, 2007.

- [15] Kelly Piaras. Engineering solid mechanics (lecture notes). http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_II/, 2012. En línea; consultado el 19 de septiembre de 2016.
- [16] Celigüeta J.T. *Método de los elementos finitos para análisis estructural*. Tecnun - Universidad de Navarra, San Sebastián, 2011.
- [17] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., and Zhu J.Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier - Butterworth-Heinemann, Burlington, 2005.
- [18] Bathe Klaus-Jürgen. *Finite element procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [19] Nielsen K.B. *Sheet Metal Forming Simulation Using Explicit Finite Element Methods*. PhD thesis, Aalborg University, 1997.
- [20] Measuring strain with strain gages. <http://www.ni.com/white-paper/3642/en/>. Consultado en línea: 25/08/2016.
- [21] Middle East Technical University. Stress analysis by using strain gages (lecture notes). http://www.me.metu.edu.tr/courses/me410/exp5/ME410_exp5_theory.pdf, 2011. En línea; consultado el 28 de septiembre de 2016.
- [22] ANSYS Inc. *ANSYS LS-DYNA User's Guide*. 2013.
- [23] Livermore Software Technology Corporation. *LS-DYNA Theory Manual*. California, 2016.
- [24] Carvill James. *Mechanical Engineer's Data Handbook*. Butterworth Heinemann, Manchester, UK, 1993.

Anexos

ANEXOS - PORTADAS DE ARTÍCULO - ETC