6.2 Método de nodos

Para analizar o diseñar una armadura, es necesario determinar la fuerza en cada uno de sus elementos. Una forma de hacer esto consiste en emplear el método de nodos. Este método se basa en el hecho de que toda la armadura está en equilibrio, entonces cada uno de sus nodos también está en equilibrio. Por lo tanto, si se traza el diagrama de cuerpo libre de cada nodo, se pueden usar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para obtener las fuerzas de los elementos que actúan sobre cada nodo. Como los elementos de una *armadura plana* son elementos rectos de dos fuerzas que se encuentran en el mismo plano, cada nodo está sometido a un sistema de fuerzas que es *coplanar y concurrente*. En consecuencia, sólo es necesario satisfacer $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para garantizar el equilibrio.

Por ejemplo, considere el pasador situado en el nodo B de la armadura que aparece en la figura 6-7*a*. Sobre el pasador actúan tres fuerzas, a saber, la fuerza de 500 N y las fuerzas ejercidas por los elementos BA y BC. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6-7*b*. Aquí, $\mathbf{F}_{BA}$ está "jalando" el pasador, lo que significa que el elemento BA está en *tensión*; mientras que $\mathbf{F}_{BC}$ está "empujando" el pasador, y en consecuencia, el miembro BC está en *compresión*. Estos efectos se demuestran claramente al aislar el nodo con pequeños segmentos del elemento conectado al pasador, figura 6-7*c*. El jalón o el empujón sobre esos pequeños segmentos indican el efecto del elemento que está en compresión o en tensión.

Cuando se usa el método de los nodos, siempre se debe comenzar en un nodo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho dos fuerzas desconocidas, como en la figura 6-7*b*. De esta manera, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ resulta en dos ecuaciones algebraicas de las cuales se pueden despejar las dos incógnitas. Al aplicar esas ecuaciones, el sentido correcto de una fuerza de elemento desconocida puede determinarse con uno de dos posibles métodos.

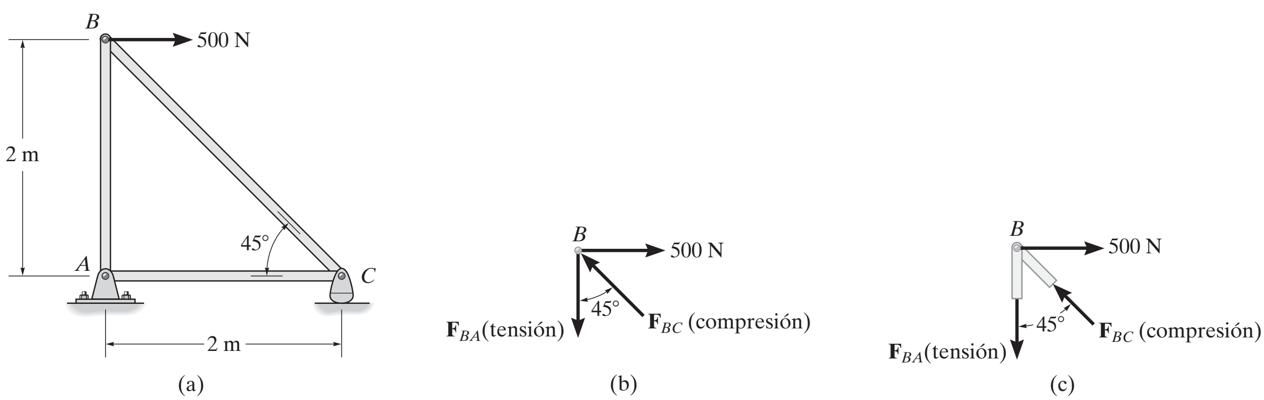


Fig. 6-7

- El sentido *correcto* de la dirección de una fuerza desconocida de un elemento puede determinarse, en muchos casos, "por inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ en la figura 6-7*b* debe empujar sobre el pasador (compresión) ya que su componente horizontal, F_{BC} sen 45°, debe equilibrar la fuerza de 500 N ($\Sigma F_x = 0$). De la misma manera, $\mathbf{F}_{BA}$ es una fuerza de tensión ya que equilibra a la componente vertical, F_{BC} cos 45° ($\Sigma F_y = 0$). En casos más complicados, el sentido de la fuerza desconocida de un elemento puede *suponerse*; luego, después de aplicar las ecuaciones de equilibrio, el sentido supuesto puede verificarse a partir de los resultados numéricos. Una respuesta *positiva* indica que el sentido es *correcto*, mientras que una respuesta *negativa* indica que el sentido mostrado en el diagrama de cuerpo libre se debe *invertir*.
- *Suponga siempre* que las *fuerzas desconocidas en los elementos* que actúan en el diagrama de cuerpo libre del nodo están en *tensión*; es decir, las fuerzas "jalan" el pasador. Si se hace así, entonces la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio darán *escalares positivos para elementos en tensión y escalares negativos para elementos en compresión*. Una vez que se encuentre la fuerza desconocida de un elemento, aplique su magnitud y su sentido *correctos* (T o C) en los subsecuentes diagramas de cuerpo libre de los nodos.

Las fuerzas en los elementos de esta armadura sencilla para techo pueden determinarse por el método de nodos.

6

Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para analizar una armadura con el método de nodos.

- Trace el diagrama de cuerpo libre de un nodo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho dos fuerzas desconocidas. (Si este nodo está en uno de los soportes, entonces puede ser necesario calcular las reacciones externas en los soportes de la armadura).
- Use uno de los dos métodos descritos antes para establecer el sentido de una fuerza desconocida.
- Oriente los ejes x y y de manera que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan descomponerse fácilmente en sus componentes x y y, y luego aplique las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Despeje las dos fuerzas de elemento desconocidas y verifique su sentido correcto.
- Con los resultados obtenidos, continúe con el análisis de cada uno de los otros nodos. Recuerde que un elemento en *compresión* "empuja" el nodo y un elemento en *tensión* "jala" el nodo. Además, asegúrese de seleccionar un nodo que tenga cuando mucho dos incógnitas y por lo menos una fuerza conocida.

EJEMPLO 6.1

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura mostrada en la figura 6-8*a* e indique si los elementos están en tensión o en compresión.

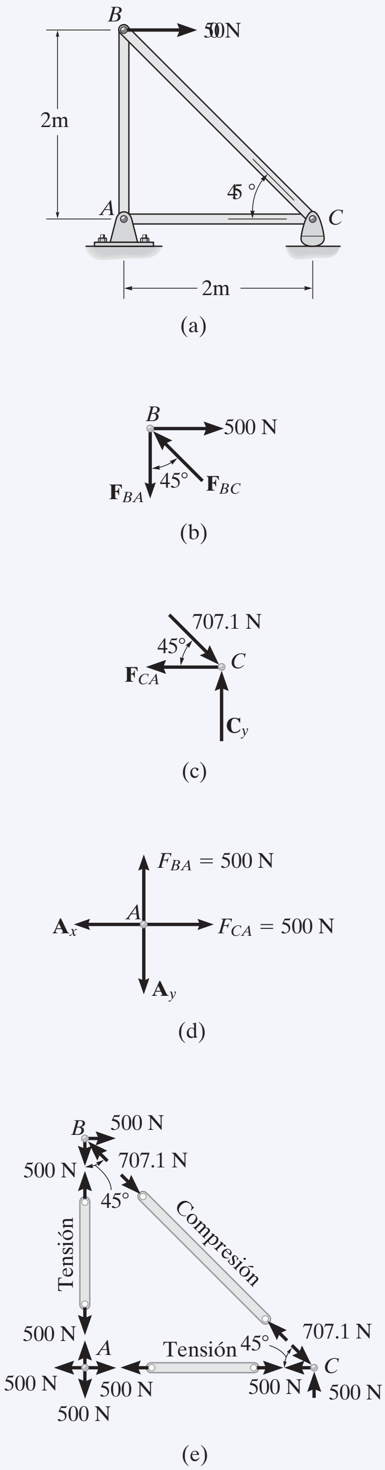


Fig. 6-8

SOLUCIÓN

Como no debemos tener más de dos incógnitas en el nodo y por lo menos contar con una fuerza conocida actuando ahí, comenzaremos el análisis en el nodo *B*.

Nodo *B*. El diagrama de cuerpo libre del nodo en *B* se muestra en la figura 6-8*b*. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 500\text{ N} - F_{BC} \operatorname{sen} 45^\circ = 0 \quad F_{BC} = 707.1\text{ N (C)} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 500\text{ N (T)} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como se ha calculado la fuerza en el elemento *BC*, podemos proceder a analizar el nodo *C* para determinar la fuerza en el elemento *CA* y la reacción en el soporte del rodillo.

Nodo *C*. A partir del diagrama de cuerpo libre del nodo *C*, figura 6.8*c*, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad -F_{CA} + 707.1 \cos 45^\circ\text{ N} = 0 \quad F_{CA} = 500\text{ N (T)} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad C_y - 707.1 \operatorname{sen} 45^\circ\text{ N} = 0 \quad C_y = 500\text{ N} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Nodo *A*. Aunque no es necesario, podemos determinar las componentes de las reacciones de soporte en el nodo *A* mediante los resultados de F_{CA} y F_{BA}. A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 6-8*d*, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 500\text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 500\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 500\text{ N} - A_y = 0 \quad A_y = 500\text{ N}$$

NOTA: los resultados del análisis se resumen en la figura 6-8*e*. Observe que el diagrama de cuerpo libre de cada nodo (o pasador) muestra los efectos de todos los elementos conectados y las fuerzas externas aplicadas al nodo, en tanto que el diagrama de cuerpo libre de cada elemento sólo muestra los efectos de los pasadores de los extremos en el elemento.

EJEMPLO 6.2

Determine la fuerza que actúa en cada uno de los elementos de la armadura que se muestra en la figura 6-9*a*; además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.

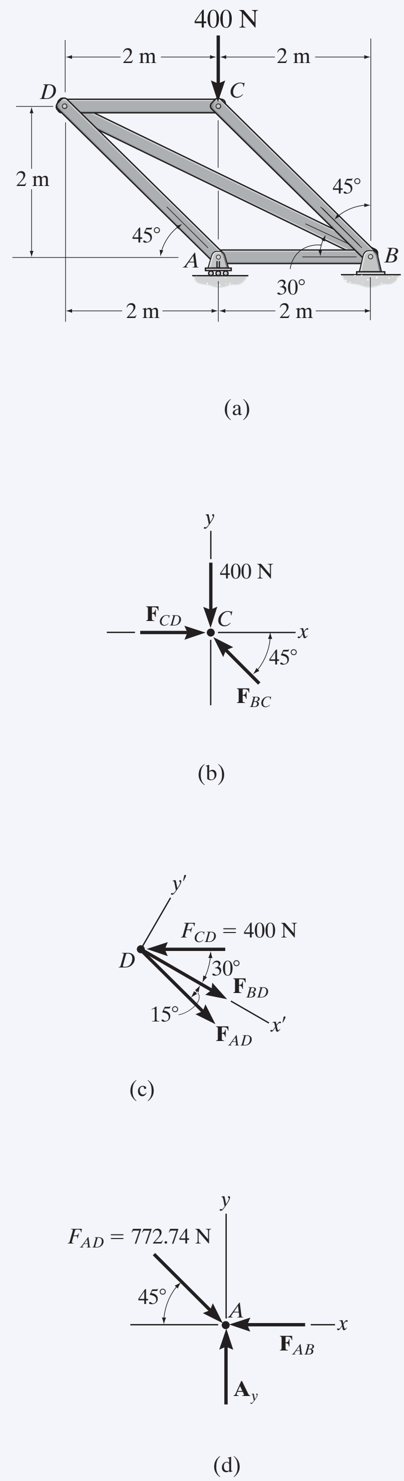


Fig. 6-9

SOLUCIÓN

Como el nodo C tiene una fuerza conocida y sólo dos fuerzas desconocidas que actúan sobre él, es posible comenzar en este punto, después analizar el nodo D y por último el nodo A. De esta forma las reacciones de soporte no tendrán que determinarse antes de comenzar el análisis.

Nodo *C*. Por inspección del equilibrio de fuerzas, figura 6-9*b*, se puede observar que ambos elementos BC y CD deben estar en compresión.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{BC} \text{ sen } 45° - 400 \text{ N} = 0$$

$$F_{BC} = 565.69 \text{ N} = 566 \text{ N (C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{CD} - (565.69 \text{ N}) \cos 45° = 0$$

$$F_{CD} = 400 \text{ N (C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Nodo *D*. Con el resultado $F_{CD} = 400$ N (C), la fuerza en los elementos BD y AD puede encontrarse al analizar el equilibrio del nodo D. Supondremos que tanto $\mathbf{F}_{AD}$ como $\mathbf{F}_{BD}$ son fuerzas de tensión, figura 6-9*c*. El sistema coordenado x', y' se establecerá de modo que el eje x' esté dirigido a lo largo de $\mathbf{F}_{BD}$. De esta manera, eliminaremos la necesidad de resolver dos ecuaciones simultáneamente. Ahora $\mathbf{F}_{AD}$ se puede obtener *directamente* al aplicar $\Sigma F_{y'} = 0$.

$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \qquad -F_{AD} \text{ sen } 15° - 400 \text{ sen } 30° = 0$$

$$F_{AD} = -772.74 \text{ N} = 773 \text{ N (C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_{AD}$ es una fuerza de compresión. Con este resultado,

$$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad F_{BD} + (-772.74 \cos 15°) - 400 \cos 30° = 0$$

$$F_{BD} = 1092.82 \text{ N} = 1.09 \text{ kN (T)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Nodo *A*. La fuerza en el elemento AB puede encontrarse al analizar el equilibrio del nodo A, figura 6-9*d*. Tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad (772.74 \text{ N}) \cos 45° - F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = 546.41 \text{ N (C)} = 546 \text{ N (C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

6

EJEMPLO 6.3

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura mostrada en la figura 6-10*a*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

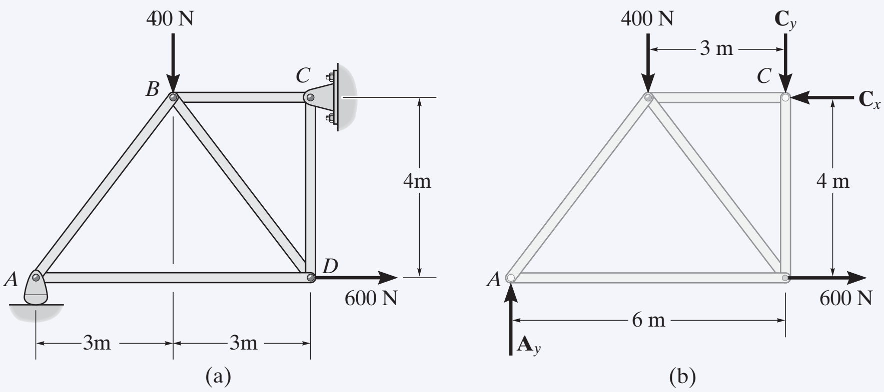


Fig. 6-10

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. No se puede analizar ningún nodo hasta que se hayan determinado las reacciones en los soportes, porque cada nodo tiene más de tres fuerzas desconocidas que actúan sobre él. En la figura 6-10*b* se presenta un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

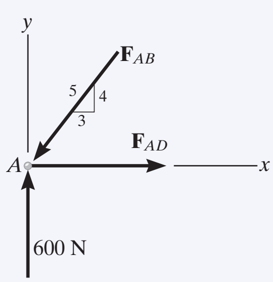
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 600\text{ N} - C_x = 0 \qquad C_x = 600\text{ N}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \qquad -A_y(6\text{ m}) + 400\text{ N}(3\text{ m}) + 600\text{ N}(4\text{ m}) = 0$$

$$A_y = 600\text{ N}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 600\text{ N} - 400\text{ N} - C_y = 0 \qquad C_y = 200\text{ N}$$

El análisis puede empezar ahora en cualquiera de los nodos *A* o *C*. La elección es arbitraria ya que hay una fuerza conocida y dos fuerzas de elemento desconocidas que actúan sobre el pasador en cada uno de esos nodos.



(c)

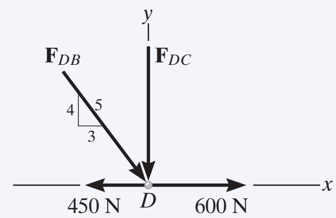
Nodo *A*. (Figura 6-10*c*). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, se supone que $\mathbf{F}_{AB}$ es una fuerza de compresión y $\mathbf{F}_{AD}$ es de tensión. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 600\text{ N} - \tfrac{4}{5}F_{AB} = 0 \qquad F_{AB} = 750\text{ N} \quad (\text{C}) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{AD} - \tfrac{3}{5}(750\text{ N}) = 0 \qquad F_{AD} = 450\text{ N} \quad (\text{T}) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Nodo *D*. (Figura 6-10*d*). Si utilizamos el resultado para F_{AD} y sumamos fuerzas en la dirección horizontal, figura 6-10*d*, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad -450 \text{ N} + \tfrac{3}{5} F_{DB} + 600 \text{ N} = 0 \quad F_{DB} = -250 \text{ N}$$



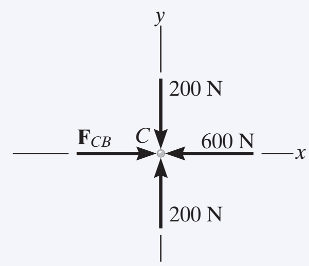
(d)

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_{DB}$ actúa en *sentido opuesto* al mostrado en la figura 6-10*d*.* Por lo tanto,

$$F_{DB} = 250 \text{ N (T)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Para determinar $\mathbf{F}_{DC}$ podemos corregir el sentido de $\mathbf{F}_{DB}$ en el diagrama de cuerpo libre y luego aplicar $\Sigma F_y = 0$, o aplicar esta ecuación y retener el signo negativo para F_{DB}, es decir,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -F_{DC} - \tfrac{4}{5}(-250 \text{ N}) = 0 \quad F_{DC} = 200 \text{ N} \quad \text{(C)} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$



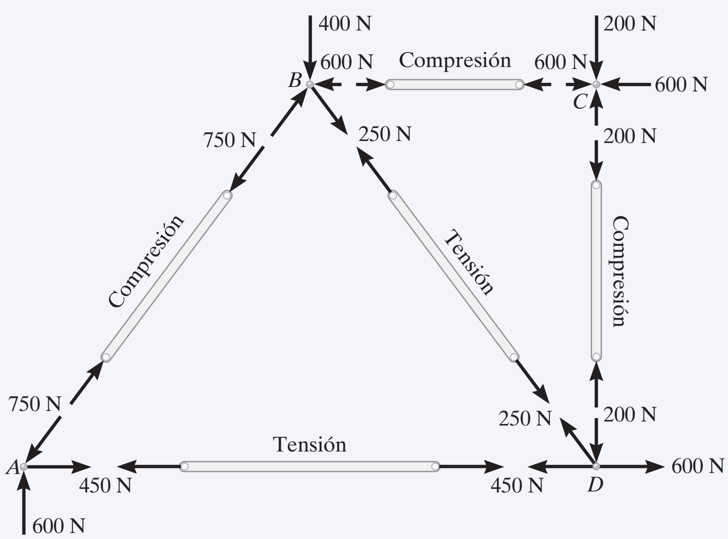
(e)

Nodo *C*. (Figura 6-10*e*).

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{CB} - 600 \text{ N} = 0 \quad F_{CB} = 600 \text{ N} \quad \text{(C)} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 200 \text{ N} - 200 \text{ N} \equiv 0 \quad \text{(comprobación)}$$

NOTA: en la figura 6-10*f* se presenta el análisis resumido, que muestra el diagrama de cuerpo libre para cada nodo y cada elemento.



(f)

*El sentido correcto podría haber sido determinado por inspección, antes de aplicar $\Sigma F_x = 0$.