

Cinemática de cuerpo rígido

Universidad Politécnica de Guanajuato

Mecánica de cuerpo rígido

Tipos de movimiento

Movimientos en el plano

El movimiento plano de un cuerpo rígido ocurre cuando todas sus partículas se desplazan a lo largo de trayectorias equidistantes de un plano fijo. Existen tres tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido, en orden de complejidad creciente, los cuales son:

1. Traslación
2. Rotación alrededor de un eje fijo
3. Movimiento plano general



Traslación

- Este tipo de movimiento ocurre cuando una línea en el cuerpo permanece paralela a su orientación original durante todo el movimiento.
- Cuando las trayectorias del movimiento de dos puntos cualesquiera del cuerpo son líneas paralelas, el movimiento se llama **traslación rectilínea**.
- Si las trayectorias del movimiento se desarrollan a lo largo de líneas curvas equidistantes, el movimiento se llama **traslación curvilínea**.



Rotación alrededor de un eje fijo

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas, excepto las que quedan en el eje de rotación, se mueven a lo largo de trayectorias circulares.



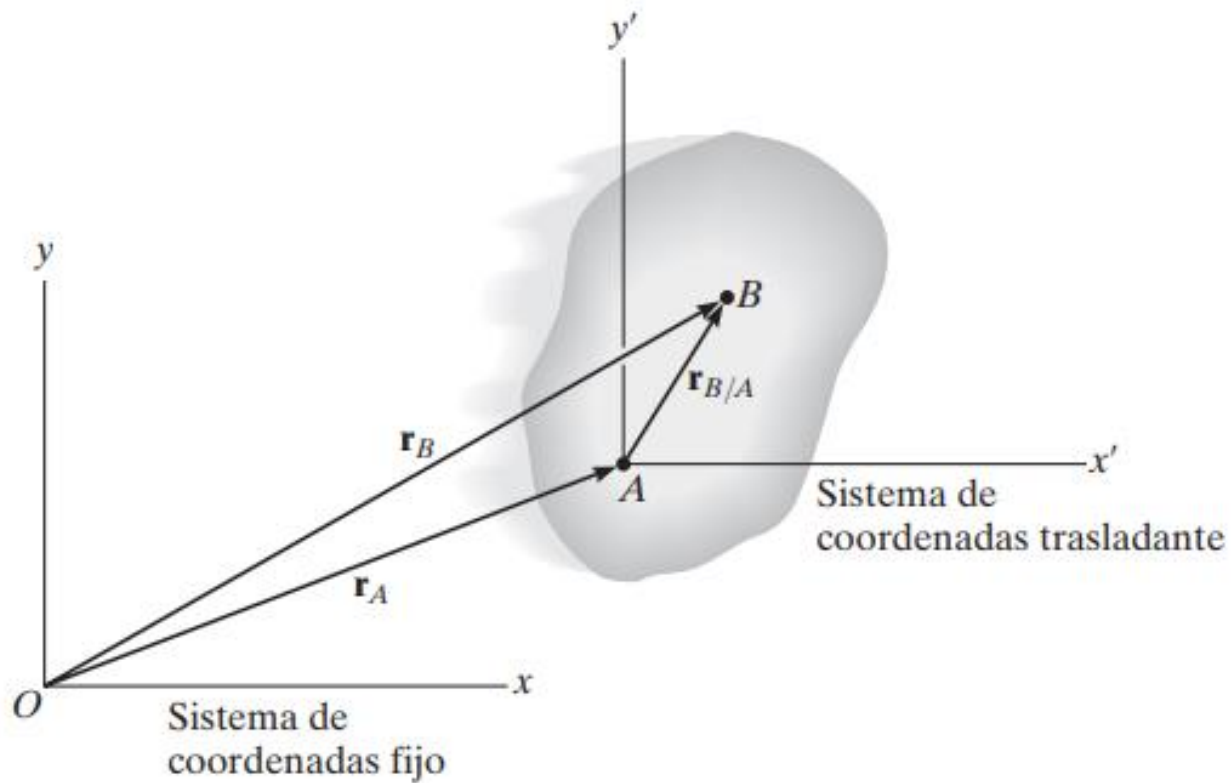
Movimiento plano general

Cuando un cuerpo se somete a un movimiento plano general, experimenta una combinación de traslación y rotación. La traslación se presenta en un plano de referencia y la rotación ocurre alrededor de un eje perpendicular al plano de referencia.



Traslación

Traslación



Posición:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidad:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_B) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A) + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{B/A})$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

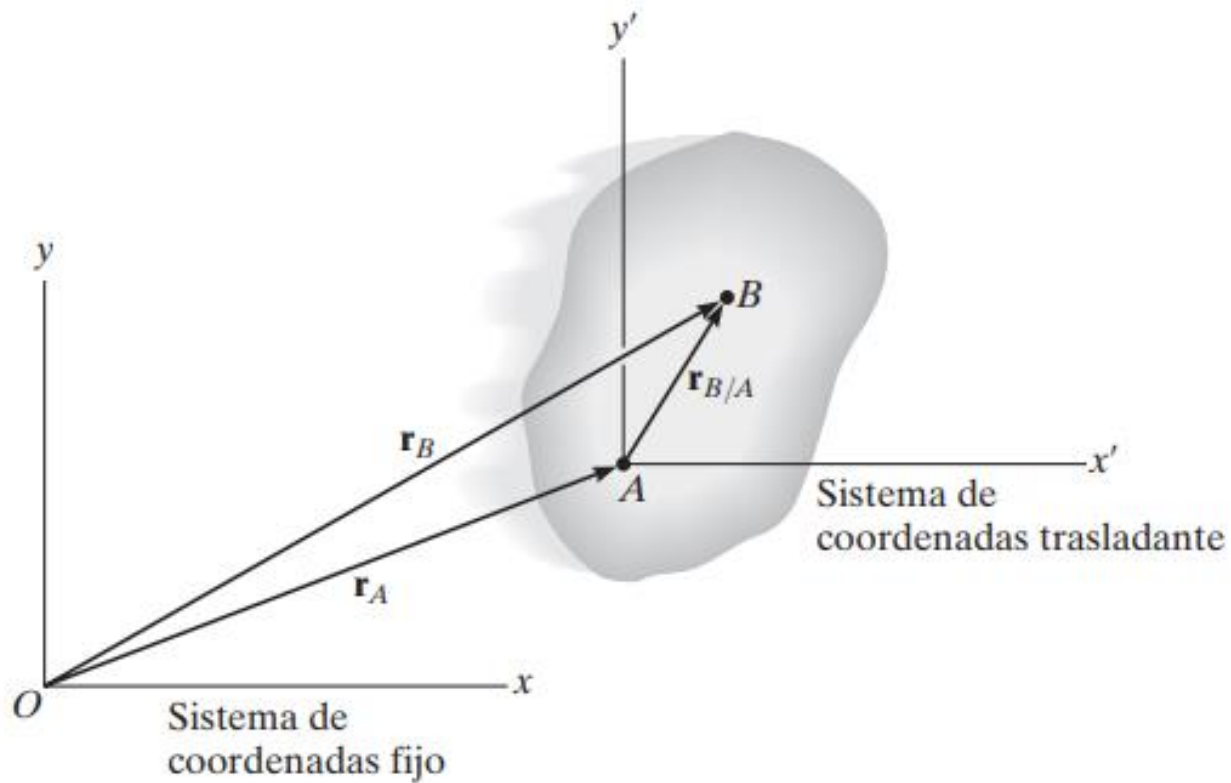
Aceleración:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_B) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_A)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Traslación

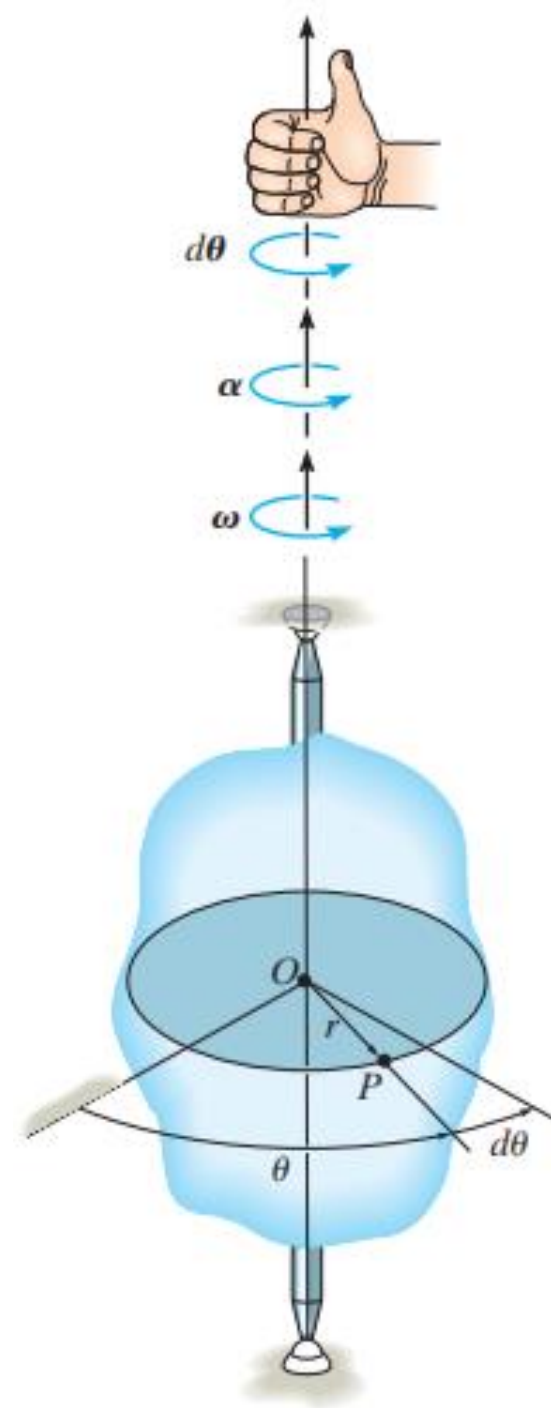
Todos los puntos en un cuerpo rígido sometidos a traslación rectilínea o curvilínea se mueven con la misma velocidad y aceleración.



Rotación alrededor de un eje fijo

Rotación alrededor de un eje fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto P localizado en él se desplaza a lo largo de una trayectoria circular.

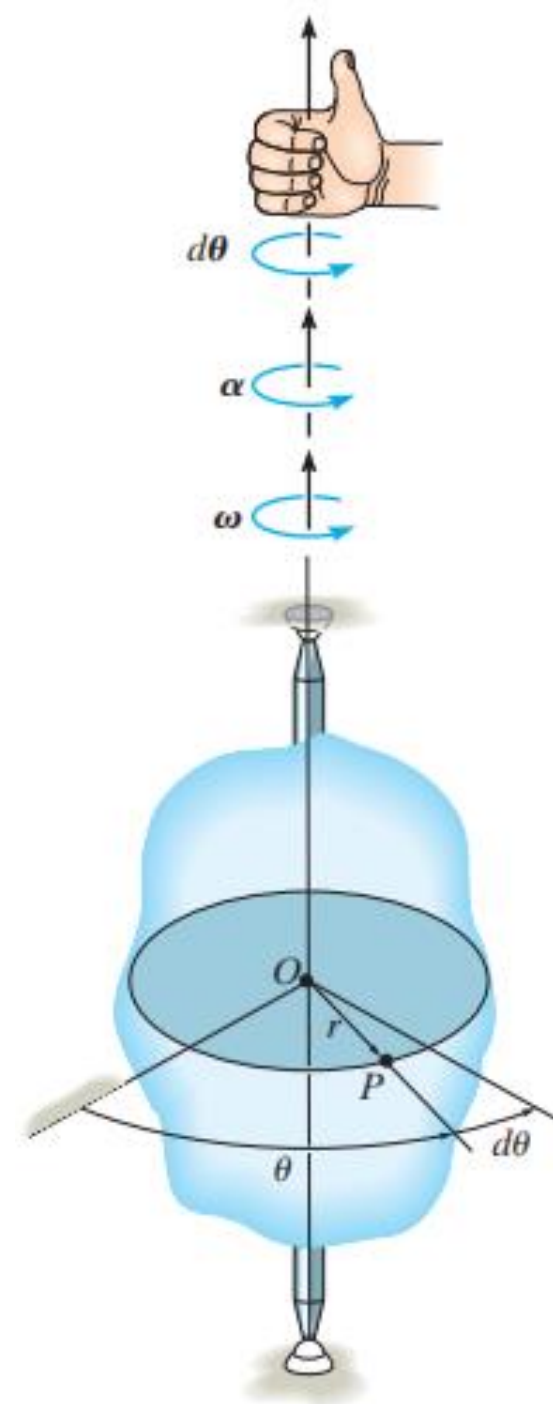


Movimiento angular

Movimiento angular: Como un punto no tiene dimensiones, no puede tener movimiento angular. Solamente las líneas o cuerpos experimentan movimiento angular.

Posición angular: En el instante que se muestra, la posición angular de r está definida por el ángulo θ , medido desde una línea de referencia fija hasta r .

Desplazamiento angular: El cambio de la posición angular, el cual puede medirse como una diferencial $d\theta$, se llama desplazamiento angular.

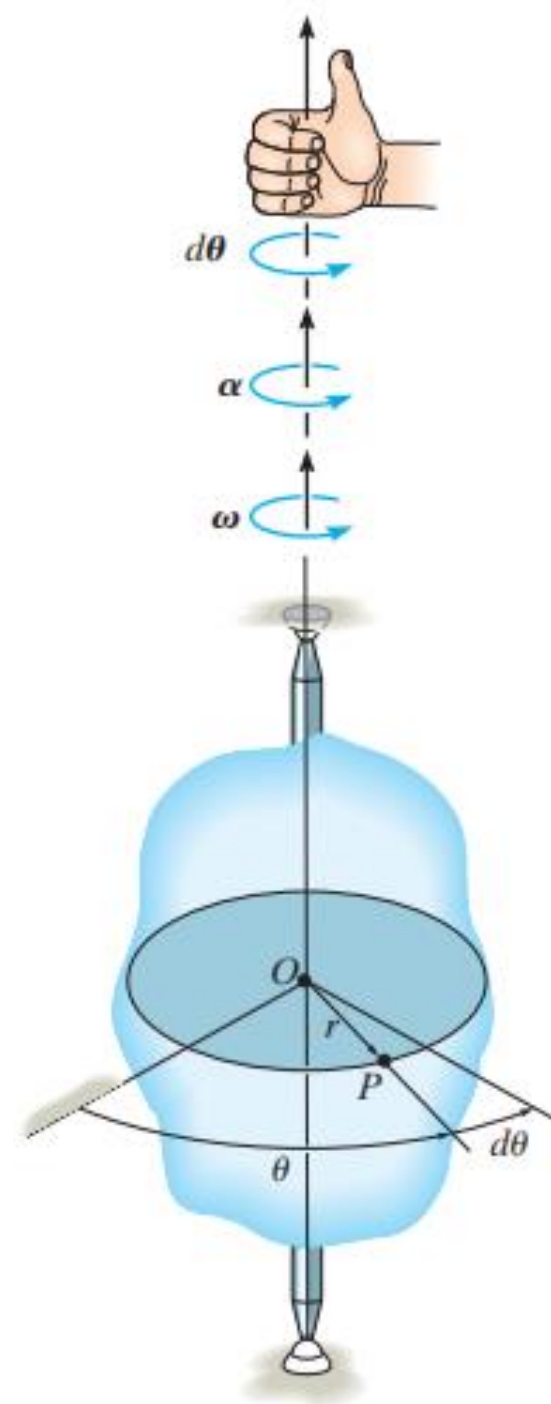


Movimiento angular

Velocidad angular: El cambio con respecto al tiempo de la posición angular se conoce como velocidad angular ω (omega). Como $d\theta$ ocurre durante un instante de tiempo dt , entonces:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La magnitud de este vector se suele medir en rad/s. La dirección de este vector es la misma que la del eje de rotación.

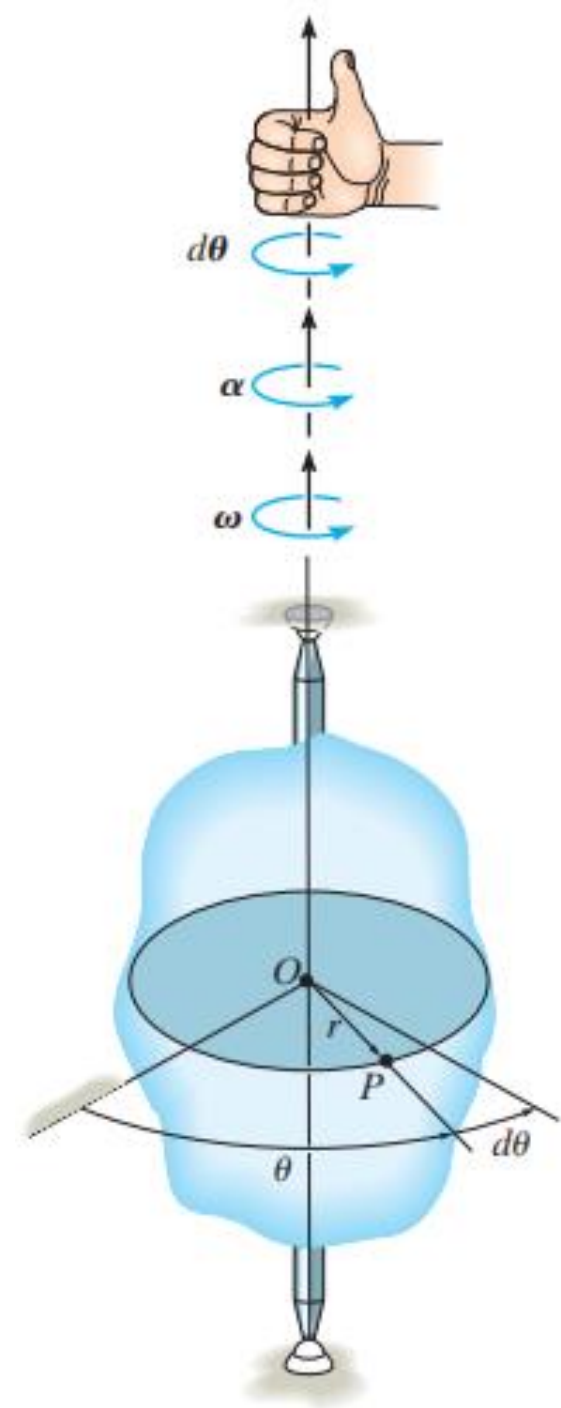


Movimiento angular

Aceleración angular: La aceleración angular α (alfa) mide el cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular. La magnitud de este vector es:

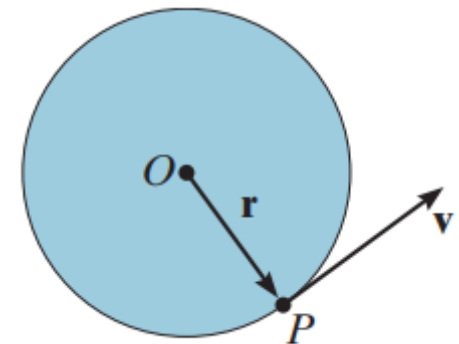
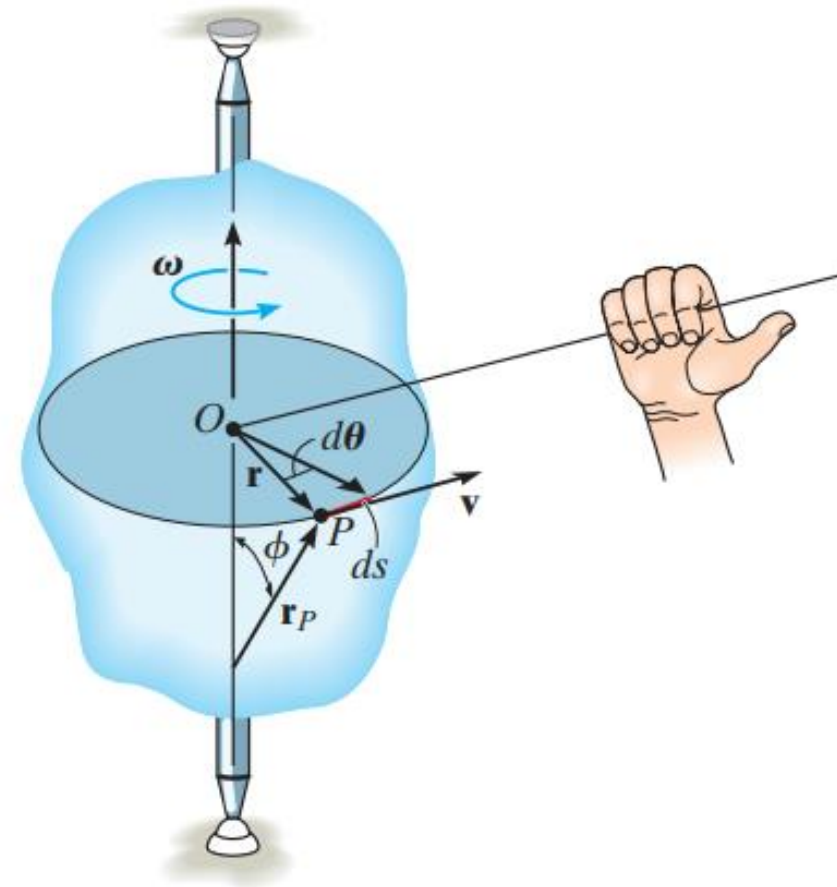
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

La línea de acción de α es la misma que la de ω ; sin embargo, su sentido de dirección depende de si ω se incrementa o decrece. Si ω decrece, entonces α se llama desaceleración angular y por consiguiente su dirección se opone a ω .



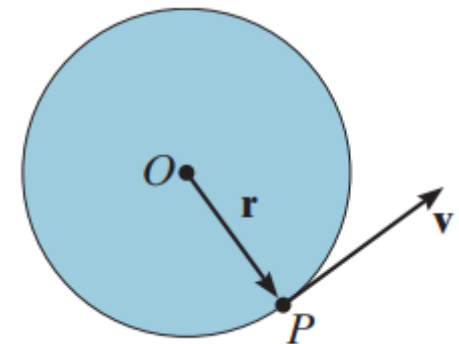
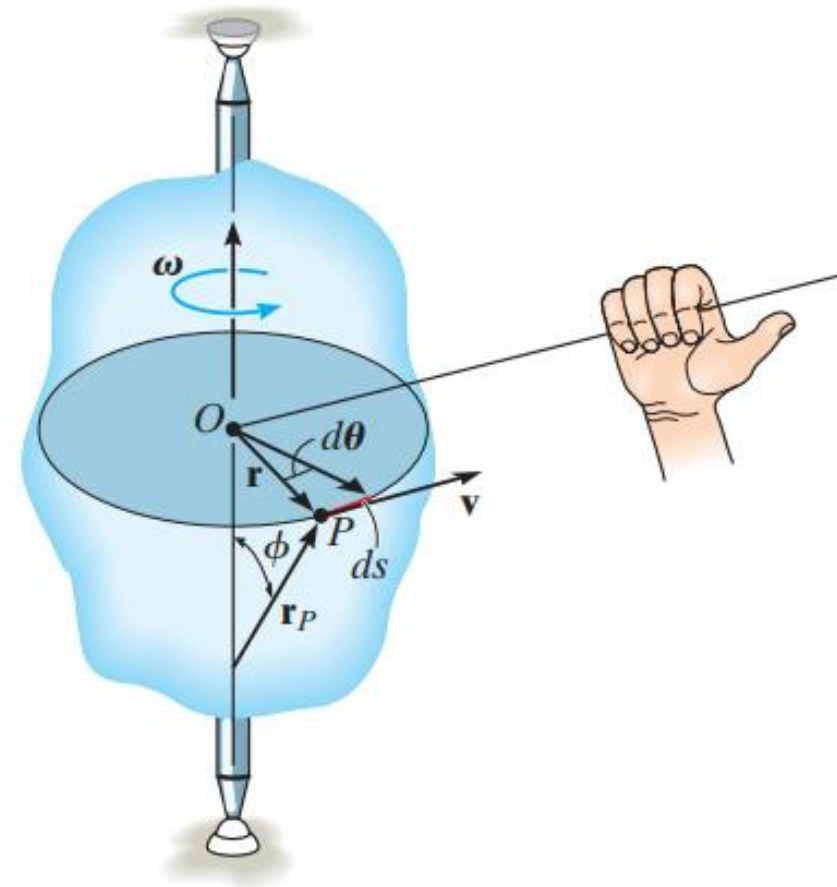
Movimiento de un punto P

Cuando el cuerpo rígido de la figura gira, el punto P se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de radio r con centro en el punto O . Esta trayectoria está contenida en el plano sombreado de la vista superior.



Movimiento de un punto P

Posición y desplazamiento. La posición de P está definida por el vector de posición r , el cual se extiende desde O hasta P . Si el cuerpo gira $d\theta$ entonces P se desplazará $ds = r d\theta$.

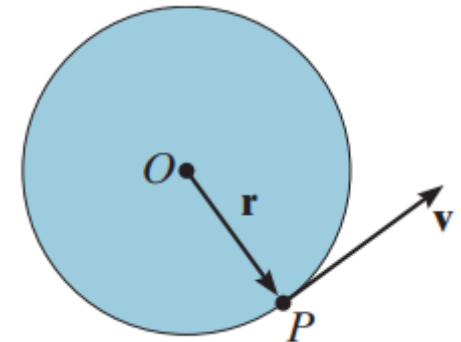
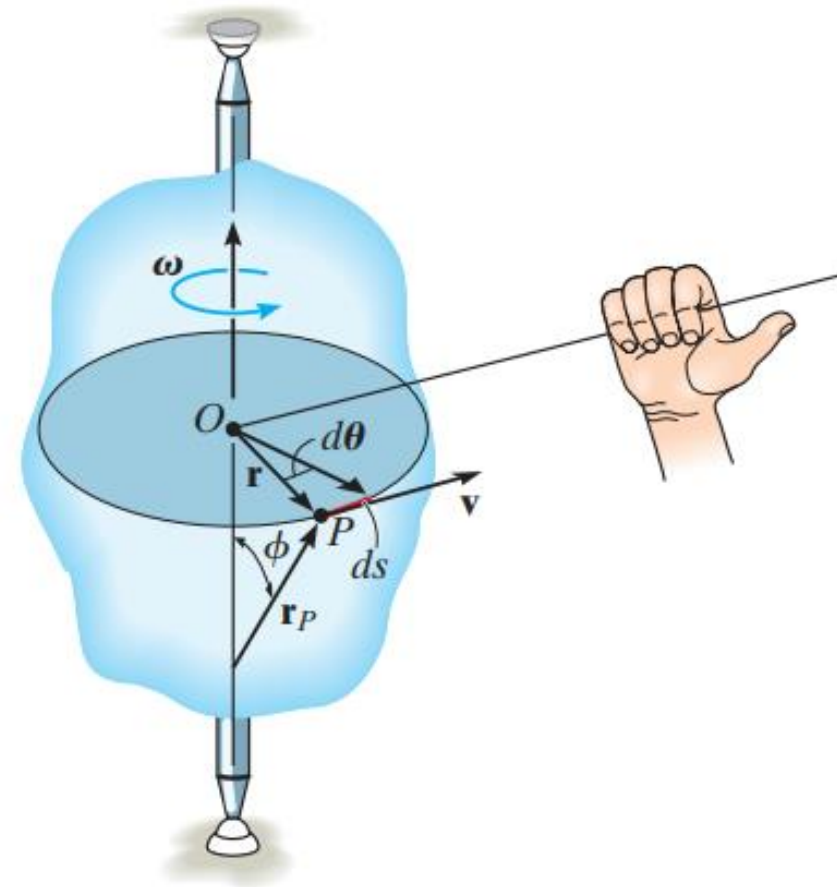


Movimiento de un punto P

Velocidad. La magnitud de la velocidad de P se calcula al dividir $ds = r d\theta$ entre dt de modo que:

$$v = \omega r$$

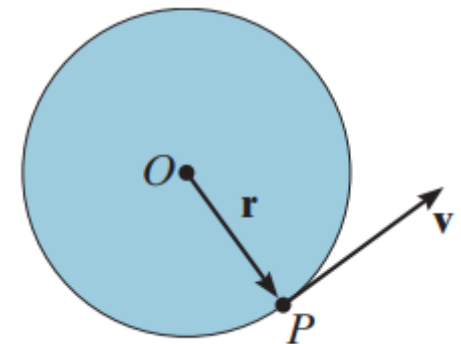
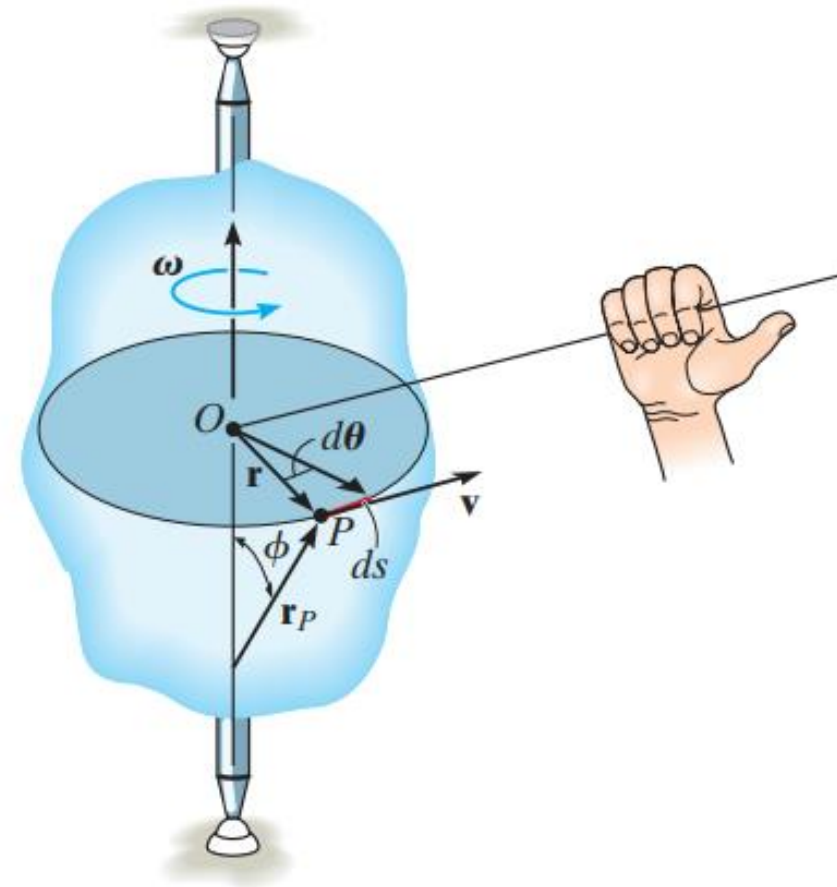
Como se muestra en las figuras, la dirección de v es tangente a la trayectoria circular.



Movimiento de un punto P

Tanto la magnitud como la dirección de \mathbf{v} también pueden tenerse en cuenta si se utiliza el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{r}_P . En este caso, la dirección \mathbf{r}_P es de *cualquier punto* sobre el eje de rotación al punto P . Tenemos:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

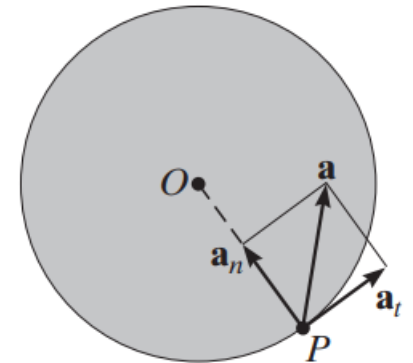
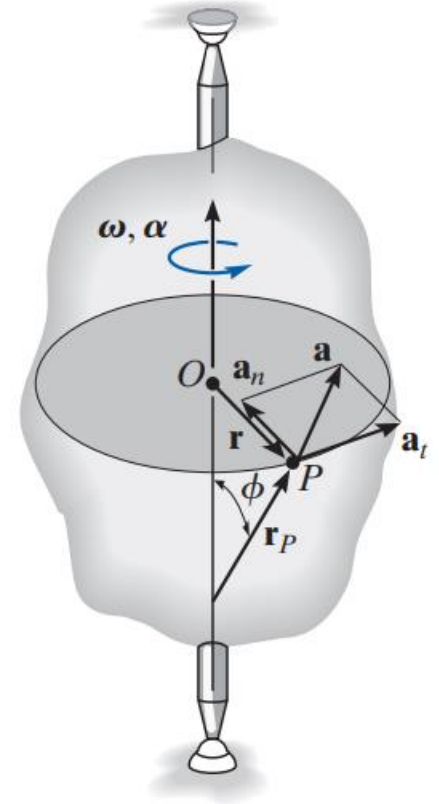


Movimiento de un punto P

Aceleración. La aceleración de P puede expresarse en función de sus componentes normal y tangencial. Como $a_t = dv/dt$ y $a_n = v^2/\rho$, donde $\rho = r$, $v = \omega r$ y $\alpha = d\omega/dt$, entonces:

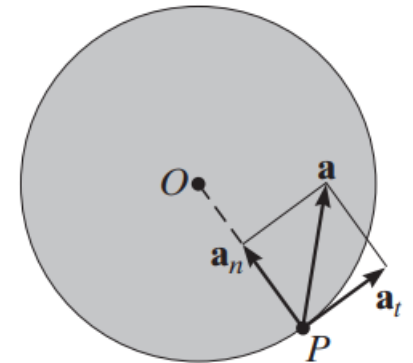
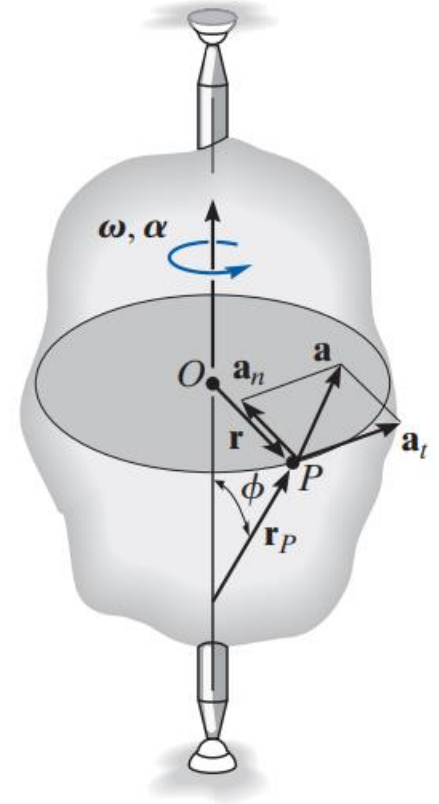
$$a_t = \alpha r$$

$$a_n = \omega^2 r$$



Movimiento de un punto P

- La componente tangencial de la aceleración representa el cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad.
- Si la rapidez de P se incrementa, entonces a_t actúa en la misma dirección que v ; si se reduce, a_t actúa en la dirección opuesta de v , y finalmente, si permanece constante, a_t es cero.
- La componente normal de la aceleración representa el cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. La dirección de a_n siempre es hacia O , el centro de la trayectoria circular.



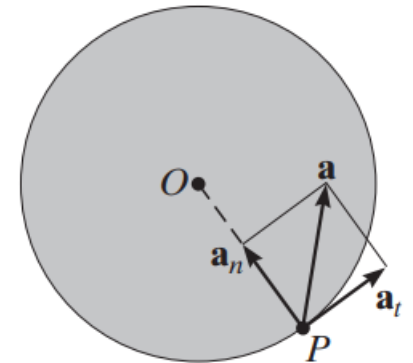
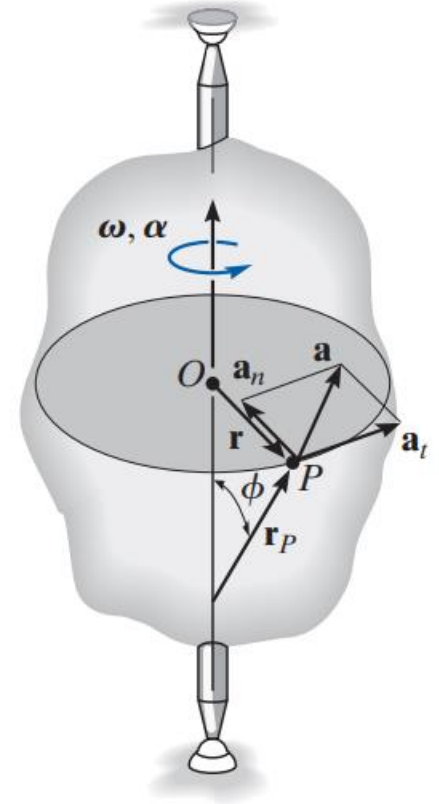
Movimiento de un punto P

La aceleración también puede calcularse de forma vectorial. Si consideramos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación vectorial de velocidad:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

Se sabe que $\alpha = d\boldsymbol{\omega}/dt$ y $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = d\mathbf{r}_P/dt$, entonces:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$



Movimiento de un punto P

En la forma vectorial, las componentes tangencial y normal de aceleración están dadas por:

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$$

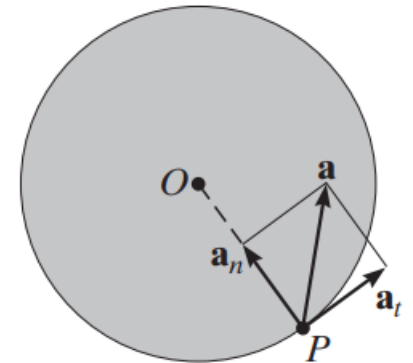
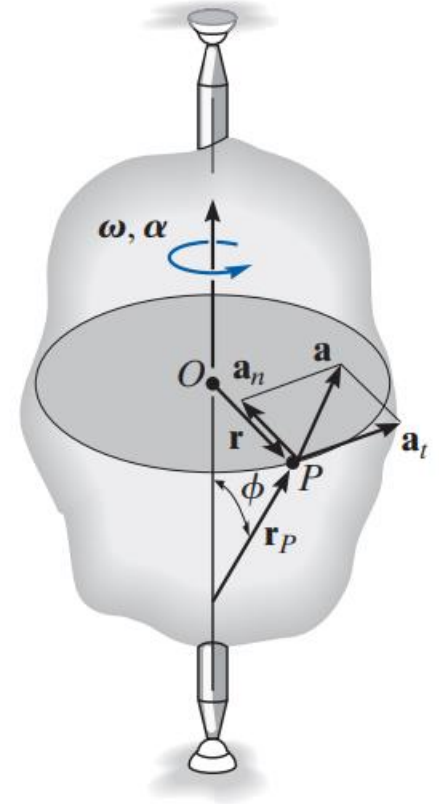
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

La expresión de aceleración normal puede simplificarse considerando que el movimiento ocurre en el plano:

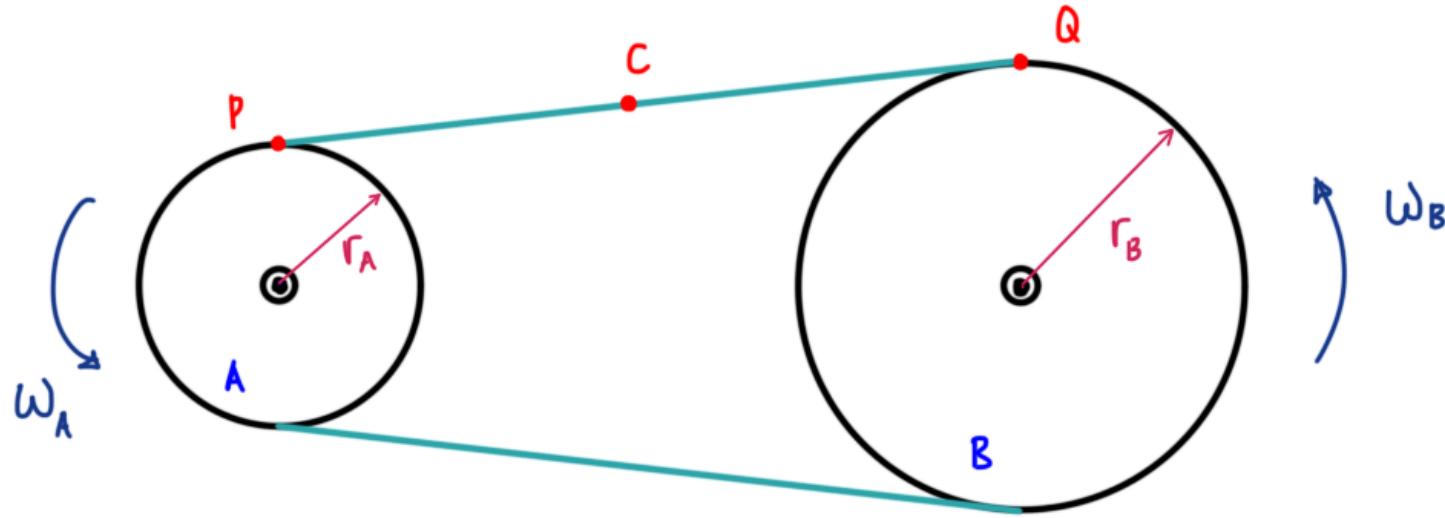
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r}_P$$

Así, la ecuación de aceleración puede escribirse como:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P - \omega^2 \mathbf{r}_P$$



Cinemática de un sistema polea-banda



Si la banda es inextensible y no existe deslizamiento entre la polea y la banda, entonces:

$$v_P = v_C = v_Q$$

$$v_P = \omega_A r_A$$

$$v_Q = \omega_B r_B$$

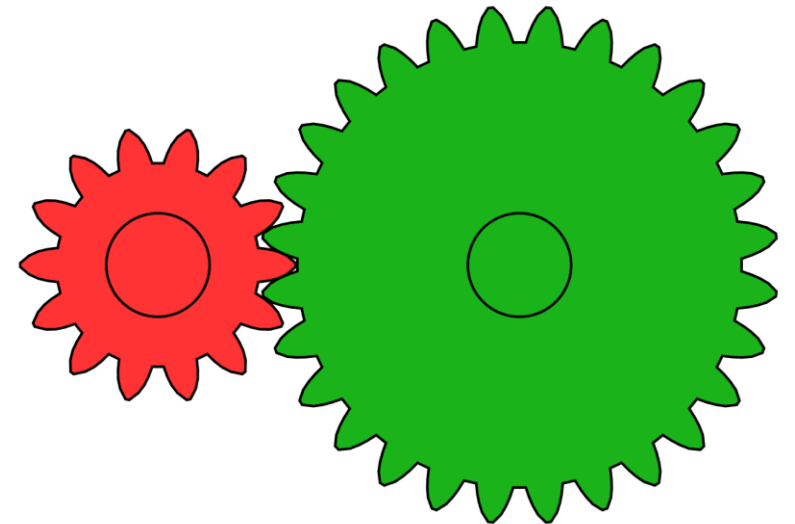
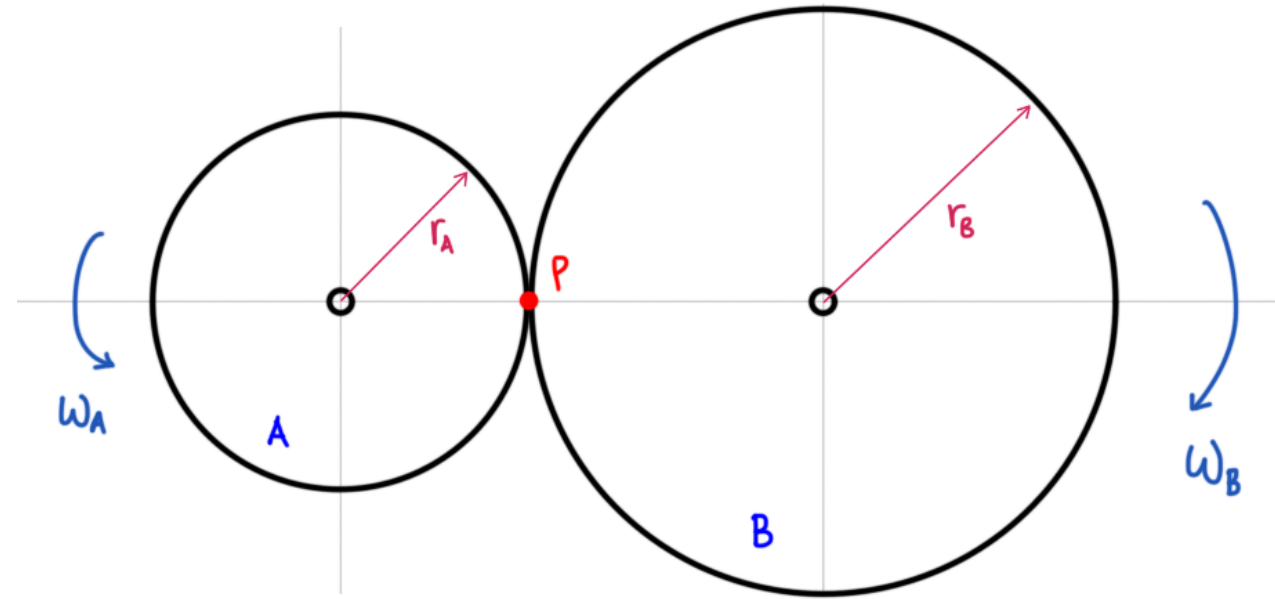
Lo anterior, nos conduce a la conclusión que: *si dos poleas A y B están unidas mediante una banda simple, rotan en el mismo sentido, y las magnitudes de sus velocidades angulares están relacionadas por:*

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$

Cinemática de un sistema de engranes

Dos engranes A y B que están conectados rotan en sentido opuesto, y la magnitud de sus velocidades angulares están relacionadas por:

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$



Resumiendo: ecuaciones para la rotación

Movimiento angular

Velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Si la aceleración angular es constante:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Si la aceleración angular α es una función del tiempo, entonces se debe integrar para determinar la función de velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_0^t \alpha dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

$$\omega = \int_0^t \alpha dt + \omega_0$$

Y enseguida, integrar esta función de velocidad para determinar la función de posición angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int_0^t \omega dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$$\theta = \int_0^t \omega dt + \theta_0$$

Resumiendo: ecuaciones para la rotación

Movimiento de un punto P (formulación escalar)

Velocidad

$$v_P = \omega r_P$$

Aceleración

$$(a_P)_t = \alpha r$$

$$(a_P)_n = \omega^2 r$$

$$a_P = \sqrt{(a_P)_t^2 + (a_P)_n^2}$$

Movimiento de un punto P (formulación vectorial)

Velocidad

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

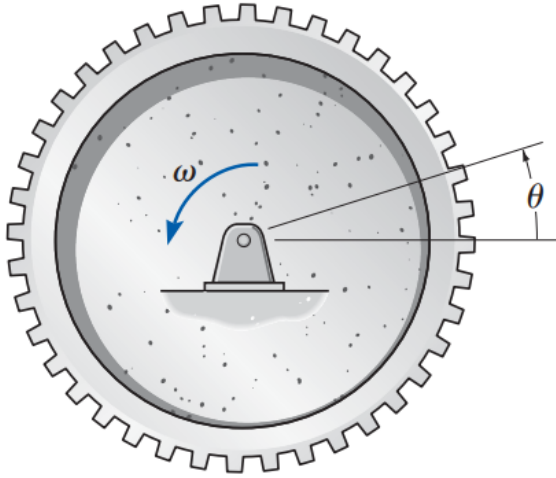
Aceleración

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P - \omega^2 \mathbf{r}_P$$

Ejemplo

F16-1. Cuando el engrane realiza 20 revoluciones alcanza una velocidad angular de $\omega = 30 \text{ rad/s}$, a partir del punto de reposo. Determine su aceleración angular constante y el tiempo requerido.



Información conocida:

$$\omega_0 = 0; \quad \omega = 30 \text{ rad/s}$$

$$(\theta - \theta_0) = 20 \text{ rev} = 20(2\pi) \text{ rad} = 40\pi \text{ rad}$$

Utilizando las ecuaciones de aceleración angular constante:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$\alpha_c = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{30^2}{2(40\pi)} = 3.581 \text{ rad/s}^2$$

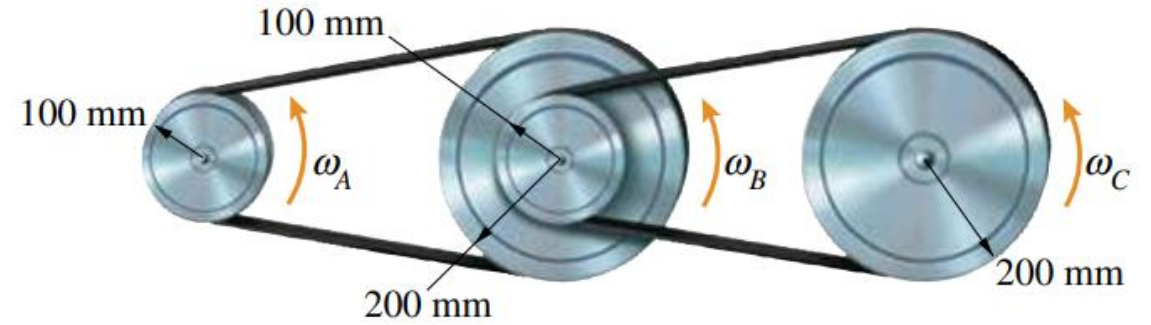
$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_c} = \frac{30}{3.581} = 8.38 \text{ s}$$

Ejemplo

17.5 The angular velocity of the left disk is given as a function of time by $\omega_A = 4 + 0.2t$ rad/s.

- (a) What are the angular velocities ω_B and ω_C at $t = 5$ s?
- (b) Through what angle does the right disk turn from $t = 0$ to $t = 5$ s?



Ejemplo

De las relaciones de poleas se tiene que:

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B \quad \rightarrow \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A$$

$$\omega_B r'_B = \omega_C r_C \quad \rightarrow \quad \omega_C = \frac{r'_B}{r_C} \omega_B$$

Evaluando en $t = 5$

$$\omega_A = 4 + 0.2(5) = 5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = \frac{100}{200}(5) = 2.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_C = \frac{100}{200}(2.5) = 1.25 \text{ rad/s}$$

La velocidad angular de C está dada por:

$$\omega_C = \left(\frac{r_A r'_B}{r_B r_C} \right) \omega_A = 0.25 \omega_A$$

$$\omega_C = 0.25(4 + 0.2t) = (1 + 0.05t) \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, su aceleración angular es:

$$\alpha_C = \frac{d\omega_C}{dt} = 0.05 \text{ rad/s}^2$$

Dado que α_C es constante, entonces podemos usar las ecuaciones correspondientes para calcular el desplazamiento angular que experimenta C de $t = 0$ a $t = 5$.

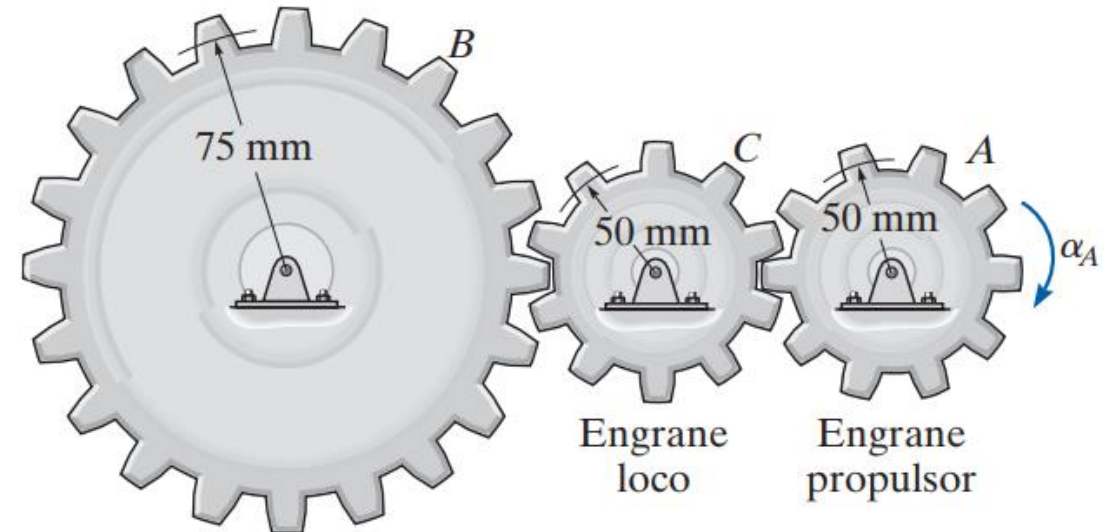
$$\Delta\theta_C = \theta - \theta_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha_C} = \frac{(1.25)^2 - (1)^2}{2(0.05)}$$

$$\Delta\theta_C = 5.625 \text{ rad}$$

Donde $\omega = \omega_C(5)$ y $\omega_0 = \omega_C(0)$.

Ejemplo

•**16-9.** Cuando sólo dos engranes están engranados, el engrane propulsor A y el engrane propulsado B siempre girarán en direcciones opuestas. Para hacerlos que giren en la *misma dirección* se utiliza un engrane loco o guía C . En el caso que se ilustra, determine la velocidad angular del engrane B cuando $t = 5$ s, si el engrane A comienza a girar desde el punto de reposo con una aceleración angular $\alpha_A = (3t + 2)$ rad/s², donde t está en segundos.



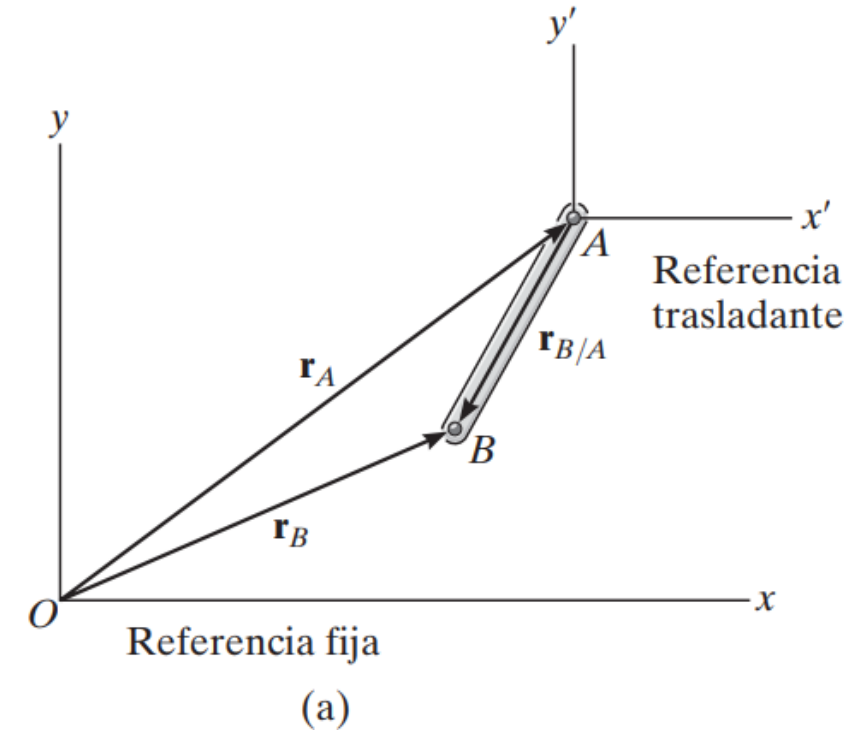
Movimiento plano general:
análisis de movimiento relativo

Movimiento plano general

El movimiento plano general de un cuerpo rígido se describe como una combinación de traslación y rotación.

Para ver estos movimientos componentes por separado utilizaremos un análisis de movimiento relativo que implica dos conjuntos de ejes de coordenadas.

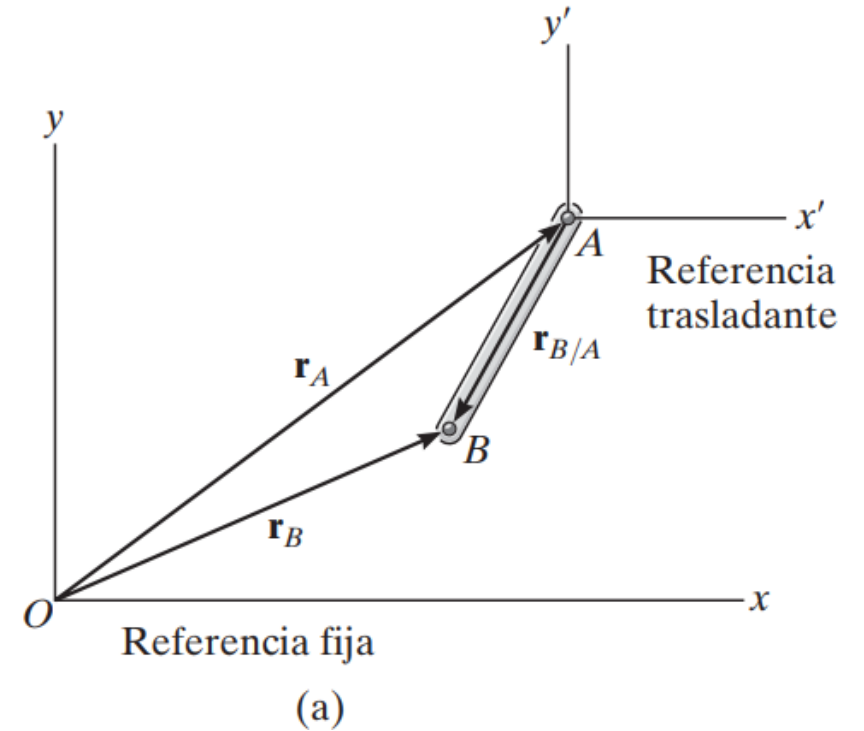
Un sistema fijo y un sistema móvil que se traslada con el cuerpo, pero no rota, dado que su origen se coloca en el *punto base*.



Posición

Posición. El vector de posición \mathbf{r}_A especifica la ubicación del punto base A y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ localiza el punto B con respecto al punto A . Del esquema, se puede observar que:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$



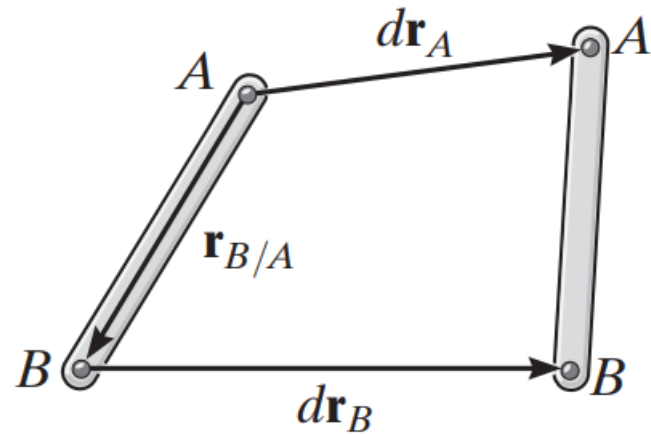
Desplazamiento

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

debido a la rotación alrededor de A

debido a la traslación de A

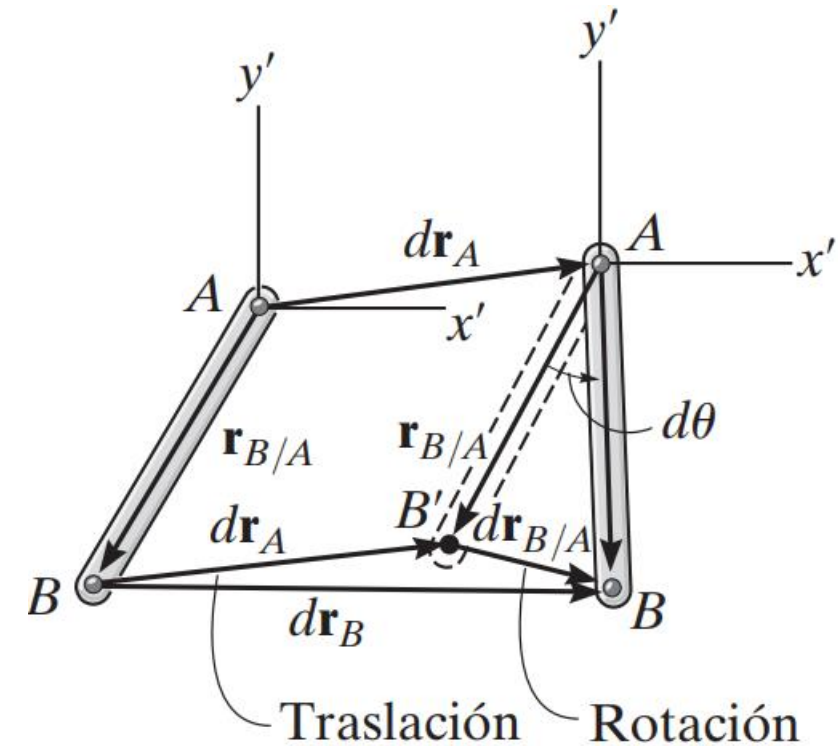
debido a la traslación y rotación



Tiempo t

Tiempo $t + dt$

Movimiento plano
general



Velocidad

Velocidad. Para determinar la relación entre las velocidades de los puntos A y B es necesario considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de posición o simplemente dividir la ecuación de desplazamiento entre dt . De esto resulta:

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

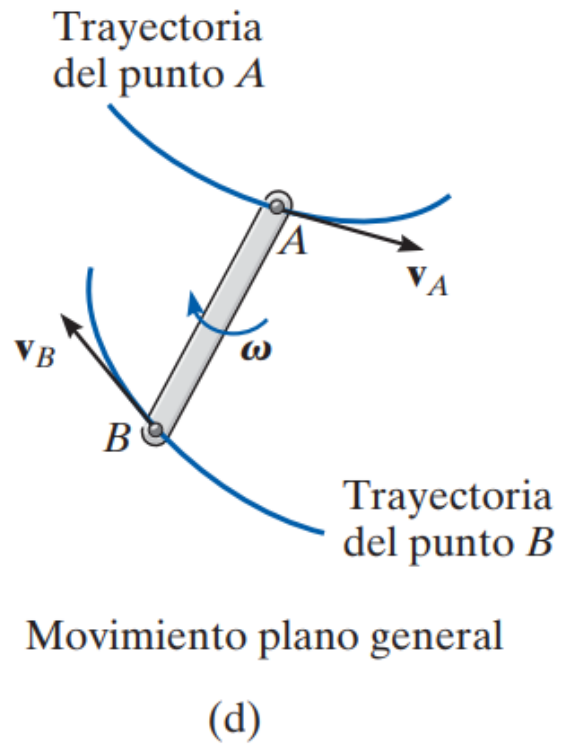
Donde:

\mathbf{v}_B : velocidad del punto B

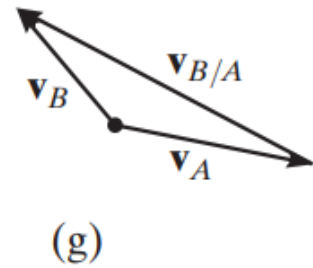
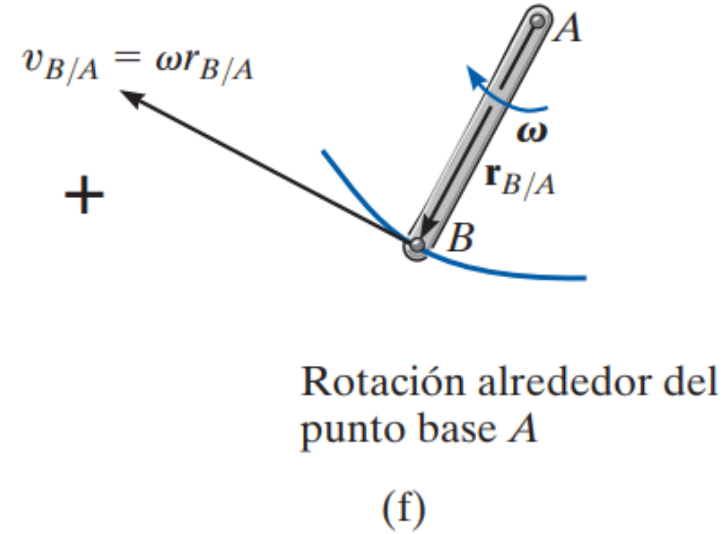
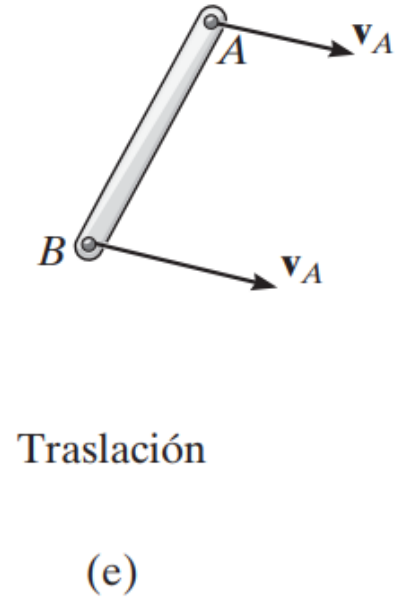
\mathbf{v}_A : velocidad del punto base A

$\mathbf{v}_{B/A}$: velocidad de B con respecto a A

Velocidad



=



Velocidad

Como la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ representa el efecto del movimiento circular, alrededor de A , este término puede expresarse por medio del producto vectorial:

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Por consiguiente, la ecuación de velocidad se puede escribir como:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

donde:

\mathbf{v}_B : velocidad del punto B

\mathbf{v}_A : velocidad del punto base A

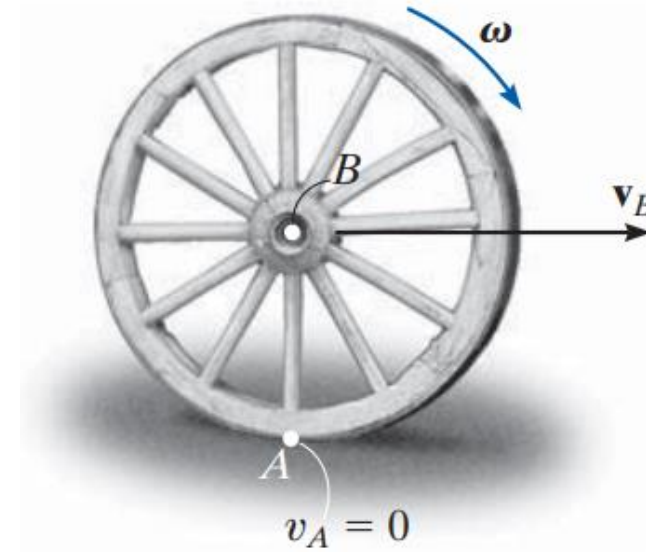
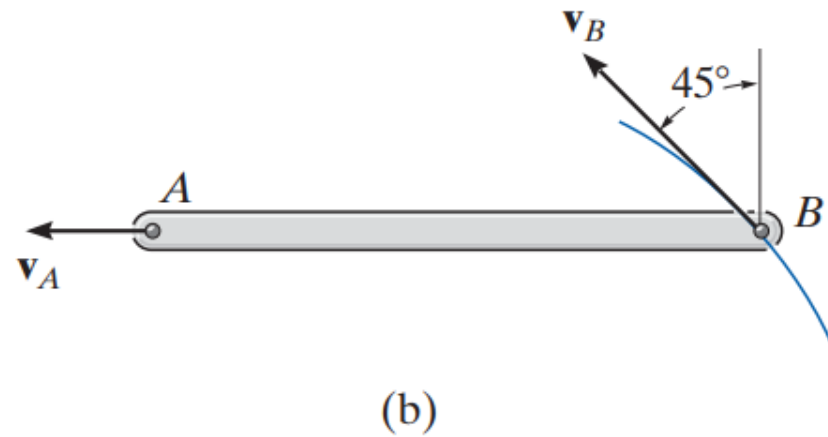
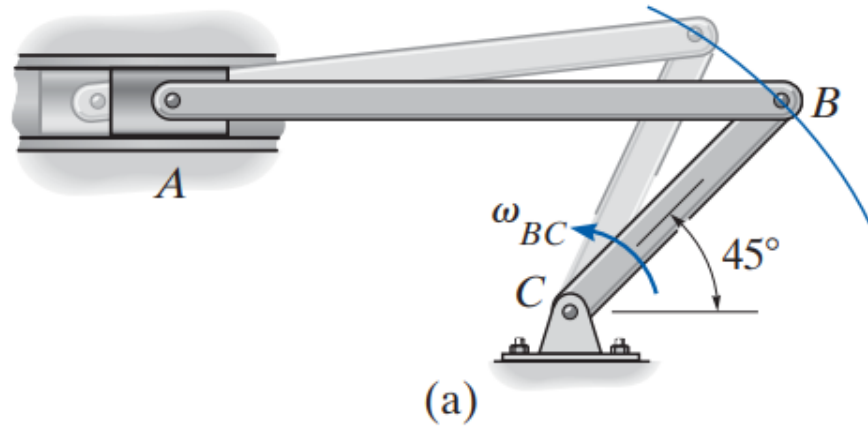
$\boldsymbol{\omega}$: velocidad angular del cuerpo

$\mathbf{r}_{B/A}$: vector de posición dirigido de A hacia B .

Velocidad

- La ecuación de velocidad relativa puede usarse de una manera práctica para estudiar el movimiento plano general de un cuerpo rígido el cual está o conectado por pasador a, o en contacto con otros cuerpos en movimiento.
- Cuando se aplica esta ecuación, los puntos A y B en general deben seleccionarse, como puntos en el cuerpo que están conectados por medio de un pasador a otros cuerpos, o como puntos en contacto con cuerpos adyacentes que tienen un movimiento conocido.

Velocidad



Procedimiento para el análisis

La ecuación de velocidad relativa puede aplicarse mediante análisis vectorial cartesiano o bien si se escriben directamente las ecuaciones de componentes escalares x y y . Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Análisis vectorial

Diagrama cinemático.

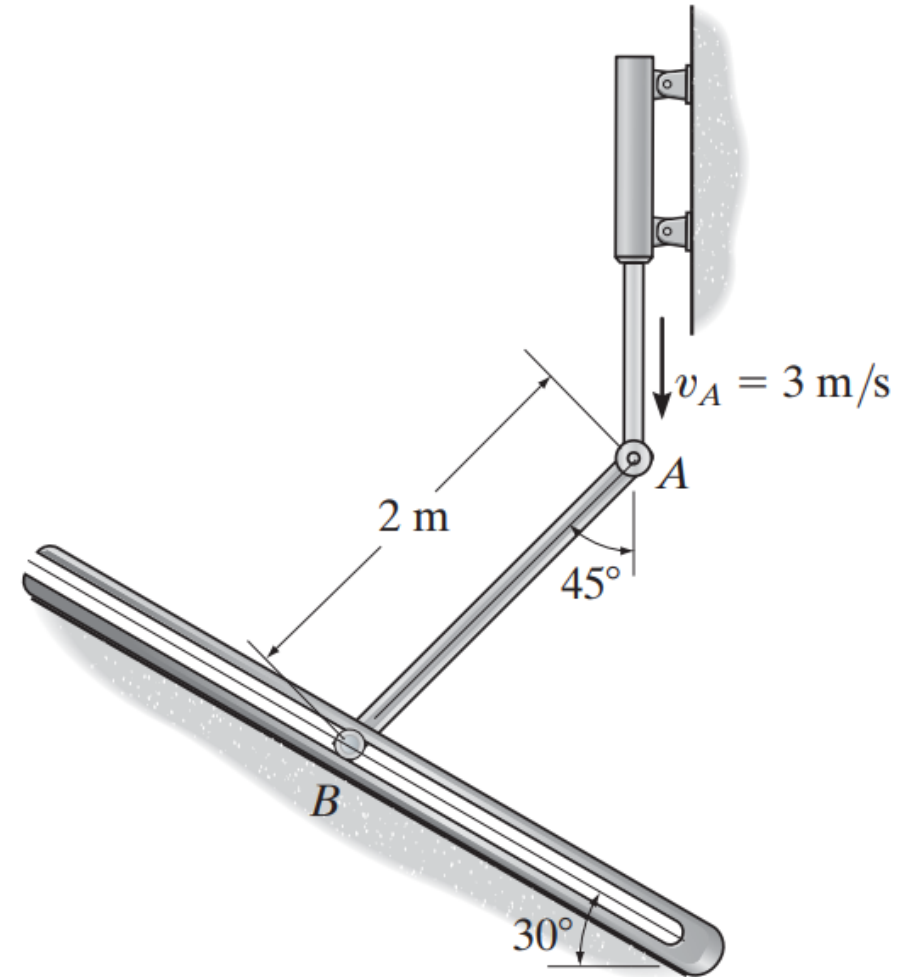
- Establezca las direcciones de las coordenadas x , y fijas y trace un diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él las velocidades \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B de los puntos A y B , la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si las magnitudes de \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B o $\boldsymbol{\omega}$ son incógnitas, puede suponerse el sentido de estos vectores.

Ecuación de velocidad.

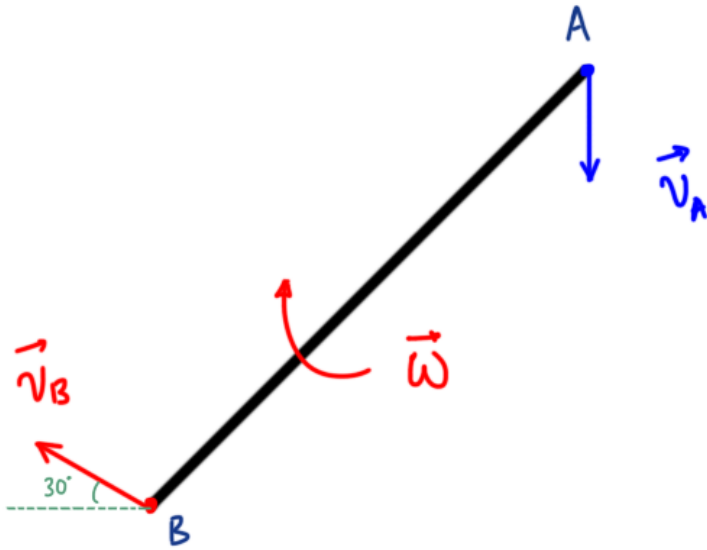
- Para aplicar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial y luego iguale los componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} respectivos para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta en una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, indica que el sentido del vector es opuesto al que se muestra en el diagrama cinemático.

Ejemplo

F16-12. La velocidad del extremo A del eslabón es $v_A = 3 \text{ m/s}$. Determine la velocidad de la clavija B en este instante. La clavija está restringida a moverse a lo largo de la ranura.



Ejemplo



Ecuación de velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Vectores de velocidad y posición:

$$\mathbf{v}_B = (-v_B \cos 30^\circ \mathbf{i} + v_B \sin 30^\circ \mathbf{j}) = (-0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_A = (-3 \mathbf{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \boldsymbol{\omega} = (-\omega \mathbf{k}) \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = (-1.4142 \mathbf{i} - 1.4142 \mathbf{j}) \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad relativa:

$$(-0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) = (-3 \mathbf{j}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ -1.4142 & -1.4142 & 0 \end{vmatrix}$$

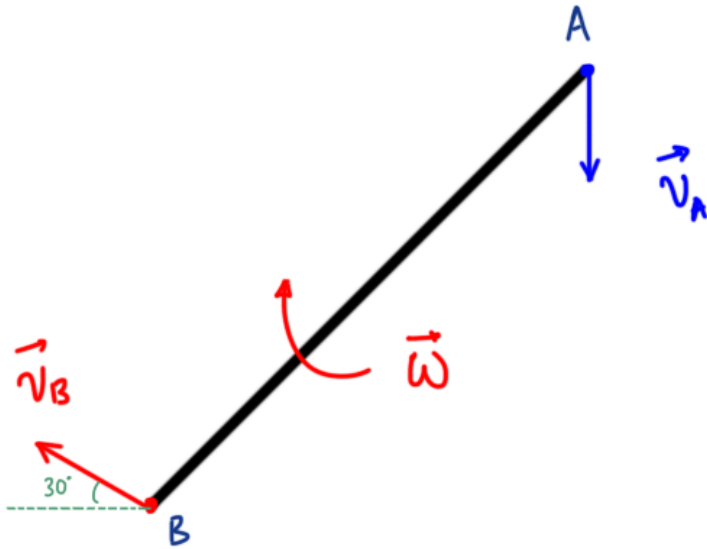
$$(-0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) = (-3 \mathbf{j}) + (-1.4142\omega \mathbf{i} + 1.4142\omega \mathbf{j})$$

Ecuaciones escalares:

$$\text{Comp. } \mathbf{i} \rightarrow -0.866 v_B = -1.4142\omega \quad \dots (i)$$

$$\text{Comp. } \mathbf{j} \rightarrow 0.5 v_B = -3 + 1.4142\omega \quad \dots (ii)$$

Ejemplo



Ecuaciones escalares:

$$\text{Comp. i} \rightarrow -0.866 v_B = -1.4142\omega \quad \dots (i)$$

$$\text{Comp. j} \rightarrow 0.5 v_B = -3 + 1.4142\omega \quad \dots (ii)$$

Despejando v_B de (i) y (ii) e igualando:

$$\frac{1.4142\omega}{0.866} = \frac{-3 + 1.4142\omega}{0.5}$$

$$1.633\omega = -6 + 2.828\omega$$

$$\omega = 5.021 \text{ rad/s}$$

Resolviendo para v_B :

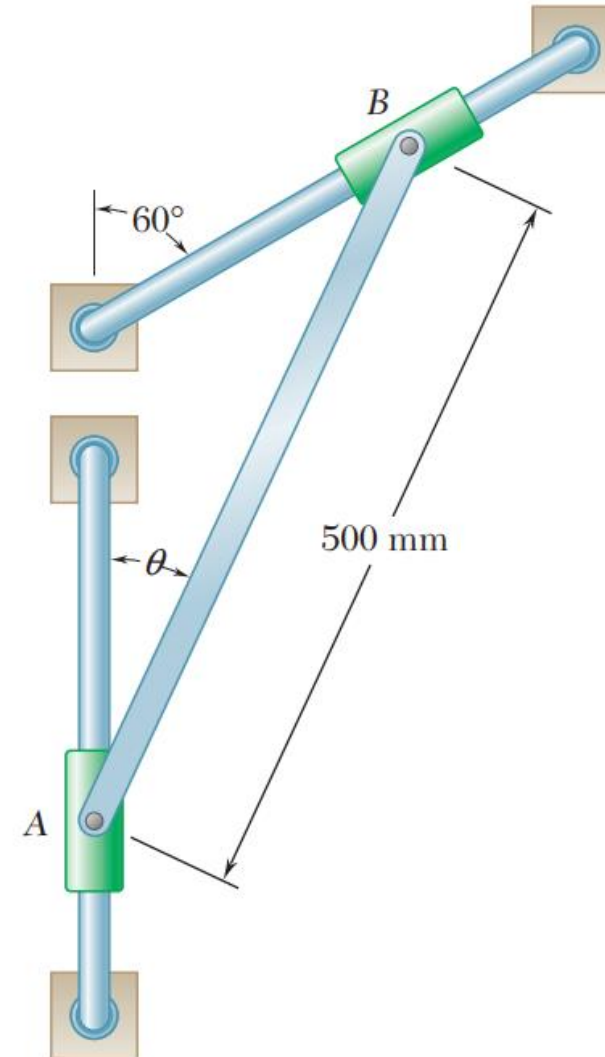
$$v_B = 1.633(5.021) = 8.2 \text{ m/s}$$

Entonces la velocidad de la clavija B está dada por:

$$\mathbf{v}_B = (-7.1 \mathbf{i} + 4.1 \mathbf{j}) \text{ m/s}$$

Ejemplo

15.41 El collarín A se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 1.2 m/s. En el instante mostrado cuando $\theta = 25^\circ$, determine $a)$ la velocidad angular de la varilla AB , $b)$ la velocidad del collarín B .



Ejemplo

Ecuación de velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Vectores de velocidad y posición:

$$\mathbf{v}_A = (1.2 \mathbf{j}) \text{ m/s}; \quad \mathbf{v}_B = (0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega \mathbf{k}) \text{ rad/s}; \quad \mathbf{r}_{B/A} = (0.2113 \mathbf{i} + 0.4532 \mathbf{j}) \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad relativa:

$$(0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) = (1.2 \mathbf{j}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0.2113 & 0.4532 & 0 \end{vmatrix}$$

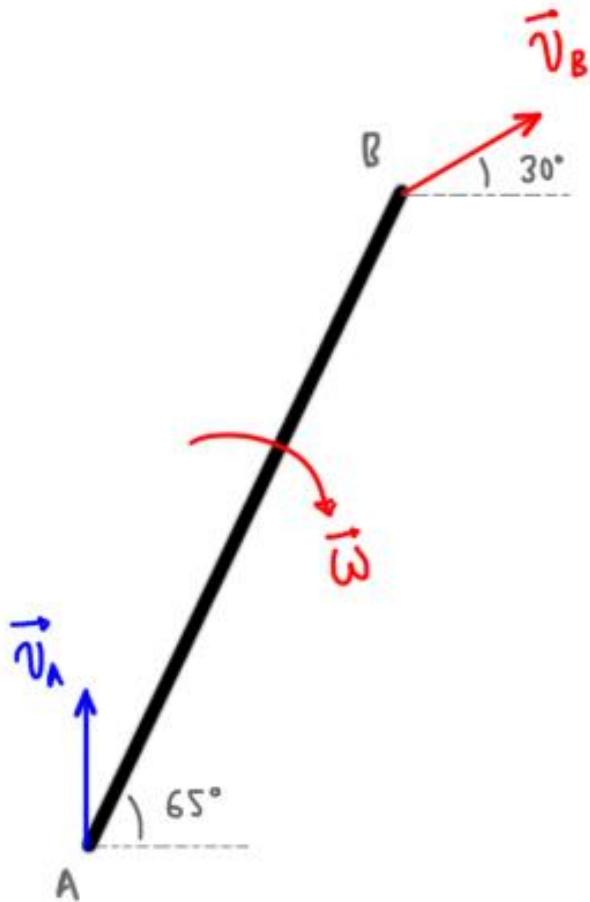
$$(0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) = (1.2 \mathbf{j}) + (0.4532\omega \mathbf{i} - 0.2113\omega \mathbf{j})$$

$$(0.866v_B \mathbf{i} + 0.5v_B \mathbf{j}) = (0.4532\omega)\mathbf{i} + (1.2 - 0.2113\omega)\mathbf{j}$$

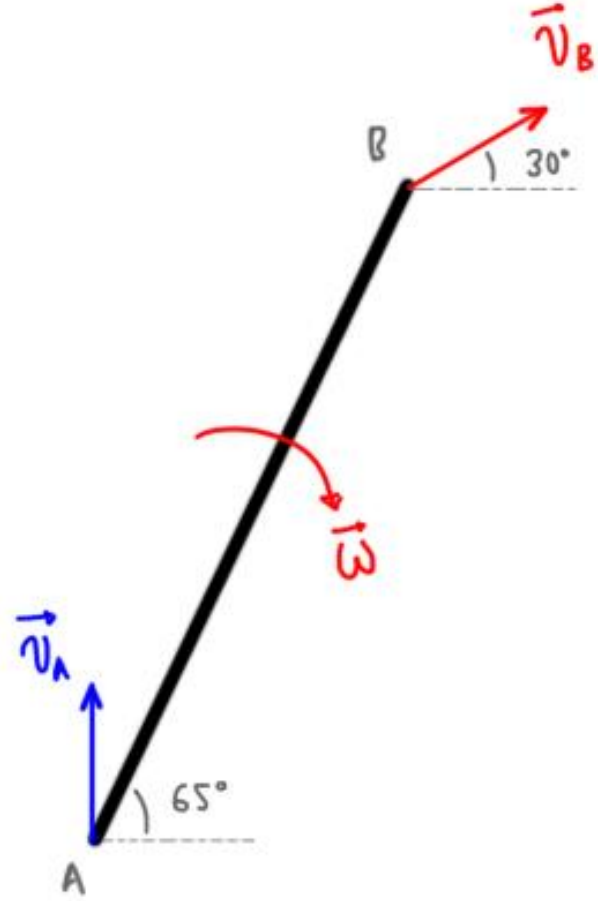
Escribiendo las ecuaciones escalares:

$$\text{Comp. } \mathbf{i} \rightarrow 0.866v_B = 0.4532\omega \quad \dots (i)$$

$$\text{Comp. } \mathbf{j} \rightarrow 0.5v_B = 1.2 - 0.2113\omega \quad \dots (ii)$$



Ejemplo



Escribiendo las ecuaciones escalares:

$$\text{Comp. i} \rightarrow 0.866v_B = 0.4532\omega \quad \dots (i)$$

$$\text{Comp. j} \rightarrow 0.5v_B = 1.2 - 0.2113\omega \quad \dots (ii)$$

Despejando v_B de (i) y (ii) e igualando:

$$\frac{0.4532\omega}{0.866} = \frac{1.2 - 0.2113\omega}{0.5}$$

$$0.5233\omega = 2.4 - 0.4226\omega$$

$$\omega = \frac{2.4}{0.5233 + 0.4226} = 2.537 \text{ rad/s}$$

$$v_B = 0.5233\omega = 0.5233(2.537) = 1.328 \text{ m/s}$$

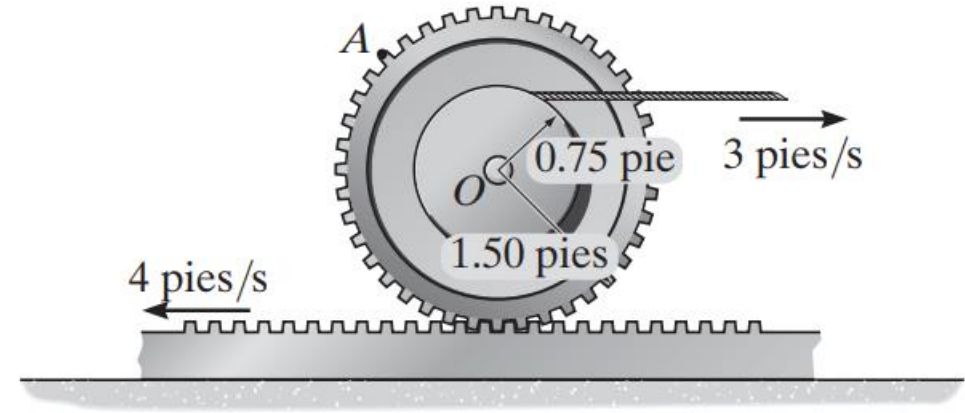
Resultados:

$$\omega = 2.537 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

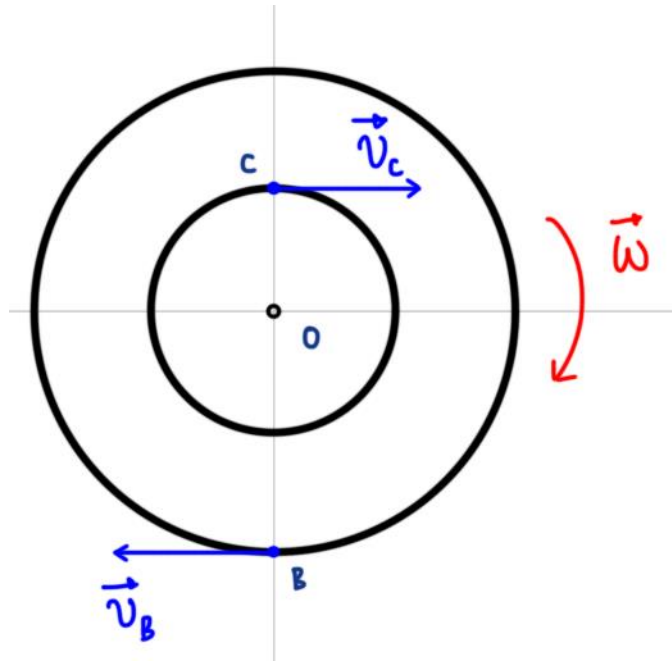
$$\vec{v}_B = (1.15 \mathbf{i} + 0.664 \mathbf{j}) \text{ m/s}$$

Ejemplo

16-59. Determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro O en el instante que se muestra.



Ejemplo



Ecuación de velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$\mathbf{v}_B = (-4 \mathbf{i}) \text{ ft/s}; \quad \mathbf{v}_C = (3 \mathbf{i}) \text{ ft/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (-\omega \mathbf{k}) \text{ rad/s}; \quad \mathbf{r}_{B/C} = (-2.25 \mathbf{j}) \text{ ft}$$

Sustituyendo:

$$(-4 \mathbf{i}) = (3 \mathbf{i}) + (-\omega \mathbf{k}) \times (-2.25 \mathbf{j})$$

$$(-4 \mathbf{i}) = (3 \mathbf{i}) + (-2.25\omega \mathbf{i})$$

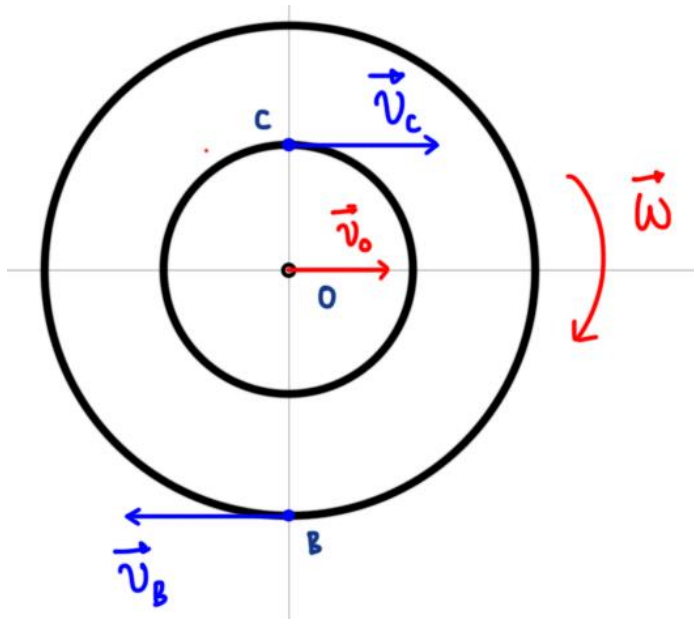
Escribiendo la ecuación escalar y resolviendo para ω :

$$-4 = 3 - 2.25\omega$$

$$\omega = \frac{4 + 3}{2.25} = 3.111 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 3.111 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

Ejemplo



Ecuación de velocidad relativa:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O/B}$$

$$\mathbf{v}_B = (-4 \mathbf{i}) \text{ ft/s}; \quad \boldsymbol{\omega} = (-3.111 \mathbf{k}) \text{ rad/s}; \quad \mathbf{r}_{O/B} = (1.5 \mathbf{j}) \text{ ft}$$

Sustituyendo:

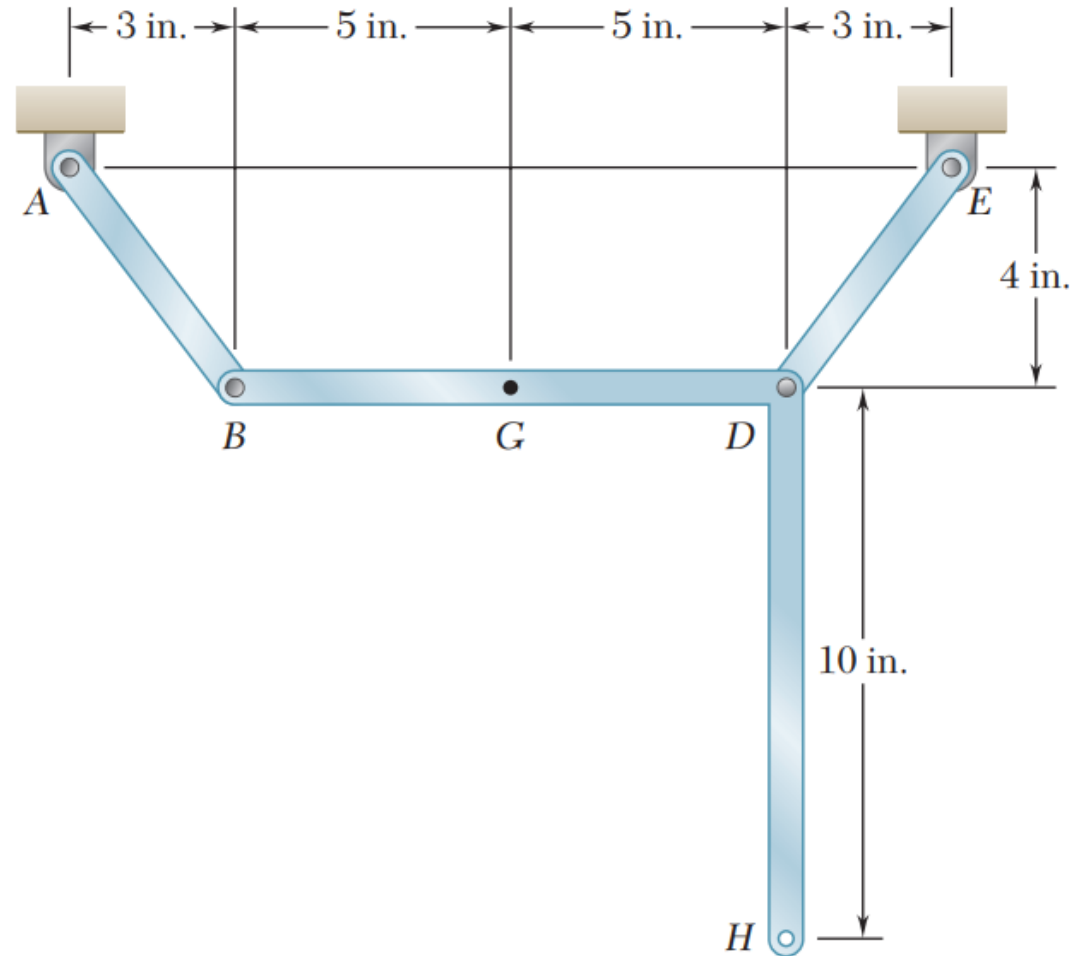
$$\mathbf{v}_O = (-4 \mathbf{i}) + (-3.111 \mathbf{k}) \times (1.5 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_O = (-4 \mathbf{i}) + (4.667 \mathbf{i})$$

$$\mathbf{v}_O = (0.667 \mathbf{i}) \text{ ft/s}$$

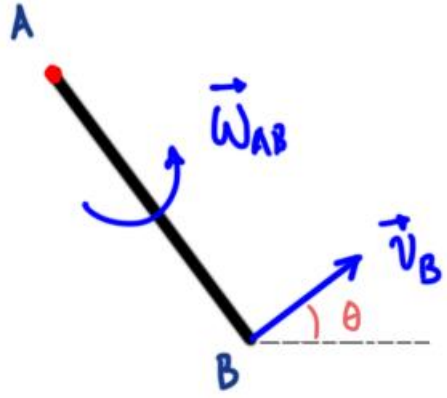
Ejemplo

15.68 En la posición mostrada, la barra AB tiene aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine $a)$ la velocidad angular del elemento BDH , $b)$ la velocidad del punto G .



Ejemplo

Analizando la barra AB para determinar \mathbf{v}_B :



$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (80 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j}) \text{ in/s}$$

Analizando el elemento BDH:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BDH} \times \mathbf{r}_{D/B}$$

Vectores de velocidad y posición:

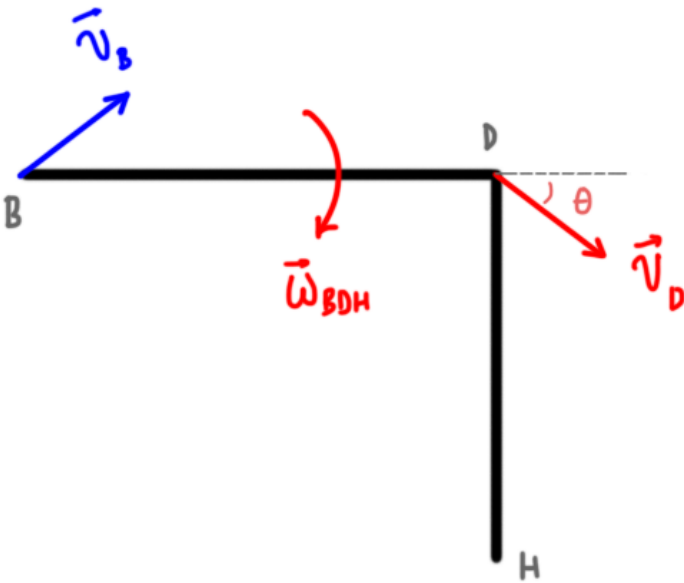
$$\mathbf{v}_D = (0.8v_D \mathbf{i} - 0.6v_D \mathbf{j}) \text{ in/s}; \quad \boldsymbol{\omega}_{BDH} = (-\omega_{BDH} \mathbf{k}) \text{ rad/s}; \quad \mathbf{r}_{D/B} = (10 \mathbf{i}) \text{ in}$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad relativa:

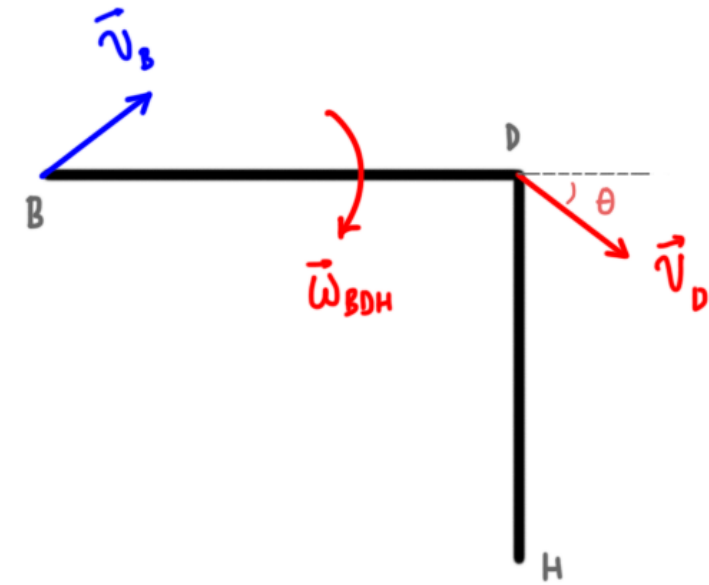
$$(0.8v_D \mathbf{i} - 0.6v_D \mathbf{j}) = (80 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega_{BDH} \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(0.8v_D \mathbf{i} - 0.6v_D \mathbf{j}) = (80 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j}) + (-10\omega_{BDH} \mathbf{j})$$

$$(0.8v_D \mathbf{i} - 0.6v_D \mathbf{j}) = (80)\mathbf{i} + (60 - 10\omega_{BDH})\mathbf{j}$$



Ejemplo



$$(0.8v_D \mathbf{i} - 0.6v_D \mathbf{j}) = (80)\mathbf{i} + (60 - 10\omega_{BDH})\mathbf{j}$$

Escribiendo las ecuaciones escalares:

$$\text{Comp. } \mathbf{i} \rightarrow 0.8v_D = 80 \quad \dots (i)$$

$$\text{Comp. } \mathbf{j} \rightarrow -0.6v_D = 60 - 10\omega_{BDH} \quad \dots (ii)$$

De (i):

$$v_D = \frac{80}{0.8} = 100 \text{ in/s}$$

De (ii):

$$\omega_{BDH} = \frac{60 + 0.6(100)}{10} = 12 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{BDH} = 12 \text{ rad/s} \quad \curvearrowright$$

Calculando \mathbf{v}_G :

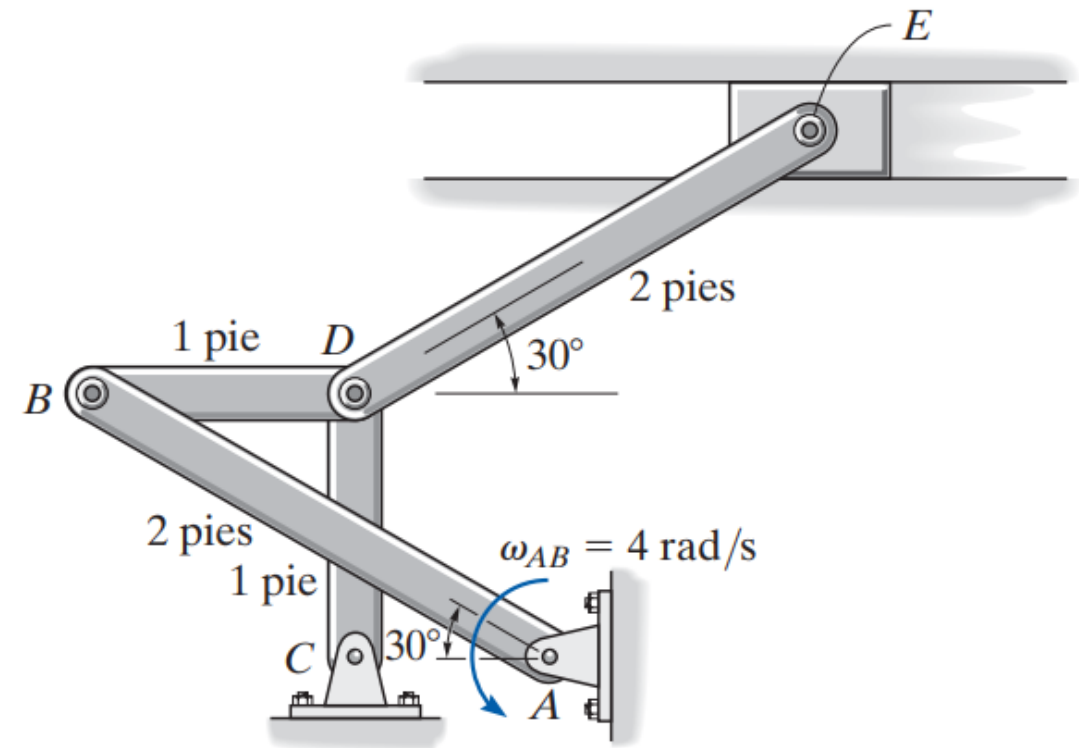
$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BDH} \times \mathbf{r}_{G/B} = (80 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j}) + (-12 \mathbf{k}) \times (5 \mathbf{i})$$

$$\mathbf{v}_G = (80 \mathbf{i} + 60 \mathbf{j}) + (-60 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_G = (80 \mathbf{i}) \text{ in/s}$$

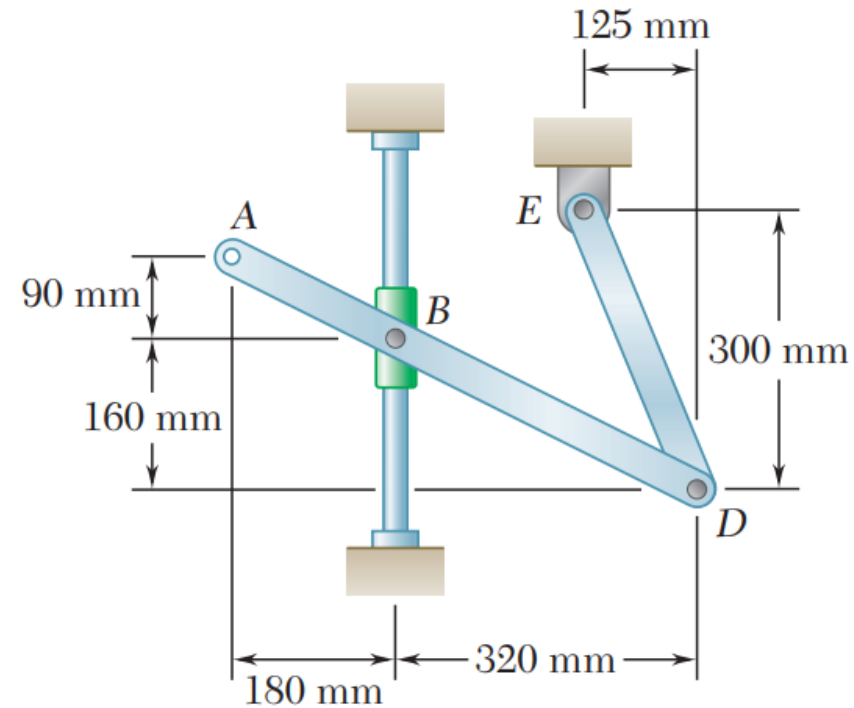
Ejemplo

•**16-73.** Si la velocidad angular del eslabón AB es $\omega_{AB} = 4 \text{ rad/s}$ en el instante que se muestra, determine la velocidad del bloque corredizo E en este instante. También, identifique el tipo de movimiento de cada uno de los cuatro eslabones.



Ejemplo

15.90 El brazo ABD se une mediante pasadores a un collarín en B y a la manivela DE . Si la velocidad del collarín B es de 400 mm/s hacia arriba, determine $a)$ la velocidad angular del brazo ABD , $b)$ la velocidad del punto A .



Referencias

Toda la información (texto y figuras) en estas diapositivas ha sido obtenida de las referencias listadas enseguida.

- Hibbeler, R.C. (2010). *Ingeniería mecánica – Dinámica*. Pearson Educación.
- Beer, F.P., Johnston, E.R., Mazurek, D.F. y Eisenberg, E.R. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros, dinámica*. McGraw-Hill.