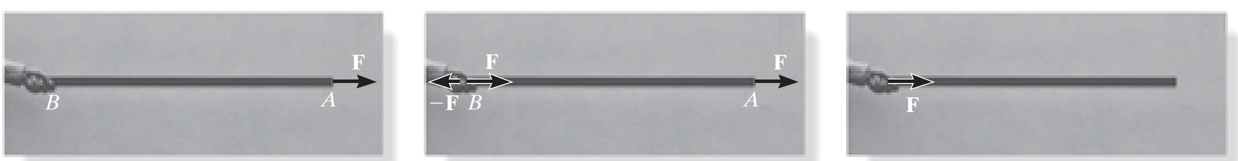
4.7 Simplificación de un sistema de fuerza y par

En ocasiones es conveniente reducir un sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo a una forma más sencilla, lo cual se puede hacer si se reemplaza con un *sistema equivalente*, que conste de una sola fuerza resultante la cual actúe en un punto específico y un momento de par resultante. Un sistema es equivalente si los *efectos externos* que produce sobre un cuerpo son los mismos que los causados por el sistema original de fuerza y momento de par. En este contexto, los efectos externos de un sistema se refieren al *movimiento de traslación y rotación* del cuerpo si éste es libre de moverse, o se refiere a las *fuerzas reactivas* en los apoyos si el cuerpo se mantiene fijo.

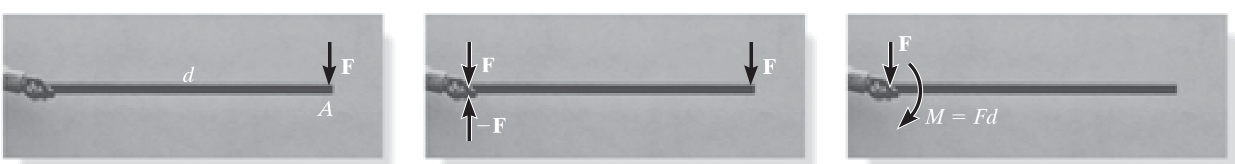
Por ejemplo, considere que se sujeta la varilla de la figura 4-34*a*, la cual está sometida a la fuerza **F** en el punto A. Si añadimos un par de fuerzas iguales pero opuestas **F** y −**F** en el punto B, que se encuentra *sobre la línea de acción* de **F**, figura 4-34*b*, observamos que −**F** en B y **F** en A se cancelarán entre sí, y queda sólo **F** en B, figura 4-34*c*. Ahora, la fuerza **F** se ha movido desde A hasta B sin modificar sus *efectos externos* sobre la varilla; es decir, la reacción en el agarre permanece igual. Lo anterior demuestra el *principio de transmisibilidad*, el cual establece que una fuerza que actúa sobre un cuerpo (varilla) es un *vector deslizante* puesto que puede aplicarse sobre cualquier punto a lo largo de su línea de acción.

También podemos usar el procedimiento anterior para mover una fuerza hasta un punto que *no* está sobre la línea de acción de la fuerza. Si **F** se aplica en forma perpendicular a la varilla, como en la figura 4-35*a*, podemos añadir un par de fuerzas iguales pero opuestas **F** y −**F** a B, figura 4-35*b*. Ahora la fuerza **F** se aplica en B, y las otras dos fuerzas, **F** en A y −**F** en B, forman un par que produce el momento de par $M = Fd$, figura 4-35*c*. Por lo tanto, la fuerza **F** puede moverse desde A hasta B siempre que se añada un momento de par **M** para mantener un sistema equivalente. Este momento de par se determina al tomar el momento de **F** con respecto a B. Como **M** es en realidad un



(a) (b) (c)

Fig. 4-34



(a) (b) (c)

Fig. 4-35

vector libre, puede actuar en cualquier punto de la varilla. En ambos casos los sistemas son equivalentes, lo que produce una fuerza descendente **F** y un momento de par $M = Fd$ en el sentido de las manecillas del reloj, que se siente en el punto de sujeción.

Sistema de fuerzas y momentos de par. Por el método anterior, es posible reducir un sistema de varias fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo a una sola fuerza resultante que actúa en el punto O y un momento de par resultante. Por ejemplo, en la figura 4-36*a*, O no está en la línea de acción de $\mathbf{F}_1$, por lo que la fuerza puede moverse al punto O siempre que se añada al cuerpo un momento de par $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$. Del mismo modo, el momento de par $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ debe agregarse al cuerpo cuando movemos $\mathbf{F}_2$ al punto O. Por último, como el momento de par **M** es un vector libre, se puede mover justo al punto O. Al hacer esto obtenemos el sistema equivalente que se muestra en la figura 4-36*b*, lo cual produce los mismos efectos externos (reacciones en los apoyos) sobre el cuerpo que el sistema de fuerza y par de la figura 4-36*a*. Si sumamos las fuerzas y los momentos de par, obtenemos la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y el momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, figura 4-36*c*.

Observe que $\mathbf{F}_R$ es independiente de la ubicación del punto O; sin embargo, $(\mathbf{M}_R)_O$ depende de esta ubicación ya que los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ se determinan con los vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Observe también que $(\mathbf{M}_R)_O$ es un vector libre y puede actuar en *cualquier punto* sobre el cuerpo, aunque por lo general el punto O se selecciona en su punto de aplicación.

El método anterior, para simplificar un sistema de fuerza y par a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ que actúe en el punto O y un momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O$, puede generalizarse mediante la aplicación de las dos ecuaciones siguientes.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F} \\ (\mathbf{M}_R)_O &= \Sigma \mathbf{M}_O + \Sigma \mathbf{M} \end{aligned}} \tag{4-17}$$

La primera ecuación establece que la fuerza resultante del sistema es equivalente a la suma de todas las fuerzas; y la segunda ecuación establece que el momento de par resultante del sistema es equivalente a la suma de todos los momentos de par $\Sigma\mathbf{M}$ más los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas $\Sigma\mathbf{M}_O$. Si el sistema de fuerzas se encuentra en el plano x-y y cualesquier momentos de par son perpendiculares a este plano, entonces las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes tres ecuaciones escalares.

$$\boxed{\begin{aligned} (F_R)_x &= \Sigma F_x \\ (F_R)_y &= \Sigma F_y \\ (M_R)_O &= \Sigma M_O + \Sigma M \end{aligned}} \tag{4-18}$$

Aquí, la fuerza resultante se determina a partir de la suma vectorial de sus dos componentes $(F_R)_x$ y $(F_R)_y$.

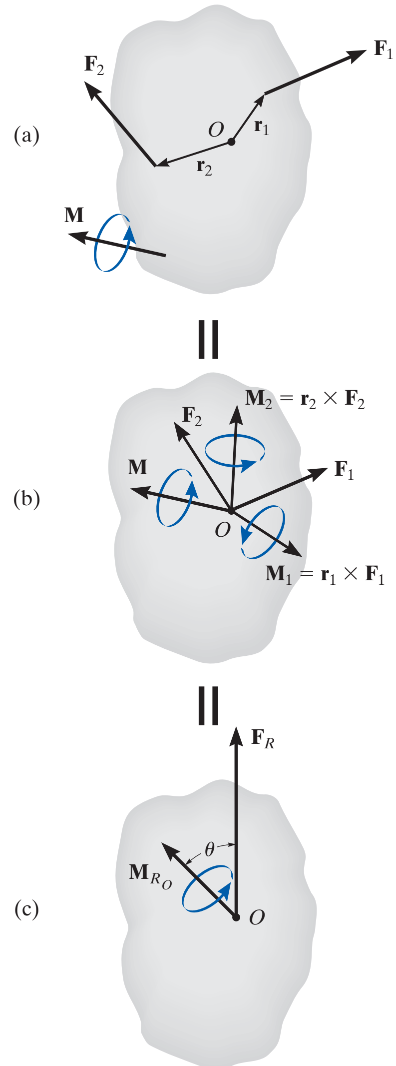
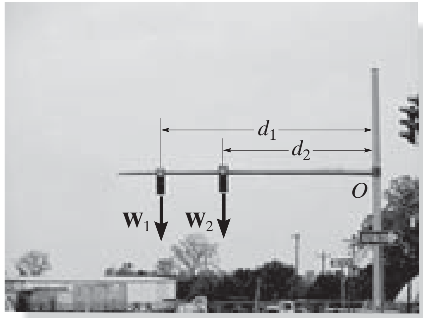
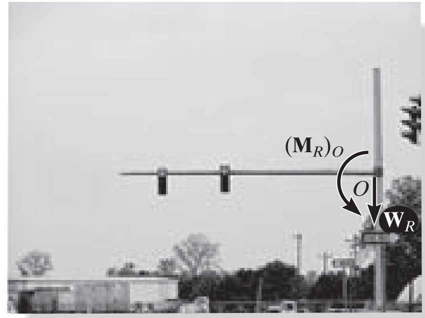


Fig. 4-36





Los pesos de estos semáforos pueden reemplazarse por su fuerza resultante equivalente $W_R = W_1 + W_2$ y un momento de par $(M_R)_O = W_1d_1 + W_2d_2$ en el apoyo O. En ambos casos el apoyo debe proporcionar la misma resistencia a la traslación y a la rotación a fin de mantener el elemento en la posición horizontal.

4

Procedimiento para el análisis

Los siguientes puntos deberán tenerse presentes al simplificar un sistema de fuerza y momento de par a un sistema equivalente de fuerza resultante y par.

- Establezca los ejes coordenados con el origen localizado en el punto O donde los ejes tienen una orientación seleccionada.

Suma de fuerzas.

- Si el sistema de fuerzas es *coplanar*, descomponga cada fuerza en sus componentes x y y. Si una componente está dirigida a lo largo de los ejes x o y positivos, representa un escalar positivo; mientras que si está dirigida a lo largo de los ejes x o y negativos, es un escalar negativo.

- En tres dimensiones, represente cada fuerza como un vector cartesiano antes de sumar las fuerzas.

Suma de momentos.

- Por lo general, al determinar los momentos de un sistema de fuerzas *coplanares* con respecto al punto O, es conveniente aplicar el principio de momentos, es decir, determinar los momentos de las componentes de cada fuerza en vez del momento de la fuerza en sí.

- En tres dimensiones, use el producto cruz vectorial para determinar el momento de cada fuerza con respecto al punto O. Aquí los vectores de posición se extienden desde el punto O hasta cualquier punto sobre la línea de acción de cada fuerza.

EJEMPLO 4.14

Reemplace el sistema de fuerza y par que se muestra en la figura 4-37*a* por una fuerza resultante equivalente y un momento de par que actúen en el punto *O*.

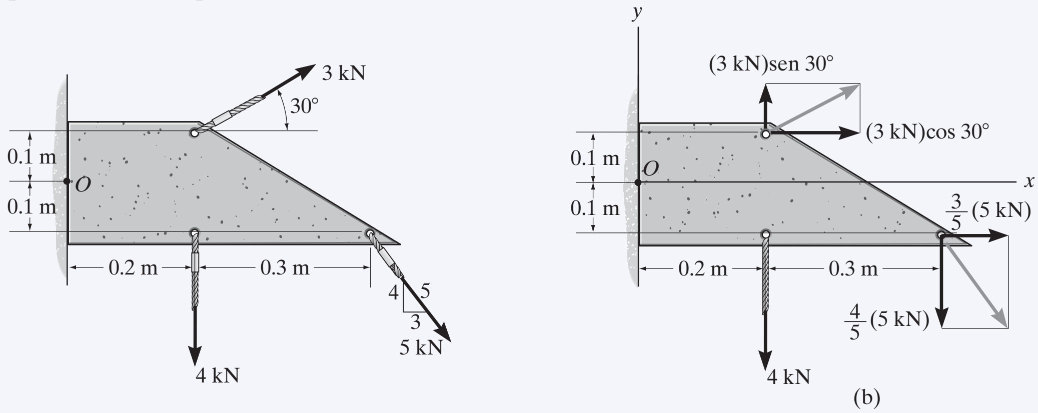


Fig. 4-37

SOLUCIÓN

Suma de fuerzas. Las fuerzas de 3 kN y 5 kN se descomponen en sus componentes *x* y *y* como se muestra en la figura 4-37*b*. Tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = (3\text{ kN})\cos 30^\circ + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN}) = 5.598\text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = (3\text{ kN})\text{sen } 30^\circ - \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN}) - 4\text{ kN} = -6.50\text{ kN} = 6.50\text{ kN}\downarrow$$

Con base en el teorema de Pitágoras, figura 4-37*c*, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^{\,2} + (F_R)_y^{\,2}} = \sqrt{(5.598\text{ kN})^2 + (6.50\text{ kN})^2} = 8.58\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Su dirección θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.50\text{ kN}}{5.598\text{ kN}}\right) = 49.3^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Suma de momentos. Los momentos de 3 kN y 5 kN con respecto al punto *O* se determinarán mediante el uso de sus componentes *x* y *y*. Con referencia a la figura 4-37*b*, tenemos

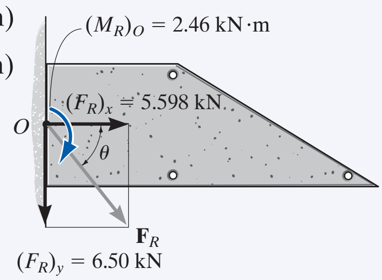
$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O;$$

$$(M_R)_O = (3\text{ kN})\text{sen } 30^\circ(0.2\text{ m}) - (3\text{ kN})\cos 30^\circ(0.1\text{ m}) + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN})(0.1\text{ m})$$

$$- \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN})(0.5\text{ m}) - (4\text{ kN})(0.2\text{ m})$$

$$= -2.46\text{ kN}\cdot\text{m} = 2.46\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Este momento en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 4-37*c*.



(c)

NOTA: observe que la fuerza y el momento de par resultantes en la figura 4.37*c* producirán los mismos efectos externos o reacciones en los apoyos que los producidos por el sistema de fuerzas, figura 4-37*a*.

EJEMPLO 4.15

Reemplace el sistema de fuerza y par que actúa sobre el elemento de la figura 4-38*a* por una fuerza y un momento de par equivalentes que actúen en el punto O.

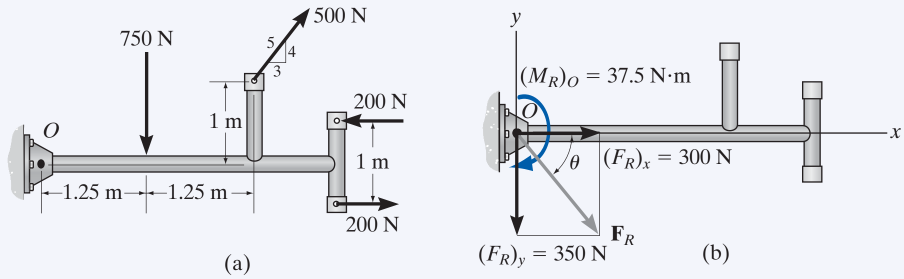


Fig. 4-38

SOLUCIÓN

Suma de fuerzas. Como las fuerzas del par son de 200 N e iguales pero opuestas, producen una fuerza resultante nula, por lo tanto no es necesario considerarlas en la sumatoria de fuerzas. La fuerza de 500 N se descompone en sus componentes x y y, por tanto,

$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = \left(\tfrac{3}{5}\right)(500 \text{ N}) = 300 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = (500 \text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) - 750 \text{ N} = -350 \text{ N} = 350 \text{ N}\downarrow$$

A partir de la figura 4-15*b*, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$= \sqrt{(300 \text{ N})^2 + (350 \text{ N})^2} = 461 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Y el ángulo θ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{350 \text{ N}}{300 \text{ N}}\right) = 49.4^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Suma de momentos. Como el momento de par es un vector libre, puede actuar en cualquier punto del elemento. Con referencia a la figura 4-38*a*, tenemos

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M_c;$$

$$(M_R)_O = (500 \text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right)(2.5 \text{ m}) - (500 \text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right)(1 \text{ m})$$

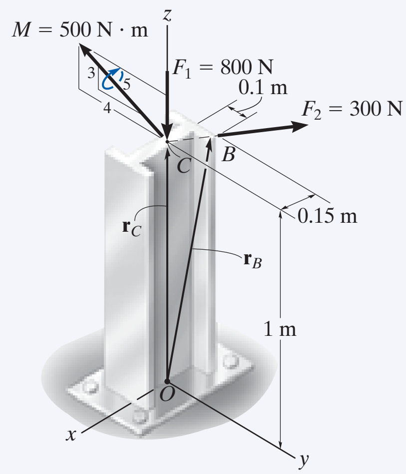
$$- (750 \text{ N})(1.25 \text{ m}) + 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$= -37.5 \text{ N}\cdot\text{m} = 37.5 \text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

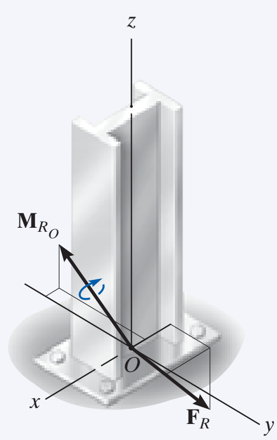
Este momento en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 4-38*b*.

EJEMPLO 4.16

El elemento estructural está sometido al momento de un par **M** y a las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como se muestra en la figura 4-39*a*. Reemplace este sistema por una fuerza resultante equivalente y el momento de un par que actúen en su base, es decir el punto *O*.



(a)



(b)

Fig. 4-39

SOLUCIÓN *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

Los aspectos tridimensionales del problema pueden simplificarse mediante un análisis vectorial cartesiano. Al expresar las fuerzas y el momento de par como vectores cartesianos tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (300\ \text{N})\mathbf{u}_{CB}$$

$$= (300\ \text{N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

$$= 300\ \text{N}\left[\frac{\{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}\}\ \text{m}}{\sqrt{(-0.15\ \text{m})^2 + (0.1\ \text{m})^2}}\right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{M} = -500\left(\tfrac{4}{5}\right)\mathbf{j} + 500\left(\tfrac{3}{5}\right)\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Suma de fuerzas.

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}; \qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}$$

$$= \{-250\mathbf{i} + 166\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\}\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Suma de momentos.

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j})$$

$$= \{-166\mathbf{i} - 650\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Los resultados se muestran en la figura 4-39*b*.

4