

2.9 Producto punto

Algunas veces, en estática debemos localizar el ángulo entre dos líneas o las componentes de una fuerza paralela y perpendicular a una línea. En dos dimensiones, esos problemas pueden resolverse por trigonometría puesto que las relaciones geométricas son fáciles de visualizar. Sin embargo, en tres dimensiones esto suele ser difícil, y en consecuencia deben emplearse métodos vectoriales para encontrar la solución. El producto punto define un método particular para “multiplicar” dos vectores y se usa para resolver los problemas antes mencionados.

El *producto punto* de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , que se escribe $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, y se lee “ \mathbf{A} punto \mathbf{B} ”, se define como el producto de las magnitudes de \mathbf{A} y \mathbf{B} y el coseno del ángulo θ entre sus colas, figura 2-42. Expresado en forma de ecuación,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (2-12)$$

donde $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Con frecuencia, se hace referencia al producto punto como *producto escalar* de vectores puesto que el resultado es un *escalar* y no un vector.

Leyes de operación.

1. Ley conmutativa: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
2. Multiplicación por un escalar: $a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B})$
3. Ley distributiva: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$

Es fácil demostrar la primera y segunda leyes por medio de la ecuación 2-12. La demostración de la ley distributiva se deja como un ejercicio (vea el problema 2-111).

Formulación vectorial cartesiana. La ecuación 2-12 debe usarse para hallar el producto punto de cada uno de los dos vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$. Si queremos encontrar el producto punto de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} que se expresan en forma vectorial cartesiana, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_x B_y (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_x B_z (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_y B_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_y B_z (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_z B_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_z B_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Al realizar las operaciones del producto punto, el resultado final se convierte en

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2-13)$$

Por tanto, para determinar el producto punto de dos vectores cartesianos, multiplique sus componentes correspondientes x , y , z , y sume sus productos algebraicamente. Observe que el resultado será un *escalar* positivo o negativo.

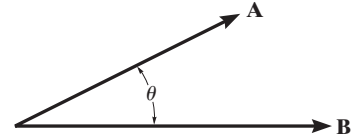
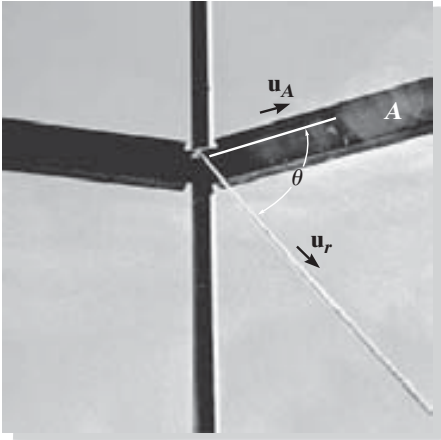


Fig. 2-42



El ángulo θ entre la cuerda y la viga de conexión puede determinarse formulando los vectores unitarios a lo largo de la viga para después usar el producto punto $\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}_r = (1)(1) \cos \theta$.

Aplicaciones. En mecánica, el producto punto tiene dos importantes aplicaciones.

- **El ángulo formado entre dos vectores o líneas que se intersecan.** El ángulo θ entre las colas de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} que se muestran en la figura 2-42 pueden determinarse mediante la ecuación 2-12 y escribirse como

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \right) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Aquí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se calcula con la ecuación 2-13. En particular, observe que si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\theta = \cos^{-1} 0 = 90^\circ$, por lo que \mathbf{A} será *perpendicular* a \mathbf{B} .

- **Las componentes de un vector paralelo y perpendicular a una línea.** La componente de un vector \mathbf{A} paralelo a, o colineal con, la línea aa' en la figura 2-43 se define por A_a , donde $A_a = A \cos \theta$. En ocasiones, a esta componente se le llama la *proyección* de \mathbf{A} sobre la línea, puesto que se forma un *ángulo recto* en la construcción. Si la *dirección* de la línea está especificada por el vector unitario \mathbf{u}_a , entonces como $u_a = 1$, podemos determinar \mathbf{A}_a directamente con el producto punto (ecuación 2-12); esto es,

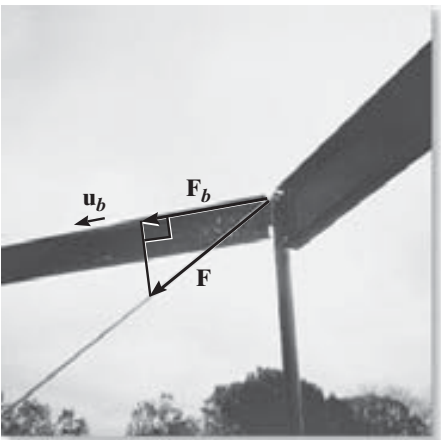
$$A_a = A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_a$$

Por consiguiente, la *proyección escalar* de \mathbf{A} a lo largo de una línea se determina con el producto punto de \mathbf{A} y el vector unitario \mathbf{u}_a que define la dirección de la línea. Observe que si este resultado es positivo, entonces \mathbf{A}_a tiene un sentido direccional que es igual al de \mathbf{u}_a , mientras que si A_a es un escalar negativo, entonces \mathbf{A}_a tiene el sentido opuesto de dirección al de \mathbf{u}_a .

Por lo tanto, la componente \mathbf{A}_a representada como un vector es

$$\mathbf{A}_a = A_a \mathbf{u}_a$$

También se puede obtener la componente de \mathbf{A} que es perpendicular a la línea aa' , figura 2-43. Como $\mathbf{A} = \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_\perp$, entonces $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_a$. Hay dos maneras posibles de obtener A_\perp . Una es determinar θ con el producto punto, $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_a / A)$, entonces $A_\perp = A \sin \theta$. De manera alternativa, si A_a es conocida, entonces por el teorema de Pitágoras también podemos escribir $A_\perp = \sqrt{A^2 - A_a^2}$.



La proyección de la fuerza \mathbf{F} del cable a lo largo de la viga puede ser determinada al determinar primero el vector unitario \mathbf{u}_b que define esta dirección. Después se aplica el producto punto, $F_b = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_b$.

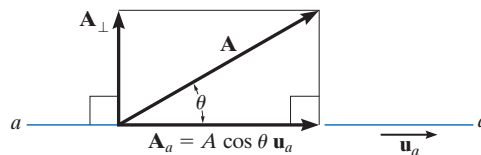


Fig. 2-43

Puntos importantes

- El producto punto se usa para determinar el ángulo entre dos vectores o la proyección de un vector en una dirección específica.
- Si los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se expresan en forma de vector cartesiano, el producto punto se determina por medio de la multiplicación de las respectivas componentes escalares x , y , z y la suma algebraica de los resultados, es decir, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.
- A partir de la definición del producto punto, el ángulo formado entre las colas de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} es $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB)$.
- La magnitud de la proyección del vector \mathbf{A} a lo largo de una línea aa cuya dirección está especificada por \mathbf{u}_a se determina a partir del producto punto $A_a = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_a$.

EJEMPLO 2.16

Determine las magnitudes de la proyección de la fuerza \mathbf{F} en la figura 2-44 sobre los ejes u y v .

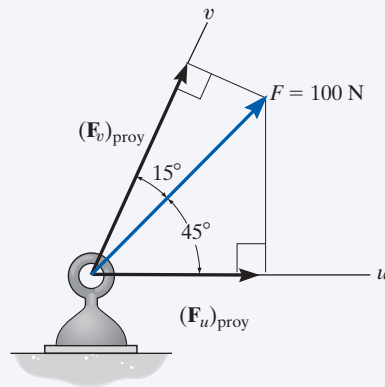


Fig. 2-44

SOLUCIÓN

Proyecciones de fuerza. En la figura 2-44 se muestra la representación gráfica de las *proyecciones*. A partir de esta figura, las magnitudes de las proyecciones de \mathbf{F} sobre los ejes u y v pueden obtenerse por trigonometría:

$$(F_u)_{\text{proy}} = (100 \text{ N}) \cos 45^\circ = 70.7 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$(F_v)_{\text{proy}} = (100 \text{ N}) \cos 15^\circ = 96.6 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

NOTA: estas proyecciones no son iguales a las magnitudes de las componentes de la fuerza \mathbf{F} a lo largo de los ejes u y v que se encontraron con la ley del paralelogramo. Sólo serán iguales si los ejes u y v son *perpendiculares* entre sí.

EJEMPLO 2.17

La estructura que se muestra en la figura 2-45a está sometida a una fuerza horizontal $\mathbf{F} = \{300\mathbf{j}\}$. Determine la magnitud de las componentes de esta fuerza paralela y perpendicular al elemento AB .

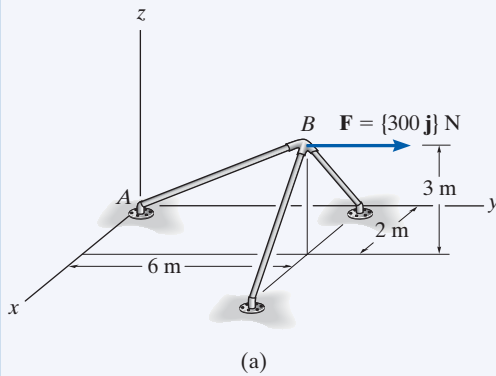
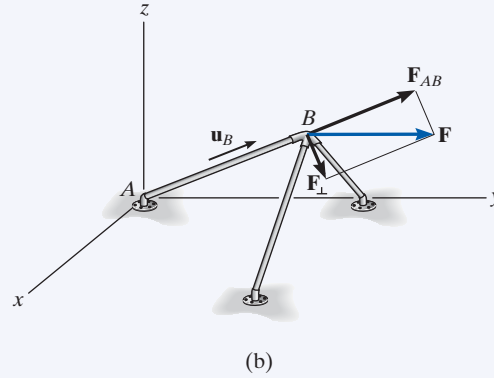


Fig 2-45



SOLUCIÓN

La magnitud de la componente de \mathbf{F} a lo largo de AB es igual al producto punto de \mathbf{F} y el vector unitario \mathbf{u}_B , el cual define la dirección de AB , figura 2-45b. Como

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{AB} &= F \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_B = (300\mathbf{j}) \cdot (0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= (0)(0.286) + (300)(0.857) + (0)(0.429) \\ &= 257.1 \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.

Como el resultado es un escalar positivo, \mathbf{F}_{AB} tiene el mismo sentido de dirección que \mathbf{u}_B , figura 2-45b.

Si se expresa \mathbf{F}_{AB} en forma de vector cartesiano, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= F_{AB}\mathbf{u}_B = (257.1 \text{ N})(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= \{73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.

Por lo tanto, la componente perpendicular, figura 2-45b, es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\perp &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}) \\ &= \{-73.5\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\} \text{ N} \end{aligned}$$

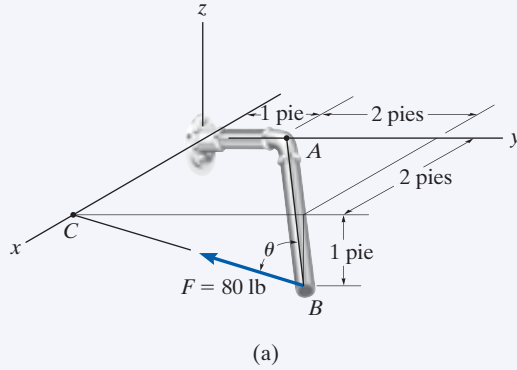
Su magnitud puede determinarse a partir de este vector o con el teorema de Pitágoras, figura 2-45b:

$$\begin{aligned} F_\perp &= \sqrt{F^2 - F_{AB}^2} = \sqrt{(300 \text{ N})^2 - (257.1 \text{ N})^2} \\ &= 155 \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 2.18

El tubo en la figura 2-46a está sometido a la fuerza $F = 80$ lb. Determine el ángulo θ entre \mathbf{F} y el segmento de tubo BA , así como la proyección de \mathbf{F} a lo largo de este segmento.

**SOLUCIÓN**

Ángulo θ . Primero estableceremos vectores de posición de B a A y de B a C ; figura 2-46b. Luego determinaremos el ángulo θ entre las colas de estos dos vectores.

$$\mathbf{r}_{BA} = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ pies}, \quad r_{BA} = 3 \text{ pies}$$

$$\mathbf{r}_{BC} = \{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ pies}, \quad r_{BC} = \sqrt{10} \text{ pies}$$

Así,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_{BA} \cdot \mathbf{r}_{BC}}{r_{BA} r_{BC}} = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{3\sqrt{10}} = 0.7379$$

$$\theta = 42.5^\circ$$

Resp.

Componentes de \mathbf{F} . En la figura 2-46b, se muestra la componente de \mathbf{F} a lo largo de BA . Debemos formular primero el vector unitario a lo largo de BA y la fuerza \mathbf{F} como vectores cartesianos.

$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{3} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = 80 \text{ lb} \left(\frac{\mathbf{r}_{BC}}{r_{BC}} \right) = 80 \left(\frac{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}}{\sqrt{10}} \right) = -75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F_{BA} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{BA} = (-75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} \right) \\ &= 0 \left(-\frac{2}{3} \right) + (-75.89) \left(-\frac{2}{3} \right) + (25.30) \left(\frac{1}{3} \right) \\ &= 59.0 \text{ lb} \end{aligned}$$

Resp.

NOTA: como se conoce θ , entonces también, $F_{BA} = F \cos \theta = 80 \text{ lb} \cos 42.5^\circ = 59.0 \text{ lb}$.

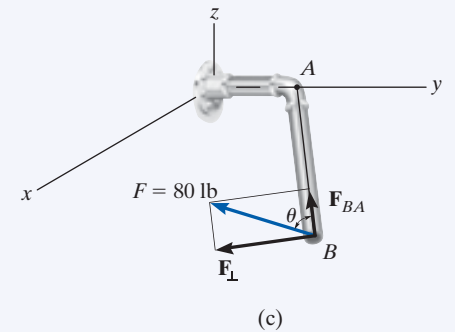
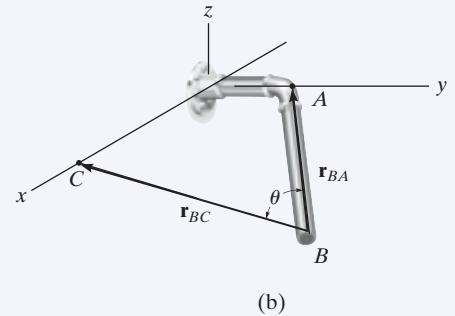


Fig. 2-46