

Cinemática y dinámica de robots

Versión 0.4.0

Pedro Jorge De Los Santos
jdelossantos@upgto.edu.mx

30 de agosto de 2024

Índice general

1. Una introducción a los manipuladores seriales	8
1.1. ¿Qué es un robot?	8
1.2. Clasificación de robots de acuerdo con su estructura mecánica	9
1.3. Algunos datos sobre los robots industriales	12
2. Posición, orientación y transformaciones homogéneas	15
2.1. Representación de la posición	15
2.2. Representación de la orientación	17
2.2.1. Matrices de rotación	18
2.2.2. Transformaciones de similitud	24
2.2.3. Composición de las rotaciones	25
2.2.4. Parametrización de las rotaciones	29
2.2.5. Ángulos de Euler	29
2.2.6. Representación eje-ángulo	34
2.2.7. Cuaterniones	34
2.3. Matrices de transformación homogénea	34
2.3.1. Matrices de transformación homogéneas básicas	36
2.3.2. Composición de las matrices de transformación homogénea	37
2.4. Matrices de transformación homogénea utilizando Python	45
3. Cinemática directa	63
3.1. Sobre cadenas cinemáticas y transformaciones	63
3.2. Diagramas cinemáticos de manipuladores seriales	65
3.3. La metodología de Denavit-Hartenberg	66
3.3.1. Estableciendo los sistemas de referencia	67
3.3.2. La obtención de los parámetros	68
3.3.3. Calculando las A_i y T_n^0	69

3.4. Espacio articular y espacio operacional	77
3.5. Problemas	78
4. Cinemática inversa	85
4.1. El método analítico	85
4.2. Cinemática inversa de posición: método geométrico	90
4.3. Desacoplo cinemático	97
4.4. Resolviendo la cinemática inversa de forma numérica	105
4.4.1. Método de Newton	105
4.4.2. Descenso del gradiente	105
5. Cinemática diferencial	111
5.1. Derivada de una matriz de rotación	111
5.2. Velocidades angulares en un manipulador serial	112
5.3. Velocidades lineales en un cuerpo rígido	117
5.4. Velocidades lineales en un manipulador serial	119
5.5. La matriz jacobiana	128
5.5.1. ¿Cómo formar la matriz jacobiana?	133
5.5.2. La matriz jacobiana de un punto del manipulador	138
5.6. El jacobiano analítico	143
5.7. Singularidades	143
5.8. Cinemática diferencial inversa	143
6. Dinámica	148
6.1. Dinámica de cuerpos rígidos	148
6.1.1. Ecuaciones de Newton-Euler	148
6.1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange	150
6.1.3. Centro de masa	155
6.1.4. Momento de inercia de masa	162
6.1.5. Productos de inercia	172
6.1.6. Ejes principales de inercia	180
6.2. Formulación de Euler-Lagrange	180
6.2.1. Energía cinética de un eslabón	181
6.2.2. Energía potencial de un eslabón	182
6.2.3. Calculando el lagrangiano	182
6.2.4. Un resumen: modelo dinámico con la formulación de Euler-Lagrange	183
6.2.5. Modelo dinámico en forma compacta	189
6.2.6. Fuerzas generalizadas	194
6.2.7. Propiedades del modelo dinámico	196
6.3. Formulación de Newton-Euler	196
6.4. Obtención del modelo dinámico utilizando Python	196

6.4.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	196
7. Generación de trayectorias	204
Apéndice A. Preliminares matemáticos	205
A.1. Matrices	205
A.2. Vectores	209
A.3. Trigonometría	211
A.4. Derivadas	216
Apéndice B. Métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales	218
B.1. Método de Euler	218
B.2. Métodos de Runge-Kutta	221
B.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden	225
B.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden	227
B.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden	228
Apéndice C. Una breve introducción a Python	233
C.1. Fundamentos del lenguaje	233
C.2. Una introducción a NumPy	244
C.3. Graficando con Matplotlib	244
C.4. Álgebra simbólica con SymPy	245
Apéndice D. Respuestas a ejercicios seleccionados	251

La versión actual de este documento es un borrador incompleto e inconexo en algunas secciones, sin una revisión exhaustiva del contenido. Tome sus precauciones al respecto.

La última versión de estos apuntes puede descargarlos desde el siguiente enlace:

https://jorgedelossantos.github.io/files/pdf/apuntes_cir_dir.pdf

Introducción

Estos apuntes se han elaborado con la finalidad de servir como una referencia rápida para los alumnos de los cursos de Cinemática de Robots y Dinámica de Robots de la Universidad Politécnica de Guanajuato, para sumar a su formación conocimientos sólidos en materia del análisis de manipuladores seriales.

La idea de este texto es proporcionar contenido que sea *digerible* para el alumno, incluyendo ejemplos, ejercicios, ejercicios para resolver con la computadora, videos, animaciones, entre otros recursos, que le ayuden a asimilar los temas correspondientes de una mejor manera.

Sobre la notación

A continuación se listan y describen una serie de convenciones y notación a utilizar en el desarrollo del texto:

- Las cantidades vectoriales son representadas mediante letras en negritas, por ejemplo: **u**, **v**, **A** y **B**.
- Se utilizan paréntesis para numerar las juntas o articulaciones, corchetes para los eslabones y llaves para los sistemas de referencia. Ejemplo: *El sistema de referencia {3} está adherido al eslabón [3] y su eje z apunta en la dirección de accionamiento de la junta (4) .*
- R_n^m denota una matriz de rotación que describe la orientación del sistema $\{n\}$ con respecto a $\{m\}$.
- T_n^m denota una matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema $\{n\}$ con respecto a $\{m\}$.
- \mathbf{p}^i representa el vector **p** descrito en el sistema de referencia $\{i\}$.

- J denota el jacobiano geométrico de un manipulador.
- J_a denota el jacobiano analítico de un manipulador.
- $\omega_{m,n}^l$ denota la velocidad angular del sistema $\{n\}$ con respecto al sistema $\{m\}$ medida desde el sistema $\{l\}$.

La siguiente lista describe algunas abreviaturas y notaciones reducidas, sobre todo para funciones trigonométricas que aparecerán de forma muy frecuente en los análisis de cinemática de manipuladores:

- $c_m = \cos \theta_m = \cos q_m$, sí m es un valor numérico, en caso contrario: $c_m = \cos m$
- $s_m = \sin \theta_m = \sin q_m$, sí m es un valor numérico, en caso contrario: $s_m = \sin m$
- $c\theta_m = \cos \theta_m$
- $cq_m = \cos q_m$
- $c(\theta_m + \theta_n) = \cos (\theta_m + \theta_n)$
- $c(q_m + q_n) = \cos (q_m + q_n)$
- $c_{mn} = \cos(\theta_m + \theta_n) = \cos(q_m + q_n)$, sí m y n son valores numéricos, en caso contrario: $c_{mn} = \cos(m + n)$
- $s\theta_m = \sin \theta_m$
- $sq_m = \sin q_m$
- $s(\theta_m + \theta_n) = \sin (\theta_m + \theta_n)$
- $s(q_m + q_n) = \sin (q_m + q_n)$
- $s_{mn} = \sin(\theta_m + \theta_n) = \sin(q_m + q_n)$, sí m y n son valores numéricos, en caso contrario: $c_{mn} = \sin(m + n)$

Una introducción a los manipuladores seriales

1.1. ¿Qué es un robot?

Según la norma ISO 8373:2012, un robot es un *mecanismo accionado programable en dos o más ejes con cierto grado de autonomía, que se mueve dentro de su entorno para realizar las tareas previstas*. Los mecanismos accionados que carecen de la cantidad de ejes programables o que son completamente teleoperados (sin grado de autonomía) pero satisfacen las definiciones de robots industriales o de servicio, se denominan dispositivos robóticos.

Los robots se pueden clasificar en dos grandes tipos de acuerdo con su aplicación prevista: robots industriales o robots de servicio. Los robots industriales son robots *para uso en aplicaciones de automatización industrial*, mientras que un robot de servicio *realiza tareas útiles para humanos o equipos, excluyendo aplicaciones de automatización industrial*.

El tipo de estructura mecánica y/o la composición cinemática de un robot es insuficiente para distinguir los robots industriales de los de servicio. Por lo tanto, según la definición de ISO, la aplicación es un criterio suficiente para distinguir los robots industriales de los de servicio, pero la cinemática no lo es.

Un **robot industrial** es un *manipulador multipropósito, reprogramable y controlado automáticamente, programable en tres o más ejes, que puede ser fijo o móvil para su uso en aplicaciones de automatización industrial*.

Es decir, los robots industriales tienen al menos tres ejes (direcciones utilizadas para especificar el movimiento del robot en modo lineal o giratorio) y satisfacen todas las características que a continuación se describen:

- **Controlado automáticamente:** el sistema de control del robot funciona de acuerdo con el programa de tareas. El programa de tareas es un conjunto de instrucciones para funciones de movimiento y auxiliares que definen la tarea específica prevista. Lo opuesto a la operación controlada automáticamente es la operación manual,

donde un operador humano usa dispositivos de entrada para controlar los movimientos de la máquina.

- **Reprogramable:** diseñado para que los movimientos programados o las funciones auxiliares puedan cambiarse sin alteración física. Las alteraciones físicas son alteraciones del sistema mecánico. Esto no incluye medios de almacenamiento, ROM, etc.
- **Multipropósito:** capaz de adaptarse a una aplicación diferente con alteración física.
- **Fijo en su lugar o móvil:** el robot se puede montar en un punto estacionario pero también se puede montar en un punto no estacionario (sobre un riel, por ejemplo). En los últimos años, se popularizó la combinación de brazos robóticos y Robots Móviles Autónomos (AMR).

En este texto usaremos los términos **robot**, **manipulador serial** y **brazo robótico**, de forma intercambiable para referirnos a un robot en el sentido que lo describe la RIA: *un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de una variedad de tareas.*

1.2. Clasificación de robots de acuerdo con su estructura mecánica

De acuerdo con la IFR (International Federation of Robotics) los robots se pueden clasificar por su estructura mecánica de la siguiente manera:

- Robot articulado
- Robot cartesiano
- Robot cilíndrico
- Robot paralelo
- Robot SCARA
- Otros

Un **robot articulado** es aquel cuyas articulaciones son todas revolutas. La mayoría de los manipuladores industriales tienen esta estructura mecánica. Se suele denominar a este robot también como antropomórfico, por la similitud de su estructura con los movimientos del cuerpo humano. En la Figura 1.1 se muestra un robot industrial FANUC M-710iC, el cual es un robot de 6 grados de libertad.



Figura 1.1 Robot industrial FANUC M-710iC.¹

En un **robot cartesiano** las primeras tres articulaciones son prismáticas. Las variables articulares del manipulador cartesiano son las coordenadas cartesianas del efecto final con respecto a la base. En general, la descripción cinemática de este manipulador es la más simple de todos los manipuladores. Los manipuladores cartesianos son útiles para aplicaciones de ensamblaje de mesa y, como robots de pórtico, para la transferencia de material o carga. En la Figura 1.2 se puede observar un robot cartesiano KUKA KR 300LP.



Figura 1.2 Robot industrial KUKA Linear Robot KR 300LP.²

Un **robot paralelo** es aquel en que posee dos o más cadenas cinemáticas que conectan la base (plataforma fija) con el efecto final (plataforma móvil). La cinemática de cadena

¹Imagen recuperada de: <https://www.fanuc.eu/es/es/robots/p%C3%Algina-filtro-robots/serie-m-710/m-710ic-50>

²Imagen recuperada de: https://www.kuka.com/-/media/kuka-downloads/imported/9cb8e311bfd744b4b0eab25ca883f6d3/kuka_datasheet_linear_robot_kr_300lp_en.pdf

cerrada de los robots paralelos puede dar como resultado una mayor rigidez estructural y, por lo tanto, una mayor precisión que los robots de cadena cinemática abierta. En la Figura 1.3 se puede observar el robot paralelo ABB IRB 360 FlexPicker, el cual de acuerdo con el fabricante es capaz de las aplicaciones de recolección más rápidas y se ha optimizado para aplicaciones de embalaje.



Figura 1.3 Robot industrial ABB IRB 360 FlexPicker.³

Un robot SCARA (*Selective Compliant Assembly Robot Arm*) tiene cuatro grados de libertad, usualmente tiene dos revolutas que sirven para la parte del posicionamiento en un plano, una unión prismática que define altura en dirección vertical y una junta de revoluta que permite orientar el elemento terminal rotando alrededor de la dirección vertical. En la Figura 1.4 se muestra un manipulador SCARA Yaskawa SG400.



Figura 1.4 Robot industrial SCARA Yaskawa SG400.⁴

³Imagen recuperada de: https://cdn.productimages.abb.com/9IBA179834_720x540.jpg

1.3. Algunos datos sobre los robots industriales

En esta sección se listan algunos datos reportados en el World Robotics 2021 de la IFR. En 2020, el stock operativo de robots industriales se calcula en 3,014,879 unidades (+10 %). En la Figura 1.5 puedes observar el crecimiento de robots industriales instalados en fábricas de todo el mundo.

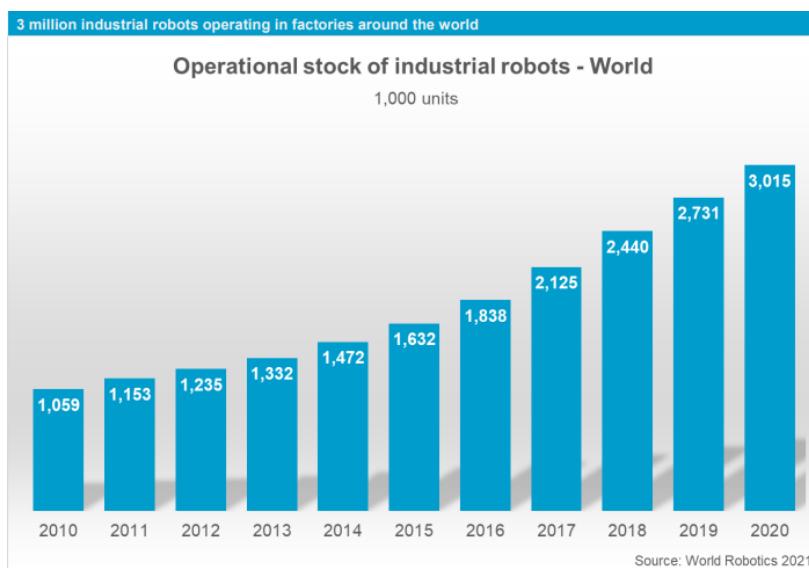


Figura 1.5 Stock de robots industriales

De acuerdo con la IFR, desde 2010, la demanda de robots industriales ha aumentado considerablemente debido a la tendencia actual hacia la automatización y la continua innovación tecnológica en robótica industrial. En 2010, las inversiones aumentaron e impulsaron las instalaciones de robots hasta 120,000 unidades. Para 2015, las instalaciones anuales se habían más que duplicado a casi 254,000 unidades. En 2016 se superó la marca de las 300,000 instalaciones por año y en 2017 las instalaciones aumentaron a casi 400,000 unidades. La marca de las 400,000 unidades al año se superó por primera vez en 2018. En 2020 se instalaron alrededor de 384,000 unidades. En la Figura 1.6 puedes observar la variación de robots industriales instalados anualmente en todo el mundo.

⁴Imagen recuperada de: https://www.motoman.com/getmedia/d01a4f6e-5036-4244-8bba-3ad451e6a5ff/SG400_500.jpg.aspx

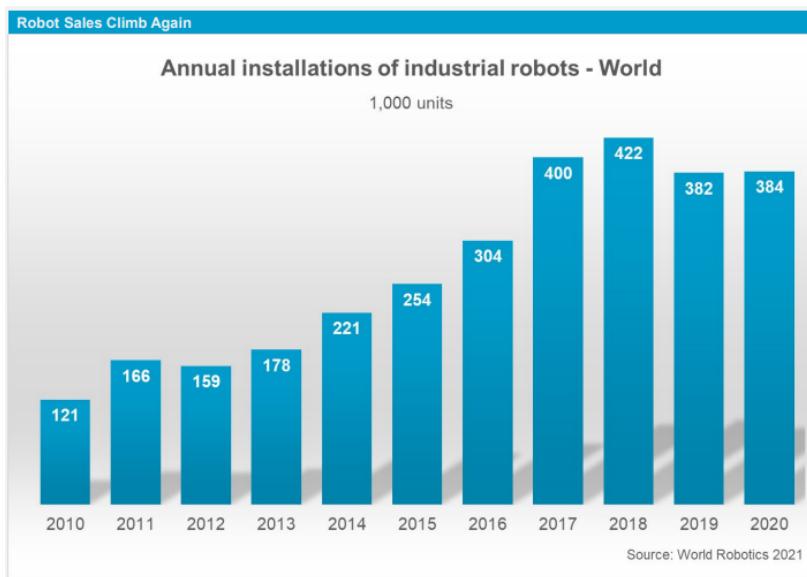


Figura 1.6 Instalaciones anuales de robots industriales

La IFR reporta que Asia es el mercado de robots industriales más grande del mundo. En 2020, se instalaron 266,452 unidades, un 7 % más que las 249,598 unidades de 2019. Las instalaciones en China crecieron con fuerza (168,377 unidades; +20 %), mientras que el mercado japonés (38,653 unidades; -23 %) y el mercado coreano (30,506 unidades; -7 %) tuvieron ciertas dificultades. Las instalaciones de robots en el segundo mercado más grande, Europa, disminuyeron un 8 % a 67,700 unidades, por segundo año consecutivo desde un máximo de 75,560 unidades en 2018. En el continente Americano, las instalaciones cayeron un 17 % a 38,736 unidades en 2020. Al mayor mercado en esta región, Estados Unidos, le ha ido mejor (30,787 unidades; -8 % en 2020) que los otros mercados importantes de México (3,363 unidades; -26 %) y Canadá (2,566 unidades; -29 %).

En la Figura 1.7 se pueden observar los quince países con mayor cantidad de robots instalados durante el 2020. México ocupa el décimo primer lugar con las 3,363 unidades instaladas.

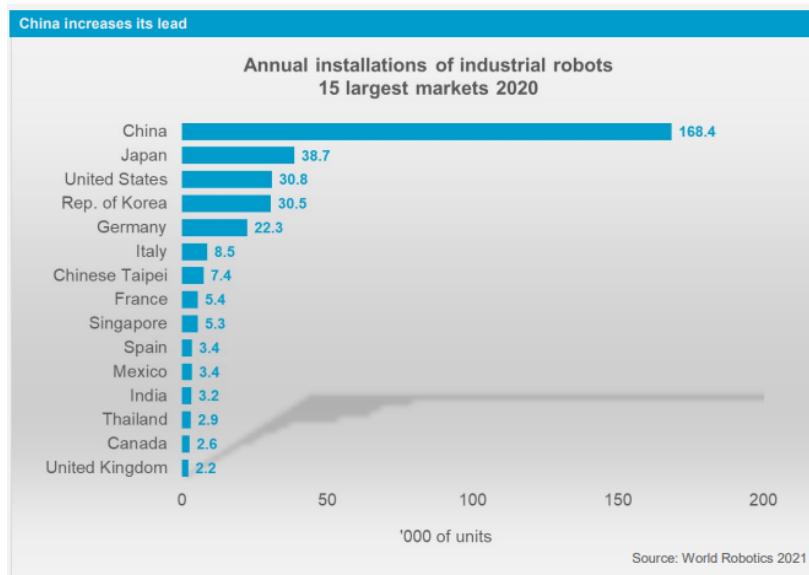


Figura 1.7 Países con mayor cantidad de robots industriales instalados en 2020

2

Posición, orientación y transformaciones homogéneas

Un manipulador serial es un conjunto de eslabones rígidos unidos mediante pares cinemáticos. En el estudio de la cinemática usualmente lo que haremos es colocar sistemas de referencias adheridos a cada uno de los eslabones y posteriormente encontrar las relaciones entre estos sistemas para poder realizar una descripción de la cinemática del manipulador. Para lograr lo anterior, necesitamos conocer los conceptos y herramientas matemáticas fundamentales para la representación de la posición y orientación de un cuerpo rígido, y eso es justamente el objetivo de este capítulo.

2.1. Representación de la posición

En mecánica, la posición de un punto se describe en un sistema de referencia mediante vectores de posición. En la Figura 2.1 se muestran dos puntos P y Q , cuyas posiciones están dadas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Naturalmente ambos vectores están descritos en el sistema de referencia XY que se muestra, y dado que únicamente se tiene dicho sistema de referencia, no hay necesidad de especificar con respecto a qué sistema se están midiendo las coordenadas de posición representadas.

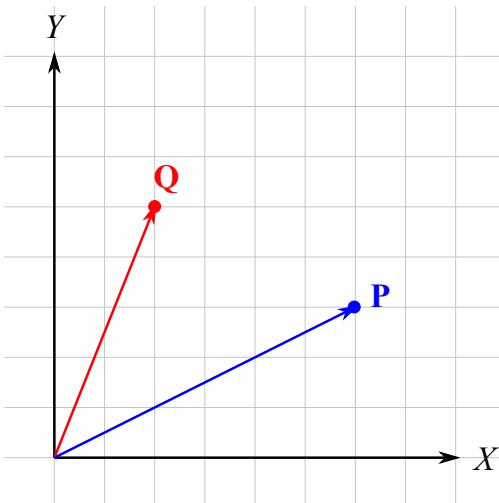


Figura 2.1 Posición de dos puntos P y Q

En la Figura 2.2 se muestra un punto P y dos sistemas de referencia $O_0X_0Y_0$ y $O_1X_1Y_1$. Donde el sistema $\{1\}$ se obtiene mediante operaciones de traslación a partir de $\{0\}$. La descripción de P en cada uno de los sistemas de referencia está dada por:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Es más, notará que tal como se muestra en la Figura 2.3 las posiciones descritas en ambos sistemas están relacionadas mediante:

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{r}^0 + \mathbf{P}^1 \tag{2.1}$$

Donde \mathbf{r}^0 describe la posición del origen de coordenadas del sistema $\{1\}$ con respecto al sistema $\{0\}$. Se debe tener cuidado con la ecuación 2.1, puesto que únicamente se cumple cuando los dos sistemas de referencia involucrados son paralelos entre sí, en cualquier otra situación una expresión como esa no será válida.

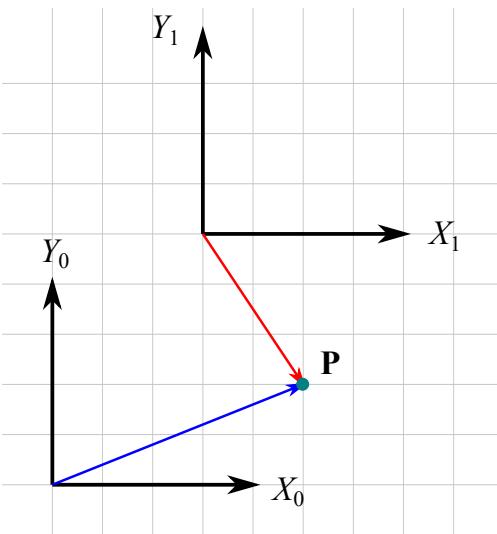


Figura 2.2 Posición de un punto P en dos sistemas de referencia

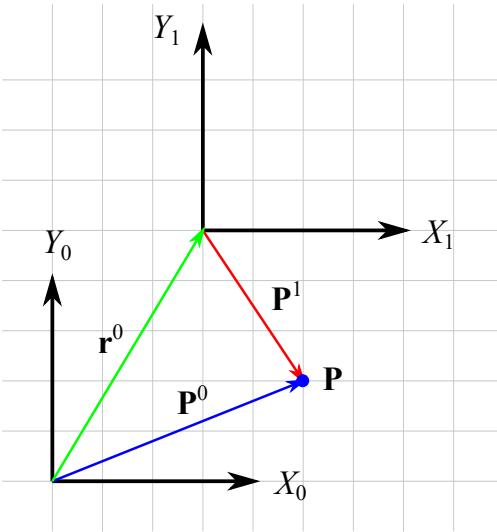


Figura 2.3 Posición de un punto P en dos sistemas de referencia

2.2. Representación de la orientación

La orientación de un cuerpo rígido en el espacio puede definirse mediante al menos tres parámetros, de su curso de física o estática elemental recordará que habitualmente en aquella se hace uso de los cosenos directores para dicha tarea. En cinemática de robots, además de los cosenos directores (agrupados en las matrices de rotación) se hace uso de otros métodos de representación como los ángulos de Euler, los cuaterniones y los pares de rotación.

Para hacer la descripción de la orientación de un sólido rígido, es necesario adherir un sistema de referencia solidario al mismo, el cual nos servirá para realizar la representación de orientación con respecto a otros sistemas de referencia. Así pues, tome en cuenta

que en esta sección estudiaremos relaciones de orientación entre sistemas de referencia, pero no pierda de vista que, en última instancia, los eslabones o cuerpos rígidos subyacen a estos sistemas.

2.2.1. Matrices de rotación

En la Figura 2.4 se muestra un sistema $\{1\}$ que ha sido obtenido a partir de $\{0\}$ mediante una rotación θ alrededor del eje z. Una manera de representar dicha rotación sería simplemente con el parámetro de rotación θ , pero evidentemente esto no escalaría de manera adecuada para un caso de representación tridimensional.

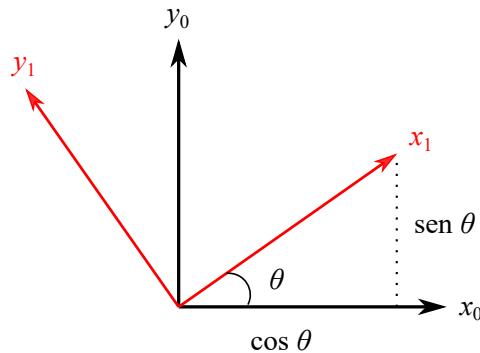


Figura 2.4 Un sistema $\{1\}$ obtenido por rotación a partir de $\{0\}$

Otra opción es describir las componentes de los ejes del sistema de referencia $\{1\}$ en el sistema $\{0\}$, es decir, x_1^0 y y_1^0 . En el caso particular del ejemplo de la figura 2.4 se puede observar que dichos vectores estarán dados por:

$$\mathbf{x}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{y}_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Si estos vectores se acomodan de tal manera que:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^0 & \mathbf{y}_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Se obtiene un arreglo conocido como **matriz de rotación**, la cual presenta algunas propiedades particulares que se describirán posteriormente. La matriz R_1^0 contiene la información necesaria para describir la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$.

Un resultado similar se puede obtener si la descripción del sistema $\{1\}$ en $\{0\}$ se hace mediante la proyección escalar de cada uno de los ejes, por ejemplo, x_1^0 y y_1^0 se pueden

expresar como:

$$\mathbf{x}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ + \theta) \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Recordar que en el caso de vectores unitarios la proyección escalar de un vector sobre el otro resulta simplemente en el coseno del ángulo θ que forman entre ellos.

La descripción de los tres ejes coordenados se puede completar considerando que el eje z_1 permanece invariable, apuntando en la misma dirección que el eje z_0 , tal como se puede observar en la Figura 2.5. Así, es posible ampliar la matriz de la ecuación 2.2 considerando ahora las componentes en la dirección de z , es decir:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^0 & \mathbf{y}_1^0 & \mathbf{z}_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(90^\circ + \theta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ - \theta) & \cos \theta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

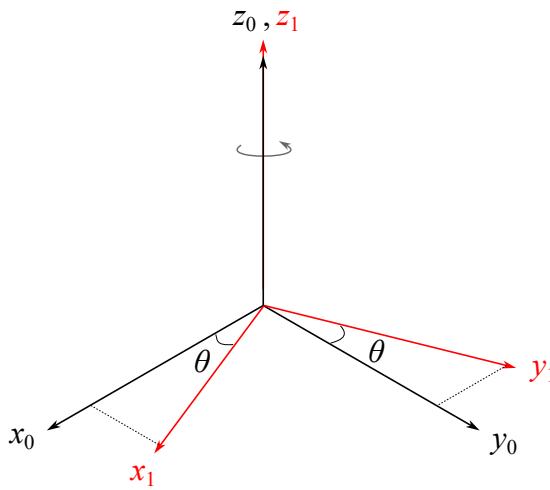


Figura 2.5 Un sistema $\{1\}$ obtenido por una rotación alrededor de z a partir de $\{0\}$

De manera general, la matriz de rotación anterior nos permite describir la orientación de un sistema con respecto a otro cuando se ha efectuado una rotación θ alrededor del eje z . Se puede proceder de una manera muy similar para obtener las matrices de rotación

correspondientes a rotaciones alrededor de los ejes y y x . Las siguientes tres matrices, que denominaremos como matrices de rotación básicas, las utilizaremos para representar las operaciones de rotación con respecto a los tres ejes cartesianos:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ejemplo 2.1 Matriz de rotación

Un sistema de referencia $\{1\}$ se obtiene a partir de un sistema $\{0\}$, mediante una rotación de 90° alrededor del eje z . Determine R_1^0 .

Solución:

La matriz de rotación R_1^0 se calcula sustituyendo $\theta = 90^\circ$ en la matriz de rotación básica para z , es decir:

$$R_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Bueno, hasta ahora hemos abordado la manera de realizar la descripción de la orientación del sistema $\{1\}$ en el sistema $\{0\}$, pero ¿qué pasa si en su lugar nos interesa la descripción del sistema $\{0\}$ en el $\{1\}$? Naturalmente, podríamos proceder de una manera similar, determinando la proyección de cada uno de los ejes de $\{0\}$ en $\{1\}$, y arreglándolos en una matriz de rotación que denominaremos R_0^1 , tal como se muestra enseguida:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^1 & \mathbf{y}_0^1 & \mathbf{z}_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{z}_1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(90^\circ - \theta) & \cos 90^\circ \\ \cos(90^\circ + \theta) & \cos \theta & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algo que podrá notar con facilidad es que la matriz R_0^1 no es más que la transpuesta de la matriz R_1^0 . De hecho, R_0^1 es la matriz inversa de R_1^0 , pero como veremos posteriormente las matrices de rotación son un tipo especial de matrices que presentan algunas propiedades particulares, como que su inversa es igual a la transpuesta. Veamos un poco más, por ejemplo, refiriéndonos a la Figura 2.5, la matriz R_1^0 nos describe cómo ha sido obtenido el sistema {1} a partir del sistema {0}, es decir, mediante una rotación θ positiva alrededor del eje z. Ahora, pensemos en la relación inversa R_0^1 , ¿cómo ha sido obtenido el sistema {0} partir del {1}? La rotación seguiría siendo alrededor del eje z pero una cantidad θ negativa. Podemos verificar que si tomamos la matriz de rotación básica $R_{z,\theta}$ y sustituimos un ángulo $-\theta$, obtendríamos la matriz R_0^1 calculada previamente.

Este resultado lo podemos generalizar. Sean $\{M\}$ y $\{N\}$ dos sistemas de referencia que difieren por una rotación (o secuencia de rotaciones), entonces las matrices de rotación que los describen están relacionadas de la siguiente manera:

$$R_N^M = (R_M^N)^{-1} = (R_M^N)^T \quad (2.6)$$

Algunas propiedades de las matrices de rotación

Se puede verificar que cada columna de las matrices de rotación son unitarias y mutuamente ortogonales, una matriz de este tipo se dice que es una **matriz ortogonal**. Algunas propiedades de las matrices de rotación se listan enseguida. Sea R una matriz de rotación, entonces:

- $R^{-1} = R^T$
- $\det(R) = \pm 1$
- Las columnas (y filas) de R son mutuamente ortogonales.
- Cada columna (y fila) de R es un vector unitario.

Ejemplo 2.2 Columnas de R ortogonales

A continuación se muestra una matriz de rotación R , compruebe que sus columnas son mutuamente ortogonales.

$$R = R_{x,45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Solución:

Recordar que dos vectores son ortogonales si el producto escalar es cero. Verificando la primera y segunda columna, se tiene:

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = (1)(0) + (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Para la primera y tercera:

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = (1)(0) + (0)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Para la segunda y tercera:

$$\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = (0)(0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Se verifica entonces que las columnas de R son mutuamente ortogonales.

Transformaciones de rotación

En la Figura 2.6 se observa un sólido rígido con forma de prisma rectangular, al cual se le ha adherido un sistema de referencia $\{1\}$, además, $\{1\}$ está rotado un ángulo θ alrededor de z con respecto a un sistema base $\{0\}$. Asumiendo que las dimensiones del prisma son a , b y c en las direcciones de x_1 , y_1 y z_1 , respectivamente, entonces las coordenadas del vértice P descritas en el sistema $\{1\}$ están dadas por:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{y}_1 + c\mathbf{z}_1$$

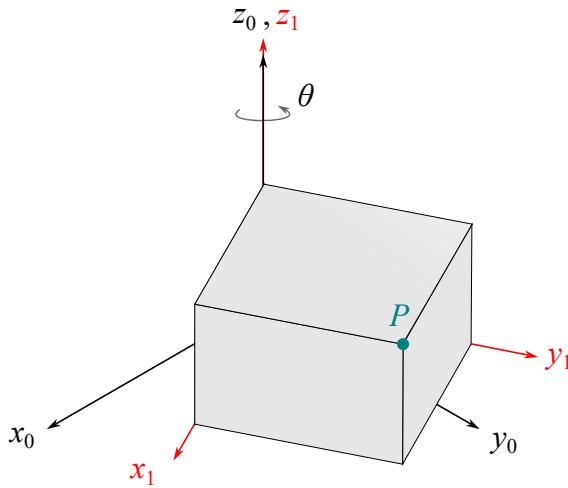


Figura 2.6 Transformaciones de rotación

Las coordenadas de P en el sistema $\{0\}$ se pueden obtener mediante la proyección de dicho vector en este sistema, es decir:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{P}^1 \cdot \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{P}^1 \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}\mathbf{z}_1) \cdot \mathbf{x}_0 \\ (\mathbf{a}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}\mathbf{z}_1) \cdot \mathbf{y}_0 \\ (\mathbf{a}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}\mathbf{z}_1) \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{a}\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{a}\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z}_0 + \mathbf{b}\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{z}_0 + \mathbf{c}\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Note que la matriz que multiplica al vector $[a, b, c]^T$ es justamente R_1^0 , entonces:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 \quad (2.7)$$

Lo cual implica que la matriz de rotación R_1^0 además de describir la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto al sistema $\{0\}$, sirve también para realizar transformaciones de coordenadas de un sistema a otro.

Ejemplo 2.3 Transformación de coordenadas

El sistema $\{1\}$ está rotado 90° alrededor del eje z con respecto a $\{0\}$, se sabe que las coordenadas del punto Q dadas en el sistema $\{1\}$ son $\mathbf{Q}^1 = [10, 5, 0]^T$, calcule las coordenadas del punto Q en el sistema $\{0\}$.

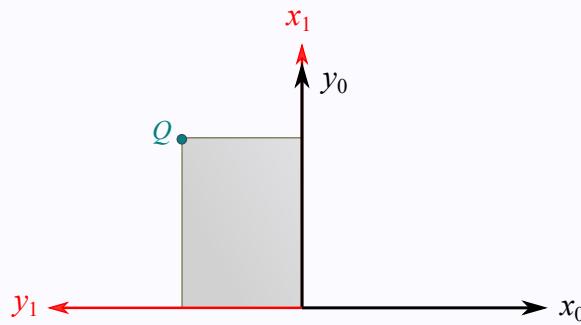


Figura 2.7

Solución:

La matriz de rotación R_1^0 que describe la orientación del sistema $\{1\}$ respecto a $\{0\}$ está dada por:

$$R_1^0 = R_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{Q}^0 = R_1^0 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso en particular se puede determinar la validez de lo anterior mediante inspección.

2.2.2. Transformaciones de similitud

Un sistema de referencia está definido por un conjunto de vectores base, por ejemplo, vectores unitarios a lo largo de los tres ejes de coordenadas. Esto significa que una matriz de rotación como transformación de coordenadas también puede considerarse como la definición de un cambio de base de un sistema a otro. La representación matricial de una transformación lineal general se transforma de un sistema a otro mediante la denominada transformación de similitud. Por ejemplo, sea A la matriz que representa una transformación lineal en el sistema $\{0\}$, y sea B la representación matricial de la misma transformación lineal pero en el sistema $\{1\}$, entonces A y B están relacionadas de la siguiente manera:

$$A = R_1^0 B \left(R_1^0 \right)^{-1}$$

Donde R_1^0 es una matriz de transformación de coordenadas entre los sistemas $\{1\}$ y $\{0\}$. En particular, si B es una rotación, entonces también lo es A y, por lo tanto, el uso de transformaciones de similitud nos permite expresar la misma rotación fácilmente con respecto a diferentes sistemas de referencia.

2.2.3. Composición de las rotaciones

Consideremos que se tienen tres sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$ (ver Figura 2.8), y sabiendo que el sistema $\{1\}$ ha sido obtenido mediante una rotación θ a partir del sistema $\{0\}$, y que $\{2\}$ ha sido obtenido mediante una rotación ϕ a partir de $\{1\}$.

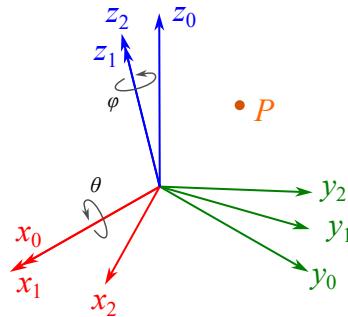


Figura 2.8

De acuerdo con lo que sabemos de transformaciones de coordenadas, se pueden escribir las siguientes expresiones para la posición del punto P :

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}^1 = R_2^1 \mathbf{P}^2 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}^0 = R_2^0 \mathbf{P}^2 \quad (2.10)$$

Si sustituimos la ecuación 2.9 en 2.8 resulta que:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 R_2^1 \mathbf{P}^2 \quad (2.11)$$

De las ecuaciones 2.10 y 2.11 es sencillo notar que necesariamente:

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 \quad (2.12)$$

La ecuación 2.12 describe la ley de composición para transformaciones de rotación. Se puede entender de la siguiente manera: si queremos describir las coordenadas del punto

P en el sistema de referencia $\{0\}$ a partir de su representación en $\{2\}$, entonces primero podemos describirlo en el sistema $\{1\}$ utilizando la matriz R_2^1 y luego transformarlo al sistema $\{0\}$ utilizando la matriz R_1^0 .

Note que la segunda rotación de la Figura 2.8 ha sido realizada con respecto a un sistema $\{1\}$ previamente obtenido mediante otra rotación a partir de un sistema $\{0\}$. Este tipo de transformación se dice que se ha efectuado con respecto a un sistema móvil (o típicamente también se denominan rotaciones con respecto al sistema actual, o rotaciones intrínsecas). Cuando las rotaciones sean efectuadas de esta manera, las matrices de rotación que representan las rotaciones se deben postmultiplicar en el orden en que son realizadas. Si las rotaciones se realizan con respecto a un sistema fijo, el orden de composición descrito anteriormente ya no funciona, ahora el orden debe invertirse, es decir, si las transformaciones de rotación se realizan con respecto a un sistema fijo entonces las matrices de rotación correspondientes deberán premultiplicarse.

En la Figura 2.9 se puede observar un sólido en forma cúbica al cual se le ha adherido un sistema de referencia $\{1\}$ que se mueve junto con este. Inicialmente suponemos que el sistema $\{1\}$ coincide con un sistema fijo $\{0\}$. Como se indica, se realizan dos rotaciones con respecto a los ejes del sistema móvil, es decir, el sistema cuya orientación cambia después de haber efectuado la rotación. Así, la matriz R_1^0 que describe la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto al sistema $\{0\}$, después de haber efectuado ambas rotaciones está dada por:

$$R_1^0 = R_{z,90^\circ} R_{x,90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que en este caso las matrices de rotación se multiplican en el orden en que son realizadas las transformaciones, escribiéndolas de izquierda a derecha (postmultiplicando).

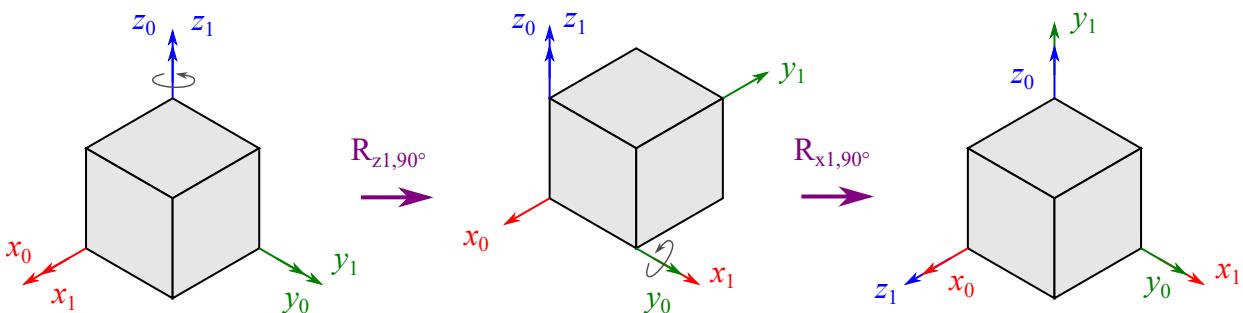


Figura 2.9

Ahora, en la Figura 2.10 puede observar una situación similar en cuanto a los ejes con

respecto a los cuáles se efectúan las rotaciones, salvo que en este caso son con respecto al sistema fijo $\{0\}$. Aquí, la descripción R_1^0 , después de haber efectuado ambas rotaciones, se calcula premultiplicando las matrices de rotación involucradas, escribiéndolas de derecha a izquierda, es decir:

$$R_1^0 = R_{x,90^\circ} R_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

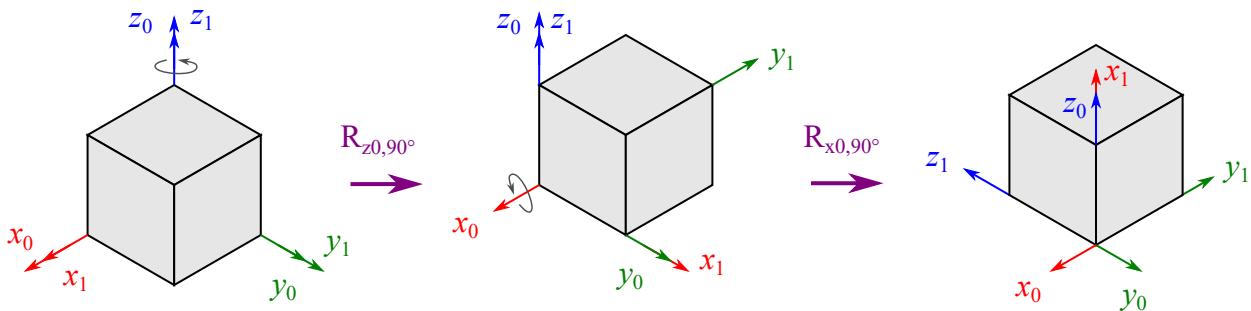


Figura 2.10

La validez de ambas composiciones se puede verificar en este caso directamente por inspección de los esquemas mostrados.

Ejemplo 2.4 Composición de las rotaciones

Un sistema $\{1\}$ se obtiene a partir de un sistema $\{0\}$ mediante la siguiente secuencia de rotaciones con respecto al sistema móvil: una rotación de 45° con respecto al eje y , seguida de una rotación alrededor del eje z de 60° . Determine R_1^0 .

Solución:

Dado que las rotaciones son efectuadas con respecto al sistema móvil, entonces las matrices se postmultiplican, es decir:

$$R_1^0 = R_{y,45^\circ} R_{z,60^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Todo este razonamiento previo de composición de rotaciones con respecto a un sistema móvil se puede extender a cualquier cantidad de sistemas de referencia, por ejemplo, suponga que se tienen los sistemas de referencia $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$, que difieren únicamente por rotaciones, se puede verificar de forma muy simple que las siguientes

expresiones son válidas:

$$\begin{aligned} R_2^0 &= R_1^0 R_2^1 \\ R_3^0 &= R_2^0 R_3^2 \\ R_4^0 &= R_3^0 R_4^3 \\ &\vdots \\ R_n^0 &= R_{n-1}^0 R_n^{n-1} \end{aligned}$$

O bien:

$$R_n^0 = R_1^0 R_2^1 R_3^2 \cdots R_n^{n-1}$$

Este ecuación muestra que la orientación de un sistema $\{n\}$ la podemos expresar en un sistema $\{0\}$ mediante la composición de transformaciones de rotación *intermedias*, algo que nos será muy útil para la cinemática de manipuladores, puesto que lo que haremos será colocar sistemas de referencia a cada uno de los eslabones y luego realizar las descripciones de posición y orientación entre eslabones consecutivos.

Ejemplo 2.5 Composición de rotaciones

Se tienen tres sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$, y se conocen las siguientes matrices de rotación:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_2^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}; \quad R_3^2 = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Calcule R_2^0 y R_3^0 .

Solución:

La matriz R_2^0 se puede obtener multiplicando R_1^0 por R_2^1 , es decir:

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para R_3^0 podemos multiplicar la R_2^0 obtenida previamente por R_3^2 , es decir:

$$R_3^0 = R_2^0 R_3^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} 0.3536 & -0.866 & 0.3536 \\ 0.7071 & 0 & -0.7071 \\ 0.6124 & 0.5 & 0.6124 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Parametrización de las rotaciones

Los nueve elementos r_{ij} de la matriz de rotación R no son cantidades independientes, dadas las propiedades particulares de la matrices en $SO(3)$. Es más, se sabe que para representar la orientación de un sólido rígido en el espacio se requieren al menos tres cantidades independientes. Esto se puede deducir fácilmente si se tiene en cuenta que:

$$\sum r_{ij}^2 = 1 \quad ; \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.13)$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (2.14)$$

Donde la ecuación 2.13 implica que todos los vectores columnas de R son unitarios y la ecuación 2.14 refiere al hecho que todas las columnas de R son mutuamente ortogonales. De estas condiciones se desprende el hecho que existen seis ecuaciones independientes con nueve incógnitas, que implica tres variables libres.

2.2.5. Ángulos de Euler

Un método común para especificar la orientación de un sistema de referencia móvil con respecto a uno fijo, en términos de tres cantidades independientes (ϕ, θ, ψ) son los llamados **ángulos de Euler**, los cuales corresponden a una secuencia de tres rotaciones en un orden determinado con respecto a un sistema de referencia fijo o móvil. Podemos hacer distinción entre:

- Secuencia de rotaciones intrínsecas (Ángulos de Euler clásicos – ZXZ, ZYZ, YZY, YXY, XYX, XZX)
- Secuencia de rotaciones extrínsecas (Ángulos de Tait-Bryan - xyz, yzx, zxy, xzy, zyx, yxz)

Las rotaciones intrínsecas son aquellas realizadas con respecto al sistema móvil, y las extrínsecas aquellas realizadas con respecto al sistema fijo. Como se observa, existen varias secuencias de rotaciones que darían una representación conveniente de la orientación, pero aquí se revisarán algunos casos particulares y de uso común dentro de la robótica.

Ángulos de Euler ZXZ

En este caso, a partir de un sistema original se puede obtener otro sistema de referencia en cualquier orientación mediante tres rotaciones sucesivas alrededor del sistema móvil, a saber:

1. Una rotación de un ángulo ϕ alrededor del eje z
2. Una rotación de un ángulo θ alrededor del eje x
3. Una rotación de un ángulo ψ alrededor del eje z

Lo cual conduce a:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} -s\phi s\psi c\theta + c\phi c\psi & -s\phi c\psi c\theta - s\psi c\phi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + s\psi c\phi c\theta & -s\phi s\psi + c\phi c\psi c\theta & -s\theta c\phi \\ s\psi s\theta & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Evidentemente, calcular la matriz de rotación correspondiente a un conjunto de ángulos de Euler es una tarea que puede realizarse sin problemas, puesto que implica únicamente multiplicaciones matriciales en el orden indicado. Un problema de naturaleza menos trivial es que a partir de una matriz de rotación R se obtenga el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalentes, de tal forma que:

$$R = R_{ZXZ} \quad (2.16)$$

donde:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Siendo R , naturalmente, una matriz cuyos valores son todos conocidos. Para resolver este problema se considerarán tres casos.

Caso I

Si r_{13} y r_{23} no son ambas cero, de acuerdo con 2.16 implica necesariamente que $s\theta \neq 0$, y consecuentemente que r_{13} y r_{23} no son ambas cero. Lo anterior conduce a que $r_{33} \neq \pm 1$, entonces $c\theta = r_{33}$ y $s\theta = \pm\sqrt{1 - r_{33}^2}$, lo cual implica dos posibles soluciones para θ :

$$\theta = \text{arctan2}\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \quad (2.17)$$

$$\theta = \text{arctan2}\left(-\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \quad (2.18)$$

Si se toma la solución para θ dada por 2.17, entonces:

$$\phi = \text{arctan2}(r_{13}, -r_{23})$$

$$\psi = \text{arctan2}(r_{31}, r_{32})$$

Si se toma la solución para θ dada por 2.18, entonces:

$$\phi = \text{arctan2}(-r_{13}, r_{23})$$

$$\psi = \text{arctan2}(-r_{31}, -r_{32})$$

Caso II

Si $r_{13} = r_{23} = 0$, dado que R es ortogonal implica que $r_{33} = \pm 1$ y $r_{31} = r_{32} = 0$, entonces R tendrá la forma:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Si $r_{33} = 1$ entonces, $\cos \theta = 1$ y $\sin \theta = 0$, lo cual implica necesariamente que $\theta = 0^\circ$. De lo anterior se tiene:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) & 0 \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi + \psi = \text{arctan2}(r_{21}, r_{11})$$

Lo anterior implica una cantidad infinita de soluciones. Por convención se asume $\psi = 0^\circ$ y entonces:

$$\phi = \text{arctan2}(r_{21}, r_{11})$$

Caso III

De manera similar al caso anterior, si $r_{33} = -1$ entonces, $\cos \theta = -1$ y $\sin \theta = 0$, lo cual implica necesariamente que $\theta = 180^\circ$. De lo anterior se tiene:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi - \psi) & \sin(\phi - \psi) & 0 \\ \sin(\phi - \psi) & -\cos(\phi - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\phi - \psi = \text{arctan2}(r_{21}, r_{11})$$

Lo anterior implica una cantidad infinita de soluciones. Por convención se asume $\psi = 0^\circ$ y entonces:

$$\phi = \text{arctan2}(r_{21}, r_{11})$$

Ejemplo 2.6 Ángulos de Euler ZXZ

Para la siguiente matriz de rotación, calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalente.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Dado que $r_{33} \neq \pm 1$ podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el primer caso, es decir:

$$\theta = \text{arctan2}\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) = \text{arctan2}\left(\sqrt{1 - 0^2}, 0\right) = 90^\circ$$

$$\phi = \text{arctan2}(r_{13}, -r_{23}) = \text{arctan2}(1, 0) = 90^\circ$$

$$\psi = \text{arctan2}(r_{31}, r_{32}) = \text{arctan2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -30^\circ$$

 **Ejemplo 2.7 Ángulos de Euler**

Para la siguiente matriz de rotación, calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalente.

$$R = \begin{bmatrix} 0.9397 & -0.342 & 0 \\ 0.342 & 0.9397 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Dado que $r_{33} = 1$ podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el segundo caso, es decir:

$$\phi = 0^\circ$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$\psi = \text{arctan2}(0.342, 0.9397) = 20^\circ$$

Entonces, el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalentes es

 **Ejemplo 2.8 Ángulos de Euler ZXZ**

Calcule los ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la matriz de rotación que resulta de la siguiente secuencia de rotaciones alrededor de los ejes móviles: una rotación de 60° alrededor del eje z seguida de una rotación de 135° alrededor del eje y.

Solución:

Para resolver este problema lo primero que debemos hacer es calcular la matriz de rotación que resulta de efectuar las dos operaciones indicadas, para ello multiplicamos las matrices de rotación en el orden correspondiente, es decir:

$$R = R_{z,60^\circ} R_{y,135^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Dado que $r_{33} \neq \pm 1$ podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el primer caso, es decir:

$$\theta = \text{arctan2}\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) = \text{arctan2}\left(\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$

$$\phi = \text{arctan2}(r_{13}, -r_{23}) = \text{arctan2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 150^\circ$$

$$\psi = \text{arctan2}(r_{31}, r_{32}) = \text{arctan2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 270^\circ$$

Ángulos de Euler ZYZ

Ángulos Roll-Pitch-Yaw

2.2.6. Representación eje-ángulo

2.2.7. Cuaterniones

2.3. Matrices de transformación homogénea

En las secciones anteriores se ha visto cómo representar la posición y orientación, de forma separada; en esta sección conoceremos una herramienta matemática que nos permite representar de manera conjunta la posición y la orientación de un cuerpo rígido.

En la figura 2.11 podemos observar un sistema de referencia móvil {1} adherido a un sólido rígido y un sistema de referencia {0} fijo, es sencillo identificar que además de la orientación hay también una variación en la posición de los sistemas de referencia. Un punto P adherido al sólido rígido se puede describir en el sistema de referencia {1} mediante el vector de posición \mathbf{P}^1 mostrado, además, la posición del origen del sistema de referencia {1} se puede describir en {0} mediante el vector \mathbf{d}_1^0 , si quisieramos determinar la posición de P en {0} entonces podríamos hacerlo de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 + \mathbf{d}_1^0 \quad (2.19)$$

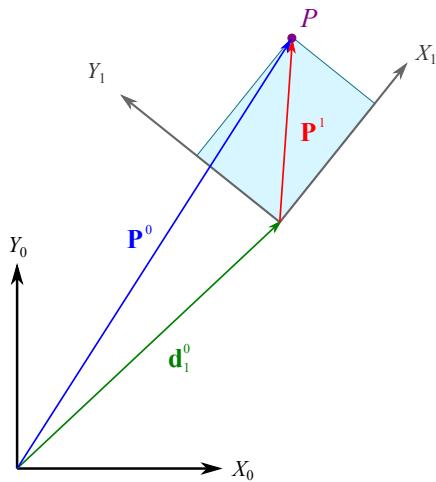


Figura 2.11 Movimiento de sólido rígido

Lo cual podríamos verlo como una suma de vectores (ley del triángulo), sin embargo, es importante recordar que no es posible sumar *directamente* dos vectores que están definidos con respecto a sistemas de referencia con diferente orientación. De tal modo que se debe expresar primeramente a \mathbf{P}^1 en un sistema paralelo a $\{0\}$, lo cual se logra con la multiplicación correspondiente por la matriz de rotación: $R_1^0 \mathbf{P}^1$, para poder sumarlo a \mathbf{d}_1^0 . Aquí, R_1^0 corresponde a la matriz de rotación que describe la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$.

La ecuación 2.19 se puede expresar de manera más compacta si introducimos una matriz de transformación que opere directamente sobre un vector y transforme sus coordenadas de un sistema a otro, una matriz de este tipo se denomina *matriz de transformación homogénea* y tiene la forma que a continuación se muestra:

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Donde R es una matriz de rotación de 3×3 , \mathbf{d} es un vector columna de tres elementos y $\mathbf{0} = [0, 0, 0]$. Lo anterior implica que H es una matriz de 4×4 y por lo tanto no puede multiplicarse directamente por un vector de posición de tres componentes, así pues, para poder efectuar la transformación de coordenadas es necesario agregar una coordenada adicional a cada vector, usualmente se agrega un uno, de tal forma que dado un vector \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

Al agregarle la coordenada adicional quedaría como:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un vector como $\tilde{\mathbf{P}}$ se dice que está expresado en *coordenadas homogéneas*.

Siguiendo con nuestro análisis, la matriz de transformación homogénea que transforma \mathbf{P}^1 en \mathbf{P}^0 está dada por:

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & \mathbf{d}_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Así pues, la ecuación 2.19 se puede escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & \mathbf{d}_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^0 = H_1^0 \tilde{\mathbf{P}}^1 \quad (2.20)$$

Es sencillo notar la equivalencia entre ambas ecuaciones. Aquí utilizamos la tilde para distinguir a un vector en coordenadas homogéneas, sin embargo, por cuestiones de legibilidad y comodidad, en lo subsiguiente prescindiremos de ella y denotaremos a los vectores en coordenadas homogéneas de la misma forma que el resto, se asume que el lector podrá distinguir por el contexto si se está trabajando con un vector en coordenadas homogéneas.

2.3.1. Matrices de transformación homogéneas básicas

Como ya sabemos, un cuerpo rígido que se mueve en el espacio experimenta traslación y rotación, por lo cual sus movimientos y su localización se puede definir completamente mediante tres operaciones básicas de traslación y tres de rotación, cada una en la dirección de los ejes de un sistema de referencia.

Un conjunto de matrices de transformación homogénea que representan movimientos básicos de traslación y rotación alrededor de los ejes x, y, z está dado por:

$$D_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Composición de las matrices de transformación homogénea

Supongamos ahora que tenemos tres sistemas de referencia: $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$, que difieren por rotaciones y traslaciones, donde ahora el punto P pertenece al sólido que tiene adherido el sistema $\{2\}$ tal como se muestra en la Figura 2.12. Podemos establecer que las coordenadas de P descritas en el sistema $\{1\}$ están dadas por:

$$\mathbf{P}^1 = R_2^1 \mathbf{P}^2 + \mathbf{d}_2^1 \quad (2.21)$$

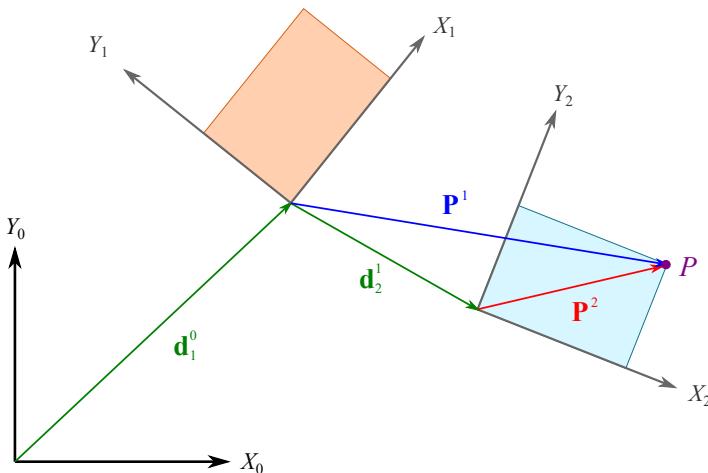


Figura 2.12 Movimiento de sólido rígido

De la Figura 2.13 podemos observar que la descripción de las coordenadas de P en el sistema $\{0\}$ está dada por:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 + \mathbf{d}_1^0 \quad (2.22)$$

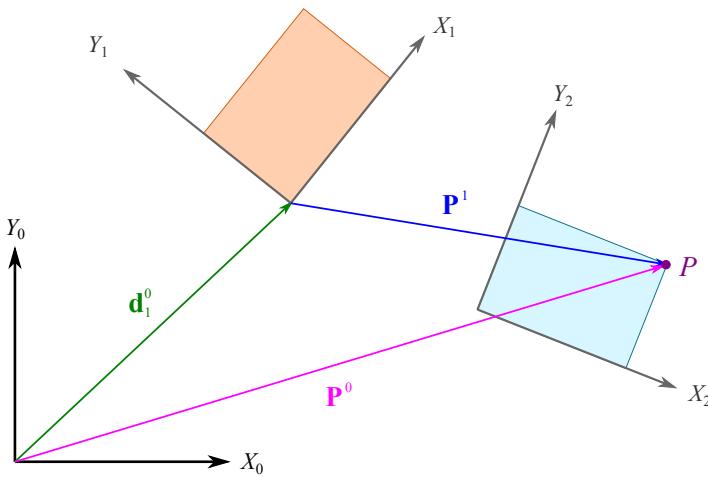


Figura 2.13 Movimiento de sólido rígido

Si sustituimos la ecuación 2.21 en la 2.22 se tiene que:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \left(R_2^1 \mathbf{P}^2 + \mathbf{d}_2^1 \right) + \mathbf{d}_1^0$$

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 R_2^1 \mathbf{P}^2 + R_1^0 \mathbf{d}_2^1 + \mathbf{d}_1^0 \quad (2.23)$$

Observe que esta ecuación transforma las coordenadas de P del sistema $\{2\}$ al sistema $\{0\}$. Esta ecuación se puede escribir también utilizando la forma matricial. De acuerdo con lo visto previamente sabemos que:

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & \mathbf{d}_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} R_2^1 & \mathbf{d}_2^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar además que:

$$H_1^0 H_2^1 = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 \mathbf{d}_2^1 + \mathbf{d}_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que si multiplicamos esta matriz resultante por el vector \mathbf{P}^2 en coordenadas homogéneas, tendremos a \mathbf{P}^0 , tal como lo describe la ecuación 2.23:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 \mathbf{d}_2^1 + \mathbf{d}_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así pues, podemos denotar a esta matriz de transformación homogénea como H_2^0 , esto implica que:

$$H_2^0 = H_1^0 H_2^1 \quad (2.24)$$

Esta es nuestra regla de composición básica para movimientos de rotación y traslación representados mediante matrices de transformación homogénea, y realizados con respecto a un sistema móvil. Observe que esta regla de composición es análoga a la de las matrices de rotación, de hecho, para transformaciones realizadas con respecto a un sistema fijo las matrices de transformación también se premultiplican.

Cuando las transformaciones son sólo traslaciones, en el resultado final no influye el orden de las mismas, y consecuentemente el orden de *acomodo* de las matrices no es restrictivo, naturalmente se prefiere escribirlas en el orden que son dadas de acuerdo a si son realizadas con respecto a un sistema fijo o móvil. Por ejemplo suponga que un sistema $\{B\}$ se obtiene del sistema $\{A\}$ mediante una traslación a en x , seguida de una traslación b en y , y finalmente una traslación c en z , la matriz de transformación homogénea que representa dichas operaciones está dada por:

$$T_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtendría el mismo resultado si cualquiera de las matrices se coloca en otra posición.

Ejemplo 2.9 Traslación

Calcule la matriz de transformación homogénea H_1^0 .



Figura 2.14

Solución:

De la Figura 2.14 se observa que el sistema \$\{1\}\$ puede ser obtenido a partir de \$\{0\}\$ mediante una traslación de 3 unidades en \$x\$ y 5 unidades en \$y\$. Así, la matriz de transformación homogénea que representa la descripción de dicho sistema está dada por:

$$H_1^0 = D_{x,3} D_{y,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.10 Rotación

Calcule la matriz de transformación homogénea \$H_1^0\$.

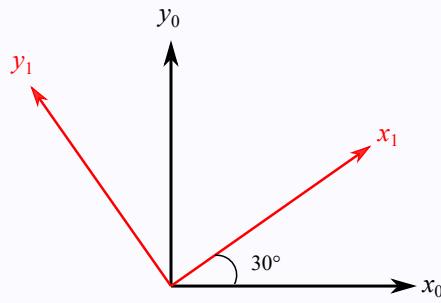


Figura 2.15

Solución:

El esquema de la figura 2.15 muestra un sistema $\{1\}$ obtenido de $\{0\}$ mediante una rotación alrededor de z de 30° . La matriz de transformación homogénea que describe dicha transformación es la de rotación alrededor de z , sustituyendo, claro está, el valor correspondiente del ángulo, de esa manera:

$$H_1^0 = R_{z,30^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.11 Rotación y traslación

Calcula la matriz de transformación homogénea H_1^0 .

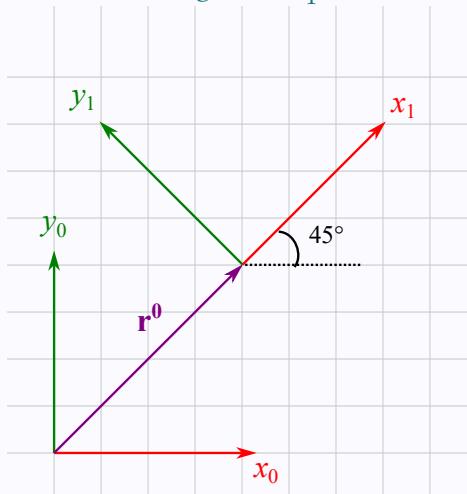


Figura 2.16

En la figura 2.16 se observa un sistema $\{1\}$ que puede obtenerse de $\{0\}$ mediante una serie de traslaciones y rotaciones. De manera específica, utilizando los ejes móviles, se pueden trasladar 4 unidades en x y en y , y posteriormente una rotación alrededor de z de 45° , estas transformaciones se pueden expresar en forma de un producto matricial como sigue:

$$H_1^0 = D_{x,4} D_{y,4} R_{z,45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$\therefore H_1^0 = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.12 Una barra en rotación pura

En la Figura 2.17 se observa una barra en rotación pura, la cual tiene adherido en su extremo un sistema móvil {1} y un sistema fijo {0} en su base. El sistema {1} está definido de tal manera que el eje x_1 apunta en la dirección de la línea que va desde el centro de rotación hasta su extremo. Calcule la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación de {1} en {0}.

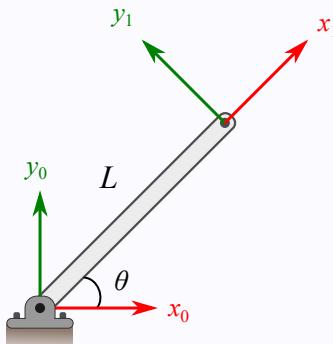


Figura 2.17 Una barra en rotación pura

Solución:

Se observa que el sistema {1} se puede obtener de {0} mediante una serie de traslaciones y rotaciones. Por ejemplo, si las transformaciones se hacen respecto a un sistema móvil, entonces una secuencia posible sería la siguiente:

1. Traslación en x de $L \cos \theta$
2. Traslación en y de $L \sin \theta$
3. Rotación alrededor de z un ángulo θ

Lo cual conduce a:

$$H_1^0 = D_{x,L \cos \theta} D_{y,L \sin \theta} R_{z,\theta} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & L \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero claro está que no es la única manera, si se ejecuta la siguiente secuencia alrededor de los ejes móviles:

1. Rotación alrededor de z un ángulo θ .
2. Traslación en x de L .

Se tiene:

$$H_1^0 = R_{z,\theta} D_{x,L} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & L \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual conduce en efecto a la misma descripción obtenida con anterioridad. De igual manera se pueden establecer transformaciones con respecto a los ejes fijos que produzcan el mismo resultado.

Ejemplo 2.13 Múltiples sistemas de referencia

En la figura 2.18 se observa una placa plana rectangular de las dimensiones indicadas, en cuyas esquinas se colocan algunos sistemas de referencia. Calcule H_1^0 , H_1^1 , H_2^0 y H_3^2 .

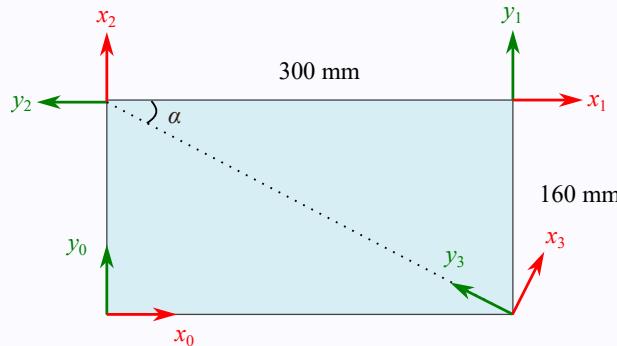


Figura 2.18 Una placa plana con múltiples sistemas de referencia

Solución:

Descripción de {1} con respecto a {0}

Como se observa en la figura 2.18 el sistema $\{1\}$ está trasladado 30 mm en x y 160 mm en la dirección de y , luego el producto matricial que proporciona la matriz de transformación total está dado por:

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz resultante concuerda con lo esquematizado, H_1^0 indica que el sistema $\{1\}$ está en las coordenadas (300,160) y en la misma orientación con respecto a $\{0\}$.

Descripción de $\{2\}$ con respecto a $\{1\}$

De acuerdo a lo mostrado en la figura 2.18 el sistema $\{2\}$ puede obtenerse a partir de $\{1\}$ mediante una translación de 300 mm en la dirección negativa de x y enseguida una rotación de 90° alrededor de z . Con lo anterior se tiene:

$$H_2^1 = D_{x,-300} R_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que de acuerdo a T_2^1 el eje X_2 apunta en la dirección positiva del eje Y_1 , y que el eje Y_2 apunta en la dirección negativa del eje X_1 , lo cual concuerda con el esquema de referencia. Es más, la posición del origen de $\{2\}$ respecto a $\{1\}$ es (-300,0), misma que puede corroborarse en la figura 2.18.

Descripción de $\{2\}$ con respecto a $\{0\}$

Como se observa en la figura 2.18 el sistema $\{2\}$ puede obtenerse de $\{0\}$ mediante una translación de 160 mm en la dirección de y , y una posterior rotación de 90° alrededor de z .

$$H_2^0 = D_{y,160} R_{z,90} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz H_2^0 también puede obtenerse mediante la composición de matrices de transformación, bajo la consideración de que previamente se han calculado H_1^0 y H_2^1 , así:

$$H_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descripción de {3} con respecto a {2}

De la figura 2.18 se puede identificar que {3} se puede obtener de {2} mediante una rotación horaria de un ángulo α en la dirección de z , seguida de una traslación de d_r en la dirección negativa de y , siendo d_r la longitud de la diagonal del rectángulo, entonces se tiene:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{160}{300}\right) = 28.07^\circ \quad ; \quad d_r = \sqrt{160^2 + 300^2} = 340 \text{ mm}$$

$$H_3^2 = R_{z,-\alpha} D_{y,-d_r} = \begin{bmatrix} 0.8824 & 0.4706 & 0 & 0 \\ -0.4706 & 0.8824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -340 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3^2 = \begin{bmatrix} 0.8824 & 0.4706 & 0 & -160.0 \\ -0.4706 & 0.8824 & 0 & -300.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Como es de suponer, además de las series de transformaciones descritas en los puntos anteriores, existen una cantidad considerable de posibles secuencias de transformaciones. Por lo anterior, usualmente en cinemática de manipuladores se establecen ciertos criterios para el establecimiento de los sistemas de referencia así como de las transformaciones a realizar, esto es algo que se verá en el siguiente capítulo.

2.4. Matrices de transformación homogénea utilizando Python

En esta sección veremos cómo aprovechar las *bondades* de SymPy para trabajar con matrices de transformación homogénea. Primeramente comenzaremos importando la librería SymPy de la siguiente manera:

```
>>> from sympy import *
```

Vamos ahora a definir una matriz de transformación homogénea que representa un desplazamiento en x de 10 unidades, la cual denotaremos como **D1**:

```
>>> D1 = Matrix([[1,0,0,10],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
>>> D1
Matrix([
[1, 0, 0, 10],
[0, 1, 0, 0],
[0, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 1]])
```

Observe que si se multiplica dicha matriz por ella misma un par de veces, se obtiene:

```
>>> D1 * D1 * D1
Matrix([
[1, 0, 0, 30],
[0, 1, 0, 0],
[0, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 1]])
```

Lo cual es lógico: una secuencia de tres traslaciones en x de 10 unidades es equivalente a trasladar 30 unidades en esa misma dirección.

Bueno, lo anterior funciona bien, pero si quisiéramos trasladar una distancia diferente, entonces tendríamos que volver a definir otra matriz modificando el número en cuestión, lo cual podría llegar a resultar un poco inconveniente. Es en este punto donde debemos pensar en crear una función que nos permita obtener una matriz *personalizada*. Es sencillo notar que, para cualquier MTH que represente una traslación en x , el único valor que cambia es el de dicha componente en la parte de posición de la matriz, el resto permanece invariable (ceros y unos). Así pues, una posible función, que llamaremos **Dx**, se puede definir de la siguiente manera:

```
def Dx(a):
    H = Matrix([[1,0,0,a],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
    return H
```

Y una vez definida podríamos utilizarla para crear cualquier MTH que represente una traslación en x , simplemente pasando como argumento la cantidad a trasladar, por ejemplo:

```
>>> Dx(3) * Dx(-5)
Matrix([
[1, 0, 0, -2],
```

```
[0, 1, 0, 0],
[0, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 1]])
```

Puesto que estamos trabajando con SymPy podríamos incluso utilizar valores simbólicos:

```
>>> a,b = symbols("a,b")
>>> Dx(a) * Dx(b)
Matrix([
[1, 0, 0, a + b],
[0, 1, 0, 0],
[0, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 1]])
```

De manera similar podríamos definir una función que nos devuelva una MTH que represente una rotación alrededor del eje z. Llamaremos a esta función **Rz**:

```
def Rz(theta):
    ct = cos(theta)
    st = sin(theta)
    H = Matrix([[ct,-st,0,0],[st,ct,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
    return H
```

Para obtener la MTH correspondiente a $R_{z,90^\circ}$ podemos invocar a la función con el argumento **pi/2**, tal como se observa enseguida:

```
>>> Rz(pi/2)
Matrix([
[0, -1, 0, 0],
[1, 0, 0, 0],
[0, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 1]])
```

Es importante recordar que en SymPy las funciones trigonométricas (**sin**, **cos**, **tan**, ...) aceptan argumentos dados en radianes. Es posible usar también valores simbólicos para el argumento, por ejemplo:

```
>>> x = symbols("x")
>>> Rz("x")
Matrix([
```

```
[cos(x), -sin(x), 0, 0],  
[sin(x), cos(x), 0, 0],  
[ 0,      0, 1, 0],  
[ 0,      0, 0, 1]])
```

Ahora podríamos incluso combinar las dos operaciones que hemos definido con las funciones creadas, por ejemplo una rotación en z de 90° seguida de una traslación en x de 10 unidades se especificaría de la siguiente manera:

```
>>> Rz(pi/2) * Dx(10)  
Matrix([  
[0, -1, 0, 0],  
[1, 0, 0, 10],  
[0, 0, 1, 0],  
[0, 0, 0, 1]])
```

De manera similar se podrían definir funciones que nos permitan crear las otras matrices de transformación básicas.

Problemas

- 2.1 Describe las coordenadas del punto Q en cada uno de los sistemas de referencia mostrados en la Figura 2.19.

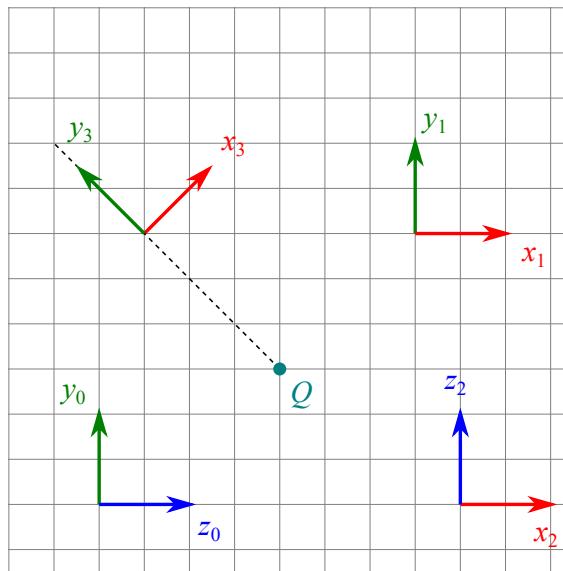


Figura 2.19

- 2.2 Las coordenadas de un punto P en un sistema de referencia $\{A\}$ están dadas por $\mathbf{r}_P^A = [5, 10, 3]^T$. Si se sabe que un sistema de referencia $\{B\}$ se obtiene a partir de $\{A\}$ mediante una traslación en x de 10 unidades y una traslación en z de 5 unidades, calcula las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $\{B\}$.

- 2.3 Muestre que la distancia entre dos puntos no cambia con la rotación, es decir, que $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| = \|R\mathbf{p}_1 - R\mathbf{p}_2\|$. Donde R es una matriz de rotación y \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 dos vectores de posición.

- 2.4 Muestre que la rotación efectuada a un vector no altera su magnitud, es decir que $\|\mathbf{p}\| = \|R\mathbf{p}\|$, donde R es una matriz de rotación.

- 2.5 Muestre que para una matriz de rotación se cumple la propiedad $R^{-1} = R^T$. Utilice la matriz de rotación alrededor de x para comprobarlo. Suponga un ángulo θ de rotación y proceda mediante un método convencional para el cálculo de la matriz inversa y compare con lo obtenido transponiendo la matriz de rotación.

- 2.6 Un vector $\mathbf{P} = [0, 10, 0]^T$ se rota alrededor del eje x un ángulo de 90° y enseguida se rota alrededor del eje y un ángulo de 180° , determine las componentes del vector transformado. Esquematice el vector inicial y el transformado.

- 2.7 En la Figura 2.20 se muestra un cuerpo rígido con forma de cubo y cuyas aristas

miden 200 mm. Al sólido se le adhiere un sistema móvil $\{1\}$ que inicialmente coincide con el sistema fijo $\{0\}$. Calcule lo siguiente:

- Las coordenadas del punto Q después de una rotación de 30° alrededor del eje x_0 , seguida por una rotación de 225° alrededor del eje y_1 .
- Las coordenadas del punto Q después de una rotación de 45° alrededor del eje y_1 , seguida por una rotación de 60° alrededor del eje z_0 .
- Las coordenadas del punto Q después de la rotación de 135° alrededor del eje z_0 , seguida por una rotación de 90° alrededor del eje x_1 y posteriormente una rotación de 60° alrededor del eje x_0 .

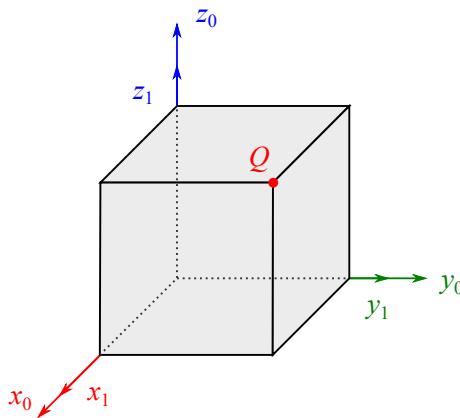


Figura 2.20

2.8 Suponga que tres sistemas de referencia $\{A\}$, $\{B\}$ y $\{C\}$ están dados y que además:

$$R_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad R_C^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule R_B^C .

2.9 La siguiente matriz de rotación corresponde a una secuencia de rotaciones alrededor de un sistema móvil:

- Un ángulo α alrededor del eje x
- Un ángulo β alrededor del eje y
- Un ángulo γ alrededor del eje z

Calcule α , β y γ .

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

2.10 El sistema de referencia $\{B\}$ se obtiene a partir del $\{A\}$ mediante una secuencia de rotaciones, a saber:

- a) 45° alrededor del eje z móvil
- b) 30° alrededor del eje x fijo
- c) 135° alrededor del eje y móvil
- d) 60° alrededor del eje z fijo

Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que describe la orientación de $\{B\}$ con respecto de $\{A\}$.

2.11 Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la siguiente matriz de rotación.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.12 Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la siguiente matriz de rotación.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2.13 Calcule la matriz de rotación correspondiente al conjunto de ángulos de Euler ZXZ $\{45^\circ, 60^\circ, 20^\circ\}$.

2.14 Un sistema de referencia $\{B\}$ está trasladado 5 unidades en x , 4 unidades en y y -10 unidades en z con respecto al sistema $\{A\}$. Se sabe que las coordenadas de un punto P descritas en el sistema $\{B\}$ son $\mathbf{P}^B = [2, 3, -5]^T$, calcule \mathbf{P}^A .

2.15 En la Figura 2.21 se muestra un cuerpo rígido en forma cúbica, con algunos sistemas de referencia adheridos tal como se esquematiza. Calcule las matrices de transformación homogénea T_1^0 , T_2^1 , T_2^0 y T_0^2 . Considere que las aristas del cubo miden 100

mm.

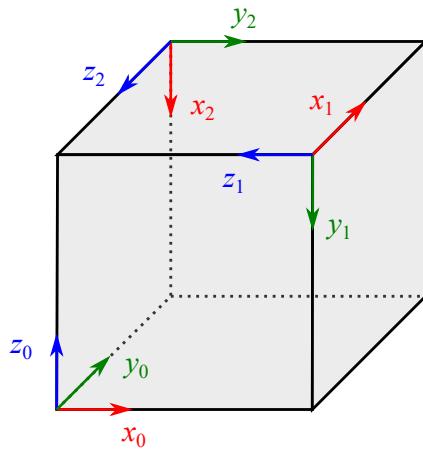


Figura 2.21

- 2.16 Un sistema de referencia móvil $\{C\}$ se obtiene a partir de un sistema fijo $\{B\}$ mediante las siguientes transformaciones: una translación de 3 unidades a lo largo del eje x , seguida por una rotación de 90° alrededor del eje z móvil seguida por una translación de 5 unidades a lo largo del eje y fijo. Calcule la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación de $\{C\}$ con respecto de $\{B\}$.
- 2.17 La siguiente matriz de transformación homogénea se obtiene de realizar las siguientes transformaciones respecto a un sistema móvil: una rotación alrededor de z seguida por una translación en el plano xy .

$$T = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 3.536 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 10.61 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Determine el ángulo que se ha rotado, así como las componentes de translación correspondientes.

- 2.18 Se tiene un triángulo rectángulo definido por los puntos A , B y C , al cual se adhiere un sistema de referencia móvil $\{1\}$ que inicialmente coincide con el sistema fijo $\{0\}$ (ver figura 2.22). Considerando que se aplican las siguientes transformaciones alrededor de los ejes móviles:

- Una translación de 10 unidades en la dirección x
- Una rotación de 180° alrededor de z
- Una translación de -5 unidades en la dirección de y
- Una rotación de 90° alrededor z .

Calcule la matriz de transformación homogénea correspondiente y las coordenadas

de los puntos que definen el triángulo con respecto al sistema fijo, esquematizando también las posiciones inicial y transformada. Las coordenadas de A , B y C en el sistema $\{1\}$ son:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

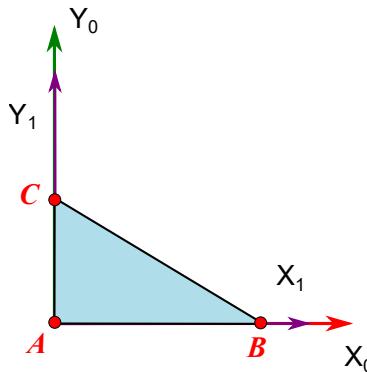


Figura 2.22

2.19 Sea H una matriz de transformación homogénea de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces su inversa viene dada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando la siguiente matriz H , aplica un método convencional para calcular su inversa y compara con el resultado que se obtiene al aplicar la fórmula anterior.

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.20 Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule:

- a) H_B^A, H_C^B, H_D^C y H_D^A .

- b) Las coordenadas de un punto Q descritas en el sistema $\{A\}$, si se sabe que $\mathbf{Q}^D = [3, 0, 5]^T$.

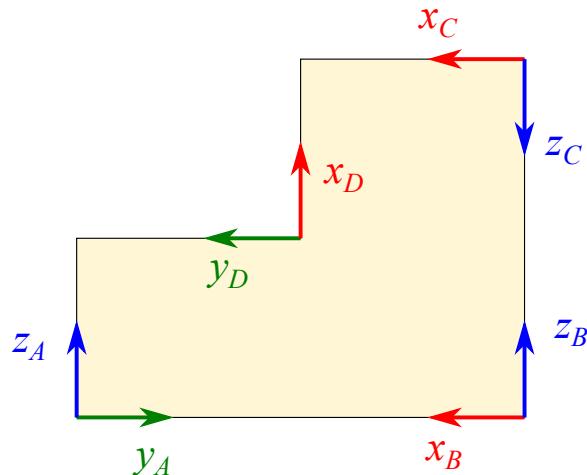


Figura 2.23

2.21 Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule: $H_1^0, H_2^0, H_2^1, H_0^1$.

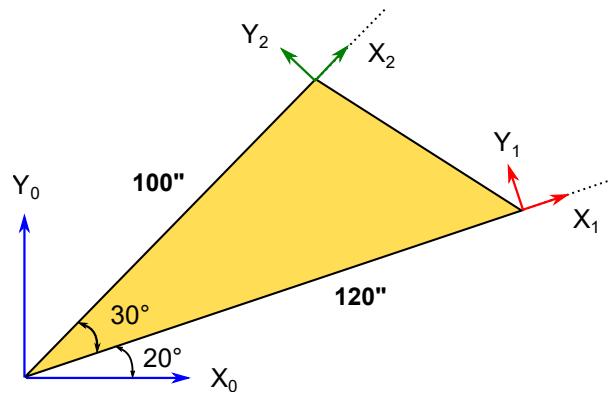


Figura 2.24

2.22 Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule: $H_1^0, H_2^0, H_2^1, H_3^2$ y T_3^0 .

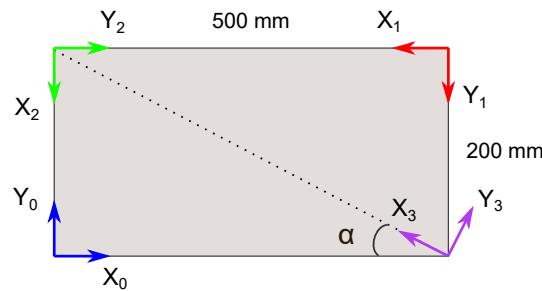


Figura 2.25

- 2.23 Al sólido mostrado en la figura se le adhieren los sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$. Determine H_1^0 , H_2^1 y H_2^0 .

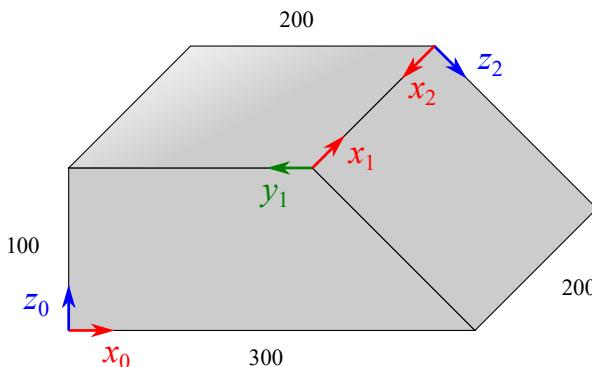


Figura 2.26

- 2.24 Al sólido mostrado en la figura se le adhieren los sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y $\{4\}$. Determine H_1^0 , H_2^1 y H_3^2 y H_4^3 .

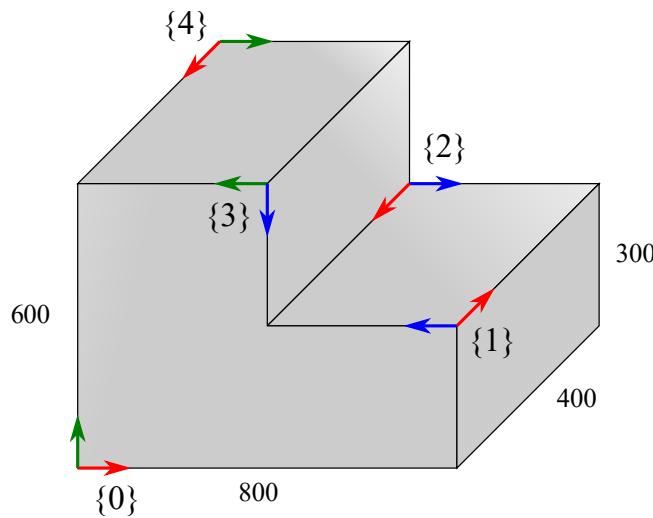


Figura 2.27

- 2.25 En la figura 2.28 se muestra un manipulador planar *RR* con tres sistemas adheridos a cada eslabón que lo conforma, incluyendo la base, alineados de tal forma que el eje *x* coincide con la dirección axial del eslabón y con el origen ubicado en el extremo. Si se sabe que la matriz de transformación que describe $\{2\}$ en $\{0\}$ está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule las coordenadas del extremo del manipulador si $\theta_1 = 30^\circ$ y $\theta_2 = -30^\circ$. Considere que $L_1 = 200$ mm y $L_2 = 200$ mm.

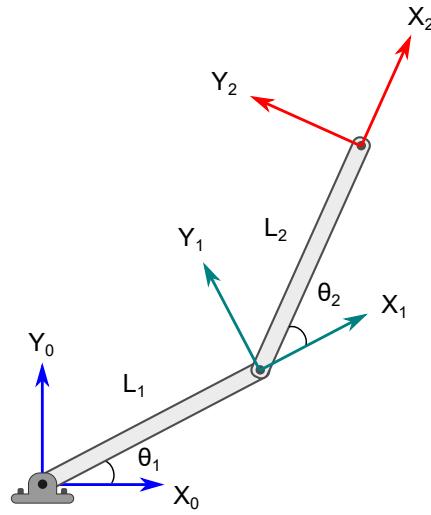


Figura 2.28

2.26 Un cuerpo rígido está posicionado y orientado de acuerdo a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -300 \\ 250 \\ 90^\circ \\ 30^\circ \\ 120^\circ \end{bmatrix}$$

Calcule matriz de transformación homogénea que describe la ubicación de dicho cuerpo rígido.

2.27 Para los sistemas de referencia mostrados en la figura 2.29, calcule T_A^B , T_C^B , T_D^C y T_A^D .

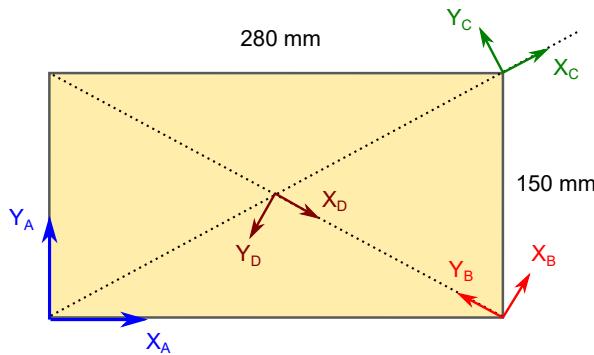


Figura 2.29

- 2.28 En la figura 2.30 se muestra el esquema de un manipulador planar RRR que deberá realizar operaciones de soldadura a lo largo de la trayectoria compuesta esquematizada mediante la línea discontinua. Los puntos A y B denotan el inicio y fin de la trayectoria, y el elemento terminal del manipulador deberá alcanzar estos puntos con la orientación dada por los sistemas {A} y {B}. Para un instante determinado se conoce la relación existente entre {A} y los sistemas de la herramienta {T} y la base {W}:

$$T_A^W = \begin{bmatrix} 0.707107 & -0.707107 & 0 & 300.0 \\ 0.707107 & 0.707107 & 0 & 150.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^T = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.866025 & 0 & 250.694 \\ 0.866025 & -0.5 & 0 & -30.4602 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule las matrices de transformación T_B^A , T_B^W , T_B^T y T_T^W .

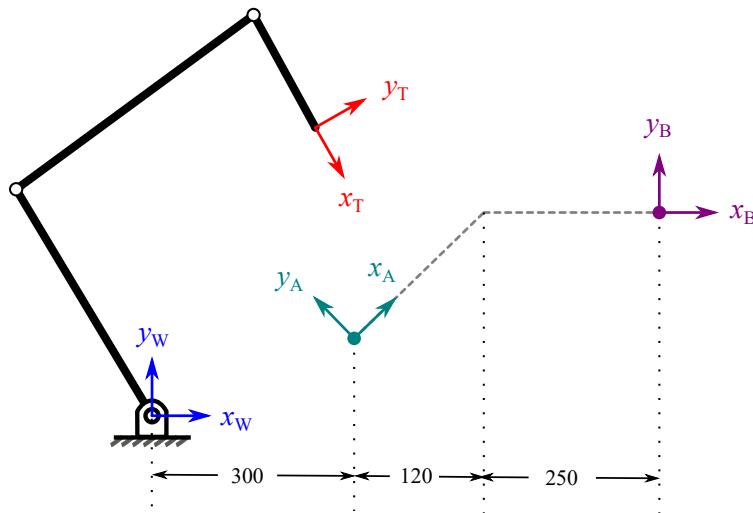


Figura 2.30

- 2.29 En la figura 2.31 se muestra un conjunto de objetos {1}, {2} y {3} que deberán ser manipulados por un brazo robótico cuyo sistema base {0} se ubica como se ilustra. Calcule la posición y orientación de cada objeto con respecto a la base, considere que los objetos son de dimensiones (20x20x20) mm.

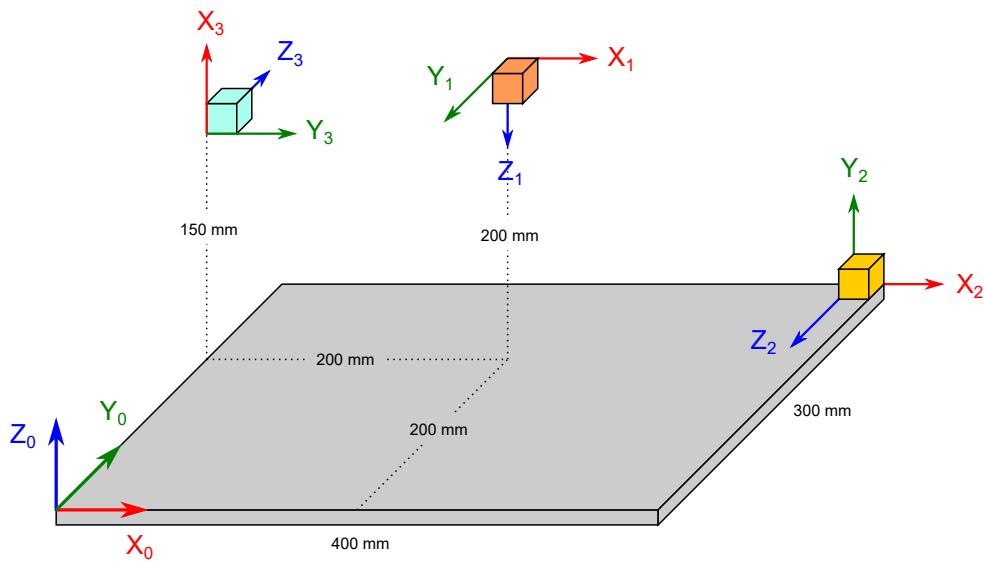


Figura 2.31

2.30 En la figura 2.32 se muestran dos cuerpos rígidos móviles en forma cúbica, de dimensiones (20x20x20) mm, a los cuales se adhieren los sistemas de referencia {B} y {C}. Realice lo siguiente:

- Calcule las matrices de transformación T_B^A , T_C^A y T_C^B .
- Calcule los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {B} con respecto de {A} y de {C} con respecto de {A}.

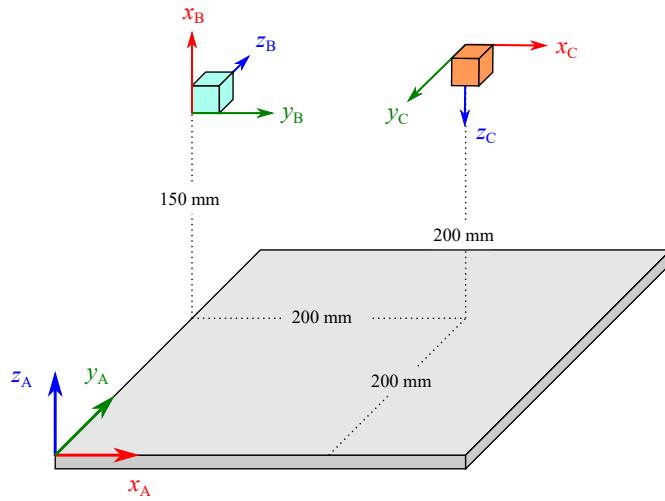


Figura 2.32

2.31 En la figura 2.33 se muestra el esquema de un pequeño manipulador planar PPR que deberá manipular algunos objetos cuya posición y orientación está indicada mediante los sistemas de referencia {A} y {B}. Para un instante determinado en que $\theta_3 = 130^\circ$ se conoce la siguiente información:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 140.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 125.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^3 = \begin{bmatrix} 0.965926 & 0.258819 & 0 & -69.2651 \\ -0.258819 & 0.965926 & 0 & -115.304 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule lo siguiente:

- Las matriz de transformación T_3^0 que describe la posición y orientación del extremo con respecto a la base.
- Las matrices de transformación T_A^0 , T_B^A y T_B^0 .
- Los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema $\{3\}$ con respecto al $\{0\}$.

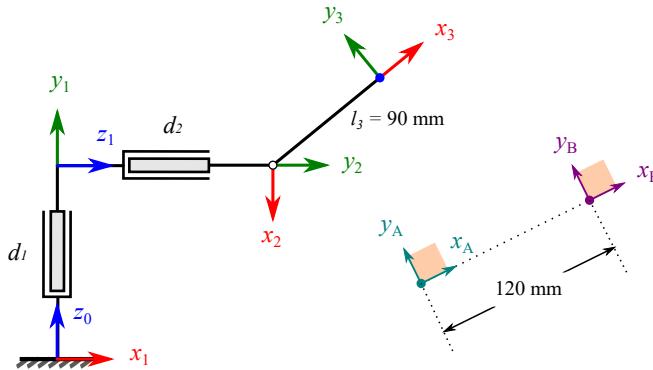


Figura 2.33

- 2.32 En la figura 2.34 se muestra el esquema de un pequeño manipulador planar PRR que deberá manipular algunos objetos cuya posición y orientación está indicada mediante los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$. Para un instante determinado en que $\theta_3 = 47^\circ$ se conoce la siguiente información:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} 0.956305 & -0.292372 & 0 & 143.446 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0.292372 & 0.956305 & 0 & 143.856 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^3 = \begin{bmatrix} -0.62932 & 0.777146 & 0 & -226.414 \\ -0.777146 & -0.62932 & 0 & -118.938 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule lo siguiente:

- Las matriz de transformación T_3^0 que describe la posición y orientación del extremo con respecto a la base.
- Las matrices de transformación T_A^0 , T_B^A y T_B^0 .
- Los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema $\{B\}$ con respecto al $\{0\}$.

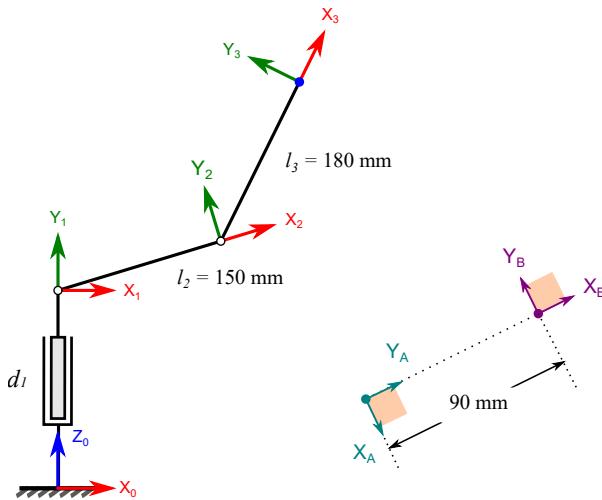


Figura 2.34

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

- PC2.1 Programe una función (**htmrotx**) que deberá devolver la matriz de transformación homogénea que representa una rotación alrededor del eje x . La función deberá recibir como argumento el ángulo a rotar, el cual puede ser una cantidad numérica o simbólica.
- PC2.2 Programe una función (**htmroty**) que deberá devolver la matriz de transformación homogénea que representa una rotación alrededor del eje y . La función deberá recibir como argumento el ángulo a rotar, el cual puede ser una cantidad numérica o simbólica.
- PC2.3 Programe una función (**euler_zxz**) que calcule los ángulos de Euler ZXZ dada como argumento de entrada una matriz de rotación.
- PC2.4 Desarrolle una función (**euler_zyz**) que calcule los ángulos de Euler ZYZ dada como argumento de entrada una matriz de rotación.
- PC2.5 En la figura 2.28 se muestra un manipulador planar de 2 GDL con sistemas de referencia adheridos a sus eslabones. Se sabe que la matriz de transformación que describe el sistema de referencia del extremo con respecto a la base está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrolle un programa de computadora que calcule la posición del extremo del manipulador para cualesquiera combinación de valores articulares (q_1 y q_2) proporcionados. Asuma que $L_1 = L_2 = 250$ mm.

- PC2.6 Considere un triángulo equilátero de lados unitarios, al cual se le adhiere un sistema de referencia móvil $x_1y_1z_1$. El origen del sistema móvil se encuentra en el centroide del triángulo e inicialmente coincide con el origen del sistema fijo $x_0y_0z_0$, además el eje y_1 apunta en la dirección de uno de sus vértices. Desarrolle un programa que le permita calcular las coordenadas de los vértices en el sistema fijo $\{0\}$ cuando se efectua una rotación alrededor del eje z_1 . También deberá mostrarse de forma gráfica la posición inicial y la transformada. Utilice **Matplotlib** para realizar la representación gráfica.

- PC2.7 Se tiene un sólido con forma de pirámide triangular cuyos vértices se ubican en los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respecto a un sistema móvil $x_1y_1z_1$ adherido al sólido, mismo que inicialmente coincide con el marco de referencia global $x_0y_0z_0$. Desarrolle un programa de computadora que calcule las coordenadas de los vértices respecto al sistema global cuando se han efectuado las siguientes transformaciones: rotación de 45° respecto al eje x_1 , 30° respecto al eje Y_0 , 60° respecto a z_1 , traslación de 5 unidades en la dirección de x_1 y 4 unidades en dirección de z_1 , y que además represente de manera gráfica las posiciones inicial y transformada del sólido.
- PC2.8 La representación **eje y ángulo** es un método para indicar la orientación de un sólido mediante un eje de rotación que no necesariamente corresponde con los principales y un ángulo determinado. Desarrolle una función (**rot2axa**) que calcule la representación eje y ángulo correspondiente a una matriz de rotación proporcionada.

Cinemática directa

La cinemática directa de manipuladores consiste en determinar la posición y orientación del extremo de un manipulador, a partir de las posiciones articulares. En general suele ser un problema bastante *abordable*, dado que se sigue una metodología para establecer los sistemas de referencia y con base a esto formar las matrices de transformación homogénea que proporcionan las relaciones entre los mismos.

En la Figura 3.1 se muestra un esquema que representa el papel de la cinemática directa e inversa como herramientas para relacionar el espacio cartesiano (asociado con posiciones y orientaciones del elemento terminal) con el espacio de las articulaciones (asociado con las posiciones articulares).

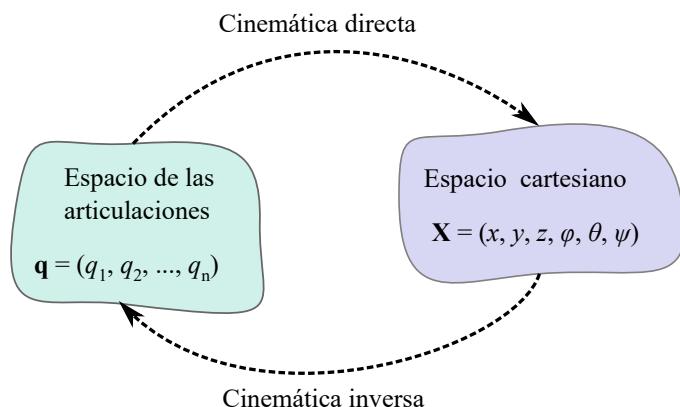


Figura 3.1 Cinemática directa e inversa

3.1. Sobre cadenas cinemáticas y transformaciones

Un robot manipulador está compuesto de un conjunto de eslabones interconectados mediante juntas (pares cinemáticos). En general, un manipulador serial con n juntas tendrá

$n + 1$ eslabones, dado que cada junta (asumiendo que sean de 1 GDL) conecta dos eslabones.

Para identificar los componentes de un manipulador se numeran las juntas de 1 a n y los eslabones de 0 a n , comenzando desde el eslabón base (o referencia fija). Con esta convención, la articulación i conecta al eslabón $i - 1$ con el eslabón i (ver Figura 3.2).

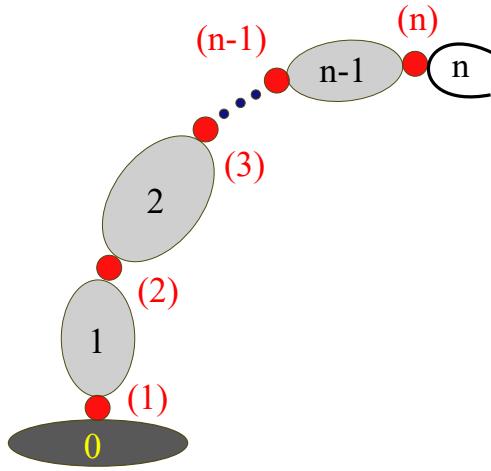


Figura 3.2 Cadena cinemática, numeración

Con cada una de las articulaciones se asocia una variable de articulación denotada mediante q_i . En el caso de una junta de revoluta q_i es el ángulo de rotación, y para un par prismático q_i es el desplazamiento de la junta.

Para realizar el análisis cinemático se adjunta rígidamente un sistema de referencia a cada eslabón (ver Figura 3.3). En particular, se adjunta el sistema $\{i\}$ al eslabón i , esto implica que para cualquier movimiento que el robot realice las coordenadas de cada punto en el eslabón i son constantes cuando se expresan o describen con respecto al i -ésimo sistema de referencia.

La descripción de posición y orientación de $\{i\}$ en $\{i - 1\}$ se hace mediante una matriz de transformación A_i . Evidentemente la matriz A_i no es constante puesto que varía cuando lo hace la configuración del manipulador. Sin embargo, dado que cada articulación de los manipuladores a considerar, en este curso, será a lo sumo de un grado de libertad entonces A_i es función de una sola variable de articulación q_i :

$$A_i = A_i(q_i)$$

Para un manipulador de n eslabones y bajo la consideración de que a cada eslabón de la cadena cinemática se le adjunta un sistema de referencia, la posición y orientación del elemento terminal con respecto al sistema de la base, se puede expresar como el

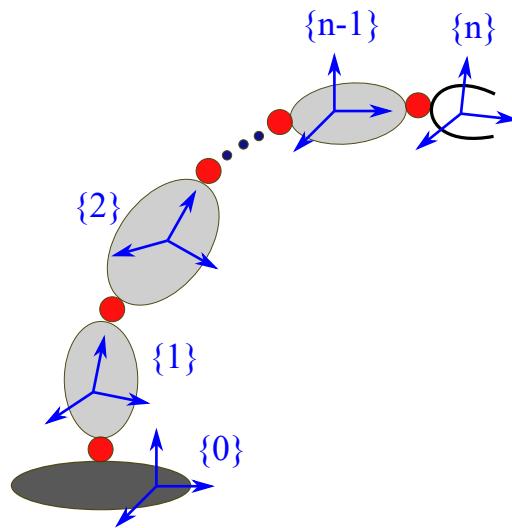


Figura 3.3 Cadena cinemática y sistemas de referencia

producto matricial de todas las matrices de transformación A_i que describen la totalidad del manipulador:

$$T_n^0 = A_1(q_1)A_2(q_2)\dots A_n(q_n)$$

De manera general, la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación del sistema $\{j\}$ con respecto a $\{i\}$ se denomina matriz de transformación y se denota mediante T_j^i . Una matriz de transformación T_j^i tiene la forma:

$$T_j^i = \begin{bmatrix} R_j^i & \mathbf{d}_j^i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

3.2. Diagramas cinemáticos de manipuladores seriales

Un diagrama cinemático es una representación simplificada de una cadena cinemática. Este tipo de diagramas sirven para ahorrar tiempo en la esquematización de los dibujos auxiliares para el desarrollo de los análisis cinemáticos de un sistema mecánico. En lugar de un dibujo con *lujo de detalles*, se utilizan líneas y formas geométricas simples para representar eslabones y pares cinemáticos.

A lo largo de este capítulo (y en el resto de estos apuntes) se utilizarán diagramas cinemáticos para representar manipuladores seriales. Dado que los manipuladores seriales que estudiaremos únicamente están conformados por juntas de revoluta (R) y prismáticas (P), nos centraremos en cómo representar este tipo de uniones.

En la Figura 3.4 podemos observar la representación en el plano y en el espacio de las juntas de revoluta y prismáticas. Observe que para la revoluta en el espacio se utiliza un cilindro, es importante establecer que la dirección axial del cilindro se debe corresponder con el eje de rotación de la junta de revoluta que se esté representando. En el caso de la junta prismática, se utiliza un prisma rectangular para representarla en el espacio, la dirección más alargada del prisma define la dirección de deslizamiento de dicha junta.

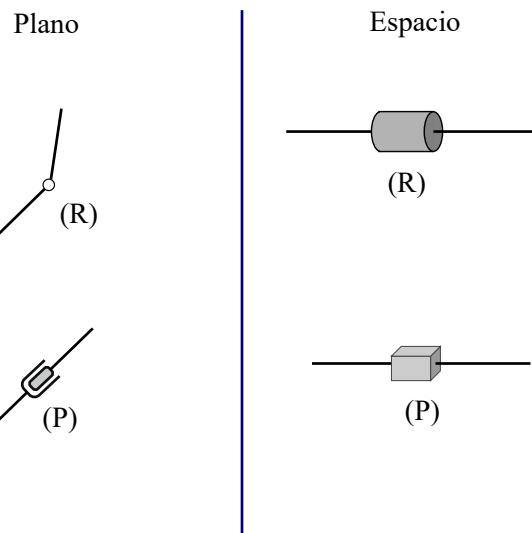


Figura 3.4 Representación de las juntas de revoluta (R) y prismáticas (P)

Los eslabones se representarán siempre utilizando líneas. Considere que un diagrama cinemático no es un dibujo a escala, ni muestra la forma o geometría específica de los eslabones que conforman el manipulador sino que permite visualizar la manera en que están conectados los eslabones y las distancias entre las articulaciones.

3.3. La metodología de Denavit-Hartenberg

En esta sección se establecerán una serie de convenciones que proporcionan un procedimiento sistemático para el desarrollo del análisis cinemático directo. La metodología de Denavit-Hartenberg (DH) es un procedimiento que permite establecer sistemas de referencia siguiendo algunas reglas básicas que permiten describir las matrices A_i mediante cuatro transformaciones básicas realizadas en un cierto orden, a las cuales se asocian cuatro parámetros.

Está claro que existen una multitud de posibilidades que proporcionarían una descripción de un sistema transformado respecto a otro, y sería posible realizar un análisis cinemático sin seguir la metodología a describir, sin embargo el análisis cinemático de un manipulador de n grados de libertad puede llegar a ser extremadamente complejo y sería inconveniente utilizar un procedimiento sin seguir ciertas convenciones.

En la metodología de Denavit-Hartenberg cada transformación A_i se representa como el producto de cuatro transformaciones básicas:

$$A_i = R_{z,\theta_i} D_{z,d_i} D_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde las cuatro cantidades θ_i , d_i , a_i y α_i son parámetros asociados con el eslabón y la junta i .

3.3.1. Estableciendo los sistemas de referencia

Las cuatro transformaciones anteriores están asociadas a conjunto de reglas para establecer los sistemas de referencia, mismas que se describirán a continuación.

Establecer z_i

El eje z_i de cada sistema de referencia se debe colocar de tal manera que apunte en la dirección del eje de accionamiento de la junta $i + 1$. Considerar que en el caso de una articulación de revoluta el eje de accionamiento será el eje sobre el cual se realiza la rotación y que en el caso de una articulación prismática el eje de accionamiento será la dirección de deslizamiento de la misma. De manera particular, el eje z_n (extremo del manipulador) deberá colocarse en la misma dirección que z_{n-1} .

El sistema $\{0\}$

Una vez se han establecido los ejes z para toda la cadena cinemática, se procede a establecer el sistema base 0 . El origen o_0 se coloca sobre cualquier punto en z_0 . La dirección de x_0 y y_0 son arbitrarias y únicamente deben cumplir el hecho de formar un sistema coordenado derecho.

Sistemas de referencia: de $\{1\}$ a $\{n\}$

Una vez se establecieron los ejes z y el sistema de referencia base se comienza un proceso iterativo para definir el sistema $\{i\}$ a partir de $\{i - 1\}$.

Con la finalidad de establecer el sistema de referencia $\{i\}$ es necesario considerar los tres casos que a continuación se describen:

i. z_i y z_{i-1} no son coplanares. Si z_i y z_{i-1} no son coplanares entonces existe un único segmento de línea perpendicular a ambos ejes que los conecta y tiene longitud mínima. La línea que contiene a esta normal común a z_i y z_{i-1} define la dirección de x_i y el punto en donde esta linea interseca z_i es el origen o_i .

ii. z_i y z_{i-1} son paralelos. Si z_i y z_{i-1} son paralelos entonces existen una cantidad infinita de normales comunes. En general se suele tomar la normal que pasa por o_{i-1} como la dirección para x_i y la intersección de dicha normal con z_i como el origen o_i .

iii. z_i y z_{i-1} se intersecan. En este caso x_i se escoge en la dirección normal al plano formado por z_i y z_{i-1} , y preferentemente en la dirección de $z_{i-1} \times z_i$. El origen o_i se coloca en la intersección de z_i y z_{i-1} .

Existe otro caso adicional, más simple que los anteriores: si z_{i-1} y z_i son *colineales*, entonces el eje x_i se coloca en la misma dirección que el eje x_{i-1} .

Para todos los casos anteriores la dirección de y_i se establece de tal manera que complete un sistema coordenado derecho.

3.3.2. La obtención de los parámetros

Una vez que se han establecido los sistemas de referencia, se procede a formar una tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, conformada por cinco columnas: i , a_i , α_i , d_i , θ_i . En cada una de las filas se colocan los parámetros (a_i , α_i , d_i y θ_i) asociados con el i -ésimo eslabón (ver Table 3.1). Estos parámetros se obtienen (miden) de los sistemas de referencia establecidos, tomando en consideración lo que a continuación se describe:

1. El parámetro θ_i es el ángulo que hay que rotar alrededor del eje z_{i-1} para alinear al eje x_{i-1} con el eje x_i . En el caso de que la i -ésima articulación sea una revoluta, entonces θ_i será una variable articular.
2. El parámetro d_i es la distancia entre los ejes x_{i-1} y x_i medida a lo largo del eje z_{i-1} . Si los ejes x_{i-1} y x_i se intersecan, entonces $d_i = 0$. En el caso de que la i -ésima articulación sea de tipo prismática, entonces d_i será una variable articular.
3. El parámetro a_i es la distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i medida a lo largo del eje x_i . Si los ejes z_{i-1} y z_i se intersecan, entonces $a_i = 0$.
4. El parámetro α_i es el ángulo que hay que rotar alrededor del eje x_i para alinear al eje z_{i-1} con el eje z_i . Típicamente, en la mayoría de manipuladores este valor será 90° o -90° .

Es importante tener en cuenta que las variables articulares q_i sólo puede estar asociadas con los parámetros d_i y θ_i . Los parámetros α_i y a_i siempre serán valores constantes.

La tabla de parámetros que resulta tiene tantas filas como grados de libertad posea el manipulador. En cada fila de la tabla se colocan los parámetros de Denavit-Hartenberg asociados con el i -ésimo eslabón, y corresponden a la descripción de transformaciones entre los sistemas de referencia $\{i\}$ e $\{i - 1\}$. Además, es importante considerar que por cada fila de parámetros únicamente tendremos una variable articular (q_i).

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	α_1	d_1	θ_1
2	a_2	α_2	d_2	θ_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	a_n	α_n	d_n	θ_n

Tabla 3.1 Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg

3.3.3. Calculando las A_i y T_n^0

Las matrices A_i se obtienen cuando se sustituyen cada una de las filas de la tabla de parámetros en la matriz de Denavit-Hartenberg (ecuación 3.1). Recuerde que $A_i = T_i^{i-1}$.

Una vez que se han calculado todas las matrices A_i , se procede a multiplicarlas para determinar a la matriz T_n^0 que describe la cinemática directa del manipulador. Se debe recordar que esta matriz está dada por:

$$T_n^0 = A_1 A_2 \dots A_n = T_1^0 T_2^1 \dots T_n^{n-1}$$

La matriz T_n^0 depende de todas las variables articulares (q_1, q_2, \dots, q_n). Esta matriz nos proporcionará tanto la posición como la orientación del elemento terminal (sistema de referencia $\{n\}$) del manipulador con respecto al sistema de la base (sistema $\{0\}$).

Ejemplo 3.1 Manipulador planar RR

Calcule la cinemática directa del manipulador RR mostrado en la Figura 4.1a).

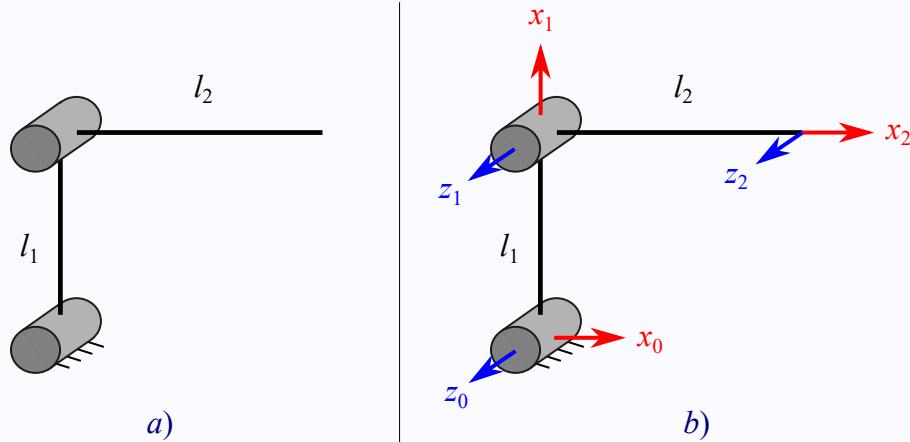


Figura 3.5 Manipulador planar RR

Solución:

El manipulador planar RR de la Figura 4.1a) tiene dos grados de libertad, con los dos ejes de articulación paralelos. Los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg quedarían establecidos como se muestran en la 4.1b). Recuerde que el eje z_0 se debe colocar en la junta 1, z_1 en la junta 2 y z_2 en el extremo del manipulador y apuntando en la misma dirección que el eje z anterior (z_1). Observe que dado que z_0 y z_1 son paralelos, entonces el eje x_1 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes. El mismo caso aplica para colocar a x_2 .

Ahora vamos a determinar cada uno de los parámetros de Denavit-Hartenberg. Los parámetros θ_1 y θ_2 corresponden a las variables articulares q_1 y q_2 , dado que ambas articulaciones son revolutas. El parámetro d_1 recuerde que es la distancia entre los ejes x_1 y x_0 , medida en la dirección de z_0 , pero dado que estos ejes se intersecan entonces $d_1 = 0$. El parámetro a_1 es la distancia entre z_0 y z_1 medida en la dirección de x_1 , observe que esta distancia es justamente l_1 . El parámetro α_1 es el ángulo que hay que rotar para alinear al eje z_0 con el eje z_1 , girando alrededor del eje x_1 , se observa que z_0 y z_1 apuntan ya en la misma dirección, por lo cual $\alpha_1 = 0^\circ$. El parámetro d_2 es la distancia entre los ejes x_1 y x_2 , medida en la dirección de z_1 , pero dado que se intersecan entonces $d_2 = 0$. El parámetro a_2 es la distancia entre los ejes z_1 y z_2 medida en la dirección de x_2 , la cual corresponde justamente a l_2 . Finalmente, el parámetro α_2 es el ángulo que hay que rotar alrededor del eje x_2 para alinear al eje z_1 con el z_2 , se puede notar que los ejes z_1 y z_2 están alineados y por lo tanto $\alpha_2 = 0^\circ$. Así pues, la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg quedaría de la siguiente manera:

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2

Luego, cada matriz de transformación A_i se obtiene de sustituir los parámetros correspondientes en la matriz de Denavit-Hartenberg (ecuación 3.1):

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz de transformación que relaciona el extremo del manipulador con la base está dada por la multiplicación de estas matrices:

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 & 0 & l_2 c_1 c_2 - l_2 s_1 s_2 + l_1 c_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & -s_1 s_2 + c_1 c_2 & 0 & l_2 s_1 c_2 + l_2 c_1 s_2 + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior se puede simplificar un poco aplicando las siguientes identidades trigonométricas:

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$

$$s_{12} = s_1 c_2 + c_1 s_2$$

Entonces:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.2 Manipulador RRR

Calcule la cinemática directa del manipulador RRR mostrado en la Figura 3.6.

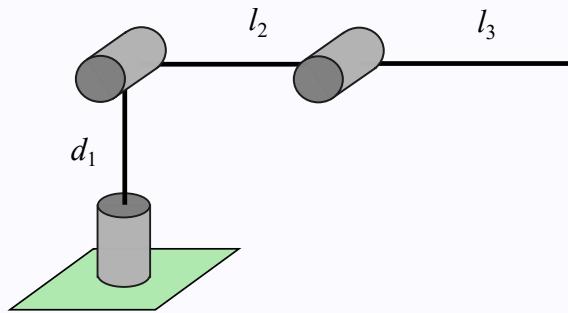


Figura 3.6 Manipulador RRR

Solución:

El manipulador RRR mostrado en la Figura 3.7 tiene tres grados de libertad (posicionamiento). Las direcciones de accionamiento de la primera y segunda articulación son mutuamente perpendiculares, además, las direcciones de la segunda y tercera articulación son paralelas. Los sistemas de referencia quedan establecidos como se muestra en la Figura 3.7. Dado que z_0 y z_1 se intersecan, entonces el eje x_1 se coloca en la dirección normal al plano formado por ambos ejes. Los ejes z_1 y z_2 son paralelos, entonces x_2 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes. Los ejes z_2 y z_3 son paralelos, entonces x_3 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes.

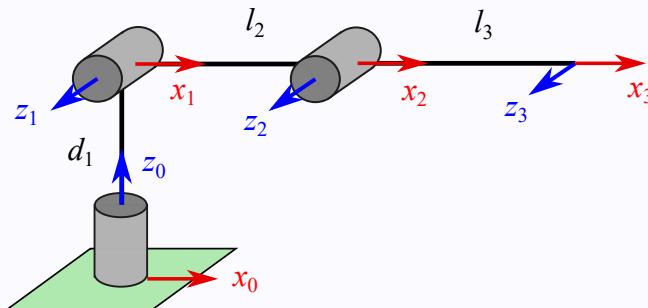


Figura 3.7 Manipulador RRR con los sistemas establecidos

Con los sistemas establecidos de tal forma, se obtiene la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg:

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90°	d_1	q_1
2	l_2	0	0	q_2
3	l_3	0	0	q_3

Entonces, las matrices de transformación A_i estarán dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos $A_2 A_3$ se tiene:

$$A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_2 c_3 - s_2 s_3 & -c_2 s_3 - s_2 c_3 & 0 & l_3 c_2 c_3 - l_3 s_2 s_3 + l_2 c_2 \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & l_2 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 + l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando las identidades trigonométricas: $c_{23} = c_2 c_3 - s_2 s_3$ y $s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3$, resulta:

$$A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & l_2 c_2 + l_3 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente multiplicando este resultado por A_1 , se obtiene la matriz T_3^0 :

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & d_1 + l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.3 Robot ABB IRB 140

Calcule la cinemática directa del manipulador ABB IRB 140 mostrado en la Figura 3.8.

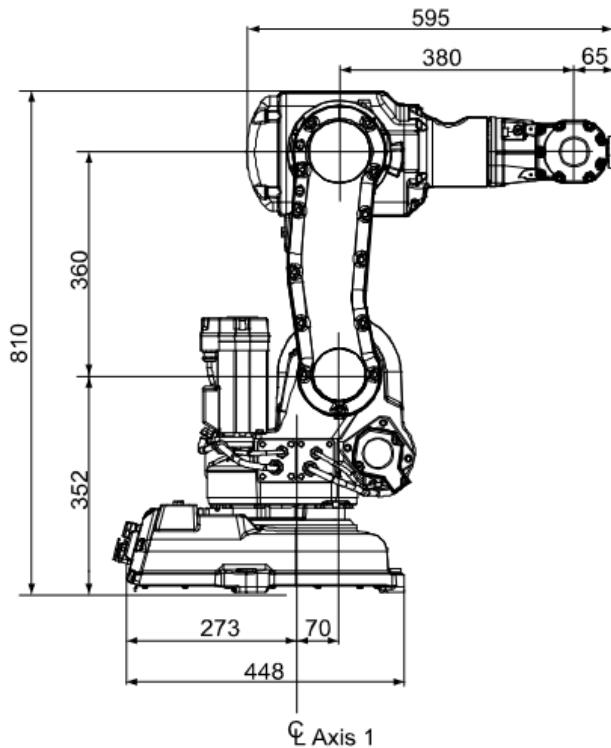


Figura 3.8 Dimensiones del robot ABB IRB 140

Para calcular la cinemática directa de cualquier manipulador industrial, podemos comenzar buscando información acerca de sus dimensiones. En el caso del IRB 140 se puede encontrar información en [este enlace](#). En la Figura 3.8 se muestra un esquema con las dimensiones del manipulador. Se debe tener en cuenta que no todas las dimensiones son relevantes para un análisis cinemático; usualmente, son de interés cinemático las distancias entre cada uno de los ejes del robot. Con esta información trazamos un diagrama cinemático que nos servirá para esquematizar nuestros sistemas de referencia de una manera más conveniente.

En la Figura 4.11 se muestra el diagrama cinemático del IRB 140, así como los sistemas de referencia ya establecidos, siguiendo las reglas de la metodología de Denavit-Hartenberg. A continuación, listamos las consideraciones para colocar cada uno de los sistemas de referencia.

- Cada uno de los ejes z se coloca en la dirección de accionamiento de las articulaciones. De manera particular, z_6 se coloca de forma paralela a la dirección del eje z_5 .
- z_0 y z_1 no son coplanares, entonces el eje x_1 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes.
- z_1 y z_2 son paralelos, por lo tanto el eje x_2 se coloca en la dirección de la normal común que pasa por el origen de $\{1\}$.
- z_2 y z_3 se intersecan, entonces el eje x_3 se coloca en una dirección que es

normal al plano formado por estos ejes.

- z_3 y z_4 se intersecan, por lo tanto el eje x_4 se establece en una dirección normal al plano formado por estos ejes.
- z_4 y z_5 se intersecan, entonces el eje x_5 se coloca en dirección normal al plano formado por ambos ejes.
- z_5 y z_6 son colineales, por lo tanto el eje x_6 se coloca de forma alineada con x_5 . No obstante, es importante comprender que esa alineación no es permanente, dado que el ángulo que se forma entre x_5 y x_6 corresponde a la variable articular q_6 .

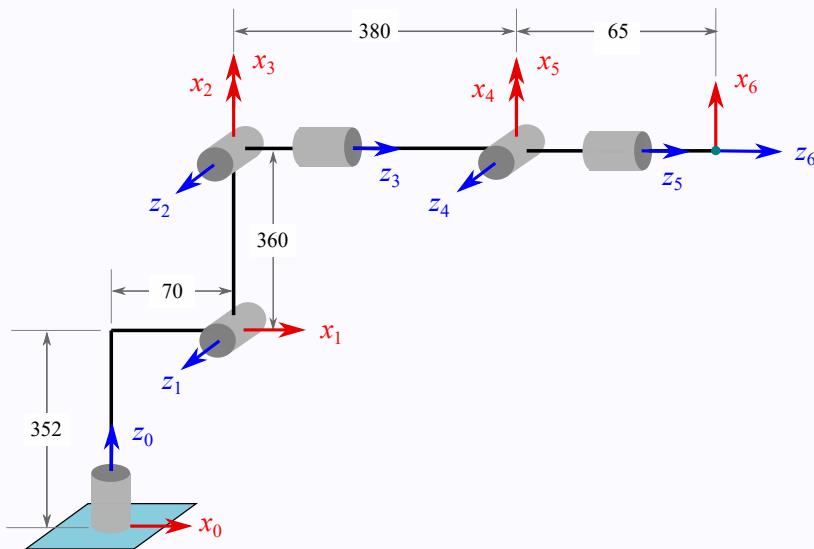


Figura 3.9 Diagrama cinemático del manipulador ABB IRB 140

Una vez establecidos los sistemas de referencia, procedemos a obtener la tabla de parámetros:

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	70	90°	352	q_1
2	360	0°	0	q_2
3	0	90°	0	q_3
4	0	-90°	380	q_4
5	0	90°	0	q_5
6	0	0°	65	q_6

Sustituyendo cada fila de parámetros en la matriz de Denavit-Hartenberg obtenemos cada una de las matrices A_i :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 70\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 70\sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 352 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 360\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 360\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & 0 & -\cos(q_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & -\sin(q_4) & 0 \\ \sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 380 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ \sin(q_5) & 0 & -\cos(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz T_6^0 está dada por:

$$T_6^0 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$r_{11} = c_6(-c_1s_5s_{23} + c_5(c_1c_4c_{23} + s_1s_4)) + s_6(-c_1c_{23}s_4 + c_4s_1)$$

$$r_{21} = c_6(c_5(-c_1s_4 + c_4c_{23}s_1) - s_1s_5s_{23}) - s_6(c_1c_4 + c_{23}s_1s_4)$$

$$r_{31} = c_6(c_4c_5s_{23} + c_{23}s_5) - s_4s_6s_{23}$$

$$\begin{aligned}
r_{12} &= c_6(-c_1c_{23}s_4 + c_4s_1) + s_6(c_1s_5s_{23} - c_5(c_1c_4c_{23} + s_1s_4)) \\
r_{22} &= -c_6(c_1c_4 + c_{23}s_1s_4) + s_6(c_5(c_1s_4 - c_4c_{23}s_1) + s_1s_5s_{23}) \\
r_{32} &= -c_6s_4s_{23} - s_6(c_4c_5s_{23} + c_{23}s_5) \\
r_{13} &= c_1c_5s_{23} + s_5(c_1c_4c_{23} + s_1s_4) \\
r_{23} &= c_5s_1s_{23} + s_5(-c_1s_4 + c_4c_{23}s_1) \\
r_{33} &= c_4s_5s_{23} - c_5c_{23} \\
d_x &= 360c_1c_2 + 65c_1c_4c_{23}s_5 + 65c_1c_5s_{23} + 380c_1s_{23} + 70c_1 + 65s_1s_4s_5 \\
d_y &= -65c_1s_4s_5 + 360c_2s_1 + 65c_4c_{23}s_1s_5 + 65c_5s_1s_{23} + 380s_1s_{23} + 70s_1 \\
d_z &= 65c_4s_5s_{23} - 65c_5c_{23} - 380c_{23} + 360s_2 + 352
\end{aligned}$$

3.4. Espacio articular y espacio operacional

3.5. Problemas

- 3.1 En la Figura 3.10 se muestran tres sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$. De las transformaciones T_1^0 , T_2^0 y T_2^1 , ¿cuáles se pueden expresar mediante los parámetros de Denavit-Hartenberg?

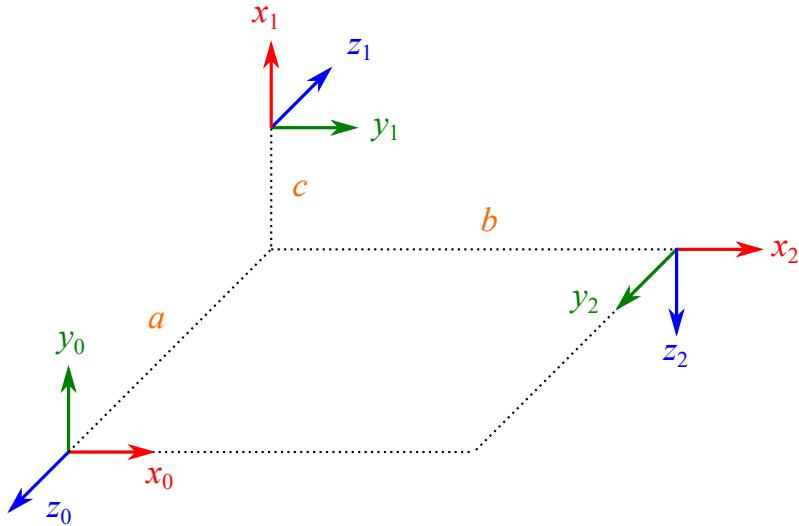


Figura 3.10

- 3.2 En la figura 3.11 se muestra un manipulador de 3 GDL (RPP). Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg, obtenga la tabla de parámetros DH, forme las matrices A_i y calcule la matriz T_3^0 que describe la posición y orientación del extremo del manipulador con respecto a la base.

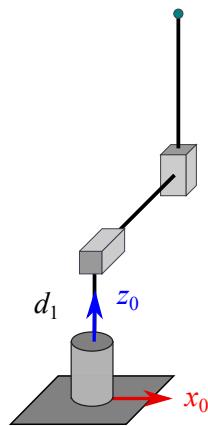


Figura 3.11 Manipulador RPP

- 3.3 Dado el manipulador mostrado en la figura 3.12 y los sistemas de referencia esquematizados, determine la posición (x, y, z) del extremo manipulador si $q_1 = 30^\circ$, $q_2 = 45^\circ$ y $q_3 = 150$ mm. Considerar que $a_1 = 180$ mm y $d_2 = 220$ mm.

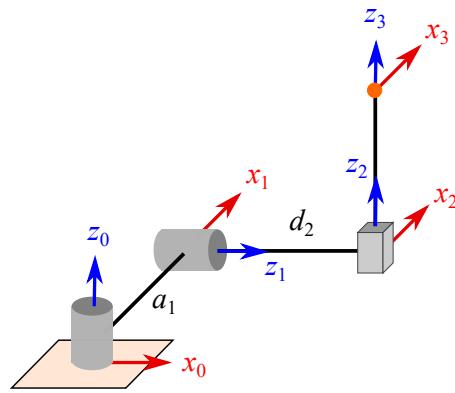


Figura 3.12 Manipulador RRP

3.4 En la figura 3.13 se muestra un manipulador de 4 GDL cuyas dimensiones son las indicadas. Realice lo siguiente:

- Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de DH.
- Obtenga la tabla de parámetros $(a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i)$.
- Forme las matrices de transformación T_i^{i-1}
- Calcule la matriz de transformación T_4^0 .

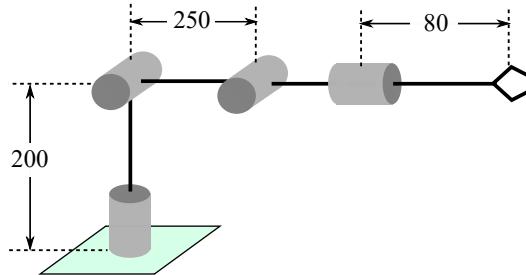


Figura 3.13 Manipulador RRRR

3.5 Para el manipulador mostrado en la figura 3.14 calcule la cinemática directa.

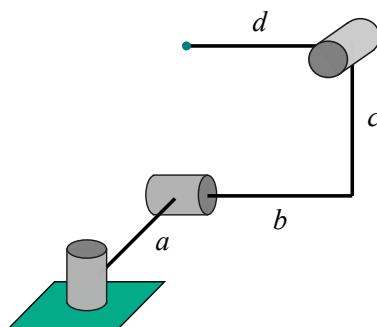
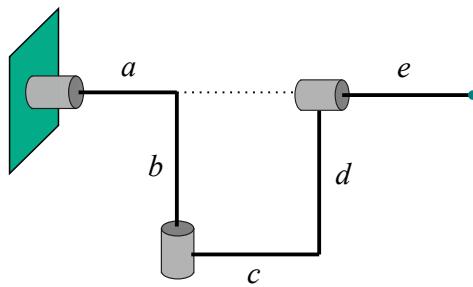
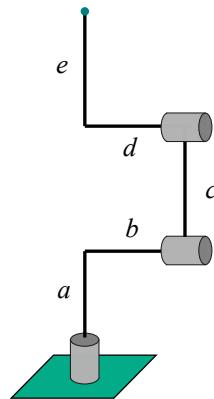


Figura 3.14 Manipulador RRR

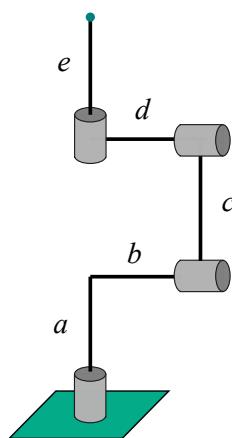
3.6 Para el manipulador mostrado en la figura 3.15 calcule la cinemática directa.

**Figura 3.15** Manipulador RRR

3.7 Para el manipulador mostrado en la figura 3.16 calcule la cinemática directa.

**Figura 3.16** Manipulador RRR

3.8 Para el manipulador mostrado en la figura 3.17 calcule la cinemática directa.

**Figura 3.17** Manipulador RRR

3.9 Para el manipulador mostrado en la figura 3.18 calcule la cinemática directa.

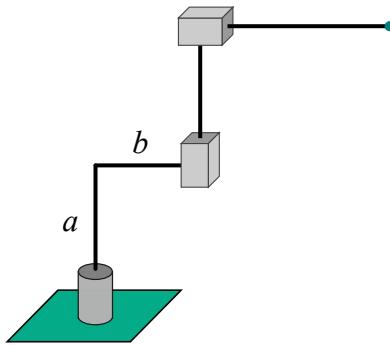


Figura 3.18 Manipulador RRR

3.10 Calcule la cinemática directa para el manipulador SCARA mostrado en la figura 3.19.

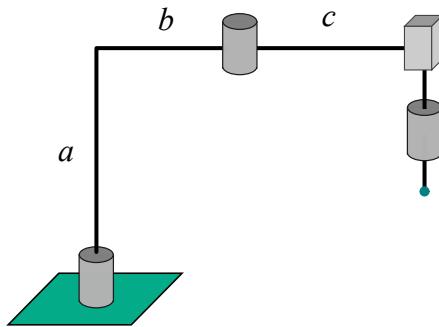


Figura 3.19 Robot SCARA

3.11 Para el robot industrial Adept Viper s650 realice lo siguiente:

- Trace el diagrama cinemático.
- Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- Calcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

3.12 Para el robot Fanuc M710iC realice lo siguiente:

- Trace el diagrama cinemático.
- Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- Cálculo la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

3.13 Para el robot KUKA KR 160 R1570 nano realice lo siguiente:

- a) Trace el diagrama cinemático.
- b) Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- c) Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- d) Cálculo la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

3.14 Para el robot industrial ABB IRB 910SC (SCARA) realice lo siguiente:

- a) Trace el diagrama cinemático.
- b) Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- c) Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- d) Cálculo la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

- PC3.1 Desarrolle un programa de computadora que dados como entrada el conjunto de parámetros de Denavit-Hartenberg para una cadena cinemática abierta calcule la posición de su extremo.
- PC3.2 Se tiene un manipulador RR como el mostrado en la figura 5.10. Si se sabe que los valores de las coordenadas articulares están dados por: $q_1 = \cos t$ y $q_2 = \sin t$, y que sus dimensiones son $l_1 = l_2 = 350$ mm. Desarrolle un programa que calcule y trace la trayectoria descrita por el extremo del manipulador para $0 \leq t \leq 2\pi$.

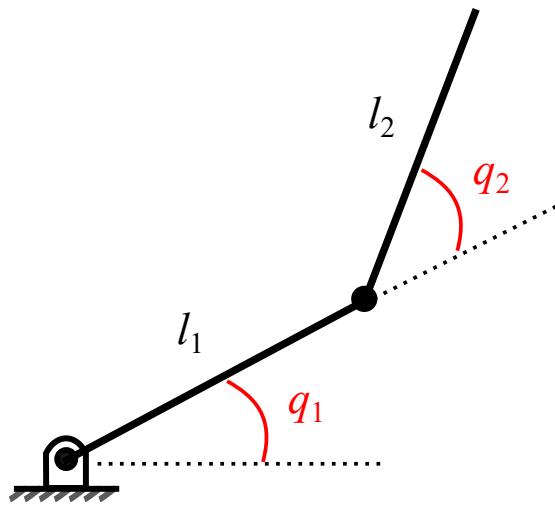


Figura 3.20 Manipulador RR

- PC3.3 Desarrolle un programa de computadora que permita calcular la posición y orientación del extremo del robot industrial ABB IRB 140 dados como datos de entrada los valores articulares.
- PC3.4 Desarrolle un programa de computadora que dados como entrada los valores articulares q_1 y q_2 , del manipulador PP mostrado en la figura 3.21, calcule la posición del extremo del manipulador. El programa deberá también esquematizar la posición del manipulador.

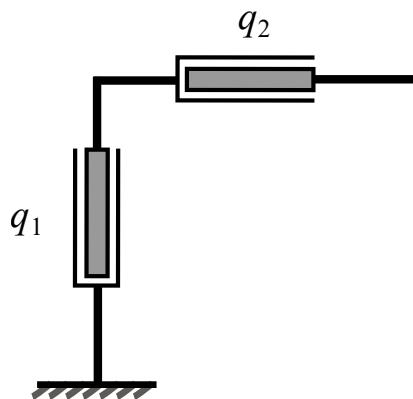


Figura 3.21 Manipulador PP

4

Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa de manipuladores consiste en determinar las posiciones articulares (q_1, q_2, \dots, q_n) requeridas para posicionar y orientar el elemento terminal de una manera predefinida. Usualmente el procedimiento es más complejo que el correspondiente para la cinemática directa, ya que el problema de la cinemática inversa está fuertemente ligado a la morfología del robot y en consecuencia no existe una metodología específica que garantice la obtención de una solución.

En general, se suelen utilizar dos métodos o enfoques para abordar el problema de la cinemática inversa: el método analítico y el método geométrico. Ambos presentan ventajas y desventajas que quedarán en evidencia conforme se expongan algunos ejemplos.

4.1. El método analítico

El método analítico consiste en resolver la ecuación matricial:

$$T_n^0 = H \quad (4.1)$$

En la ecuación anterior, H representa la posición y orientación deseada para el elemento terminal y la matriz T_n^0 corresponde a la cinemática directa del manipulador. La tarea de la cinemática inversa se centra en calcular los valores de q_1, q_2, \dots, q_n que verifican la ecuación 4.1.

En el caso más general, la ecuación matricial 4.1 conduce a un conjunto de dieciséis ecuaciones escalares con n incógnitas (q_1, q_2, \dots, q_n). Cuatro de esas dieciséis ecuaciones son triviales, dado que la última fila de una matriz de transformación homogénea será siempre de la forma: [0, 0, 0, 1]. Las ecuaciones que resultan usualmente son no lineales, en términos de funciones trigonométricas. Obtener una solución en forma cerrada para este tipo de sistemas de ecuaciones puede llegar a resultar un poco complejo. Cuando

no sea posible obtener una solución cerrada, se pueden aproximar los valores articulares utilizando algún método numérico, algo que describiremos en la sección 4.4.

Para manipuladores de pocos grados de libertad, en los cuales el elemento terminal únicamente se puede posicionar (pero no *orientar*) es común que se proporcione información únicamente acerca de la posición deseada (\mathbf{r}_P). En este caso la parte de posición de la matriz T_n^0 se debe igualar con esa posición deseada \mathbf{r}_P .

Existen manipuladores de tres o cuatro grados de libertad (típicamente), en los cuales la cinemática inversa de posición no es suficiente para calcular los valores articulares requeridos; dado que usualmente estos manipuladores además de posicionarse en un plano o en el espacio, pueden también orientarse en una dirección. El manipulador SCARA es un ejemplo clásico de este tipo, dado que además de posicionarse en el espacio, permite establecer la orientación en una dirección.

En este caso la estrategia es que además de igualar la parte de posición de la matriz T_n^0 con una posición deseada \mathbf{r}_P , se deben también formular ecuaciones adicionales a partir de la submatriz de rotación y la información de la orientación deseada.

Ejemplo 4.1 Manipulador planar RR

Calcule la cinemática inversa del manipulador RR mostrado en la Figura 4.1. Considere que se requiere que el extremo del manipulador se posicione en las coordenadas (P_x, P_y) .

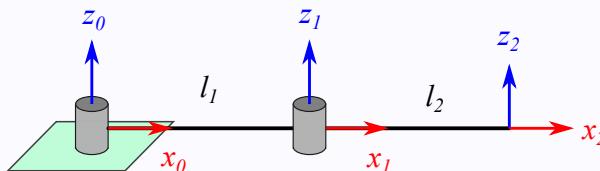


Figura 4.1 Manipulador RR

Solución:

Naturalmente, las longitudes de los eslabones (l_1 y l_2) del robot son valores constantes y por lo tanto se asumen conocidos. Para resolver la cinemática inversa por el método analítico debemos primero calcular la matriz que describe la cinemática directa. En este caso T_2^0 está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez conocida T_n^0 debemos igualar con los valores de posición y orientación de-

seados. En este caso la parte de posición tenemos que igualarla con las coordenadas (P_x, P_y) que se quieren alcanzar. De esto resulta un sistema de dos ecuaciones:

$$l_1 c_1 + l_2 c_{12} = P_x \quad (4.2)$$

$$l_1 s_1 + l_2 s_{12} = P_y \quad (4.3)$$

Si se eleva al cuadrado cada miembro de las ecuaciones anteriores y se suman:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 c_1^2 + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + l_2^2 c_{12}^2 + l_1^2 s_1^2 + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} + l_2^2 s_{12}^2$$

Factorizando y recordando que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 &= l_1^2(c_1^2 + s_1^2) + l_2^2(c_{12}^2 + s_{12}^2) + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} \\ P_x^2 + P_y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} \end{aligned}$$

Para simplificar un poco más podemos aplicar las identidades trigonométricas de suma de ángulos. Sabemos que:

$$s_{12} = s_1 c_2 + c_1 s_2$$

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$

Entonces:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + 2l_1 l_2 s_1 (s_1 c_2 + c_1 s_2)$$

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1^2 c_2 - 2l_1 l_2 c_1 s_1 s_2 + 2l_1 l_2 s_1^2 c_2 + 2l_1 l_2 s_1 c_1 s_2$$

Los términos resaltados se eliminan, de lo cual nos queda:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1^2 c_2 + 2l_1 l_2 s_1^2 c_2$$

Podemos factorizar los dos últimos términos como $2l_1 l_2 c_2 (c_1^2 + s_1^2)$, y aplicar la identidad trigonométrica $c_1^2 + s_1^2 = 1$. De esto resultará:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2$$

De la expresión anterior el único valor desconocido es q_2 , entonces:

$$\cos q_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} = K$$

Por trigonometría se sabe que:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Entonces podemos escribir la solución para q_2 en términos de la función arcotangente:

$$q_2 = \arctan \left(\frac{\pm \sqrt{1 - K^2}}{K} \right)$$

Para calcular q_1 , de las ecuaciones 4.2 y 4.3 podemos dividirlas y manipular la expresión resultante:

$$\begin{aligned} \frac{P_y}{P_x} &= \frac{l_1 s_1 + l_2 s_{12}}{l_1 c_1 + l_2 c_{12}} \\ P_y (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) &= P_x (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) \end{aligned}$$

Aplicando identidades trigonométricas de suma de ángulos:

$$P_y (l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 - l_2 s_1 s_2) = P_x (l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 + l_2 c_1 s_2)$$

Agrupando y factorizando los términos que dependen de $\cos q_1$ y $\sin q_1$:

$$c_1 (P_y l_1 + P_y l_2 c_2 - P_x l_2 s_2) = s_1 (P_x l_1 + P_x l_2 c_2 + P_y l_2 s_2)$$

De lo cual resulta:

$$q_1 = \arctan \left(\frac{P_y l_1 + P_y l_2 c_2 - P_x l_2 s_2}{P_x l_1 + P_x l_2 c_2 + P_y l_2 s_2} \right)$$

Ejemplo 4.2 Manipulador planar RRR

Calcula la cinemática inversa del manipulador RRR de la Figura 4.2, considerando que el elemento terminal deberá alcanzar el punto (P_x, P_y) , y que además el eje x_3 deberá formar un ángulo ϕ con respecto al eje x_0 .

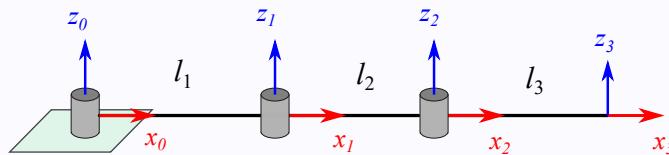


Figura 4.2 Manipulador RRP

Solución:

La cinemática directa del manipulador RRR está dada por:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al igualar la parte de posición de esta matriz con la posición deseada, se obtienen dos ecuaciones:

$$l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} = P_x \quad (4.4)$$

$$l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} = P_y \quad (4.5)$$

Observe que a partir de estas dos ecuaciones no podríamos resolver la cinemática inversa, puesto que tenemos tres valores articulares desconocidos (q_1 , q_2 y q_3). Sin embargo, podemos obtener ecuaciones adicionales a partir de la información de la orientación deseada. Es sencillo notar que el sistema {3} y el sistema {0} difieren en orientación por una rotación en z , así pues si sabemos que el ángulo formado entre x_3 y x_0 debería ser ϕ , la orientación deseada se puede expresar en forma de una matriz de rotación como:

$$R = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una ecuación adicional puede ser obtenida si igualamos esta matriz con la submatriz de rotación de T_3^0 , por ejemplo, si tomamos la primera columna se tiene que:

$$\begin{bmatrix} c_{123} \\ s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi \\ s\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si combinamos las primeras dos componentes:

$$\frac{s_{123}}{c_{123}} = \frac{s\phi}{c\phi}$$

De lo cual resulta una ecuación adicional:

$$q_1 + q_2 + q_3 = \phi \quad (4.6)$$

Las ecuaciones 4.4 y 4.5 se pueden reescribir sabiendo que $c_{123} = c\phi$ y $s_{123} = s\phi$:

$$l_1c_1 + l_2c_{12} = Q_x \quad (4.7)$$

$$l_1s_1 + l_2s_{12} = Q_y \quad (4.8)$$

Donde $Q_x = P_x - l_3c\phi$ y $Q_y = P_y - l_3s\phi$, siendo ambos valores completamente conocidos. Observe que las ecuaciones anteriores tienen una forma similar a las ecuaciones del ejemplo del manipulador RR visto previamente (Ejemplo 4.1), salvo que tenemos Q_x en lugar de P_x , y de manera analoga para Q_y .

Tomando en cuenta lo anterior, podemos establecer entonces que la solución para q_2 está dada por:

$$q_2 = \arctan \left(\frac{\pm \sqrt{1 - K^2}}{K} \right)$$

Donde:

$$K = \cos q_2 = \frac{Q_x^2 + Q_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

Y para q_1 :

$$q_1 = \arctan \left(\frac{Q_y l_1 + Q_y l_2 c_2 - Q_x l_2 s_2}{Q_x l_1 + Q_x l_2 c_2 + Q_y l_2 s_2} \right)$$

Una vez conocidos q_1 y q_2 , se puede obtener q_3 de la ecuación 4.6:

$$q_3 = \phi - q_1 - q_2$$

4.2. Cinemática inversa de posición: método geométrico

Para manipuladores de a lo sumo tres grados de libertad se puede emplear un enfoque geométrico para calcular las variables articulares. Este enfoque sólo nos servirá para resolver cinemática inversa de posición. En el caso de que se requiera alcanzar una cierta orientación, se deberá complementar el procedimiento con las técnicas analíticas.

La idea general del método geométrico es que si queremos calcular la variable articular q_i , debemos proyectar el manipulador en un plano determinado y realizar construcciones geométricas (usualmente triángulos) que nos ayuden a relacionar las distancias y ángulos conocidos del manipulador con aquellos a calcular.

De manera particular, si necesitamos calcular q_i deberíamos proyectar en el plano:

- $x_{i-1}y_{i-1}$, si la i-ésima articulación es una revoluta.

- $x_{i-1}z_{i-1}$, si la i-ésima articulación es una prismática.

Debemos tener en cuenta que al momento de proyectar el manipulador en los planos que correspondan, es necesario que se haga para una posición lo más general posible ¿A qué nos referimos con esto? Se debe evitar a toda costa representar al manipulador en posiciones articulares asociadas con un ángulo que sean múltiplos de 90° , o bien, posiciones articulares asociadas con una distancia que sean nulas.

Una de las ventajas del método geométrico es que normalmente resultan expresiones mucho más sencillas de manipular y resolver. Es algo que podrás corroborar en los ejemplos que a continuación se abordarán.



Ejemplo 4.3 Manipulador RR utilizando el método geométrico

Utilice el método geométrico para calcular la cinemática inversa del manipulador RR mostrado en la Figura 4.1. Considere que el elemento terminal deberá alcanzar la posición dada por (P_x, P_y) .

Solución:

Recordar que este manipulador lo habíamos resuelto con el método analítico en el Ejemplo 4.1. Primero, es importante comprender que el manipulador RR planar puede alcanzar un punto (P_x, P_y) con alguna de las dos configuraciones que se muestran en la Figura 4.3. En el entendido de que dicho punto está dentro de su espacio de trabajo alcanzable. Las configuraciones se denominan *codo arriba* y *codo abajo*, por la obvia analogía de este manipulador con un brazo humano. En lo subsiguiente vamos a desarrollar la solución de cinemática inversa para ambas configuraciones.

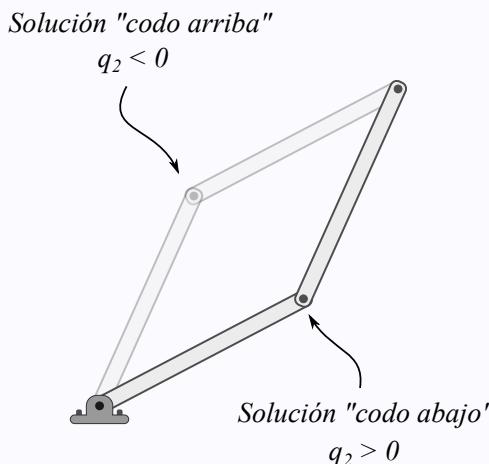


Figura 4.3 Dos posibles configuraciones para el manipulador RR

Solución para la configuración de codo abajo

Lo primero que debemos hacer es proyectar el manipulador en los planos que correspondan. Si queremos resolver para q_1 debemos proyectar en el plano x_0y_0 . Para determinar q_2 debemos proyectar en el plano x_1y_1 . Algo a considerar en este caso es que los planos x_0y_0 y x_1y_1 son planos paralelos entre sí, por lo tanto, tendremos la misma proyección resultante en ambos casos.

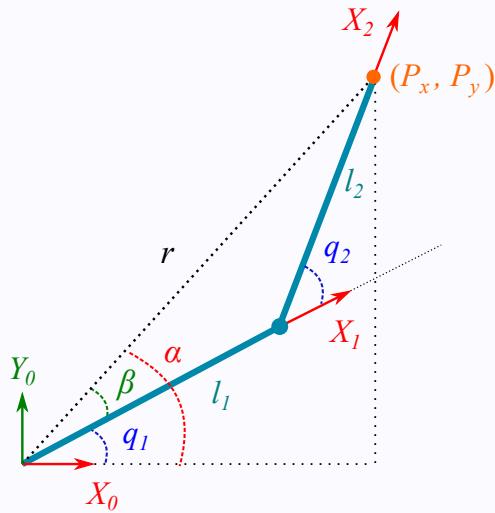


Figura 4.4 Proyección del manipulador RR (codo abajo)

Como se observa en la figura 4.4 el manipulador RR se proyecta en el plano x_0y_0 y se trazan los triángulos mostrados. De este diagrama se observa que el ángulo q_1 puede calcularse una vez conocidos los ángulos α y β mediante una simple diferencia:

$$q_1 = \alpha - \beta$$

El ángulo α se determina a partir del triángulo rectángulo formado por los catetos P_x y P_y , y la hipotenusa r :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

La longitud r puede calcularse como:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

El ángulo β se determina aplicando ley de cosenos:

$$l_2^2 = l_1^2 + r^2 - 2l_1r \cos \beta \quad \rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{l_1^2 + r^2 - l_2^2}{2l_1r}\right)$$

De forma similar a β y utilizando el mismo triángulo se puede determinar q_2 aplicando ley de cosenos:

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2 \quad \rightarrow \quad \cos q_2 = \frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

De lo cual se tiene que:

$$q_2 = \arccos \left(\frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

Solución para la configuración de codo arriba

Vamos a abordar ahora la otra posible solución para la cinemática inversa del manipulador RR, con la configuración de codo arriba. En la Figura 4.5 se puede observar la proyección del manipulador en el plano x_0y_0 .

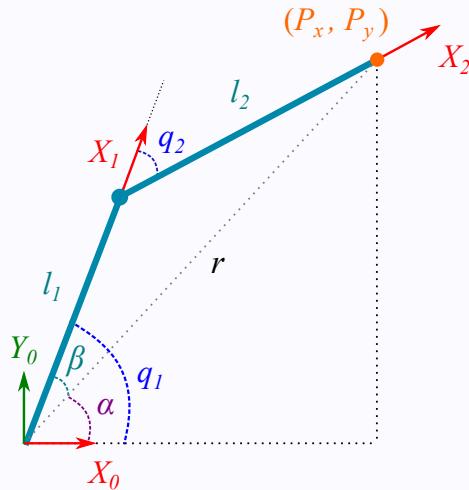


Figura 4.5 Proyección del manipulador RR (codo arriba)

Del diagrama se puede notar rápidamente que el ángulo q_1 es la suma de los ángulos internos α y β , es decir:

$$q_1 = \alpha + \beta$$

El ángulo α lo podemos calcular con las relaciones de triángulo rectángulo:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{P_y}{P_x} \right)$$

Para determinar β podemos aplicar ley de cosenos en el triángulo obtusángulo:

$$l_2^2 = l_1^2 + r^2 - 2l_1r \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{l_1^2 + r^2 - l_2^2}{2l_1r} \right)$$

En la expresión anterior r es un valor no conocido, pero que podemos calcularlo aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

Para calcular a q_2 podemos aplicar ley de cosenos en el triángulo obtusángulo:

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2 \quad \rightarrow \quad \cos q_2 = \frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

Antes de establecer el resultado para q_2 , es importante mencionar que de acuerdo al diagrama de la proyección trazada, el ángulo q_2 debería ser negativo, por la manera en la cual se asume su medición (sentido horario) en el esquema. Entonces, es crucial que al resultado que se obtenga de despejar la expresión anterior, se le multiplique por -1 , para garantizar lo ya mencionado; es decir:

$$q_2 = -\arccos \left(\frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

Ejemplo 4.4 Manipulador antropomórfico RRR

Calcule la cinemática inversa del manipulador RRR mostrado en la figura. Considere que el elemento terminal deberá alcanzar la posición dada por: $\mathbf{r}_P = [P_x, P_y, P_z]^T$.

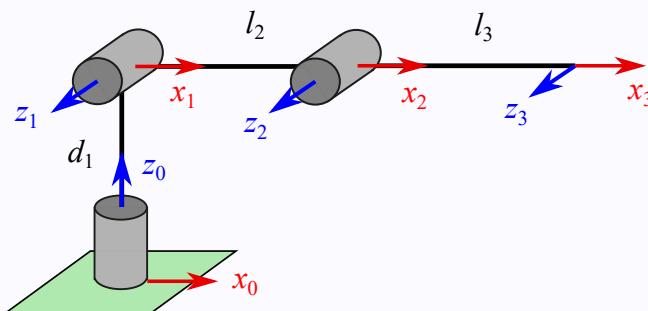


Figura 4.6

Solución:

De acuerdo con lo que sabemos, para calcular a q_1 debemos proyectar en el plano x_0y_0 ; para calcular a q_2 en el plano x_1y_1 y para q_3 en el plano x_2y_2 . Estos dos últimos planos son paralelos. En la Figura 4.7 se puede observar una representación

tridimensional del manipulador RRR; del lado izquierdo se muestra en color rojizo el plano de proyección x_0y_0 , y del lado derecho en color verde claro se muestra el plano de proyección x_1y_1 .

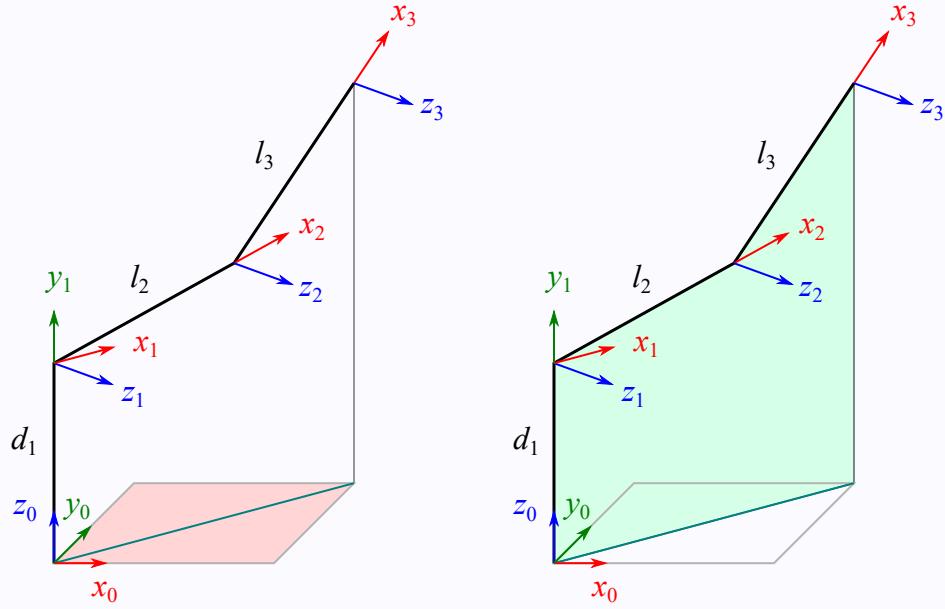


Figura 4.7 Vista tridimensional de los planos de proyección del manipulador RRR
En la Figura 4.8 se puede observar el esquema de la proyección del manipulador en el plano x_0y_0 . Es sencillo notar que el valor de q_1 se puede calcular como sigue:

$$q_1 = \arctan \left(\frac{P_y}{P_x} \right)$$

Además, el valor de la distancia a sería:

$$a = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

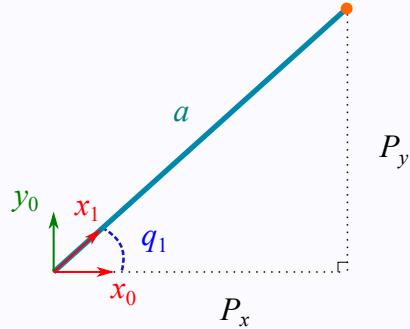


Figura 4.8 Manipulador RRR, proyección en x_0y_0

En la Figura 4.9 se puede observar la proyección del manipulador en el plano x_1y_1 . La manera de proceder en este esquema es muy similar a lo que se hizo con el

manipulador RR. Del esquema observamos que se tienen dos triángulos, los cuales denominaremos de la siguiente manera:

- Triángulo 1: el triángulo rectángulo, cuyos catetos son a y $(P_z - d_1)$, y siendo r la hipotenusa.
- Triángulo 2: el triángulo obtusángulo, cuyos lados son l_2 , l_3 y r .

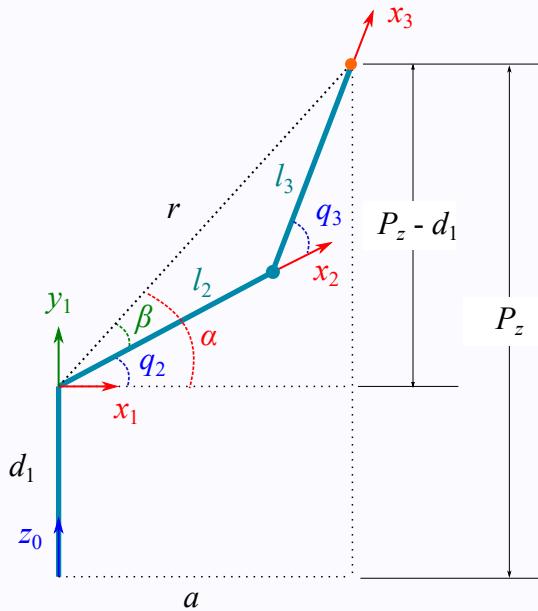


Figura 4.9 Manipulador RRR, proyección en x_1y_1

Del esquema se puede observar que la variable articular q_2 corresponde a la diferencia de los ángulos internos α y β :

$$q_2 = \alpha - \beta$$

Utilizando el triángulo 1 podemos calcular el valor de α y r de la siguiente manera:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{P_z - d_1}{a} \right)$$

$$r = \sqrt{a^2 + (P_z - d_1)^2}$$

En el triángulo 2 podemos aplicar ley de cosenos para calcular a β :

$$l_3^2 = l_2^2 + r^2 - 2l_2r \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{l_2^2 + r^2 - l_3^2}{2l_2r} \right)$$

Utilizando el mismo triángulo 2 podemos ahora calcular el valor de q_3 , aplicando también ley de cosenos:

$$r^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos q_3$$

$$q_3 = \arccos \left(\frac{r^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \right)$$

De esta manera queda completado el cálculo de la cinemática inversa para el manipulador RRR.

4.3. Desacoplo cinemático

La mayoría de manipuladores industriales de 6 grados de libertad (como el que se muestra en la Figura 4.10), están conformados por una morfología base (RRR), a la cual se le adiciona un mecanismo de muñeca esférica (RRR). Para este tipo de manipuladores es posible aplicar una técnica conocida como desacoplo cinemático, la cual consiste en dividir el problema de la cinemática inversa en dos subproblemas: cinemática inversa de posición y cinemática inversa de orientación. La cinemática inversa de posición se suele abordar utilizando un enfoque geométrico y la cinemática inversa de orientación mediante un procedimiento analítico.



Figura 4.10 Robot industrial ABB IRB 120

A continuación, vamos a describir una serie de pasos necesarios para realizar cinemática inversa de un manipulador de 6 grados de libertad utilizando la técnica de desacoplo cinemático. Para lo subsiguiente asumimos que se conoce de entrada la matriz de transformación homogénea H que describe la posición y orientación deseada del extremo del manipulador.

Lo primero que hacemos es construir el diagrama cinemático del manipulador, basán-

donos en los manuales y esquemáticos del fabricante. Es importante identificar correctamente las distancias entre los ejes articulares. Con el diagrama ya realizado, procedemos a establecer los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg. Obtenemos la tabla de parámetros y calculamos las matrices R_3^0 y R_6^3 . Es importante comprender que R_3^0 será una matriz que depende de las primeras tres variables articulares ($R_3^0(q_1, q_2, q_3)$), y que R_6^3 depende de las últimas tres $R_6^3(q_4, q_5, q_6)$.

Una vez hecho lo anterior, comenzamos a calcular las coordenadas del centro de la muñeca esférica, utilizando la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_e - d_6 \mathbf{z}_6^0$$

Donde \mathbf{r}_e son las coordenadas de posición que deberá alcanzar el extremo del manipulador, d_6 la distancia entre los ejes x_5 y x_6 , medida en la dirección del eje z_5 , y \mathbf{z}_6^0 la orientación del eje z del sistema de referencia del elemento terminal con respecto al de la base. Los términos \mathbf{r}_e y \mathbf{z}_6^0 se obtienen de la matriz H , de manera específica:

$$\mathbf{r}_e = H_{1:3,4}$$

$$\mathbf{z}_6^0 = H_{1:3,3}$$

Ahora procedemos a resolver la cinemática inversa de posición utilizando el método geométrico y referenciando todo el procedimiento a las coordenadas del centro de la muñeca esférica. Con esto calcularemos las tres primeras variables articulares (q_1 , q_2 y q_3).

Con los valores de q_1 , q_2 y q_3 ya calculados, procedemos a determinar de forma numérica la matriz de rotación R_3^0 , sustituyendo los valores numéricos calculados previamente.

De la cinemática directa sabemos que:

$$R_6^0 = R_3^0 R_6^3$$

Lo cual implica que:

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R_6^0$$

Donde R_6^0 es la submatriz de rotación de H , R_3^0 la matriz numérica calculada previamente y R_6^3 la matriz de rotación en forma simbólica calculada al inicio del procedimiento. La expresión anterior define una ecuación matricial que deberemos resolver de manera analítica, y con lo cual calcularemos los valores para las tres variables articulares restantes (q_4 , q_5 y q_6). Esta parte es lo que corresponde a la **cinemática inversa de orientación**.

Usualmente deberemos trabajar con las ecuaciones que resulten de igualar los elementos correspondientes a la tercera fila y a la tercera columna: $r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{23}, r_{13}$; dado que suelen quedar expresiones más sencillas de manipular.

Para comprobar los resultados podemos sustituir los valores calculados en la matriz T_6^0 de la cinemática directa y verificar que sea igual a la matriz H .

Ejemplo 4.5 Manipulador ABB IRB 140

Para exemplificar la técnica de desacoplo cinemático vamos a calcular la cinemática inversa del manipulador industrial ABB IRB 140 (ver Figura ??). Consideraremos que se requiere que el extremo del robot esté posicionado y orientado de acuerdo con la siguiente matriz H :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & -1 & 650 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la Figura 4.11 se puede observar el diagrama cinemático del manipulador y los sistemas de referencia de Denavit-Hartenberg. La Tabla 4.1 muestra los parámetros correspondientes. Este procedimiento de cinemática directa para el IRB 140 fue desarrollado en la sección 3.3.3.

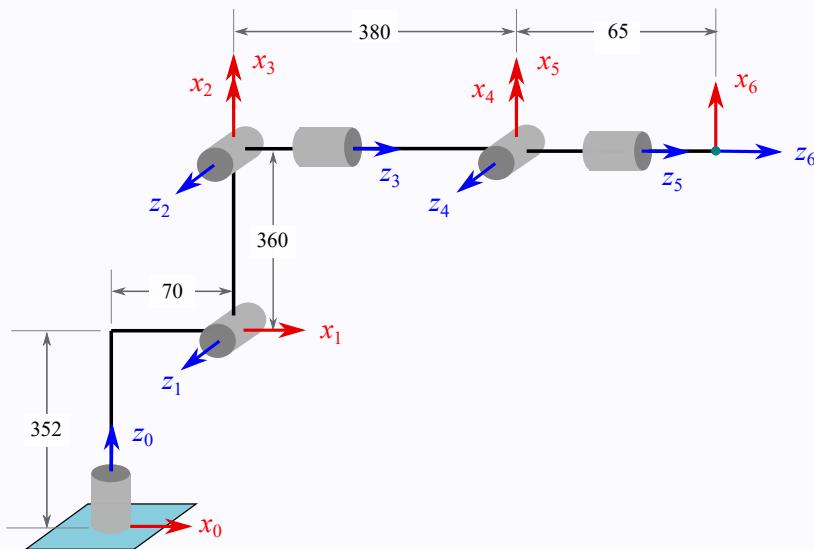


Figura 4.11 Diagrama cinemático del manipulador ABB IRB 140

i	a_i	α_i	d_i	q_i
1	70	90°	352	q_1
2	360	0°	0	q_2
3	0	90°	0	q_3
4	0	-90°	380	q_4
5	0	90°	0	q_5
6	0	0°	65	q_6

Tabla 4.1

Con esta información podemos calcular las matrices R_3^0 y R_6^3 , las cuales se muestran enseguida:

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} \\ c_{23} s_1 & -c_1 & s_1 s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix}$$

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - c_6 s_4 & c_4 s_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & s_4 s_5 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

Una vez calculadas las matrices R_3^0 y R_6^3 , procedemos a determinar las coordenadas del centro de la muñeca esférica, lo cual podemos hacer mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_e - d_6 \mathbf{z}_6^0 = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 650 \end{bmatrix} - 65 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 715 \end{bmatrix}$$

Con las coordenadas del centro de la muñeca esférica ya conocidas, procedemos a realizar la cinemática inversa de posición utilizando el método geométrico, con la finalidad de calcular las primeras tres variables articulares (q_1, q_2, q_3). De acuerdo con lo que aprendimos en secciones previas, si queremos calcular a q_1 deberíamos proyectar en el plano x_0y_0 . En la Figura 4.12 se puede observar la proyección del manipulador IRB 140 en el plano x_0y_0 . El valor de q_1 se puede determinar de forma sencilla de la siguiente manera:

$$q_1 = \text{arctan2}(500, 400) = 51.34^\circ$$

El valor de la distancia a se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{500^2 + 400^2} = 640.31 \text{ mm}$$

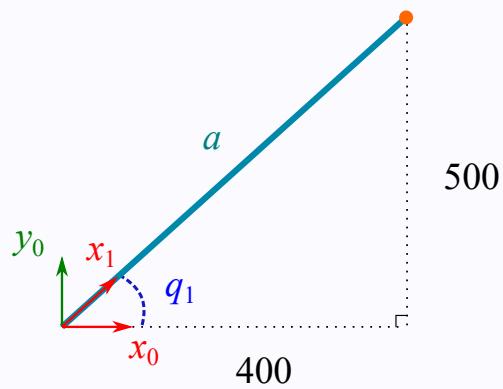


Figura 4.12 Proyección en el plano x_0y_0 del robot ABB IRB 140

Para calcular a q_2 debemos proyectar en x_1y_1 , y para q_3 en el plano x_2y_2 . Se puede verificar que estos planos son paralelos, y por lo tanto la proyección en x_1y_1 nos bastaría para calcular a q_2 y q_3 . En la Figura 4.13 se puede observar la proyección del manipulador en el plano x_1y_1 .

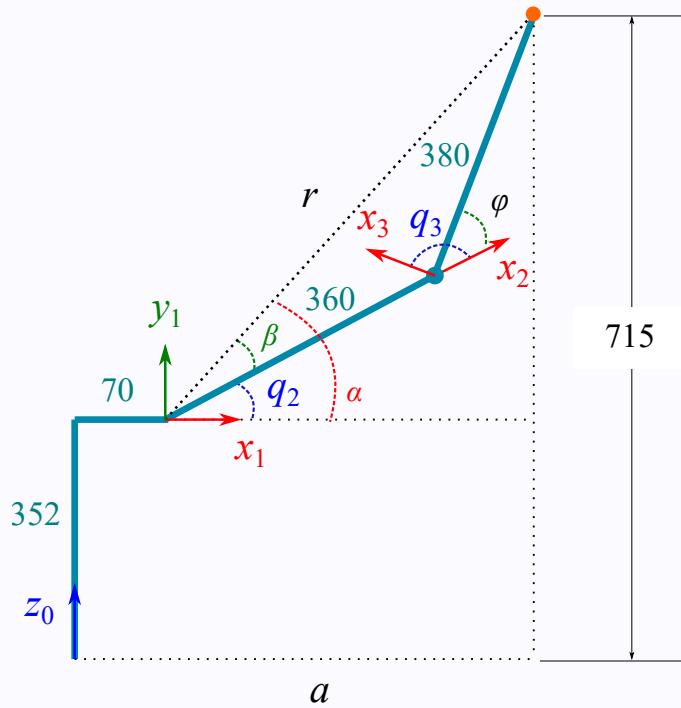


Figura 4.13 Proyección en el plano x_1y_1 del robot ABB IRB 140

Del esquema podemos notar que el valor de q_2 es la diferencia de los ángulos α y β :

$$q_2 = \alpha - \beta$$

Ahora debemos calcular cada uno de esos valores. Del triángulo rectángulo podemos calcular la distancia (hipotenusa) r :

$$r = \sqrt{(a - 70)^2 + (715 - 352)^2} = 676.03 \text{ mm}$$

Y el ángulo α :

$$\alpha = \arctan 2(715 - 352, a - 70) = 32.48^\circ$$

El valor del ángulo β se puede calcular aplicando ley de cosenos en el triángulo obtusángulo:

$$380^2 = 360^2 + r^2 - 2(360)(r) \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{360^2 + r^2 - 380^2}{2(360)(r)} \right) = 24.7^\circ$$

Entonces, el valor de q_2 sería:

$$q_2 = 32.48^\circ - 24.7^\circ = 7.78^\circ$$

Del esquema de la Figura 4.13 se puede observar que el ángulo q_3 es el valor del ángulo ϕ más 90° , es decir:

$$q_3 = \phi + 90^\circ$$

Donde el ángulo ϕ podemos calcularlo utilizando ley de cosenos:

$$r^2 = 380^2 + 360^2 + 2(380)(360) \cos \phi$$

$$\phi = \arccos \left(\frac{r^2 + 380^2 + 360^2}{2(380)(360)} \right) = 48.02^\circ$$

Por lo tanto:

$$q_3 = 48.02^\circ + 90^\circ = 138.02^\circ$$

Una vez calculados los valores de q_1 , q_2 y q_3 , procedemos a sustituir estos valores en la matriz R_3^0 , de lo cual resulta:

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} -0.5167 & 0.7809 & 0.3511 \\ -0.6458 & -0.6247 & 0.4389 \\ 0.5621 & 0 & 0.8271 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el producto $(R_3^0)^{-1} R_6^0$:

$$(R_3^0)^{-1} R_6^0 = \begin{bmatrix} -0.5167 & -0.6458 & 0.5621 \\ 0.7809 & -0.6247 & 0 \\ 0.3511 & 0.4389 & 0.8271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5167 & 0.6458 & -0.5621 \\ 0.7809 & 0.6247 & 0 \\ 0.3511 & -0.4389 & -0.8271 \end{bmatrix}$$

La matriz que resulta la igualamos con R_6^3 para formar la ecuación matricial que nos servirá para calcular la cinemática inversa de orientación, es decir:

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R_6^0$$

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - c_6s_4 & c_4s_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & s_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5167 & 0.6458 & -0.5621 \\ 0.7809 & 0.6247 & 0 \\ 0.3511 & -0.4389 & -0.8271 \end{bmatrix}$$

Para q_6 podemos resolver dividiendo los elementos r_{32}/r_{31} de ambas matrices e igualando, es decir:

$$\frac{s_5s_6}{-c_6s_5} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{s_6}{-c_6} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{s_6}{c_6} = \frac{-0.4389}{-0.3511}$$

$$q_6 = \text{arctan2}(-0.4389, -0.3511) = 231.34^\circ$$

En el caso de q_4 podemos hacer r_{23}/r_{13} e igualar:

$$\frac{s_4s_5}{c_4s_5} = \frac{0}{-0.5621}$$

$$\frac{s_4}{c_4} = \frac{0}{-0.5621}$$

$$q_4 = \text{arctan2}(0, -0.5621) = 180^\circ$$

El valor de q_5 podemos determinarlo igualando los elementos r_{33} de ambas matrices:

$$\cos q_5 = -0.8271 \quad \rightarrow \quad \sin q_5 = \sqrt{1 - (-0.8271)^2}$$

$$q_5 = \text{arctan2} \left(\sqrt{1 - (-0.8271)^2}, -0.8271 \right) = 145.8^\circ$$

Con esto quedan calculadas todas las posiciones articulares requeridas para que el robot ABB IRB 140 se posicione y oriente de acuerdo con la matriz H . Podríamos sustituir todos los valores en la matriz de la cinemática directa T_6^0 y obtendríamos la matriz H . Retomando todos los valores calculados podríamos escribir el vector de posiciones articulares \mathbf{q} de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 51.34^\circ \\ 7.78^\circ \\ 138.02^\circ \\ 180^\circ \\ 145.8^\circ \\ 231.34^\circ \end{bmatrix}$$

Es importante comprender que esta solución obtenida no es única, existen múltiples soluciones para este problema de cinemática inversa. Por ejemplo, para la cinemática inversa de orientación podemos tomar la solución para q_5 dada por:

$$\cos q_5 = -0.8271 \quad \rightarrow \quad \sin q_5 = -\sqrt{1 - (-0.8271)^2}$$

$$q_5 = \text{arctan2} \left(-\sqrt{1 - (-0.8271)^2}, -0.8271 \right) = 214.2^\circ$$

Y entonces, esto implicaría que q_6 estaría dado por:

$$\frac{-s_5 s_6}{c_6 s_5} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{-s_6}{c_6} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{s_6}{c_6} = \frac{0.4389}{0.3511}$$

$$q_6 = \text{arctan2} (-0.4389, -0.3511) = 51.34^\circ$$

Y para el caso de q_4 se tendría que:

$$\frac{-s_4 s_5}{-c_4 s_5} = \frac{0}{-0.5621}$$

$$\frac{s_4}{c_4} = \frac{0}{0.5621}$$

$$q_4 = \arctan2(0, 0.5621) = 0^\circ$$

Esto nos conduciría a una segunda posible solución de la cinemática inversa dada por \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 51.34^\circ \\ 7.78^\circ \\ 138.02^\circ \\ 0^\circ \\ 214.2^\circ \\ 51.34^\circ \end{bmatrix}$$

De igual manera, en la cinemática inversa de posición el manipulador se podría dibujar en una configuración diferente a la planteada, y obtendríamos un conjunto solución diferente. Se recomienda al lector que se tome el tiempo de verificar que las soluciones calculadas son correctas, haciendo la sustitución descrita en párrafos anteriores. El trabajo de multiplicación matricial para obtener T_6^0 , aún cuando se haga de forma completamente numérica, puede llegar a resultar cuando menos tedioso, por lo cual se recomienda que estas operaciones se realicen con el auxilio de herramientas computacionales. En el capítulo C se pueden encontrar algunas librerías, funciones y algoritmos recomendados para calcular matrices de rotación, transformaciones homogéneas, cinemática directa, cinemática inversa, entre otros.

4.4. Resolviendo la cinemática inversa de forma numérica

4.4.1. Método de Newton

4.4.2. Descenso del gradiente

Problemas

- 4.1 Calcule la cinemática inversa del manipulador RRP mostrado en la Figura 4.14, considere que d_1 es una longitud conocida. El elemento terminal deberá alcanzar la posición dada por:

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

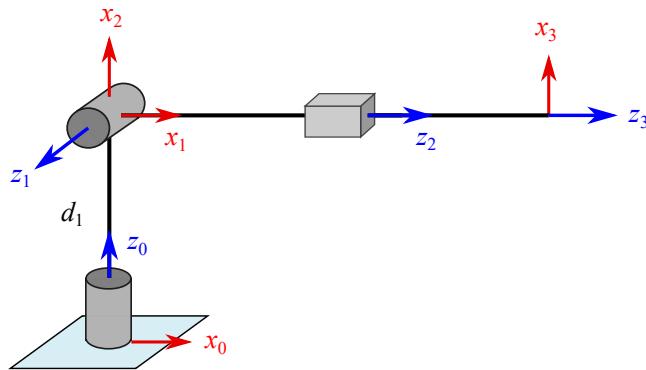


Figura 4.14 Manipulador RRP

- 4.2 Calcule la cinemática inversa del manipulador RRP mostrado en la Figura 4.14, considere que $d_1 = 300\text{mm}$. El elemento terminal deberá alcanzar la posición dada por:

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} 250 \\ 175 \\ 380 \end{bmatrix}$$

- 4.3 Calcule la cinemática inversa del manipulador RRP mostrado en la Figura 4.14, considere que $d_1 = 280\text{mm}$. El elemento terminal deberá alcanzar la posición dada por:

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} 220 \\ 200 \\ 350 \end{bmatrix}$$

- 4.4 Calcula la cinemática inversa del manipulador RRR mostrado en la Figura 4.2, considerando que el elemento terminal deberá alcanzar la posición dada por:

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} 350 \\ 280 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y orientado de tal manera que el eje x_3 se encuentre alineado con x_0 . Se sabe que $l_1 = l_2 = 200$ mm y $l_3 = 150$ mm.

- 4.5 En la Figura 4.15 se muestra un manipulador PRR que deberá alcanzar dos objetos A y B, tal que sus posiciones y orientaciones están definidas mediante los sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ adheridos a estos. Se sabe que:

$$H_B^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 400 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule los valores articulares requeridos para alcanzar cada uno de los objetos. Considerese que $l_2 = 250$ mm y $l_3 = 200$ mm.

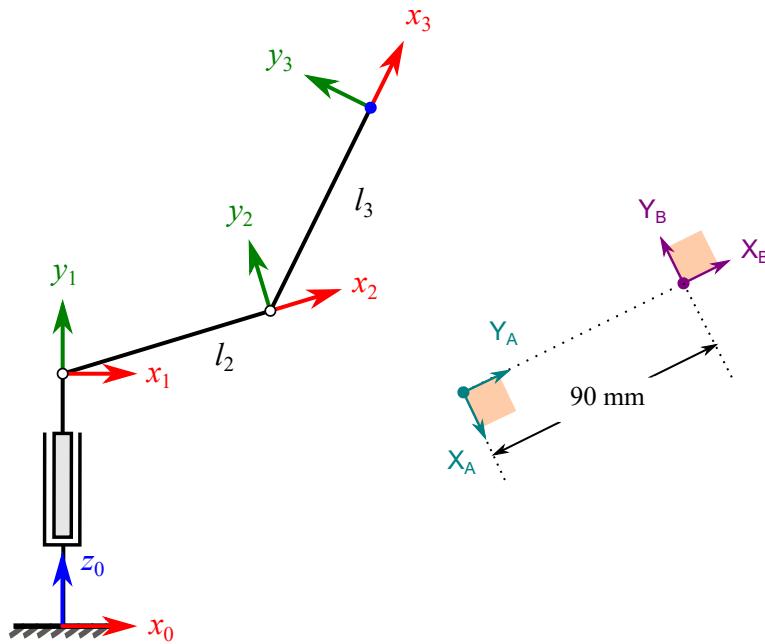


Figura 4.15 Manipulador PRR

- 4.6 En la figura se muestra el esquema de un manipulador planar PPR que deberá realizar operaciones de soldadura a lo largo de la trayectoria compuesta, esquematizada mediante la línea discontinua. Los puntos A y B denotan el inicio y fin de la trayectoria, y el elemento terminal del manipulador deberá alcanzar estos puntos con la orientación dada por los sistemas $\{A\}$ y $\{B\}$. La longitud l_3 es de 100 mm. Se

sabe que:

$$T_A^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad T_B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule los valores articulares requeridos para alcanzar los puntos A y B .

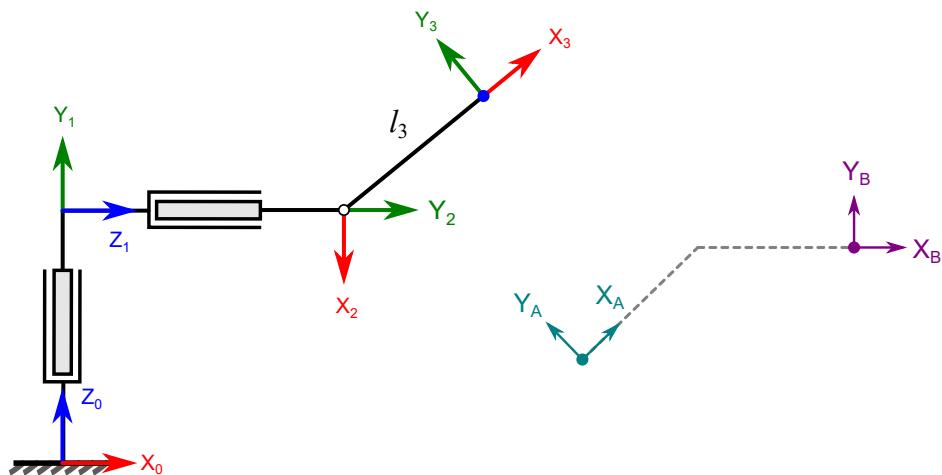


Figura 4.16

- 4.7 Para el manipulador industrial mostrado en la Figura 4.17, calcule la cinemática inversa de posición y orientación si el extremo del manipulador debe estar orientado y posicionado de acuerdo con:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

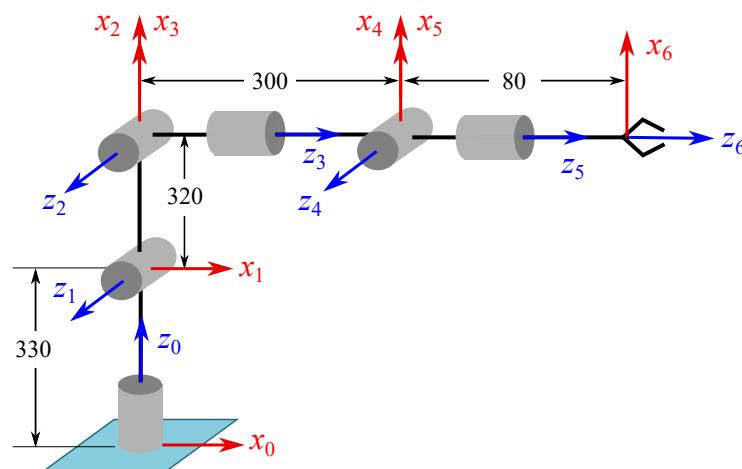


Figura 4.17

4.8 Utiliza la técnica del desacoplo cinemático para calcular la cinemática inversa del robot FANUC LR Mate 200iC/5L.

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

PC4.1 Desarrolla una función denominada **rr_planar_robot_ik** que deberá calcular las dos soluciones (codo arriba y codo abajo) de la cinemática inversa del manipulador planar RR mostrado en la figura. La función deberá recibir como argumentos de entrada las coordenadas (P_x , P_y) del punto que deberá alcanzar el manipulador, las longitudes de los eslabones: l_1 y l_2 , y un argumento denominado **sol** en el cual deberá indicarse la solución a calcular, se usará '**up**' para la solución de codo arriba y '**down**' para la solución de codo abajo. Enseguida se muestra una sugerencia de plantilla para la definición de la función, designación de los parámetros y de los valores a devolver.

```
def rr_planar_robot_ik(px, py, l1, l2, sol):
    # hacer los cálculos aquí
    return q1, q2
```

5

Cinemática diferencial

En los capítulos anteriores, hemos explorado la cinemática de la posición de manipuladores seriales. Esto implica fundamentalmente relacionar las posiciones de las articulaciones con la posición y orientación del extremo del manipulador. En este capítulo, nos adentraremos en el cálculo de las relaciones entre las velocidades lineales y angulares del extremo del manipulador y las velocidades de las articulaciones.

Comenzaremos por calcular las velocidades lineales y angulares por separado en un manipulador serial. Luego, introduciremos el concepto de **matriz jacobiana**, que nos permitirá describir de manera unificada la relación entre las velocidades de las articulaciones y las velocidades lineales y angulares del extremo del manipulador.

5.1. Derivada de una matriz de rotación

Suponga que se tiene una matriz de rotación R que depende del tiempo t , es decir $R = R(t)$; dado que R es ortogonal se cumple que:

$$RR^T = I$$

Derivando ambos lados de la ecuación con respecto a t se tiene que:

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \quad (5.1)$$

Ahora, si definimos a una matriz S como sigue:

$$S = \dot{R}R^T \quad (5.2)$$

Se puede verificar que:

$$S^T = (\dot{R}R^T)^T = R\dot{R}^T$$

Entonces, de la ecuación 5.1 se puede verificar que:

$$S + S^T = 0$$

Lo cual implica que la matriz S definida previamente es una matriz antisimétrica. Si postmultuplicamos ambos lados de la ecuación 5.2 por R , se tiene que:

$$\dot{R} = S R \quad (5.3)$$

Esta ecuación nos dice que la derivada de una matriz de rotación es equivalente a la multiplicación matricial de R por una matriz antisimétrica S .

5.2. Velocidades angulares en un manipulador serial

La velocidad angular es una propiedad de cuerpo rígido que indica qué tan rápido está cambiando de orientación un cuerpo rígido, y en qué dirección lo hace. En cursos elementales de mecánica del cuerpo rígido aprendemos que la velocidad angular para un sólido rígido que rota en el plano es un vector cuya magnitud es la derivada con respecto al tiempo de la posición angular, es decir:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Y la dirección de este vector es normal al plano del movimiento. Naturalmente, esto no escalaría de forma adecuada para determinar velocidades angulares en manipuladores seriales, puesto que la orientación no depende de un sólo parámetro. Debido a esto haremos uso de lo que revisamos en la sección previa, abordaremos el análisis de las velocidades angulares mediante la derivación con respecto al tiempo de las matrices de rotación que representan la orientación del cuerpo rígido.

Supongamos que se tiene una matriz R_1^0 que describe la orientación del sistema de referencia $\{1\}$ que rota con respecto al sistema fijo $\{0\}$, y que en el caso general R_1^0 es dependiente del tiempo, es decir $R_1^0 = R_1^0(t)$. Entonces, la derivada con respecto al tiempo de R_1^0 se puede escribir como:

$$\dot{R}_1^0 = S(\omega_1)R_1^0 \quad (5.4)$$

Donde $S(\omega_1)$ es una matriz antisimétrica. El vector $\omega_1 = \omega_1(t)$ es la velocidad angular del sistema $\{1\}$ con respecto al $\{0\}$. Se puede mostrar que el vector ω_1 es justamente el vector de angular si consideramos un punto P que se mueve solidariamente con el sistema $\{1\}$, las coordenadas de P pueden expresarse en $\{0\}$ mediante la transformación de coordenadas:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1$$

Si derivamos la expresión anterior con respecto al tiempo se tiene que:

$$\dot{\mathbf{P}}^0 = \dot{R}_1^0 \mathbf{P}^1$$

Sustituyendo la ecuación 5.4 en la anterior:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}^0 &= S(\omega_1)R_1^0 \mathbf{P}^1 \\ \dot{\mathbf{P}}^0 &= S(\omega_1)\mathbf{P}^0 \\ \dot{\mathbf{P}}^0 &= \omega_1 \times \mathbf{P}^0\end{aligned}$$

Observe que la expresión anterior es la manera clásica de determinar la velocidad lineal de un punto que pertenece a un cuerpo rígido en rotación $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Así, $\dot{\mathbf{P}}^0$ es la velocidad lineal de P con respecto al sistema $\{0\}$, \mathbf{P}^0 es el vector que describe la posición de P en $\{0\}$, lo cual implicaría necesariamente que ω_1 es el vector de velocidad angular.

La ecuación 5.4 se puede generalizar para cualesquiera sistemas $\{i\}$ y $\{j\}$ que difieran por rotaciones dependientes del tiempo, sin que necesariamente uno de ellos sea un sistema fijo, es decir:

$$\dot{R}_j^i = S(\omega_{i,j}^i)R_j^i \quad (5.5)$$

Usaremos la notación $\omega_{i,j}^i$ para denominar al vector de velocidad angular del sistema de referencia $\{j\}$ con respecto al sistema $\{i\}$ descrito en el sistema de referencia $\{i\}$. Por comodidad y simplicidad para escribir las expresiones, prescindiremos del superíndice cuando el sistema de referencia con respecto al cual se describe el movimiento angular sea el de la base, es decir, usualmente en lugar de escribir $\omega_{0,n}^0$, escribiremos $\omega_{0,n}$ o en su versión más simple ω_n .

Bien, ahora continuando con nuestros sistemas de referencia $\{1\}$ y $\{0\}$, supongamos que

se agrega un tercer sistema de referencia $\{2\}$, cuya orientación también es dependiente del tiempo. La descripción de la orientación de $\{2\}$ con respecto a $\{1\}$ está dada por $R_2^1 = R_2^1(t)$. Si quisieramos determinar la orientación de $\{2\}$ en $\{0\}$ podríamos hacerlo mediante:

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

Si derivamos esta expresión con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{R}_2^0 = \dot{R}_1^0 R_2^1 + R_1^0 \dot{R}_2^1 \quad (5.6)$$

El lado de izquierdo de esta ecuación se puede escribir como:

$$\dot{R}_2^0 = S(\boldsymbol{\omega}_{0,2}^0) R_2^0$$

Para el primer término del lado derecho:

$$\dot{R}_1^0 R_2^1 = S(\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0) R_1^0 R_2^1 = S(\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0) R_2^0$$

Para el segundo término del lado derecho:

$$R_1^0 \dot{R}_2^1 = R_1^0 S(\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1) R_2^1$$

Si multiplicamos lo anterior por $(R_1^0)^T R_1^0$ (este producto es igual a I , es decir, no alteramos la expresión), se tiene:

$$R_1^0 \dot{R}_2^1 = R_1^0 S(\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1) \left(R_1^0 \right)^T R_1^0 R_2^1$$

Observe que $R_1^0 S(\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1) \left(R_1^0 \right)^T$ es una transformación de similitud de $S(\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1)$, entonces de acuerdo con la ecuación A.3:

$$R_1^0 S(\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1) \left(R_1^0 \right)^T = S(R_1^0 \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1)$$

Así pues, el segundo término de la ecuación 5.6 se puede escribir como:

$$R_1^0 \dot{R}_2^1 = S(R_1^0 \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1) R_2^0$$

De tal modo que podemos rescribir la ecuación 5.6 como:

$$S(\boldsymbol{\omega}_{0,2}^0)R_2^0 = S(\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0)R_2^0 + S(R_1^0\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1)R_2^0 \quad (5.7)$$

O bien:

$$S(\boldsymbol{\omega}_{0,2}^0)R_2^0 = [S(\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0) + S(R_1^0\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1)]R_2^0 \quad (5.8)$$

Lo anterior implica que:

$$S(\boldsymbol{\omega}_{0,2}^0) = [S(\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0) + S(R_1^0\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1)]$$

Dado que $S(\mathbf{a}) + S(\mathbf{b}) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, entonces:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,2}^0 = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + R_1^0\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1$$

Si efectuamos la transformación de coordenadas de $\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1$:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,2}^0 = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0$$

O básicamente, la velocidad angular del sistema de referencia $\{2\}$ con respecto al sistema $\{0\}$ se puede determinar sumando las velocidades angulares de $\{1\}$ con respecto $\{0\}$ y de $\{2\}$ con respecto $\{1\}$, siempre y cuando estén expresadas en el mismo sistema de referencia.

El procedimiento anterior se puede extender y generalizar para cualquier cantidad de sistemas de referencia. Suponga que tenemos los sistemas de referencia $0, 1, 2, \dots, i$, podemos escribir entonces que:

$$R_i^0 = R_1^0 R_2^1 \cdots R_{i-1}^{i-1}$$

Derivando R_i^0 :

$$\dot{R}_i^0 = S(\boldsymbol{\omega}_{0,i}^0)R_i^0$$

En donde:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,i}^0 = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + R_1^0\boldsymbol{\omega}_{1,2}^1 + \dots + R_{i-1}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1} \quad (5.9)$$

O bien:

$$\omega_{0,i}^0 = \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \dots + \omega_{i-1,i}^0 \quad (5.10)$$

Así, para nuestros propósitos, podemos interpretar lo anterior como sigue: en un manipulador serial, la velocidad angular ω_i de un eslabón i , se puede calcular sumando los vectores de velocidad angular $\omega_{j-1,j}^0$ de los eslabones que le anteceden. Los vectores $\omega_{j-1,j}^0$ corresponden a la velocidad angular de cada eslabón j con respecto al eslabón inmediatamente anterior $j - 1$, descrita en el sistema $\{0\}$.

Usualmente, los vectores de velocidad angular de la forma $\omega_{j-1,j}^0$ son *complicados* de formar de manera directa, dado que las componentes de estos vectores son dependientes de las posiciones articulares. Sin embargo, si estos vectores se describen con respecto al sistema $\{j - 1\}$ y asumiendo que se utiliza la metodología de Denavit-Hartenberg para la descripción de la cinemática directa, entonces un vector de velocidad angular $\omega_{j-1,j}^{j-1}$ siempre tendrá la siguiente forma:

$$\omega_{j-1,j}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} ; \quad \text{en el caso de que la junta } j \text{ sea revoluta}$$

$$\omega_{j-1,j}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \text{en el caso de que la junta } j \text{ sea prismática}$$

Lo anterior implica que una junta prismática no contribuye a la velocidad angular, dado que no produce un cambio en la orientación entre los sistemas $\{j\}$ y $\{j - 1\}$.

Ejemplo 5.1 Manipulador RR

Calcule las velocidades angulares de los eslabones 1 y 2 del manipulador RR de la Figura 5.1

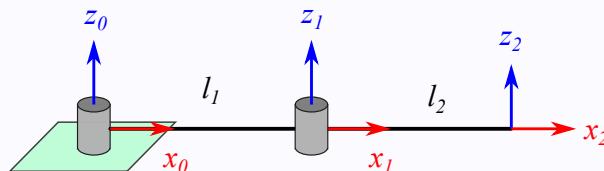


Figura 5.1 Manipulador RR

Solución:

La velocidad angular del eslabón 1 se puede determinar como sigue:

$$\omega_1 = \omega_{0,1}^0$$

Dado que la junta 1 es una revoluta, entonces el vector $\omega_{0,1}^0$ nos quedará de la siguiente manera:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Para la velocidad angular del eslabón se tiene que:

$$\omega_2 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1$$

Dado que la segunda articulación también es una revoluta, entonces:

$$\omega_{1,2}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

La matriz R_1^0 se puede obtener de la matriz T_1^0 (calculada en el procedimiento de cinemática directa):

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los términos en la expresión planteada inicialmente:

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

5.3. Velocidades lineales en un cuerpo rígido

En la Figura 5.2 se muestra un cuerpo rígido, al cual se le adhiere un sistema de referencia {1} que se mueve junto este. Se tiene también un sistema de referencia fijo {0}.

El cuerpo rígido está en un movimiento general, es decir, experimenta un movimiento compuesto de rotación y traslación. En lo subsiguiente veremos cómo relacionar las velocidades lineales y angulares de este cuerpo rígido, utilizando los dos sistemas de referencia mostrados.

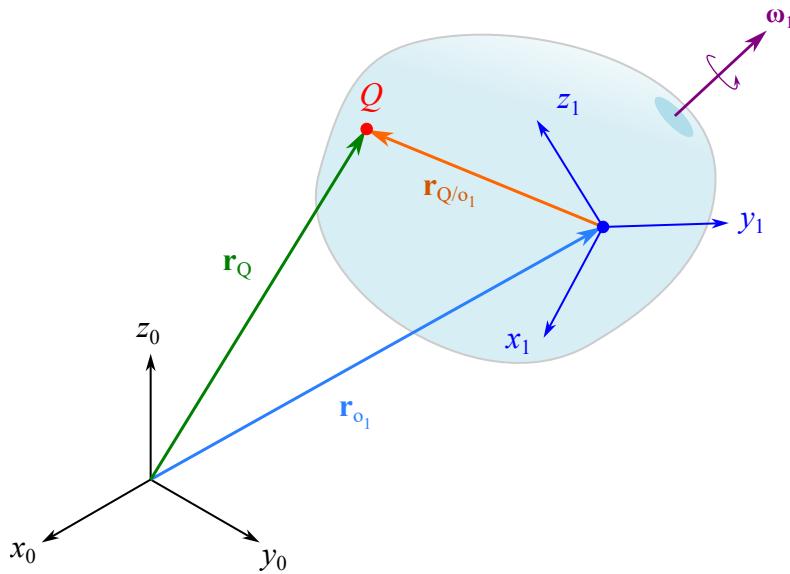


Figura 5.2 Un cuerpo rígido

En la Figura 5.2 puede observarse también un punto Q , del cual es sencillo verificar que se cumple la siguiente ecuación vectorial de posición:

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{o_1} + \mathbf{r}_{Q/o_1} \quad (5.11)$$

Donde \mathbf{r}_Q es un vector que describe la posición de Q con respecto al sistema $\{0\}$, \mathbf{r}_{o_1} es un vector que define la posición del origen del sistema $\{1\}$ y \mathbf{r}_{Q/o_1} es un vector de posición *que va* desde el origen del sistema $\{1\}$ hasta el punto Q .

Una relación de velocidad se puede obtener si derivamos con respecto al tiempo cada uno de los términos de la ecuación 5.11:

$$\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{o_1}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{Q/o_1}}{dt} \quad (5.12)$$

Puesto que tanto \mathbf{r}_Q como \mathbf{r}_{o_1} son vectores de posición medidos desde el origen del sistema fijo, entonces la derivada de estos vectores con respecto al tiempo corresponderá a una velocidad absoluta, es decir:

$$\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} = \mathbf{v}_Q$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{o_1}}{dt} = \mathbf{v}_{o_1}$$

Sin embargo, la derivada de \mathbf{r}_{Q/o_1} corresponde a una velocidad relativa, puesto que es un posición de Q medida con respecto a un punto o_1 que está en movimiento. Si el punto Q está fijo en el sólido rígido (o lo que es lo mismo: fijo con respecto al sistema $\{1\}$), entonces la velocidad de Q con respecto al punto o_1 , vista desde el sistema inercial, está dada únicamente por el cambio de la orientación del vector \mathbf{r}_{Q/o_1} , lo cual puede determinarse mediante:

$$\frac{d\mathbf{r}_{Q/o_1}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{Q/o_1}$$

Si el punto Q se mueve con respecto al sistema $\{1\}$, entonces a lo anterior habría que sumarle un término que represente el cambio del vector \mathbf{r}_{Q/o_1} visto desde el sistema $\{1\}$, es decir:

$$\frac{d\mathbf{r}_{Q/o_1}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{Q/o_1} + \left(\frac{d\mathbf{r}_{Q/o_1}}{dt} \right)_{S_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{Q/o_1} + (\mathbf{v}_{Q/o_1})_{S_1} \quad (5.13)$$

Así pues, la velocidad del punto Q se puede escribir de manera general como:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{o_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{Q/o_1} + (\mathbf{v}_{Q/o_1})_{S_1} \quad (5.14)$$

5.4. Velocidades lineales en un manipulador serial

Consideremos un manipulador serial conformado por juntas prismática y de revoluta, tal como se muestra en la figura 5.3. Asumiendo, además, que cada sistema de referencia está colocado de acuerdo con la metodología de Denavit-Hartenberg, entonces cada eje z_{i-1} define la dirección de rotación o deslizamiento de la junta i .

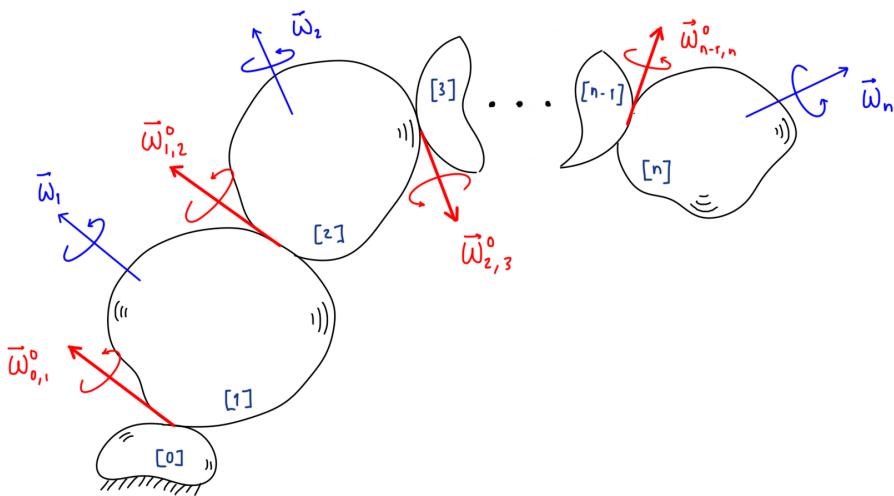


Figura 5.3 Velocidades en un manipulador serial

Las velocidades angulares $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ corresponden a las velocidades angulares de cada eslabón con respecto al sistema de referencia de la base. Las velocidades angulares $\omega_{0,1}^0, \omega_{1,2}^0, \dots, \omega_{n-1,n}^0$ corresponden a las velocidades angulares de cada eslabón i con respecto al eslabón $i - 1$ que le precede. Observe que si usamos la misma notación podríamos expresar que $\omega_i = \omega_{0,i}^0$. De acuerdo con lo visto en la sección 5.2 sabemos que:

$$\omega_i = \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \dots + \omega_{i-1,i}^0 \quad (5.15)$$

Además es importante recordar que en el caso de la i -ésima junta sea prismática, entonces:

$$\omega_{i-1,i}^0 = \mathbf{0}$$

De acuerdo con lo expuesto en la sección 5.3 podemos expresar la velocidad del origen de coordenadas del sistema $\{i\}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_{o_i} = \mathbf{v}_{o_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}} + (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} \quad (5.16)$$

Donde $\mathbf{v}_{o_{i-1}}$ denota la velocidad lineal del origen de coordenadas del sistema de referencia $\{i - 1\}$, $\boldsymbol{\omega}_i$ es la velocidad angular del eslabón i , $\mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}$ es un vector de posición del origen de coordenadas del sistema $\{i\}$ con respecto al origen de coordenadas del sistema $\{i - 1\}$ y el término $(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}$ corresponde al cambio de la magnitud del vector que describe la posición del origen del sistema $\{i\}$ en el sistema $\{i - 1\}$.

Así pues, las velocidades lineales de cada origen de los sistemas de referencia se pueden

expresar como:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{o_1} &= \mathbf{v}_{o_0} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + (\mathbf{v}_{o_1/o_0})_0 \\ \mathbf{v}_{o_2} &= \mathbf{v}_{o_1} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + (\mathbf{v}_{o_2/o_1})_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_{o_n} &= \mathbf{v}_{o_{n-1}} + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} + (\mathbf{v}_{o_n/o_{n-1}})_{n-1}\end{aligned}\quad (5.17)$$

De las ecuaciones anteriores es sencillo verificar que la velocidad lineal del extremo del manipulador se puede escribir como:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \mathbf{v}_{o_0} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + (\mathbf{v}_{o_1/o_0})_0 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + (\mathbf{v}_{o_2/o_1})_1 + \cdots + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} + (\mathbf{v}_{o_n/o_{n-1}})_{n-1} \quad (5.18)$$

O en su forma equivalente como:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \mathbf{v}_{o_0} + \sum_{i=1}^n \left[\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}} + (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} \right] \quad (5.19)$$

Si el sistema de la base es un sistema fijo (caso típico, salvo que el manipulador estuviera montado sobre un dispositivo que le agregara movimiento), entonces $\mathbf{v}_{o_0} = \mathbf{0}$, lo cual implica que:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \sum_{i=1}^n \left[\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}} + (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} \right] \quad (5.20)$$

Cada una de las velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_i$ se determinan utilizando la ecuación 5.15. Los vectores de posición $\mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}$ se calculan como:

$$\mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}} = \mathbf{r}_{o_i} - \mathbf{r}_{o_{i-1}}$$

Donde:

$$\mathbf{r}_{o_i} = \left[T_i^0 \right]_{1:3,4}; \quad \mathbf{r}_{o_{i-1}} = \left[T_{i-1}^0 \right]_{1:3,4}$$

En el caso particular de que la i -ésima junta sea una revoluta, el término $(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}$ se hace cero, puesto que la distancia entre los orígenes de $\{i\}$ y $\{i-1\}$ permanece invariable.

 **Ejemplo 5.2 Manipulador RR**

Calcule la velocidad lineal del extremo del manipulador RR mostrado en la Figura 5.1.

Solución:

La velocidad lineal del extremo está dada por:

$$\mathbf{v}_{o_2} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + (\mathbf{v}_{o_1/o_0})_0 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + (\mathbf{v}_{o_2/o_1})_1$$

Dado que la distancia entre los orígenes de los sistemas $\{1\}$ y $\{0\}$ no cambia, entonces $(\mathbf{v}_{o_1/o_0})_0 = \mathbf{0}$. Algo similar ocurre con los orígenes de $\{2\}$ y $\{1\}$, así pues $(\mathbf{v}_{o_2/o_1})_1 = \mathbf{0}$.

Las velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ para este manipulador están dadas por:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Los vectores de posición \mathbf{r}_{o_1/o_0} y \mathbf{r}_{o_2/o_1} se pueden formar a partir de las matrices T_i^0 , quedando:

$$\mathbf{r}_{o_1/o_0} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{o_2/o_1} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 l_1 s_1 \\ \dot{q}_1 l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 s_{12} \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sumando ambos términos:

$$\mathbf{v}_{o_2} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 l_1 s_1 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 s_{12} \\ \dot{q}_1 l_1 c_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si conocemos la posición del extremo del manipulador (\mathbf{r}_{o_n}) en función de las variables

articulares de posición (q_1, q_2, \dots, q_n), es posible determinar la velocidad lineal mediante derivación con respecto al tiempo, es decir:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \frac{d\mathbf{r}_{o_n}}{dt} \quad (5.21)$$

El vector \mathbf{r}_{o_n} se puede obtener de la matriz de cinemática directa T_n^0 ; recordando que la cuarta columna de esta matriz corresponde a la posición del origen de coordenadas del sistema de referencia $\{n\}$, el cual se coloca usualmente en el extremo del manipulador, es decir:

$$\mathbf{r}_{o_n} = [T_n^0]_{1:3,4}$$

El vector de velocidad lineal \mathbf{v}_{o_n} nos quedará usualmente en términos de las velocidades articulares ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$). Al efectuar la derivada con respecto al tiempo se debe considerar que las variables articulares de posición (q_1, q_2, \dots, q_n) son funciones que dependen del tiempo, es decir $q_i = q_i(t)$. Naturalmente, el resto de parámetros constantes del manipulador, se deben tratar como tal al momento de realizar las derivadas correspondientes.

Ejemplo 5.3 Manipulador RR

Utilice derivadas para determinar la velocidad lineal del extremo del manipulador RR mostrado en la Figura 5.1.

Solución:

Recordar que la cinemática directa de este manipulador está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el vector de posición \mathbf{r}_{o_2} sería:

$$\mathbf{r}_{o_2} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo cual, al derivar con respecto al tiempo tendríamos:

$$\mathbf{v}_{o_2} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{q}_1 s_1 - l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) s_{12} \\ l_1\dot{q}_1 c_1 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que esta solución coincide con la obtenida previamente mediante los productos vectoriales.

Ejemplo 5.4 Manipulador RRP

Calcule la velocidad lineal del extremo del manipulador RRP mostrado en la Figura 5.4, para un instante en el que:

$$q_1 = 45^\circ; \quad q_2 = 30^\circ; \quad q_3 = 200 \text{ mm}$$

$$\dot{q}_1 = 1.5 \text{ rad/s}; \quad \dot{q}_2 = 2.0 \text{ rad/s}; \quad \dot{q}_3 = 30 \text{ mm/s}$$

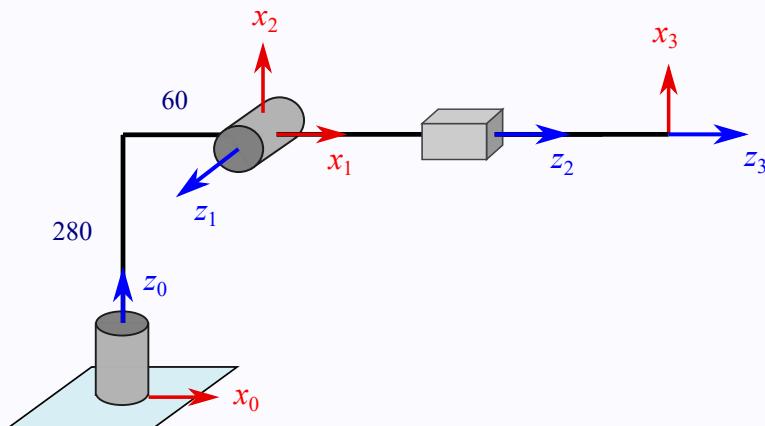


Figura 5.4 Manipulador RRP

Solución:

La matriz de cinemática directa para este manipulador está dada por:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 & c_1 s_2 & 60c_1 + q_3 c_1 s_2 \\ s_1 c_2 & -c_1 & s_1 s_2 & 60s_1 + q_3 s_1 s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -q_3 c_2 + 280 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De lo cual:

$$\mathbf{r}_{o_3} = \begin{bmatrix} 60c_1 + q_3c_1s_2 \\ 60s_1 + q_3s_1s_2 \\ -q_3c_2 + 280 \end{bmatrix}$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\mathbf{v}_{o_3} = \begin{bmatrix} -60\dot{q}_1s_1 + \dot{q}_3c_1s_2 - q_3\dot{q}_1s_1s_2 + q_3\dot{q}_2c_1c_2 \\ 60\dot{q}_1c_1 + \dot{q}_3s_1s_2 + q_3\dot{q}_1c_1s_2 + q_3\dot{q}_2s_1c_2 \\ -\dot{q}_3c_2 + q_3\dot{q}_2s_2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\mathbf{v}_{o_3} = \begin{bmatrix} 85.85 \\ 425.3 \\ 174 \end{bmatrix} \text{ mm/s}$$

Lo visto previamente para la velocidad del extremo del manipulador, se puede generalizar para cualquier punto en el manipulador. Supongamos que se tiene un punto P , ubicado en el eslabón i , es sencillo ver que su velocidad lineal se puede determinar mediante:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{o_i} + \mathbf{v}_{P/o_i} \quad (5.22)$$

Si el punto P está fijo en el eslabón i (caso típico), entonces su velocidad relativa \mathbf{v}_{P/o_i} se debe únicamente a la rotación del eslabón i , es decir:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{o_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{P/o_i} \quad (5.23)$$

En el caso de que el punto P no esté fijo en el eslabón i , entonces, adicionalmente debería considerarse el cambio en la magnitud del vector \mathbf{r}_{P/o_i} visto desde el sistema $\{i\}$, es decir:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{o_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{P/o_i} + (\mathbf{v}_{P/o_i})_i \quad (5.24)$$

Ejemplo 5.5 Velocidad de un punto: manipulador RR

Calcule la velocidad de los puntos A y B , ubicados en los eslabones 1 y 2, respectivamente, del manipulador RR mostrado en la figura. Se sabe que:

$$\mathbf{r}_A^1 = \begin{bmatrix} -(l_1 - l_{c_1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_B^2 = \begin{bmatrix} -(l_2 - l_{c_2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

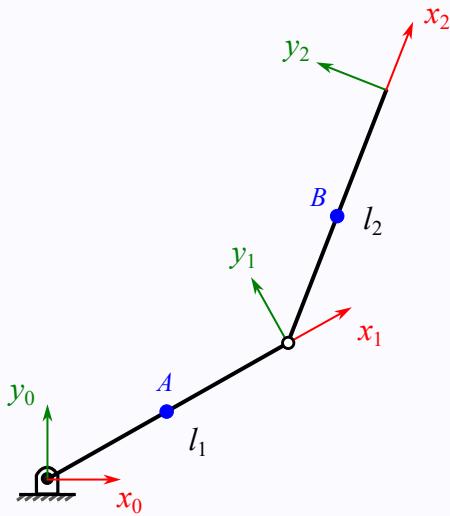


Figura 5.5 Manipulador RR

Solución:

Para calcular \mathbf{v}_A :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{o_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A/o_1} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A/o_1} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{r}_{o_1/o_0} + \mathbf{r}_{A/o_1}) \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A/o_0}\end{aligned}$$

La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ se determina mediante:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Y el vector de posición \mathbf{r}_{A/o_0} :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A/o_0} &= \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{o_0} \\ \mathbf{r}_A &= T_1^0 \mathbf{r}_A^1 = \begin{bmatrix} l_{c_1} c_1 \\ l_{c_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{A/o_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{c_1} c_1 \\ l_{c_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 l_{c_1} s_1 \\ \dot{q}_1 l_{c_1} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar la velocidad de B :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{o_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{B/o_2} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{B/o_2} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{o_2/o_1} + \mathbf{r}_{B/o_2}) \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{B/o_1} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_2 &= \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + R_1^0 \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_{o_1/o_0} &= \mathbf{r}_{o_1} - \mathbf{r}_{o_0} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_{B/o_1} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{o_1} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c_2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c_2} c_{12} \\ l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando los productos vectoriales:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 l_1 s_1 \\ \dot{q}_1 l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{B/o_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{c_2} c_{12} \\ l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_{c_2} s_{12} \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_{c_2} c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 l_1 s_1 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_{c_2} s_{12} \\ \dot{q}_1 l_1 c_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_{c_2} c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La velocidad lineal de un punto P cualquiera, ubicado en el eslabón i del manipulador

serial, se puede determinar también derivando con respecto al tiempo un vector \mathbf{r}_P que describa su posición en el sistema de la base, en términos de las posiciones articulares ¹, es decir:

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

Habitualmente, el vector \mathbf{r}_P se formará de manera más simple si primero lo describimos en el sistema de referencia adherido al eslabón i , y luego aplicamos una transformación de coordenadas para describirlo en el sistema de la base. De acuerdo con lo anterior, se tendría que:

$$\mathbf{r}_P = T_i^0 \mathbf{r}_P^i$$

Donde T_i^0 es una matriz de transformación homogénea que describe al sistema del eslabón $\{i\}$ con respecto al de la base, y \mathbf{r}_P^i es un vector que describe la posición del punto P en el sistema $\{i\}$. Si el punto P está fijo en el eslabón i , entonces el vector \mathbf{r}_P^i tendrá componentes constantes.

5.5. La matriz jacobiana

En las secciones 5.2 y 5.4 vimos cómo determinar las velocidades angulares y la velocidad lineal del extremo del manipulador, de manera respectiva. En este apartado veremos que hay una manera conveniente de representar de manera conjunta tanto la velocidad lineal como la velocidad angular del elemento terminal (o de cualquier ubicación del manipulador). Comenzaremos recordando que la velocidad lineal del extremo está dada por la ecuación 5.20:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \sum_{i=1}^n \left[\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}} + (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} \right] = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}$$

Ahora, vamos a reescribir el primer término de esta ecuación en función de las velocidades angulares entre eslabones consecutivos $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0$, para esto podemos desarrollar algunos términos de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}) = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}$$

¹Realmente podría ser en términos de cualquier conjunto de coordenadas generalizadas que describan su posición.

Donde:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} &= \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} \\
 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} &= [\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0] \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} \\
 &= \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} \\
 \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} &= [\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^0] \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} \\
 &= \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}
 \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}) &= [\boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_1/o_0} + \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}] + \\
 &\quad + [\boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 \times \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}] + \\
 &\quad + \cdots + [\boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}]
 \end{aligned}$$

La propiedad distributiva del producto cruz establece que se cumple: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_n$. Considerando esto, podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}) &= \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times [\mathbf{r}_{o_1/o_0} + \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}] + \\
 &\quad + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 \times [\mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}] \\
 &\quad + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}
 \end{aligned}$$

Pero, dado que:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{r}_{o_1/o_0} + \mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}] &= \mathbf{r}_{o_n/o_0} \\
 [\mathbf{r}_{o_2/o_1} + \cdots + \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}}] &= \mathbf{r}_{o_n/o_1}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{o_i/o_{i-1}}) = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_0} + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_1} + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{n-1}} = \sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{i-1}}] \quad (5.25)$$

Con lo anterior, podemos reescribir la ecuación 5.20 como:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \sum_{i=1}^n \left[\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0 \times \mathbf{r}_{o_n/o_{i-1}} + (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} \right] \quad (5.26)$$

Esta ecuación tiene la *particularidad* de utilizar las velocidades angulares entre eslabones sucesivos, en lugar de las velocidades angulares de cada eslabón con respecto a la base. Esto tiene cierta ventaja al momento de efectuar el cálculo, puesto que en el caso de que la i -ésima junta sea de tipo prismática, entonces $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0 = \mathbf{0}$, y el primer término de 5.26 se anula. En el caso de que la i -ésima junta sea de tipo revoluta, entonces el segundo término se hace cero, es decir, únicamente se sumaría uno de los términos dependiendo el tipo de articulación.

De acuerdo con lo visto en la sección 5.2, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0$ se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0 = R_{i-1}^0 \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1} = \begin{cases} \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \mathbf{0} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases}$$

La velocidad $(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}$ se puede escribir como:

$$(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} = R_{i-1}^0 (\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}^{i-1}$$

Donde:

$$(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}^{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}$$

Siempre y cuando la i -ésima junta sea de tipo prismática; en el caso de que sea revoluta $(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1}^{i-1} = \mathbf{0}$. Así pues:

$$(\mathbf{v}_{o_i/o_{i-1}})_{i-1} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases}$$

Considerando lo anterior, la ecuación 5.26 puede reescribirse como:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \sum_{i=1}^n \begin{cases} \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{o_n/o_{i-1}} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases} \quad (5.27)$$

O bien, en forma un poco más compacta como:

$$\mathbf{v}_{o_n} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \mathbf{J}_{v_i} \quad (5.28)$$

Donde \mathbf{J}_{v_i} podemos definirlo de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_{v_i} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{o_n/o_{i-1}} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta.} \\ \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática.} \end{cases} \quad (5.29)$$

Se puede observar que la ecuación 5.28 es posible escribir la como una multiplicación de una matriz J_v (cuyas columnas son los vectores \mathbf{J}_{v_i}) por un vector $\dot{\mathbf{q}}$, es decir:

$$\mathbf{v}_{o_n} = J_v \dot{\mathbf{q}} \quad (5.30)$$

Donde:

$$J_v = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_1} & \mathbf{J}_{v_2} & \cdots & \mathbf{J}_{v_n} \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

A la matriz J_v se le denomina **matriz jacobiana de velocidad lineal** o bien simplemente **jacobiano de velocidad lineal**. Observe que esta matriz nos proporciona una relación entre las velocidades articulares y las velocidades lineales del extremo del manipulador en el espacio cartesiano.

La velocidad angular del elemento terminal (eslabón n) también se puede escribir en forma de una multiplicación matricial. Para esto comenzaremos recordando que la velocidad angular del eslabón n está dada por la suma de las velocidades angulares $\omega_{i-1,i}^0$ de los eslabones que le preceden:

$$\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^0 + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^0 = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0 \quad (5.31)$$

Sabemos además que:

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^0 = R_{i-1}^0 \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1} = \begin{cases} \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \mathbf{0} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases}$$

Entonces, podemos reescribir la suma de velocidades angulares como:

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n \begin{cases} \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \mathbf{0} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases} \quad (5.32)$$

O en forma equivalente como:

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \mathbf{J}_{\omega_i} \quad (5.33)$$

Donde:

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \mathbf{0} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases}$$

La ecuación 5.33 se puede escribir también como una multiplicación de una matriz J_ω (cuyas columnas son los vectores \mathbf{J}_{ω_i}) por un vector $\dot{\mathbf{q}}$, es decir:

$$\omega_n = J_\omega \dot{\mathbf{q}} \quad (5.34)$$

Donde:

$$J_\omega = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\omega_1} & \mathbf{J}_{\omega_2} & \cdots & \mathbf{J}_{\omega_n} \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

A la matriz J_ω se le denomina **matriz jacobiana de velocidad angular** o bien simplemente **jacobiano de velocidad angular**. Observe que esta matriz nos proporciona una relación entre las velocidades articulares y la velocidad angular del elemento terminal en el espacio cartesiano.

Las ecuaciones 5.30 y 5.34 se pueden expresar de manera conjunta como:

$$\mathbf{v} = J\dot{\mathbf{q}} \quad (5.35)$$

Donde:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{o_n} \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

A la matriz J se le denomina **matriz jacobiana**, **jacobiano** o de manera un poco más específica **jacobiano geométrico**. La matriz jacobiana se calcula para una ubicación específica del manipulador, en este caso particular se ha obtenido para el elemento terminal, no obstante, se puede formular para cualquier punto en el manipulador. Es sencillo verificar que la matriz jacobiana asociada a un manipulador de n grados de libertad, es una matriz de $6 \times n$.

Ahora, con todo lo anterior, estamos en posibilidad de formular (bueno, en este punto realmente sería resumir) un procedimiento para determinar la matriz jacobiana asociada con el elemento terminal (eslabón n) de un manipulador serial de n grados de libertad.

5.5.1. ¿Cómo formar la matriz jacobiana?

La matriz jacobiana asociada con el extremo de un manipulador serial está conformada de la siguiente manera:

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_1} & \mathbf{J}_{v_2} & \cdots & \mathbf{J}_{v_n} \\ \mathbf{J}_{\omega_1} & \mathbf{J}_{\omega_2} & \cdots & \mathbf{J}_{\omega_n} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Donde:

$$\mathbf{J}_{v_i} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{r}_{o_n} - \mathbf{r}_{o_{i-1}}) & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta.} \\ \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática.} \end{cases} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la } i\text{-ésima junta es revoluta} \\ \mathbf{0} & \text{si la } i\text{-ésima junta es prismática} \end{cases} \quad (5.38)$$

Además, se debe considerar que cada uno de los vectores implicados se pueden determinar de la siguiente manera:

$$\mathbf{z}_{i-1} = \left[T_{i-1}^0 \right]_{1:3,3}$$

$$\mathbf{r}_{o_n} = \left[T_n^0 \right]_{1:3,4}$$

$$\mathbf{r}_{o_{i-1}} = \left[T_{i-1}^0 \right]_{1:3,4}$$

De manera particular, los vectores \mathbf{r}_{o_0} y \mathbf{z}_0 siempre tendrán la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_{o_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.6 Manipulador RR

Vamos a exemplificar el cálculo de la matriz jacobiana con el manipulador planar RR (ver Figura 4.1). De la cinemática directa se sabe que:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que ambas articulaciones son revolutas, la matriz jacobiana quedará de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_1} & \mathbf{J}_{v_2} \\ \mathbf{J}_{\omega_1} & \mathbf{J}_{\omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_{o_2} - \mathbf{r}_{o_0}) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{r}_{o_2} - \mathbf{r}_{o_1}) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{o_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{o_1} = \begin{bmatrix} l_1c_1 \\ l_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{o_2} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando los productos vectoriales correspondientes se tiene:

$$\mathbf{J}_{v_1} = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_{o_2} - \mathbf{r}_{o_0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{v_2} = \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{r}_{o_2} - \mathbf{r}_{o_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2c_{12} \\ l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2s_{12} \\ l_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que ambas articulaciones son revolutas, tanto \mathbf{J}_{ω_1} como \mathbf{J}_{ω_2} están dadas por:

$$\mathbf{J}_{\omega_1} = \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_{\omega_1} = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, acomodando los términos calculados, se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.7 Velocidad del extremo del manipulador RR

Para el manipulador planar RR de la Figura 4.1, calcule la velocidad lineal y angular de su extremo, para un instante en el cual $q_1 = 45^\circ$ y $q_2 = 30^\circ$, siendo $\dot{q}_1 = 1.5 \text{ rad/s}$ y $\dot{q}_2 = 3 \text{ rad/s}$. Considere que $l_1 = l_2 = 280 \text{ mm}$.

Solución:

Tomamos como punto de partida la matriz jacobiana calculada en el Ejemplo 5.5.1, sustituimos los valores correspondientes, de lo cual se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -468.449 & -270.459 \\ 270.459 & 72.4693 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector de velocidades del extremo del manipulador, debemos multiplicar la matriz jacobiana J por el vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$, mismo que está dado por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación, tenemos:

$$\mathbf{V} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -468.449 & -270.459 \\ 270.459 & 72.4693 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1514.05 \\ 623.097 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

Lo cual resulta en el vector de velocidades lineales y angulares del extremo del manipulador.

Ejemplo 5.8 Manipulador RPP

Para el manipulador RPP mostrado en la Figura 5.6 calcule las velocidades del extremo, para un instante en el cual $q_1 = 90^\circ$, $q_2 = 200$ mm y $q_3 = 100$ mm, además, se sabe que las velocidades articulares son $\dot{q}_1 = -2.5$ rad/s, $\dot{q}_2 = 30$ mm/s, $\dot{q}_3 = 45$ mm/s. Considere que $a = 200$ mm y $b = 70$ mm.

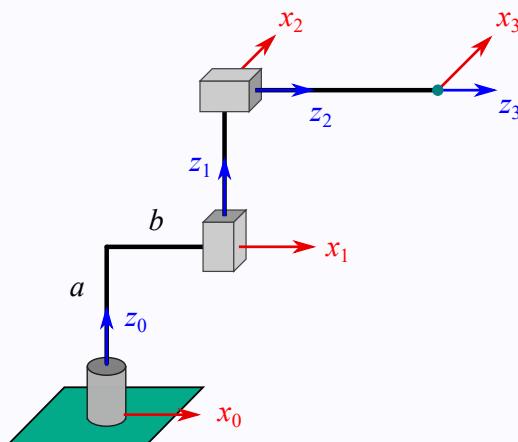


Figura 5.6 Manipulador RPP

Solución:

Calculando la cinemática directa, se tiene:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & b \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & b \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & b \cos(q_1) \\ \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & b \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & a + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & (b + q_3) \cos(q_1) \\ \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & (b + q_3) \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & a + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que estamos trabajando con un manipulador RPP, la matriz jacobiana tendrá la forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{v_1} & J_{v_2} & J_{v_3} \\ J_{\omega_1} & J_{\omega_2} & J_{\omega_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_{o_3} - \mathbf{r}_{o_0}) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Recuerde que tanto la segunda como tercera articulación son prismáticas, lo cual facilita en gran medida el cálculo de la matriz jacobiana. Identificando cada término implicado:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{o_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{o_3} = \begin{bmatrix} (b + q_3) \cos(q_1) \\ (b + q_3) \sin(q_1) \\ a + q_2 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto vectorial para calcular J_{v_1} :

$$J_{v_1} = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_{o_3} - \mathbf{r}_{o_0}) = \begin{bmatrix} -(b + q_3) \sin(q_1) \\ (b + q_3) \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acomodando los términos como corresponde, formamos la matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} -(b + q_3) \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) \\ (b + q_3) \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numéricos, se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -170 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el vector de velocidades articulares podemos definirlo como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Para calcular las velocidades del extremo, efectuamos el producto de J y $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{v} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -170 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.5 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425.0 \\ 45 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{v}_{o_3} = \begin{bmatrix} 425 \\ 45 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ mm/s}$$

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.5 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

5.5.2. La matriz jacobiana de un punto del manipulador

En la sección previa vimos cómo formar la matriz jacobiana del extremo del manipulador, sin embargo, en muchas ocasiones es necesario conocer las velocidades lineales y angulares en algún otro punto del manipulador, por ejemplo, cuando se analiza la dinámica del robot es necesario determinar las velocidades del centro de masa de cada eslabón. En esta sección veremos cómo formar la matriz jacobiana para una ubicación específica del manipulador.

Antes de comenzar con el análisis, lo primero que debemos comprender es que, en un manipulador serial, si accionamos la i -ésima articulación y mantenemos fijas todas las

otras, entonces esta articulación producirá un movimiento sobre los eslabones $i, i + 1, \dots, n$. Por ejemplo, refiriéndonos al manipulador RRR de la Figura 5.7, si accionamos la junta número (3) el único eslabón que se movería sería el 3, si accionamos la junta (2) entonces afectaría tanto al eslabón 2 como al 3.

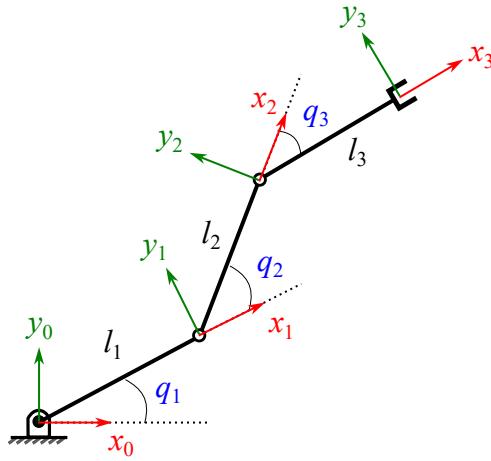


Figura 5.7 Manipulador RRR

Así pues, suponiendo que se tiene un punto A ubicado en el eslabón 1, entonces podríamos inferir que el accionamiento de las juntas 2 y 3 no le *afecta*, lo cual nos lleva a pensar que la matriz jacobiana asociada con este punto A debería contener ceros en las columnas 2 y 3 que corresponden a estas juntas, para que al efectuar la multiplicación por el vector de velocidades articulares se corresponda con una contribución nula de estas velocidades articulares a la velocidad lineal del punto A .

Lo descrito previamente se puede generalizar para un punto ubicado en cualquier eslabón de un manipulador serial. Supongamos que se tiene un punto Q ubicado en el eslabón m de un manipulador serial, entonces la matriz jacobiana correspondiente al punto Q es una matriz de $6 \times n$:

$$J_Q = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{v_1})_Q & (\mathbf{J}_{v_2})_Q & \cdots & (\mathbf{J}_{v_n})_Q \\ (\mathbf{J}_{\omega_1})_Q & (\mathbf{J}_{\omega_2})_Q & \cdots & (\mathbf{J}_{\omega_n})_Q \end{bmatrix}$$

Para cuando $i \leq m$, las columnas de J_Q se determinan de la siguiente manera:

$$(\mathbf{J}_{v_i})_Q = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_{o_{i-1}}) & \text{si la junta } i \text{ es revoluta} \\ \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la junta } i \text{ es prismática} \end{cases}$$

$$(\mathbf{J}_{\omega_i})_Q = \begin{cases} \mathbf{z}_{i-1} & \text{si la junta } i \text{ es revoluta} \\ \mathbf{0} & \text{si la junta } i \text{ es prismática} \end{cases}$$

En el caso de que $i > m$, entonces:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_{v_i})_Q &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{J}_{\omega_i})_Q &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores, \mathbf{r}_Q es un vector que describe la posición del punto Q en el sistema de referencia de la base.

Ejemplo 5.9 Jacobiano de un punto: manipulador RR

Calcule la matriz jacobiana de los puntos A y B , ubicados en los eslabones 1 y 2, respectivamente, del manipulador RR mostrado en la Figura 5.8. Se sabe que:

$$\mathbf{r}_A^1 = \begin{bmatrix} -(l_1 - l_{c_1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_B^2 = \begin{bmatrix} -(l_2 - l_{c_2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

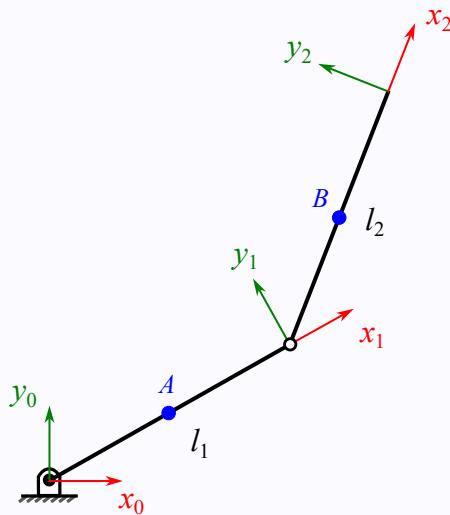


Figura 5.8 Manipulador RR

Solución:

Matriz jacobiana del punto A

La matriz jacobiana del punto A está conformada de la siguiente manera:

$$J_A = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{v_1})_A & (\mathbf{J}_{v_2})_A \\ (\mathbf{J}_{\omega_1})_A & (\mathbf{J}_{\omega_2})_A \end{bmatrix}$$

Puesto que el punto A está ubicado en el eslabón 1 ($m = 1$), entonces tanto $(\mathbf{J}_{v_2})_A$ como $(\mathbf{J}_{\omega_2})_A$ son cero, dado que en esta segunda columna ($i = 2$) se cumple que $i > m$. Calculamos ahora los términos de la primera columna, debido a que la junta

1 es una revoluta, entonces:

$$(\mathbf{J}_{v_1})_A = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{o_0})$$

$$(\mathbf{J}_{\omega_1})_A = \mathbf{z}_0$$

El vector \mathbf{r}_A podemos determinarlo si aplicamos una transformación a \mathbf{r}_A^1 para describirlo en el sistema de la base:

$$\mathbf{r}_A = T_1^0 \mathbf{r}_A^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(l_1 - l_{c_1}) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 - l_{c_1}) c_1 + l_1 c_1 \\ -(l_1 - l_{c_1}) s_1 + l_1 s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} l_{c_1} c_1 \\ l_{c_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, sabemos que $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ y que $\mathbf{r}_{o_0} = [0 \ 0 \ 0]^T$. Sustituyendo y realizando las operaciones:

$$(\mathbf{J}_{v_1})_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{c_1} c_1 \\ l_{c_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c_1} s_1 \\ l_{c_1} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_{\omega_1})_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz J_A nos queda de la siguiente manera:

$$J_A = \begin{bmatrix} -l_{c_1} s_1 & 0 \\ l_{c_1} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz jacobiana del punto B

La matriz jacobiana del punto B está conformada de la siguiente manera:

$$J_B = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{v_1})_B & (\mathbf{J}_{v_2})_B \\ (\mathbf{J}_{\omega_1})_B & (\mathbf{J}_{\omega_2})_B \end{bmatrix}$$

Puesto que el punto B está ubicado en el eslabón 2 ($m = 2$), para ambas columnas de J_B ($i = 1, i = 2$) se cumple que $i \leq m$. Dado que tanto la junta 1 como la junta 2 son revoluta, entonces:

$$(J_{v_1})_B = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{o_0}) ; \quad (J_{v_2})_B = \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{o_1})$$

$$(J_{\omega_1})_B = \mathbf{z}_0 ; \quad (J_{\omega_2})_B = \mathbf{z}_1$$

El vector \mathbf{r}_B lo calculamos aplicando la transformación correspondiente a \mathbf{r}_B^0 :

$$\mathbf{r}_B = T_2^0 \mathbf{r}_B^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(l_2 - l_{c_2}) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_2 - l_{c_2}) c_{12} + l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -(l_2 - l_{c_2}) s_{12} + l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c_2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tanto \mathbf{z}_1 como \mathbf{r}_{o_1} se obtienen de la matriz T_1^0 :

$$\mathbf{z}_1 = [T_1^0]_{1:3,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{r}_{o_1} = [T_1^0]_{1:3,4} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo y realizando las operaciones:

$$(J_{v_1})_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c_2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_{c_2} s_{12} \\ l_1 c_1 + l_{c_2} c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(J_{\omega_1})_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(J_{v_2})_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{c_2} c_{12} \\ l_{c_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c_2} s_{12} \\ l_{c_2} c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(J_{\omega_2})_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, organizando los términos, la matriz J_B nos queda de la siguiente forma:

$$J_B = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_{c_2} s_{12} & -l_{c_2} s_{12} \\ l_1 c_1 + l_{c_2} c_{12} & l_{c_2} c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.6. El jacobiano analítico

5.7. Singularidades

5.8. Cinemática diferencial inversa

Problemas

5.1 Calcule la matriz jacobiana del manipulador RR mostrado en la Figura 5.9.

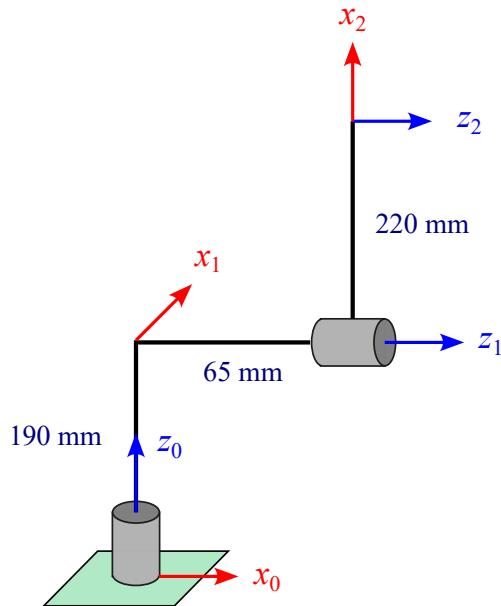


Figura 5.9 Manipulador RR

5.2 Para el manipulador RR mostrado en la Figura 5.9 calcule la velocidad lineal y angular del extremo para un instante en el que:

$$\begin{array}{ll} q_1 = 30^\circ & \dot{q}_1 = -0.75 \text{ rad/s} \\ q_2 = 45^\circ & \dot{q}_2 = 1.65 \text{ rad/s} \end{array}$$

5.3 Para el manipulador RR de la Figura 5.9, se sabe que el centro de masa del eslabón 2 está ubicado de acuerdo con el siguiente vector de posición: $\mathbf{r}_{G_2}^2 = [-110, 0, 0]^T$. Calcule la velocidad del centro de masa G_2 con respecto al sistema de referencia de la base, para un instante en el cual las posiciones y velocidades articulares son las que se listan enseguida.

$$\begin{array}{ll} q_1 = 90^\circ & \dot{q}_1 = 0.25 \text{ rad/s} \\ q_2 = 60^\circ & \dot{q}_2 = 1.5 \text{ rad/s} \end{array}$$

5.4 En la figura se muestra un manipulador RR. Para un instante en el que:

$$\begin{array}{ll} q_1 = 90^\circ & \dot{q}_1 = 0.5 \text{ rad/s} \\ q_2 = 30^\circ & \dot{q}_2 = 1.5 \text{ rad/s} \end{array}$$

Realiza lo siguiente:

- a) Determina la velocidad lineal del extremo del manipulador.

- b) Calcula la velocidad angular de cada uno de los eslabones.
- c) Calcula la matriz jacobiana del extremo del manipulador.
- d) Calcula la velocidad de un punto A cuyas coordenadas en el sistema $\{2\}$ están dadas por $\mathbf{r}_A^2 = [-100 \ 20 \ 0]^T$

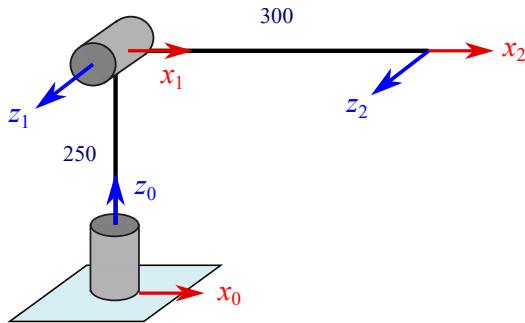


Figura 5.10 Manipulador RR

5.5 Calcule la matriz jacobiana para el manipulador RRR mostrado en la Figura 5.11.

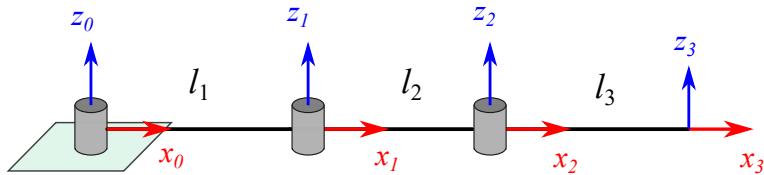


Figura 5.11 Manipulador RRR

5.6 Para el manipulador RRR mostrado en la Figura 5.11 calcule la velocidad lineal del extremo del manipulador para un instante en el que:

$$\begin{array}{ll} q_1 = 30^\circ & \dot{q}_1 = 1.5 \text{ rad/s} \\ q_2 = 90^\circ & \dot{q}_2 = 2 \text{ rad/s} \\ q_3 = 135^\circ & \dot{q}_3 = 1.25 \text{ rad/s} \end{array}$$

Consideré que las longitudes de los eslabones son $l_1 = l_2 = 300 \text{ mm}$ y $l_3 = 200 \text{ mm}$.

5.7 En la Figura 5.12 se muestra un manipulador PPR, calcule la matriz jacobiana.

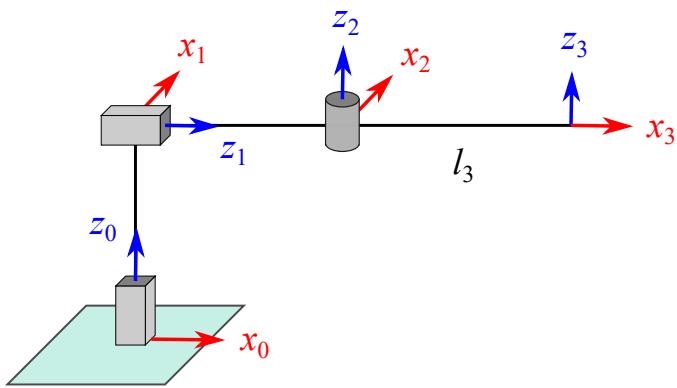


Figura 5.12 Manipulador PPR

5.8 Calcule la velocidad lineal y angular del extremo del robot ABB IRB 140, para un instante en el que:

$$\begin{array}{ll}
 q_1 = 0^\circ & \dot{q}_1 = 0.75 \text{ rad/s} \\
 q_2 = 0^\circ & \dot{q}_2 = 1.25 \text{ rad/s} \\
 q_3 = 0^\circ & \dot{q}_3 = 0.5 \text{ rad/s} \\
 q_4 = 0^\circ & \dot{q}_4 = 0 \text{ rad/s} \\
 q_5 = 0^\circ & \dot{q}_5 = 2 \text{ rad/s} \\
 q_6 = 0^\circ & \dot{q}_6 = 0.5 \text{ rad/s}
 \end{array}$$

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

1. Para el manipulador planar RRR de la Figura 5.11 se sabe que las posiciones articulares están dadas por:

$$q_1 = \cos t \quad q_2 = \sin t \quad q_3 = t$$

Grafeque las componentes de velocidad lineal (v_x, v_y, v_z) del extremo del manipulador en el intervalo $0 \leq t \leq 5$. Considere que $l_1 = l_2 = l_3 = 250$ mm.

6

Dinámica

La obtención del modelo dinámico de un manipulador juega un rol importante para la simulación del movimiento, el análisis de la estructura del manipulador y el diseño de los algoritmos de control. La simulación del movimiento de un manipulador permite probar estrategias de control sin necesidad de disponer físicamente del manipulador. El cálculo de las fuerzas y torques requeridos para la ejecución de los movimientos del robot proporciona información valiosa para el diseño de las juntas, transmisiones y actuadores.

El modelo dinámico de un robot consiste en una ecuación diferencial (ordinaria) vectorial en las posiciones, ya sean articulares \mathbf{q} o cartesianas \mathbf{x} , generalmente de segundo orden, pudiéndose expresar como:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

$$f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

En las expresiones anteriores el vector $\boldsymbol{\tau}$ corresponde a las fuerzas y torques aplicados en las juntas por los actuadores. La ecuación 6.1 corresponde al *modelo dinámico articular* y la ecuación 6.2 al *modelo dinámico cartesiano*.

6.1. Dinámica de cuerpos rígidos

6.1.1. Ecuaciones de Newton-Euler

La fuerza resultante que actúa en un cuerpo rígido es igual a la tasa de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento lineal con respecto a un sistema de referencia inercial:

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = m\dot{\mathbf{v}}_G \quad (6.3)$$

Donde \mathbf{v}_G es la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido, $\Sigma \mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo rígido y \mathbf{P} es la cantidad de movimiento lineal con respecto al sistema de referencia inercial. Dado que $\mathbf{a}_G = \dot{\mathbf{v}}_G$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

De la ecuación 6.3 se desprende un principio o teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

Si la fuerza resultante en un sólido es cero, entonces $\dot{\mathbf{P}} = 0$, lo cual implica que la cantidad de movimiento lineal del sólido se conserva, es decir, permanece constante.

El momento resultante ($\Sigma \mathbf{M}_O$) de las fuerzas externas que actúan en un cuerpo rígido con respecto a un punto fijo O en un sistema de referencia inercial, es igual a la tasa de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular alrededor de O :

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (6.4)$$

donde \mathbf{H}_O es la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al mismo punto O . De la ecuación 6.4 se desprende también un principio de conservación de la cantidad de movimiento angular:

Si el momento resultante en un sólido con respecto a un punto fijo O es cero, entonces $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$, lo cual implica que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O con respecto a O se conserva, es decir, permanece constante.

La ecuación 6.4 se puede escribir también haciendo que el punto O ahora se corresponda con la ubicación del centro de masa (G), es decir:

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (6.5)$$

Donde $\Sigma \mathbf{M}_G$ es la sumatoria de los momentos alrededor de G y \mathbf{H}_G la cantidad de movimiento angular alrededor del centro de masa.

Consideremos un cuerpo rígido modelado como un sistema de N partículas como el que se muestra en la figura. Las ecuaciones 6.3 y 6.4 son aplicables para este modelo. Si las N partículas son newtonianas, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular están dadas por:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (6.6)$$

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (6.7)$$

donde m_i es la masa, \mathbf{v}_i la velocidad y \mathbf{R}_i la posición, de la i -ésima partícula, descritas en el sistema inercial.

6.1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Otra manera de abordar la dinámica de un cuerpo rígido (o partícula) es utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Dado un sistema mecánico de n grados de libertad, sus ecuaciones de movimiento se pueden obtener como sigue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad ; \text{ Para } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.8)$$

Donde \mathcal{L} es una función escalar llamada *lagrangiano*, y está dada por la diferencia entre la energía cinética y potencial del cuerpo rígido, es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} \quad (6.9)$$

A q_i y \dot{q}_i se les denomina *coordenada generalizada* y *velocidad generalizada*, de forma respectiva. Un conjunto de coordenadas generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) es aquel que describe de manera completa la posición de un sistema de n grados de libertad. Las velocidades generalizadas son las derivadas de las coordenadas generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$.

La experiencia demuestra que dadas simultáneamente las coordenadas y velocidades generalizadas se determina completamente el estado del sistema y permite, en principio, predecir su movimiento futuro. Las relaciones entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas se llaman *ecuaciones de movimiento*. [9]

El término τ_i corresponde a las fuerzas generalizadas aplicadas sobre el cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos.

Energía cinética de un cuerpo rígido

En la Figura 6.1 se muestra un cuerpo rígido, el cual está rotando con una velocidad angular ω y donde la posición de la i -ésima partícula de masa m_i con respecto al sistema

de referencia $Gx'y'z'$ está dada por el vector $\mathbf{r}_{i/G}$. El sistema de referencia $Gx'y'z'$ está adherido al sólido y el sistema $Oxyz$ es un sistema de referencia inercial.

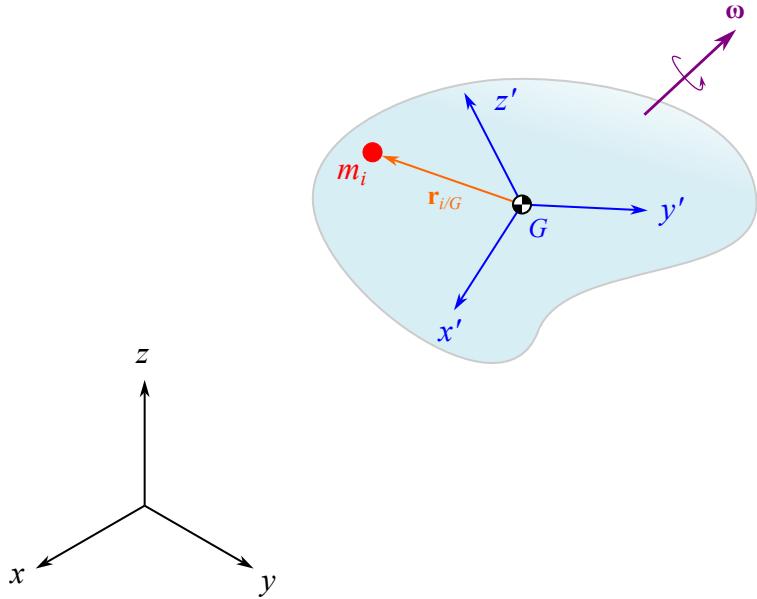


Figura 6.1 Un cuerpo rígido en rotación

La energía cinética de un cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas que lo conforman:

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.10)$$

Para el sólido de la Figura 6.1 la velocidad \mathbf{v}_i de la partícula i se puede expresar en el sistema inercial como:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}$$

Sustituyendo la velocidad en la ecuación 6.10 se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G) \sum_{i=1}^n m_i + \mathbf{v}_G \cdot \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dado que la sumatoria de las masas de cada una de las partículas corresponde a la masa total del sólido, entonces el primer término de esta ecuación se puede expresar como:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G) \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G)$$

Para el segundo término:

$$\mathbf{v}_G \cdot \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) = \mathbf{v}_G \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{i/G} \right)$$

Por la definición de centro de masa, es sencillo verificar que el término:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{i/G} = 0$$

Lo cual implica que el segundo término de [6.11](#) se hace cero.

Para el tercer término, podemos aplicar la siguiente identidad vectorial:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

Así pues:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{i/G} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G})$$

Este producto vectorial lo podemos desarrollar, para esto vamos a considerar que las componentes de los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_{i/G}$ son:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{i/G} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ -\omega_x z_i + \omega_z x_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
m_i \mathbf{r}_{i/G} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) &= \begin{bmatrix} m_i x_i \\ m_i y_i \\ m_i z_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ -\omega_x z_i + \omega_z x_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} m_i y_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i) - m_i z_i (-\omega_x z_i + \omega_z x_i) \\ -m_i x_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i) + m_i z_i (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \\ m_i x_i (-\omega_x z_i + \omega_z x_i) - m_i y_i (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_i y_i^2 \omega_x - m_i x_i y_i \omega_y + m_i z_i^2 \omega_x - m_i x_i z_i \omega_z \\ -m_i y_i x_i \omega_x + m_i x_i^2 \omega_y + m_i z_i^2 \omega_y - m_i y_i z_i \omega_z \\ -m_i z_i x_i \omega_x + m_i x_i^2 \omega_z - m_i z_i y_i \omega_y + m_i y_i^2 \omega_z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Factorizando las velocidades angulares, cada una de las componentes del producto vectorial resulta en:

$$\begin{bmatrix} [m_i (y_i^2 + z_i^2)] \omega_x + [-m_i x_i y_i] \omega_y + [-m_i x_i z_i] \omega_z \\ [-m_i y_i x_i] \omega_x + [m_i (x_i^2 + z_i^2)] \omega_y + [-m_i y_i z_i] \omega_z \\ [-m_i z_i x_i] \omega_x + [-m_i z_i y_i] \omega_y + [m_i (x_i^2 + y_i^2)] \omega_z \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

De tal manera que, en forma más compacta:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{i/G} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) = \begin{bmatrix} I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_z + I_{zz} \omega_z \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

donde:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \\
I_{yy} &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \\
I_{zz} &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)
\end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= I_{yx} = -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \\
 I_{xz} &= I_{zx} = -\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \\
 I_{yz} &= I_{zy} = -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Las cantidades dadas en la ecuación 6.14 se denominan *momentos de inercia* y las de la ecuación 6.15 corresponden a los *productos de inercia*.

El vector de la ecuación 6.13 se puede escribir en forma de una multiplicación matricial como:

$$I_G \boldsymbol{\omega} \tag{6.16}$$

donde I_G es una matriz dada por:

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

a esta matriz se le denomina *matriz de inercia* o más comúnmente *tensor de inercia*. En este caso el tensor de inercia describe la manera en que la masa está distribuida con respecto al sistema de referencia $Gx'y'z'$ adherido al sólido, así pues aún cuando el cuerpo se traslade o rote, el tensor de inercia permanece invariable. En secciones posteriores nos centraremos en cómo determinar cada uno de los componentes del tensor de inercia.

Considerando todo lo anterior, el tercer término de 6.11 se puede escribir como:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{i/G} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i/G}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I \boldsymbol{\omega})$$

Dado que el producto punto de dos vectores se puede expresar como una multiplicación matricial:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

Entonces, la energía cinética total del cuerpo rígido se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^T\mathbf{v}_G + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I_G \boldsymbol{\omega} \quad (6.18)$$

Energía potencial de un cuerpo rígido

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo rígido es una cantidad que depende de la masa, la gravedad y la posición del centro de masa. Se puede expresar como:

$$\mathcal{P} = -mg^T \mathbf{r}_G \quad (6.19)$$

Donde m es la masa total del cuerpo rígido, \mathbf{g} es un vector que define la aceleración de la gravedad en el sistema inercial y \mathbf{r}_G es un vector que describe la posición del centro de masa del cuerpo rígido en el sistema inercial.

6.1.3. Centro de masa

El centro de masa es un punto hipotético de un sistema de partículas o de un sólido, tal que dicho sistema se comporta como si toda su masa estuviera concentrada en ese único punto. Es importante destacar que el centro de masa no siempre coincide con un punto material físico en el objeto. El centro de masa es el único punto en el centro de una distribución de masa en el espacio que tiene la propiedad de que los vectores de posición ponderados relativos a este punto suman cero.

Para un sistema de n partículas, cada una de masa m_i y con una posición dada por \mathbf{r}_i , las coordenadas \mathbf{R} del centro de masa deben satisfacer la condición:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (6.20)$$

Resolviendo para \mathbf{R} se tiene que:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (6.21)$$

O bien, expresado en términos de las componentes escalares:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}; \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}; \quad (6.22)$$

Donde x_i, y_i, z_i son las coordenadas de la ubicación de la partícula i cuya masa es m_i .



Ejemplo 6.1 Centro de masa de un sistema de partículas

Calcule el centro de masa del sistema de partículas que se muestran en la Figura. Cada partícula tiene una masa de 0.25 kg. Las unidades de longitud de la rejilla son metros.

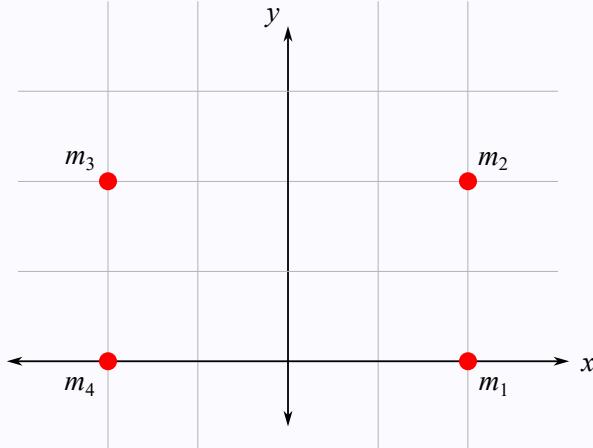


Figura 6.2

Solución:

De acuerdo con lo que sabemos todas las masas son iguales a 0.25 kg, es decir:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0.25 \text{ kg}$$

Las ubicaciones de las partículas son:

$$(x_1, y_1) = (2, 0) \text{ m} ; \quad (x_2, y_2) = (2, 2) \text{ m} ;$$

$$(x_3, y_3) = (-2, 2) \text{ m} ; \quad (x_4, y_4) = (-2, 0) \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(2)(0.25) + (2)(0.25) + (-2)(0.25) + (-2)(0.25)}{0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25} = \frac{0}{1}$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(0)(0.25) + (2)(0.25) + (2)(0.25) + (0)(0.25)}{0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25} = \frac{1}{1}$$

$$\bar{y} = 1 \text{ m}$$

Las ecuaciones 6.22 se pueden generalizar para un cuerpo rígido, bajo la asunción de que un cuerpo rígido se puede considerar como un conjunto infinito de partículas cuyas distancias son invariables entre sí, así la sumatoria la podemos reemplazar por una integral, es decir:

$$\bar{x} = \frac{\int_m \tilde{x} dm}{\int_m dm}; \quad \bar{y} = \frac{\int_m \tilde{y} dm}{\int_m dm}; \quad \bar{z} = \frac{\int_m \tilde{z} dm}{\int_m dm}; \quad (6.23)$$

En las ecuaciones anteriores los términos $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ denotan la ubicación del centro de masa del elemento diferencial utilizado para la integración. El diferencial de masa dm se puede expresar como:

$$dm = \rho dV$$

En el caso general, la densidad podría no ser constante y depender de la ubicación, es decir $\rho = \rho(x, y, z)$. Para la mayoría de situaciones en ingeniería, los componentes mecánicos están fabricados con materiales homogéneos (densidad constante), lo cual implica que el centro de masa coincidirá con el centroide del volumen del sólido, de tal manera que las coordenadas del centro de masa se pueden determinar mediante:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}; \quad (6.24)$$

Para cuerpos rígidos con forma de placas delgadas, de espesor uniforme y homogéneas, el centro de masa coincidirá con el centroide del área de la placa, así, las coordenadas del centro de masa se pueden determinar mediante:

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA}; \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}; \quad \bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z} dA}{\int_A dA}; \quad (6.25)$$



Ejemplo 6.2 Centro de masa de una placa triangular

Calcule el centro de masa de la placa triangular que se muestra en la figura.

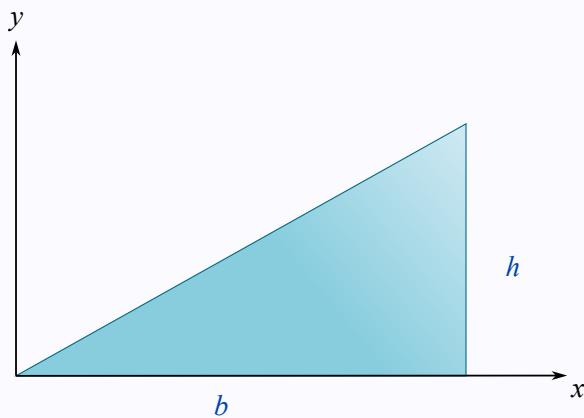


Figura 6.3

Solución:

Al tratarse de una placa delgada y homogénea, las coordenadas del centro de masa se pueden determinar como:

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA}; \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA};$$

Estas integrales de área se pueden plantear de varias maneras, todo depende de la elección del elemento diferencial. En la siguiente figura se muestran dos posibles opciones. Del lado izquierdo se utiliza un elemento diferencial cuya área es $dA = dx dy$, y cuyas coordenadas centroidales son $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y$. Del lado derecho se utiliza un elemento diferencial cuya área es $dA = \frac{h}{b}x dx$, sus coordenadas centroidales son $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = \frac{h}{2b}x$, observe que este es un elemento diferencial rectangular cuya base es dx , y siendo su altura aquella definida por la hipotenusa del triángulo, cuya función es $y(x) = \frac{h}{b}x$. Naturalmente, su coordenada centroidal \tilde{y} está dada por la mitad del valor de $y(x)$.

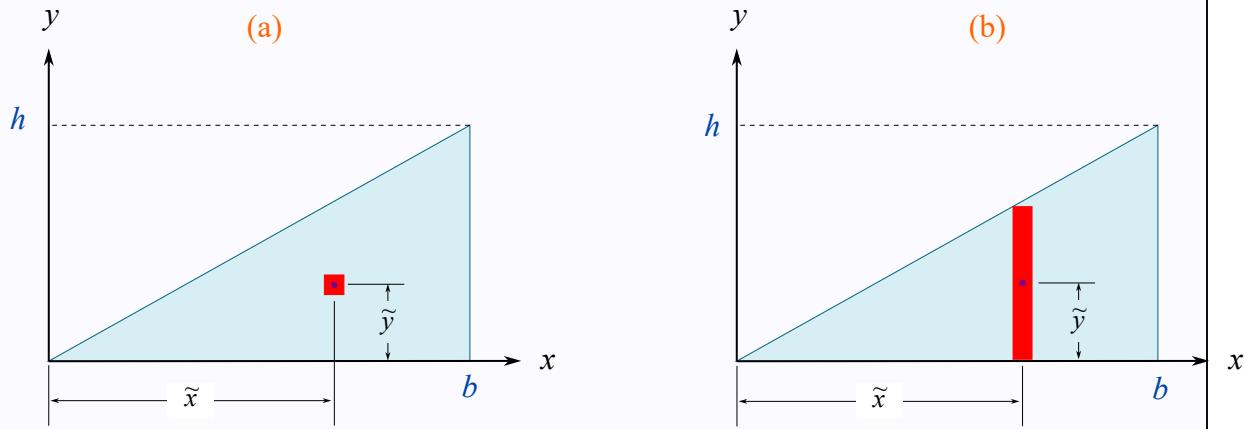


Figura 6.4

Aquí podemos utilizar cualquiera de los dos elementos diferenciales. Sólo debemos tener en consideración que si se utiliza el elemento diferencial de (a), entonces resultará una integral doble, que deberemos integrar en los límites definidos por el área triangular. Si utilizamos el elemento diferencial (b) se tendrá una integral simple, que deberemos integrar en los límites definidos para la dirección en x , es decir, entre 0 y b . Para ejemplificar vamos a proceder de ambas maneras.

Utilizando el elemento diferencial (a)

Calculando cada una de las integrales:

$$\begin{aligned}\int_A dA &= \int_0^b \int_0^{hx/b} dy dx = \int_0^b [y]_0^{hx/b} dx = \frac{h}{b} \int_0^b x dx = \frac{h}{b} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{h}{b} \left(\frac{b^2}{2} \right) = \frac{bh}{2} \\ \int_A \tilde{x} dA &= \int_0^b \int_0^{hx/b} x dy dx = \int_0^b x [y]_0^{hx/b} dx = \frac{h}{b} \int_0^b x^2 dx = \\ &= \frac{h}{b} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{h}{b} \left(\frac{b^3}{3} \right) = \frac{hb^2}{3} \\ \int_A \tilde{y} dA &= \int_0^b \int_0^{hx/b} y dy dx = \int_0^b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{hx/b} dx = \frac{h^2}{2b^2} \int_0^b x^2 dx = \\ &= \frac{h^2}{2b^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{h^2}{2b^2} \left(\frac{b^3}{3} \right) = \frac{h^2 b}{6}\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$\bar{x} = \frac{\frac{hb^2}{3}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2hb^2}{3bh} = \frac{2}{3}b$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{h^2 b}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2h^2 b}{6bh} = \frac{1}{3}h$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2}{3}b, \frac{1}{3}h \right)$$

Utilizando el elemento diferencial (b)

En este caso las integrales simples se pueden plantear de la siguiente manera:

$$\int_A dA = \frac{h}{b} \int_0^b x dx = \frac{bh}{2}$$

$$\int_A \tilde{x} dA = \frac{h}{b} \int_0^b x^2 dx = \frac{hb^2}{3}$$

$$\int_A \tilde{y} dA = \frac{h^2}{2b^2} \int_0^b x^2 dx = \frac{h^2 b}{6}$$

Observe que los resultados de las integrales son exactamente los mismos que obtuvimos con la manera anterior. La elección del elemento diferencial dependerá completamente de cuál le resulte más cómodo de plantear y resolver. En el caso de que se tenga una placa con densidad variable, aquí sí o sí tendrá que usar una integral doble para determinar el centro de masa.

Centro de masa de cuerpos compuestos

Un cuerpo compuesto es aquel que está formado por la unión de dos o más cuerpos simples. Estos cuerpos simples pueden ser de diferentes formas y tamaños, y al unirse forman un cuerpo más complejo. Por ejemplo, un cuerpo compuesto puede estar formado por la unión de varios cubos, cilindros o prismas.

Para calcular el centro de masa de un cuerpo compuesto, es necesario dividir el cuerpo en una n cantidad de componentes simples, de los cuales sea sencillo determinar por separado su masa y centro de masa. Luego, las coordenadas del centro de masa estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{z}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (6.26)$$

Donde $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ corresponden a las coordenadas del centro de masa del i -ésimo cuerpo simple, y m_i corresponde a su masa. Expresiones similares se pueden plantear en el caso de que el sólido sea homogéneo (mismo material o misma densidad constante):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} ; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} ; \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{z}_i V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad (6.27)$$

Y en el caso de que el sólido sea una placa delgada y homogénea:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} ; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} ; \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{z}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (6.28)$$

 **Ejemplo 6.3 Centro de masa de un cuerpo compuesto**

En la figura se muestra un sólido compuesto por dos porciones de placa cuadrangulares. Calcule el centro de masa del cuerpo compuesto. Considere que las placas son delgadas y de espesor uniforme. La masa de la sección 1 de 0.2 kg, y la sección 2 tiene una masa de 0.15 kg.

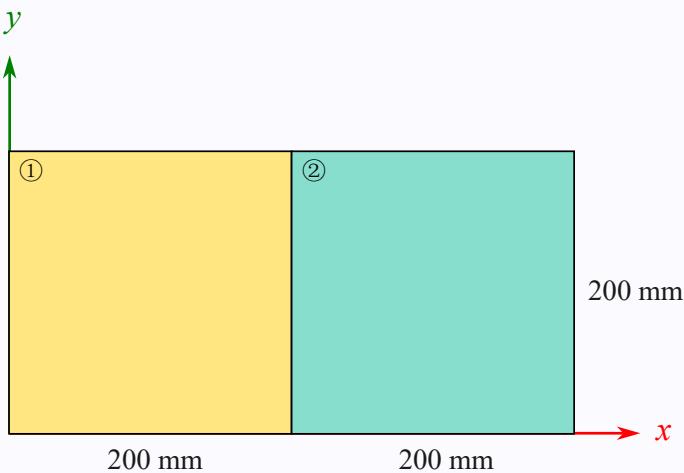


Figura 6.5

Solución:

Se puede verificar sin mucho problema que las coordenadas del centro de masa para cada sección son:

$$(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (100, 100)$$

$$(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (300, 100)$$

Entonces, el centro de masa del cuerpo compuesto estará dado por:

$$\bar{x} = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(100)(0.2) + (300)(0.15)}{0.2 + 0.15} = 185.7 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{\tilde{y}_1 m_1 + \tilde{y}_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(100)(0.2) + (100)(0.15)}{0.2 + 0.15} = 100 \text{ mm}$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (185.7, 100) \text{ mm}$

6.1.4. Momento de inercia de masa

El momento de inercia de masa de un cuerpo rígido (o sistema de partículas) es una cantidad que determina el par necesario para una aceleración angular deseada alrededor de un eje de rotación, similar a cómo la masa determina la fuerza necesaria para una aceleración deseada. Depende de la distribución de masa del cuerpo y del eje elegido, un momento de inercia más grande implica que se requiere más torque para cambiar la velocidad de rotación del cuerpo en una cantidad determinada.

El momento de inercia (I) de una masa puntual (m) con respecto a un eje se define como el producto de la masa por la distancia al eje (d) elevada al cuadrado, es decir,

$$I = md^2 \quad (6.29)$$

El momento de inercia de cualquier otra entidad se construye a partir de esa definición básica. Por ejemplo, para un sistema de partículas la definición anterior se puede expresar como:

$$I = \sum r_i^2 m_i \quad (6.30)$$

Donde r_i corresponde a la distancia de cada partícula de masa m_i al eje. Si introducimos un sistema de referencia cartesiano xyz y calculamos los momentos de inercia con respecto a cada uno de sus ejes, se tiene que:

$$I_{xx} = \sum r_{x_i}^2 m_i; \quad I_{yy} = \sum r_{y_i}^2 m_i; \quad I_{zz} = \sum r_{z_i}^2 m_i;$$

El momento de inercia de una distribución continua de masa (sólido rígido) se encuentra utilizando integración en lugar de la sumatoria. Si el sólido se divide en un elemento infinitesimal de masa dm , y si r es la distancia desde el elemento de masa al eje de rotación, el momento de inercia se puede determinar como sigue:

$$I = \int_m r^2 dm \quad (6.31)$$

Si se calcula el momento de inercia con respecto a los ejes de un sistema cartesiano, entonces:

$$I_{xx} = \int_m r_x^2 dm; \quad I_{yy} = \int_m r_y^2 dm; \quad I_{zz} = \int_m r_z^2 dm; \quad (6.32)$$

Tome en cuenta que estas integrales se efectúan sobre la distribución de la masa. La for-

mulación de las integrales a calcular depende mucho de cómo se establezca el elemento diferencial de masa y de la densidad del sólido.



Ejemplo 6.4 Momento de inercia de masa de una placa rectangular

Calcula el momento de inercia de masa de la placa rectangular con respecto a los ejes x, y, z . Considera que la placa es de espesor delgado y uniforme, y que además es homogénea.

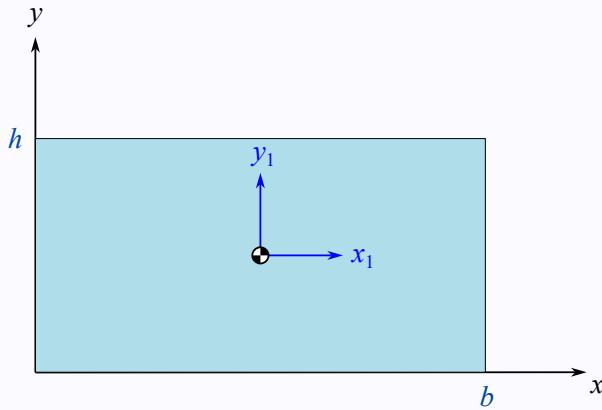


Figura 6.6

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_m r_x^2 dm = \rho t \int_0^b \int_0^h y^2 dy dx = \rho t \int_0^b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h dx = \\ &= \frac{\rho t h^3}{3} \int_0^b dx = \frac{\rho t h^3}{3} [x]_0^b = \frac{\rho t h^3 b}{3} = \frac{h^2}{3} (\rho t h b) = \frac{mh^2}{3} \end{aligned}$$

$$I_{xx} = \frac{mh^2}{3}$$

Calculando I_{yy} :

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_m r_y^2 dm = \rho t \int_0^b \int_0^h x^2 dy dx = \rho t \int_0^b x^2 [y]_0^h dx = \\ &= \rho t h \int_0^b x^2 dx = \rho t h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{\rho t h b^3}{3} = \frac{mb^2}{3} \end{aligned}$$

$$I_{yy} = \frac{mb^2}{3}$$

Calculando I_{zz} :

$$I_{zz} = \int_m r_z^2 dm = \rho t \int_0^b \int_0^h (x^2 + y^2) dy dx = \rho t \int_0^b \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^h dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho t \int_0^b \left(x^2 h + \frac{h^3}{3} \right) dx = \rho t h \int_0^b x^2 dx + \frac{\rho t h^3}{3} \int_0^b dx = \\
 &= \rho t h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b + \frac{\rho t h^3}{3} [x]_0^b = \frac{\rho t h b^3}{3} + \frac{\rho t h^3 b}{3} = \frac{\rho t b h}{3} (b^2 + h^2) = \frac{m}{3} (b^2 + h^2)
 \end{aligned}$$

$$I_{zz} = \frac{m}{3} (b^2 + h^2)$$

Teorema de los ejes paralelos

Si se conoce el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje que pasa por su centro de masa, entonces se puede también determinar fácilmente el momento de inercia con respecto de cualquier otro eje que sea paralelo. En el esquema mostrado en la Figura 6.7 se tienen dos sistemas referencia, uno de estos tiene su origen en el centro de masa del cuerpo rígido.

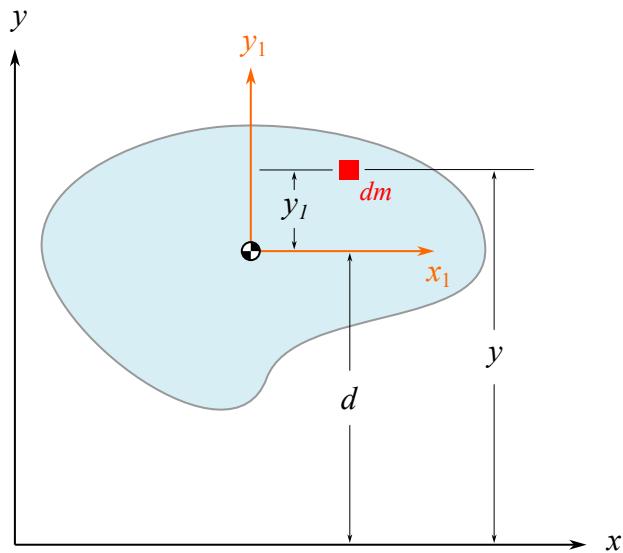


Figura 6.7 Ejes paralelos

Vamos a suponer que necesitamos determinar el momento de inercia del sólido con respecto al eje x , podríamos plantearlo de la siguiente manera:

$$I_{xx} = \int_m r_x^2 dm$$

Donde r_x es la distancia más corta desde la masa diferencial dm hasta el eje x , observe que en este caso $r_x = y = y_1 + d$, entonces podemos plantear la integral anterior como:

$$I_{xx} = \int_m (y_1 + d)^2 dm$$

Expandiendo el binomio:

$$I_{xx} = \int_m y_1^2 dm + 2d \int_m y_1 dm + d^2 \int_m dm$$

El primer término de esta expresión corresponde justamente al momento de inercia del sólido con respecto al eje x_1 que pasa por su centro de masa, es decir:

$$\int_m y_1^2 dm = \bar{I}_{x_1 x_1}$$

La integral del segundo término corresponde al primer momento de masa, el cual cuando se determina con respecto al centro de masa es cero (recordar la definición de centro de masa), por lo tanto:

$$2d \int_m y_1 dm = 0$$

Finalmente, la integral del último término es simplemente la masa total del sólido, entonces:

$$d^2 \int_m dm = md^2$$

Así, podemos expresar el momento de inercia con respecto al eje x como:

$$I_{xx} = \bar{I}_{x_1 x_1} + md^2$$

Este resultado es lo que se conoce de forma extendida como el teorema de los ejes paralelos. Observe que si conocemos el momento de inercia con respecto al eje x_1 (que pasa por el centro de masa), entonces sería muy sencillo determinar el momento de inercia con respecto a cualquier otro eje x que sea paralelo, puesto que sólo necesitaríamos conocer la masa total del sólido y la distancia perpendicular entre el eje centroidal y el otro eje paralelo. Este procedimiento se puede replicar para cualquiera de los otros ejes cartesianos, de forma un poco más general, podemos expresar el teorema de los ejes paralelos de la siguiente manera:

$$I_{uu} = \bar{I}_{u'u'} + md^2 \quad (6.33)$$

Y enunciarlo de la forma habitual: *el momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a cualquier eje u que sea paralelo a un eje u' que pasa por su centro de masa, es igual al momento de inercia con respecto al eje u' más el producto de la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia perpendicular entre los dos ejes.*

El teorema de los ejes paralelos facilita los cálculos de los momentos de inercia para sólidos con geometrías simples, dado que evita en muchas situaciones la necesidad de integración, y en su lugar se utilizan las tablas de momento de inercia de masa en conjunto con el teorema. En la siguiente sección veremos también que es muy recurrido para cuando tengamos que determinar los momentos de inercia de sólidos compuestos.

Ejemplo 6.5 Momento de inercia de placa rectangular

Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia con respecto a los ejes del sistema xyz de la placa rectangular mostrada en la Figura. Considera que la placa es de espesor delgado y uniforme, y que además es homogénea.

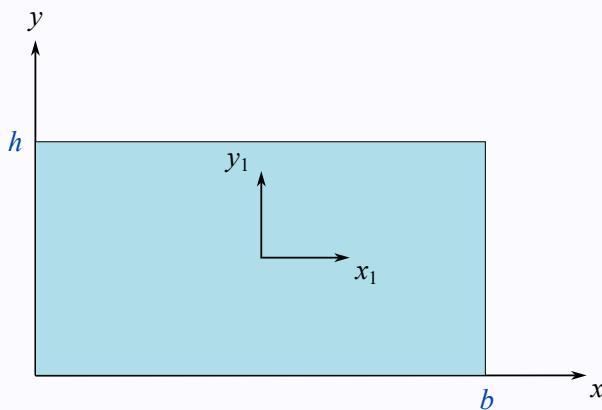


Figura 6.8

Solución:

Utilizando el teorema de los ejes paralelos, el momento I_{xx} se puede determinar como sigue:

$$I_{xx} = \bar{I}_{x_1 x_1} + md_{xx_1}^2$$

Donde d_{xx_1} es la distancia perpendicular entre los ejes x y x_1 , que en este caso es la mitad de la altura de la placa. El momento de inercia con respecto al eje x_1 que pasa por el centro de masa está dado por:

$$\bar{I}_{x_1 x_1} = \frac{1}{12}mh^2$$

Entonces:

$$I_{xx} = \frac{1}{12}mh^2 + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{mh^2}{12} + \frac{mh^2}{4} = \boxed{\frac{mh^2}{3}}$$

De manera similar para I_{yy} :

$$I_{yy} = \bar{I}_{y_1y_1} + md_{yy_1}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}mb^2 + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{12} + \frac{mb^2}{4} = \boxed{\frac{mb^2}{3}}$$

Y para I_{zz}

$$I_{zz} = \bar{I}_{z_1z_1} + md_{zz_1}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2) + m\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{mb^2}{12} + \frac{mh^2}{12} + \frac{mb^2}{4} + \frac{mh^2}{4}$$

$$I_{zz} = \boxed{\frac{m}{3}(b^2 + h^2)}$$

Momento de inercia de sólidos compuestos

Para muchos sólidos compuestos, es posible *dividirlos* en partes más simples cuyos momentos de inercia sean fácilmente calculables. Una vez determinados estos momentos de inercia de cada parte simple, se pueden sumar para calcular el momento de inercia del sólido compuesto. Por ejemplo, el sólido de la Figura 6.9 se puede dividir en las tres partes simples que se observan (dos porciones rectangulares y una porción triangular). Así pues, el momento de inercia del sólido compuesto con respecto al eje x se puede determinar como sigue:

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2 + (I_{xx})_3$$

Donde $(I_{xx})_i$ denota el momento de inercia de masa de la porción i con respecto al eje x . Expresiones análogas se pueden plantear para I_{yy} e I_{zz} , a saber:

$$I_{yy} = (I_{yy})_1 + (I_{yy})_2 + (I_{yy})_3$$

$$I_{zz} = (I_{zz})_1 + (I_{zz})_2 + (I_{zz})_3$$

Cada uno de los términos de la forma $(I_{xx})_i$, $(I_{yy})_i$ e $(I_{zz})_i$ se pueden determinar me-

diente el teorema de los ejes paralelos.

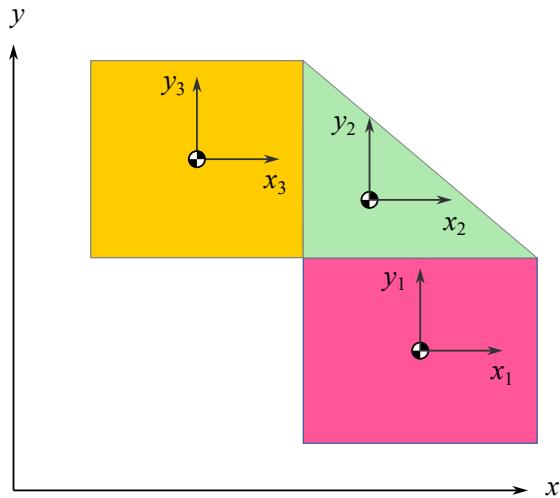


Figura 6.9 Cuerpo compuesto

De manera general, para un sólido compuesto por n partes simples, los momentos de inercia con respecto a los ejes de un sistema cartesiano xyz se pueden determinar mediante:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n (I_{xx})_i$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n (I_{yy})_i$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^n (I_{zz})_i$$

El término $(I_{xx})_i$ es el momento de inercia de la parte i con respecto al eje x , y de manera similar para los correspondientes de y y z . Cada uno de los términos de las sumatorias anteriores se pueden determinar mediante el teorema de los ejes paralelos, es decir:

$$(I_{xx})_i = \bar{I}_{x_i x_i} + m_i d_{xx_i}^2$$

$$(I_{zz})_i = \bar{I}_{y_i y_i} + m_i d_{yy_i}^2$$

$$(I_{zz})_i = \bar{I}_{z_i z_i} + m_i d_{zz_i}^2$$

En lo anterior, $\bar{I}_{x_i x_i}$ corresponde al momento de inercia de la parte i con respecto al eje x_i que pasa su centro de masa, m_i es la masa de dicha parte y d_{xx_i} es la distancia más corta entre los ejes x y x_i . Y así de manera análoga para los otros dos ejes.


Ejemplo 6.6 Momento de inercia de masa un sólido compuesto

En la figura se muestra un sólido compuesto por dos porciones de placa cuadrangulares. Determina los momentos de inercia con respecto a los ejes del sistema mostrado. Considera que las placas son delgadas y de espesor uniforme. La masa de la porción 1 es de 0.2 kg y la de la porción 2 es de 0.15 kg.

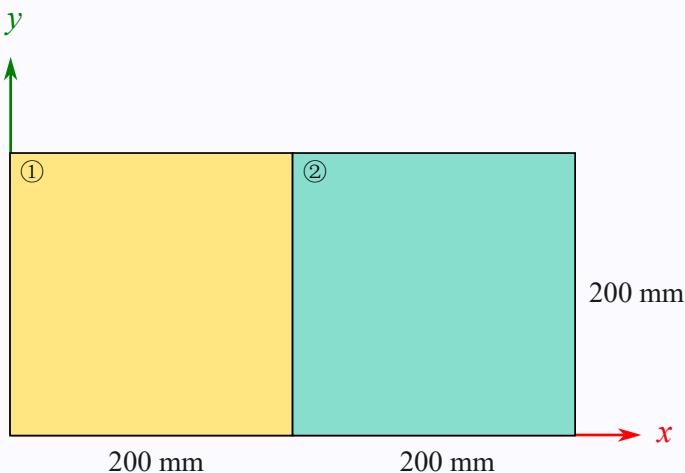


Figura 6.10

Solución:

El momento de inercia del cuerpo compuesto corresponde a la suma de los momentos de inercia de cada una de las porciones, con respecto a cada uno de los ejes correspondientes.

El momento de inercia I_{xx} se puede determinar mediante:

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{yy})_2$$

Donde $(I_{xx})_1$ y $(I_{xx})_2$ son los momentos de inercia de masa con respecto al eje x , de cada una de las porciones, respectivamente. Para $(I_{xx})_1$ se tiene que:

$$(I_{xx})_1 = \bar{I}_{x_1 x_1} + m_1 d_{xx_1}^2$$

Donde $\bar{I}_{x_1 x_1}$ es el momento de inercia con respecto al eje x_1 que pasa por el centroide de la parte 1. Sustituyendo los valores numéricos:

$$(I_{xx})_1 = \frac{1}{12} (0.2) (200)^2 + (0.2) (100)^2 = 2667 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

De manera similar para $(I_{xx})_2$:

$$(I_{xx})_2 = \bar{I}_{x_2 x_2} + m_2 d_{xx_2}^2 = \frac{1}{12} (0.15) (200)^2 + (0.15) (100)^2 = 2000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Entonces:

$$I_{xx} = 4,667 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

El momento de inercia I_{yy} se puede determinar mediante:

$$I_{yy} = (I_{yy})_1 + (I_{yy})_2$$

Calculando $(I_{yy})_1$:

$$(I_{yy})_1 = \bar{I}_{y_1 y_1} + m_1 d_{yy_1}^2 = \frac{1}{12} (0.2) (200)^2 + (0.2) (100)^2 = 2667 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Para $(I_{yy})_2$:

$$(I_{yy})_2 = \bar{I}_{y_2 y_2} + m_2 d_{yy_2}^2 = \frac{1}{12} (0.15) (200)^2 + (0.15) (300)^2 = 14000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Por lo tanto:

$$I_{yy} = 16,667 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Finalmente, para I_{zz} :

$$I_{zz} = (I_{zz})_1 + (I_{zz})_2$$

$$(I_{zz})_1 = \bar{I}_{z_1 z_1} + m_1 d_{zz_1}^2 = \frac{1}{12} (0.2) (200^2 + 200^2) + (0.2) (100^2 + 100^2) = 5333 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{zz})_2 = \bar{I}_{z_2 z_2} + m_2 d_{zz_2}^2 = \frac{1}{12} (0.15) (200^2 + 200^2) + (0.15) (300^2 + 100^2) = 16000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Entonces:

$$I_{zz} = 21,333 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$



Ejemplo 6.7 Momento de inercia de un sólido compuesto

En la Figura se muestra un sólido fabricado en un tipo de acero cuya densidad es $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Calcule los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} .

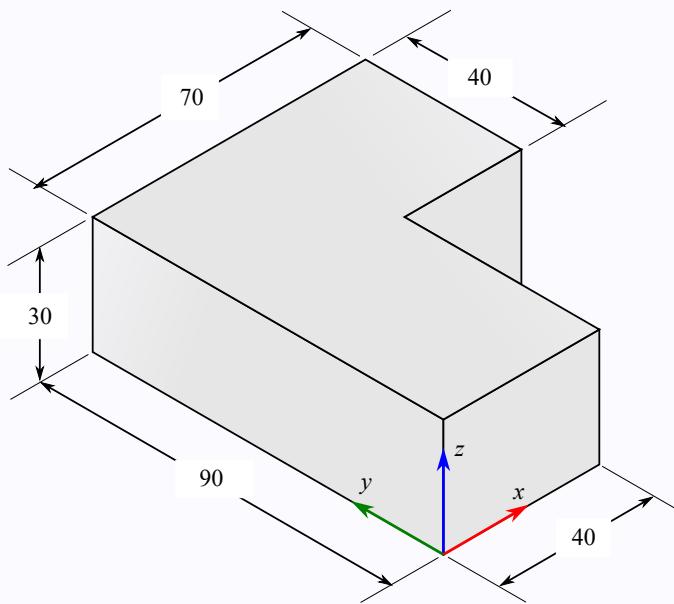


Figura 6.11

Solución:

Este sólido compuesto podemos seccionarlo en dos prismas rectangulares simples, tal como se muestra en la Figura 6.12.

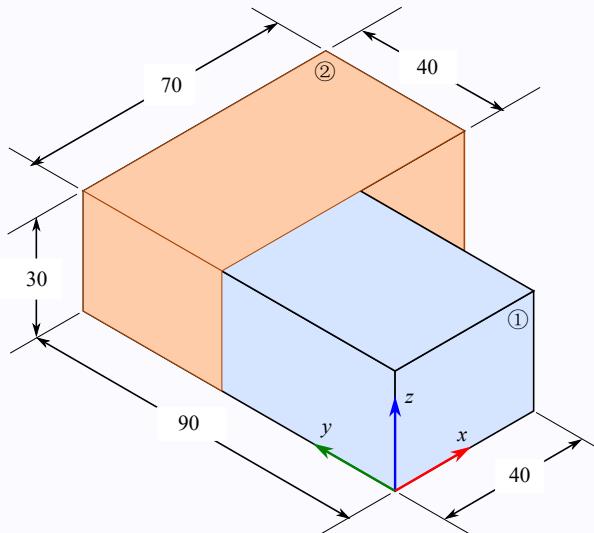


Figura 6.12

La masa de cada una de estas porciones se puede determinar como sigue:

$$m_1 = \rho V_1 = (7850) (40 \times 10^{-3}) (50 \times 10^{-3}) (30 \times 10^{-3}) = 0.471 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho V_2 = (7850) (70 \times 10^{-3}) (40 \times 10^{-3}) (30 \times 10^{-3}) = 0.6594 \text{ kg}$$

Calculando el momento de inercia con respecto a x :

$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2$$

$$(I_{xx})_1 = \bar{I}_{x_1 x_1} + m_1 d_{xx_1}^2 = \frac{1}{12} (0.471) (50^2 + 30^2) + (0.471) (25^2 + 15^2) = 533.8 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{xx})_2 = \bar{I}_{x_2 x_2} + m_2 d_{xx_2}^2 = \frac{1}{12} (0.6594) (40^2 + 30^2) + (0.6594) (70^2 + 15^2) = 3516.8 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{xx} = 4050.6 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Calculando el momento de inercia con respecto a y :

$$I_{yy} = (I_{yy})_1 + (I_{yy})_2$$

$$(I_{yy})_1 = \bar{I}_{y_1 y_1} + m_1 d_{yy_1}^2 = \frac{1}{12} (0.471) (40^2 + 30^2) + (0.471) (20^2 + 15^2) = 392.5 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{yy})_2 = \bar{I}_{y_2 y_2} + m_2 d_{yy_2}^2 = \frac{1}{12} (0.6594) (70^2 + 30^2) + (0.6594) (35^2 + 15^2) = 1274.84 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{yy} = 1667.34 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Calculando el momento de inercia con respecto a z :

$$I_{zz} = (I_{zz})_1 + (I_{zz})_2$$

$$(I_{zz})_1 = \bar{I}_{z_1 z_1} + m_1 d_{zz_1}^2 = \frac{1}{12} (0.471) (40^2 + 50^2) + (0.471) (25^2 + 20^2) = 643.7 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{zz})_2 = \bar{I}_{z_2 z_2} + m_2 d_{zz_2}^2 = \frac{1}{12} (0.6594) (70^2 + 40^2) + (0.6594) (70^2 + 35^2) = 4396 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{zz} = 5039.7 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

6.1.5. Productos de inercia

Los productos de inercia de masa son conceptos utilizados en mecánica para describir la distribución de la masa en un objeto en movimiento. Estos productos son esenciales para entender el comportamiento de un cuerpo cuando se somete a rotación alrededor de un eje en un sistema de coordenadas tridimensional. Los productos de inercia pueden entenderse también como una medida de la simetría del cuerpo con respecto a un sistema de referencia.

Comenzaremos con los productos de inercia de un sistema de partículas ubicadas en el espacio, los cuales pueden determinarse mediante las siguientes expresiones:

$$I_{xy} = -\sum_{i=1}^n x_i y_i m_i ; \quad I_{xz} = -\sum_{i=1}^n x_i z_i m_i ; \quad I_{yz} = -\sum_{i=1}^n y_i z_i m_i ;$$

Donde x_i, y_i, z_i corresponden a las coordenadas de la ubicación de cada partícula de masa m_i . En la Figura 6.13 se muestra un sistema de dos partículas ubicadas en el plano xy , distribuidas de diversas maneras. Primero, de las ecuaciones anteriores se puede verificar de forma sencilla que $I_{xz} = I_{yz} = 0$, dado que para ambas partículas $z_i = 0$. Para el caso de la Figura 6.13a) se puede observar que el producto de inercia I_{xy} está dado por:

$$I_{xy} = -[(a)(b)(m_1) + (-a)(b)(m_2)] = -m_1 ab + m_2 ab$$

Si ambas partículas poseen masas de igual magnitud, entonces $I_{xy} = 0$, dado que en dicho caso existiría también una simetría con respecto al plano xz . Esto nos lleva a un par de conclusiones que podemos verificar en los ejemplos que se resolverán posteriormente:

i Simetría y productos de inercia

- Si un sistema de partículas (o un cuerpo rígido) es simétrico con respecto a un plano, entonces los productos de inercia que contengan al eje perpendicular a este plano serán cero.
- Si un sistema de partículas (o un cuerpo rígido) es simétrico con respecto a dos planos, entonces todos los productos de inercia son cero.

Para el sistema de la Figura 6.13b) se puede verificar que:

$$I_{xy} = -[(a)(b)(m_1) + (a)(-b)(m_2)] = -m_1 ab + m_2 ab$$

Un resultado igual al que se había observado para el caso anterior. Aquí valdría la pena agregar que si:

- $m_1 > m_2$, entonces $I_{xy} < 0$.
- $m_1 < m_2$, entonces $I_{xy} > 0$.

En el caso del sistema de la Figura 6.13c) el producto de inercia I_{xy} está dado por:

$$I_{xy} = -[(a)(b)(m_1) + (-a)(-b)(m_2)] = -m_1 ab - m_2 ab$$

Aquí podemos notar que, independiente de las magnitudes de m_1 y m_2 , el producto de inercia será negativo.

Finalmente, para el sistema de la Figura 6.13d) el producto de inercia se calcula como:

$$I_{xy} = -[(a)(-b)(m_1) + (-a)(b)(m_2)] = m_1 ab + m_2 ab$$

En este caso I_{xy} será siempre una cantidad positiva. Aprovechando los resultados anteriores se puede establecer lo siguiente:

1 Signos del producto de inercia

- Si la masa se concentra en los cuadrantes I y/o III, entonces el producto de inercia I_{xy} será negativo.
- Si la masa se concentra en los cuadrantes II y/o IV, entonces el producto de inercia I_{xy} será positivo.

Lo anterior puede dilucidarse observando que para una sola partícula $I_{xy} = -xym$, y dado que m es una cantidad positiva, entonces el signo de I_{xy} dependerá únicamente de la combinación de los signos de x y y ; a partir de esto puede inferirse que si $x > 0$ y $y > 0$ (cuadrante I) entonces I_{xy} será negativo, y así de manera similar para los cuadrantes restantes.

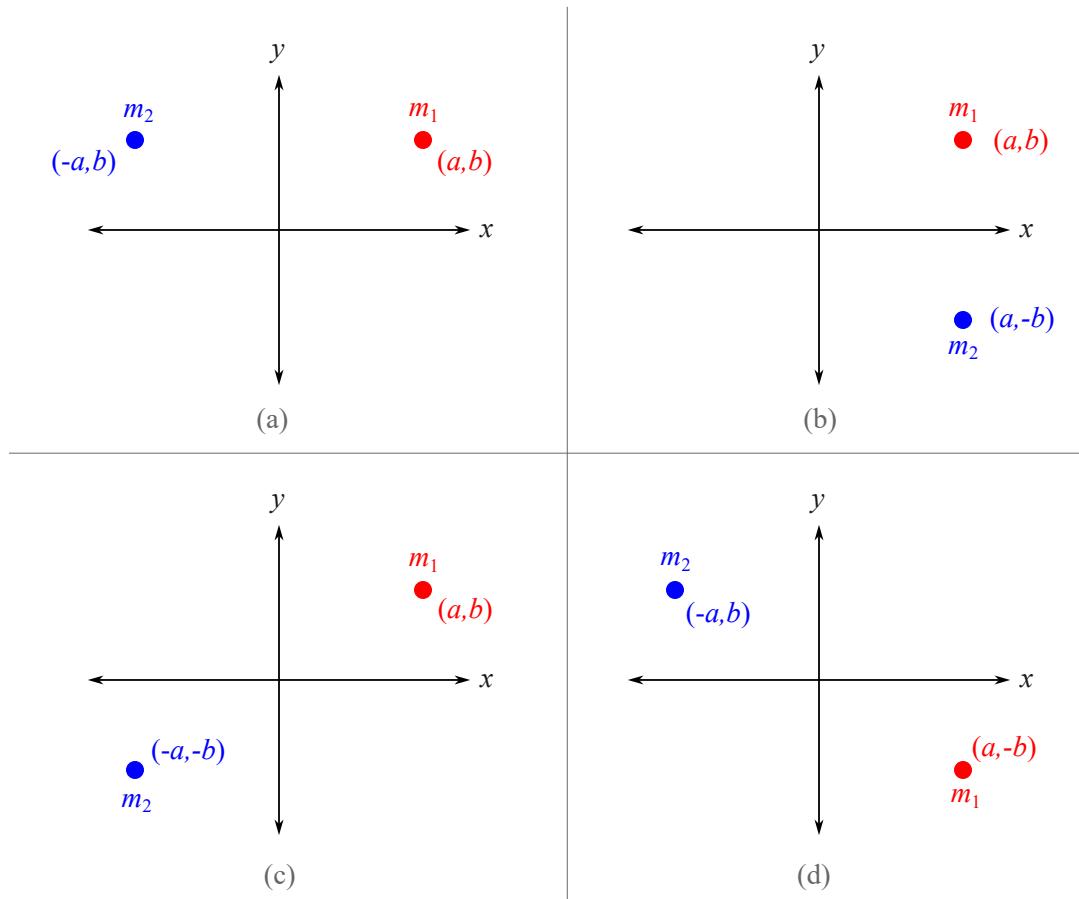


Figura 6.13 Dos masas puntuales en el plano xy

Lo visto anteriormente para un sistema de partículas, se puede generalizar para el caso

de un sólido rígido mediante el uso de las siguientes expresiones:

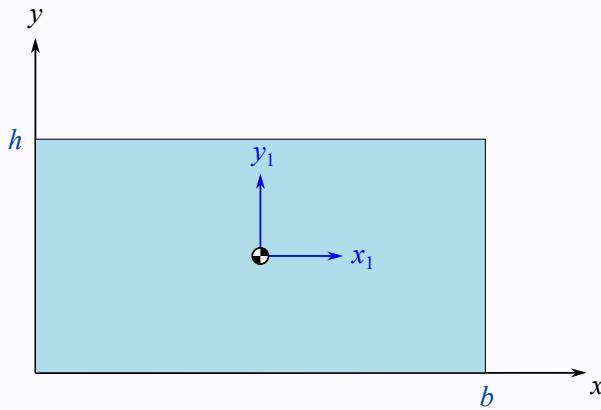
$$I_{xy} = - \int_m xy dm \quad (6.34)$$

$$I_{xz} = - \int_m xz dm \quad (6.35)$$

$$I_{yz} = - \int_m yz dm \quad (6.36)$$

Ejemplo 6.8 Productos de inercia de una placa rectangular

En la Figura se muestra una placa plana homogénea de forma rectangular, con espesor delgado y uniforme. Calcule los productos de inercia de masa con respecto a los sistemas xyz y $x_1y_1z_1$ que se muestran.



Solución:

Debido a que el plano xy es un plano de simetría para la placa, entonces los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son ambos cero. El producto de inercia I_{xy} se puede determinar como sigue:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \int_m xy dm = -\rho t \int_0^b \int_0^h xy dy dx = -\rho t \int_0^b x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h dx = \\ &= -\frac{\rho th^2}{2} \int_0^b x dx = -\frac{\rho th^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = -\frac{\rho th^2 b^2}{4} = -\frac{mbh}{4} \end{aligned}$$

$$I_{xy} = -\frac{mbh}{4}$$

Observe I_{xy} es una cantidad negativa, lo cual se puede inferir de la figura, dado

que la masa de la placa se distribuye toda en el primer cuadrante del plano xy . Note que todos los productos de inercia en el sistema de referencia $x_1y_1z_1$ son cero, debido a que todos los planos de dicho sistema son planos de simetría para la placa rectangular, entonces:

$$I_{x_1y_1} = I_{x_1z_1} = I_{y_1z_1} = 0$$

Teorema de los planos paralelos

Si se conocen los productos de inercia de un sólido respecto de un sistema de referencia que pasa por su centro de masa, entonces se pueden también determinar fácilmente los productos de inercia con respecto de cualquier otro sistema de referencia que sea paralelo. En la Figura 6.14 se muestra una placa plana, delgada y homogénea, en la cual se tienen dos sistemas referencia, teniendo uno de estos su origen en el centro de masa del cuerpo rígido. De la Figura se puede observar que tanto I_{xz} como I_{yz} son cero, debido a que al plano xy es un plano de simetría.

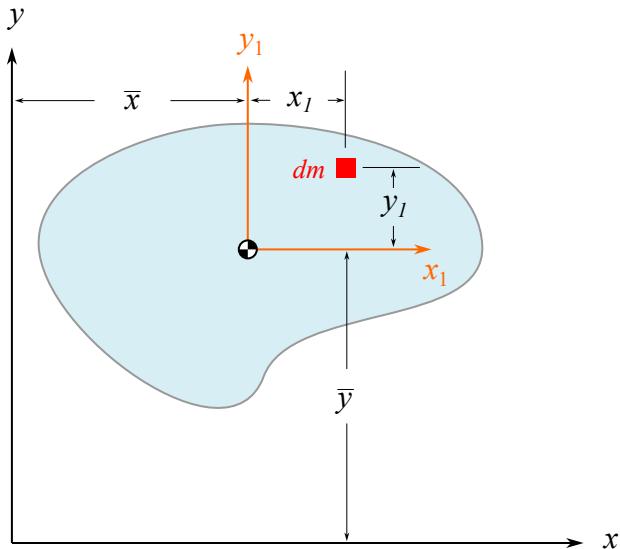


Figura 6.14 Ejes paralelos

Para calcular el producto de inercia I_{xy} se tiene que:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= - \int_m xy \, dm = - \int_m (\bar{x} + x_1)(\bar{y} + y_1) \, dm \\ &= -\bar{x}\bar{y} \int_m dm - \bar{y} \int_m x_1 \, dm - \bar{x} \int_m y_1 \, dm - \int_m x_1 y_1 \, dm \end{aligned}$$

De la primera integral se tiene que:

$$\bar{x}\bar{y} \int_m dm = m\bar{x}\bar{y}$$

Las integrales del segundo y tercer término corresponden al primer momento de masa, el cual cuando se determina con respecto al centro de masa es cero (recordar la definición de centro de masa), por lo tanto:

$$\begin{aligned}\bar{x} \int_m y_1 dm &= 0 \\ \bar{y} \int_m x_1 dm &= 0\end{aligned}$$

La integral del último término corresponde al producto de inercia x_1y_1 con respecto al sistema de referencia que pasa por el centro de masa, es decir:

$$-\int_m x_1y_1 dm = \bar{I}_{x_1y_1}$$

Entonces, el producto de inercia I_{xy} se puede expresar como:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x_1y_1} - m\bar{x}\bar{y} \quad (6.37)$$

Expresiones análogas se pueden formular para los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} en el caso de que se tenga un sólido tridimensional asimétrico con respecto a los planos, a saber:

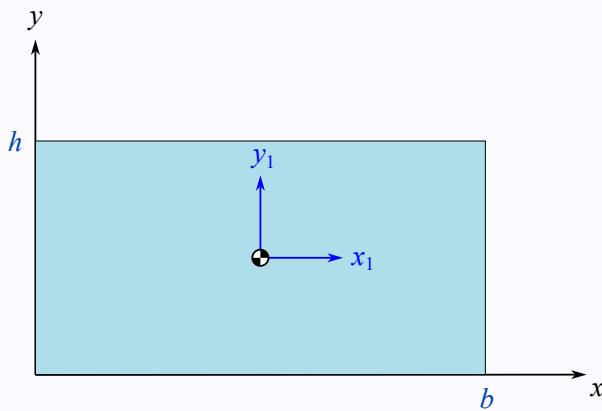
$$I_{xz} = \bar{I}_{x_1z_1} - m\bar{x}\bar{z} \quad (6.38)$$

$$I_{yz} = \bar{I}_{y_1z_1} - m\bar{y}\bar{z} \quad (6.39)$$



Ejemplo 6.9 Teorema de los planos paralelos

En la Figura se muestra una placa plana homogénea de forma rectangular, con espesor delgado y uniforme. Utilice el teorema de los planos paralelos para determinar el producto de inercia I_{xy} .



Solución:

De acuerdo con el teorema de los planos paralelos, podemos calcular el producto de inercia I_{xy} mediante:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x_1y_1} - m\bar{x}\bar{y}$$

Donde $\bar{I}_{x_1y_1}$ es el producto de inercia con respecto al sistema $x_1y_1z_1$ ubicado en el centro de masa de la placa rectangular; sin embargo, es sencillo notar que todos los planos del sistema $\{1\}$ son planos de simetría, lo cual implica que $\bar{I}_{x_1y_1} = \bar{I}_{x_1z_1} = \bar{I}_{y_1z_1} = 0$. Además, se puede observar que $\bar{x} = b/2$ y $\bar{y} = h/2$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x_1y_1} - m\bar{x}\bar{y} = -m \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right)$$

$$I_{xy} = -\frac{mbh}{4}$$

Observe que este resultado coincide con el que se obtuvo mediante integración en el ejemplo 6.1.5.

Productos de inercia de cuerpos compuestos

Los productos de inercia de un cuerpo compuesto de n partes simples, con respecto a un sistema de referencia xyz , se pueden determinar calculando por separado los productos de inercia de cada una de las partes y sumándolos, es decir:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{xy})_i$$

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n (I_{xz})_i$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n (I_{yz})_i$$

El término $(I_{xy})_i$ es el producto de inercia I_{xy} de la parte i con respecto al sistema xyz , y de manera similar para los correspondientes productos de inercia I_{xz} e I_{yz} . Cada uno de los términos de las sumatorias anteriores se pueden determinar mediante el teorema de los planos paralelos revisado en la sección anterior, es decir:

$$(I_{xy})_i = \bar{I}_{x_i y_i} - m_i \bar{x}_i \bar{y}_i$$

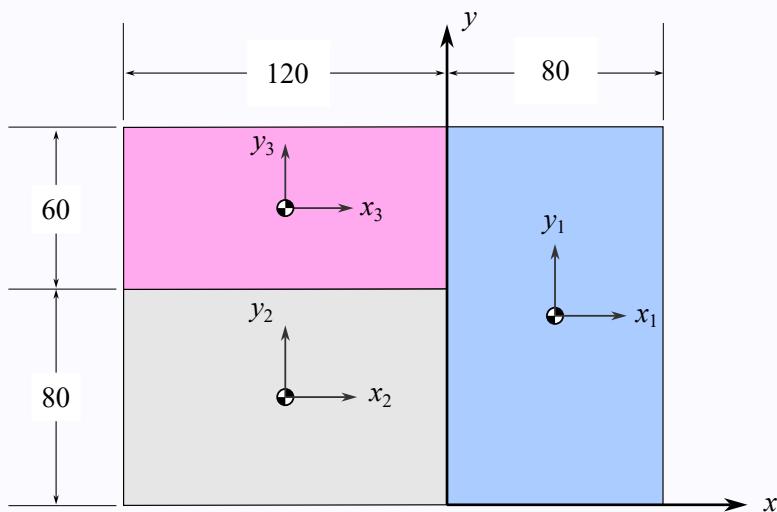
$$(I_{xz})_i = \bar{I}_{x_i z_i} - m_i \bar{x}_i \bar{z}_i$$

$$(I_{yz})_i = \bar{I}_{y_i z_i} - m_i \bar{y}_i \bar{z}_i$$

En lo anterior, $\bar{I}_{x_i y_i}$ corresponde al producto de inercia de la parte i con respecto al sistema $x_i y_i z_i$ que pasa su centro de masa, m_i es la masa de dicha parte, \bar{x}_i y \bar{y}_i corresponden a las coordenadas en x y y del CDM de la parte i . Y así de manera análoga para los otros dos productos de inercia.

Ejemplo 6.10 Productos de inercia de placa compuesta

En la Figura se muestra un cuerpo compuesto por tres partes rectangulares. Se sabe que $m_1 = 0.121 \text{ kg}$, $m_2 = 0.104 \text{ kg}$ y $m_3 = 0.226 \text{ kg}$. Calcule los productos de inercia del cuerpo compuesto con respecto al sistema xyz mostrado.



Solución:

Puesto que la placa es delgada y uniforme, el plano xy es un plano de simetría, y en consecuencia $I_{xz} = 0$ e $I_{yz} = 0$. El producto de inercia I_{xy} está dado por la suma de los productos de inercia de cada porción, es decir:

$$I_{xy} = (I_{xy})_1 + (I_{xy})_2 + (I_{xy})_3$$

Calculando cada uno de estos términos mediante la aplicación del teorema de los planos paralelos, se tiene:

$$(I_{xy})_1 = \bar{I}_{x_1y_1} - m_1\bar{x}_1\bar{y}_1 = -(0.121)(40)(70) = -338.8 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{xy})_2 = \bar{I}_{x_2y_2} - m_2\bar{x}_2\bar{y}_2 = -(0.104)(-60)(40) = 249.6 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$(I_{xy})_3 = \bar{I}_{x_3y_3} - m_3\bar{x}_3\bar{y}_3 = -(0.226)(-60)(110) = 1491.6 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Se debe tener en cuenta que, por la simetría de los sistemas de referencia ubicados en el centro de masa, los productos de inercia $\bar{I}_{x_1y_1}$, $\bar{I}_{x_2y_2}$ y $\bar{I}_{x_3y_3}$ son cero. Sumando los productos de inercia calculados se tiene que:

$$I_{xy} = 1402.4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

6.1.6. Ejes principales de inercia

6.2. Formulación de Euler-Lagrange

En esta sección veremos cómo obtener el modelo dinámico de un manipulador serial utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Una de las ventajas de esta formulación es que las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de manera sistemática, independientemente del sistema de referencia.

El primer paso es identificar un conjunto de coordenadas generalizadas que sea apropiado para analizar el manipulador, en este texto se utilizarán las variables articulares de posición del manipulador como coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$, asumiremos también que estas posiciones articulares son definidas y medidas de acuerdo con lo visto en el Capítulo 3. Una vez que se elige un conjunto de coordenadas generalizadas apropiadas, se procede a formar el *lagrangiano* del manipulador, recordar que este es una función escalar dada por la diferencia de la energía cinética y potencial:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$$

Asumimos que la energía potencial \mathcal{P} es debida únicamente a fuerzas conservativas, como la energía potencial asociada con la gravedad y la almacenada en resortes. En

secciones previas vimos cómo calcular tanto la energía cinética como la potencial de un cuerpo rígido, ahora en las secciones 6.2.1 y 6.2.2 estableceremos expresiones adaptadas para calcular estas energías para un eslabón que pertenece a un manipulador serial.

Con el *lagrangiano* ya definido, procedemos a calcular las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.40)$$

Para un manipulador de n grados de libertad se obtendrán n ecuaciones diferenciales de segundo orden que modelan su comportamiento dinámico. Este comportamiento se puede simular si resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales, lo cual usualmente se hará mediante métodos numéricos. Naturalmente este modelo dinámico se puede utilizar también para el diseño e implementación de algoritmos de control.

6.2.1. Energía cinética de un eslabón

Un eslabón de un manipulador serial es un cuerpo rígido y por lo tanto se puede utilizar la ecuación 6.10 para determinar su energía cinética, aquí estableceremos una versión ligeramente modificada, únicamente con el propósito de sistematizar un poco la obtención de las ecuaciones, así pues para el i -ésimo eslabón de un manipulador serial su energía cinética se puede determinar mediante:

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{G_i}^T \mathbf{v}_{G_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T I_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (6.41)$$

Donde m_i es la masa del eslabón, \mathbf{v}_{G_i} es la velocidad lineal del centro de masa del eslabón i , $\boldsymbol{\omega}_i$ es la velocidad angular del eslabón i y el término I_i corresponde al tensor de inercia del eslabón. Es importante tener en cuenta que los vectores \mathbf{v}_{G_i} y $\boldsymbol{\omega}_i$ están expresados en el sistema de la base $\{0\}$.

El tensor de inercia I_i es una matriz simétrica que caracteriza la inercia rotacional de cada eslabón con respecto a un sistema de referencia paralelo al de la base, pero ubicado en el centro de masa del eslabón i . Este tensor se puede formar de manera más conveniente, si en primera instancia se determina el tensor $I_i^{i'}$, es decir, el tensor de inercia del eslabón i descrito en un sistema de referencia $\{i'\}$ ubicado en su centro de masa y que es paralelo al sistema $\{i\}$ del eslabón.

Así, $I_i^{i'}$ es una matriz constante y se puede relacionar con I_i mediante la siguiente transformación de similitud:

$$I_i = R_i^0 I_i^{i'} \left(R_i^0 \right)^T$$

El tensor de inercia $I_i^{i'}$ del eslabón se puede formar utilizando los métodos y ecuaciones vistos en las secciones previas.

6.2.2. Energía potencial de un eslabón

La energía potencial del eslabón i de un manipulador está dada por:

$$\mathcal{P}_i = -m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G_i} \quad (6.42)$$

Donde m_i es la masa de dicho eslabón, \mathbf{g} es el vector que describe la aceleración de la gravedad en el sistema de la base y \mathbf{r}_{G_i} es un vector que describe la ubicación del centro de masa del eslabón i con respecto al sistema de la base.

6.2.3. Calculando el lagrangiano

Una vez que se han calculado las energías cinética y potencial de cada uno de los eslabones que conforman el manipulador, se procede a sumarlas para determinar la energía total en cada caso. La energía cinética total está dada por:

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_i = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \cdots + \mathcal{K}_n$$

Para la energía potencial total:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_n$$

Así, el lagrangiano se obtiene mediante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}$$

6.2.4. Un resumen: modelo dinámico con la formulación de Euler-Lagrange

1. Calcular la energía cinética de cada uno de los eslabones del manipulador utilizando la ecuación:

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{2}m_i \mathbf{v}_{G_i}^T \mathbf{v}_{G_i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T I_i \boldsymbol{\omega}_i$$

a) La velocidad del centro de masa \mathbf{v}_{G_i} se puede calcular derivando con respecto al tiempo el vector de posición del centro de masa \mathbf{r}_{G_i} .

b) El vector \mathbf{r}_{G_i} se puede calcular de manera más sencilla si primero se forma el vector $\mathbf{r}_{G_i}^i$, es decir, la posición del centro de masa del eslabón i descrita en el sistema de referencia $\{i\}$. Tome en cuenta que $\mathbf{r}_{G_i}^i$ es un vector cuyas componentes son constantes. Luego, \mathbf{r}_{G_i} se puede determinar mediante una transformación de coordenadas:

$$\mathbf{r}_{G_i} = T_i^0 \mathbf{r}_{G_i}^i$$

Donde T_i^0 es la matriz de transformación homogénea que describe al sistema $\{i\}$ en el sistema $\{0\}$.

c) El vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_i$ se puede determinar utilizando la ecuación:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + R_1^0 \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1 + \dots + R_{i-1}^0 \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$$

Donde cada vector de la forma $\boldsymbol{\omega}_{j-1,j}^{j-1}$ se puede formar como sigue:

$$\boldsymbol{\omega}_{j-1,j}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} ; \quad \text{en el caso de que la junta } j \text{ sea revoluta}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{j-1,j}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \text{en el caso de que la junta } j \text{ sea prismática}$$

2. Calcular la energía potencial de cada uno de los eslabones.

- a) El vector de gravedad \mathbf{g} es un vector que determina la dirección de la aceleración de la gravedad en el sistema inercial de la base $\{0\}$.
- b) El vector \mathbf{r}_{G_i} es el vector que describe la ubicación del centro de masa del eslabón en el sistema $\{0\}$. En el listado previo se hace una sugerencia de cómo

calcularlo.

3. Calcular el lagrangiano, para esto simplemente:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \cdots + \mathcal{K}_n) - (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_n)$$

4. Calcular las ecuaciones de movimiento de Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \tau_2 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} &= \tau_n\end{aligned}$$

Ejemplo 6.11 Modelo dinámico de un manipulador de un manipulador P

Obtenga el modelo dinámico del manipulador P mostrado en la figura. El eslabón 1 tiene una masa m_1 y su centro de masa coincide con el origen de coordenadas del sistema {1}.

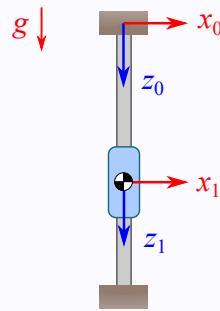


Figura 6.15

Solución:

Calculando la energía cinética del eslabón 1:

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{G_1}^T \mathbf{v}_{G_1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T I_1 \boldsymbol{\omega}_1$$

Donde:

$$\mathbf{r}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}_{G_1} = \frac{d\mathbf{r}_{G_1}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2}m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2$$

La energía potencial del eslabón está dada por:

$$\mathcal{P}_1 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G_1} = -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} = -m_1 g q_1$$

Calculando el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + m_1gq_1$$

Ecuaciones de movimiento de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_1\ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = m_1g$$

$m_1\ddot{q}_1 - m_1g = \tau_1$

Ejemplo 6.12 Manipulador PR

Obtenga el modelo dinámico del manipulador PR mostrado en la Figura. Considere que tanto el eslabón 1 como el 2 son simétricos con respecto al menos dos planos del sistema ubicado en su centro de masa. La longitud del eslabón 2 es l_2 .

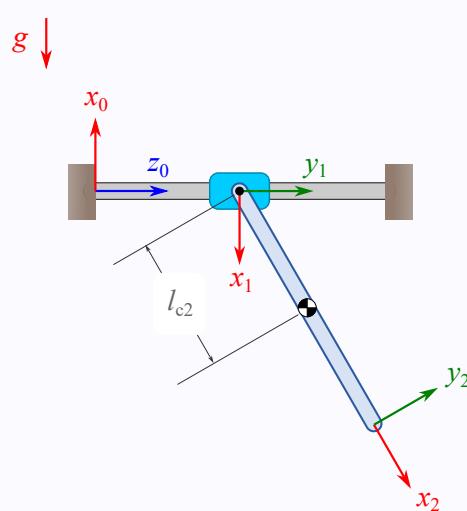


Figura 6.16

Solución:

De la cinemática directa se sabe que:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_2^0 = \begin{bmatrix} -c_2 & s_2 & 0 & -l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la energía cinética del eslabón 1:

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{G_1}^T \mathbf{v}_{G_1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T I_1 \boldsymbol{\omega}_1$$

Dado que la primera articulación es traslacional, entonces $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$, y el término de la energía cinética rotacional se hace cero. El vector \mathbf{r}_{G_1} está dado por:

$$\mathbf{r}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{v}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Por lo cual:

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2$$

Para la energía cinética del eslabón 2:

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2}m_2 \mathbf{v}_{G_2}^T \mathbf{v}_{G_2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^T I_2 \boldsymbol{\omega}_2$$

El vector \mathbf{r}_{G_2} se puede determinar como sigue:

$$\mathbf{r}_{G_2} = T_2^0 \mathbf{r}_{G_2}^2 = \begin{bmatrix} -c_2 & s_2 & 0 & -l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(l_2 - l_{c2}) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c2} c_2 \\ 0 \\ l_{c2} s_2 + q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{v}_{G_2} = \begin{bmatrix} l_{c2} \dot{q}_2 s_2 \\ 0 \\ l_{c2} \dot{q}_2 c_2 + \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Calculando la energía cinética translacional:

$$\frac{1}{2}m_2 \mathbf{v}_{G_2}^T \mathbf{v}_{G_2} = \frac{1}{2}m_2 \left(l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 s_2^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 c_2^2 + 2l_{c2} \dot{q}_2 \dot{q}_1 c_2 + \dot{q}_1^2 \right) = \frac{1}{2}m_2 \left(l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2 + \dot{q}_1^2 \right)$$

Para calcular la energía cinética rotacional del eslabón 2, debemos calcular $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_{0,1}^0 + R_1^0 \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que el eslabón 2 es simétrico con respecto al menos dos planos del sistema de su centro de masa, entonces el tensor de inercia $I_2^{2'}$ tiene la forma:

$$I_2^{2'} = \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2 y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$$

Recordar que el tensor de inercia I_2 se puede determinar mediante $R_2^0 I_2^{2'} (R_2^0)^T$. Entonces, calculando la energía cinética rotacional se tiene:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2^T I_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2 y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_2 & 0 & s_2 \\ s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2^T I_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{2} I_{z_2 z_2} \dot{q}_2^2$$

Entonces:

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2}m_2 \left(l_{c_2}^2 \dot{q}_2^2 + 2l_{c_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 c_2 + \dot{q}_1^2 \right) + \frac{1}{2}I_{z_2 z_2} \dot{q}_2^2$$

Calculando la energía potencial del eslabón 1:

$$\mathcal{P}_1 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G_1} = -m_1 \begin{bmatrix} -g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} = 0$$

Calculando la energía potencial del eslabón 2:

$$\mathcal{P}_2 = -m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{G_2} = -m_2 \begin{bmatrix} -g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_{c_2} c_2 \\ 0 \\ l_{c_2} s_2 + q_1 \end{bmatrix} = -m_2 g l_{c_2} c_2$$

Una vez calculadas las energías cinéticas y potenciales, podemos formar el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_{c_2}^2 + I_{z_2 z_2}) \dot{q}_2^2 + m_2 l_{c_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2 + m_2 g l_{c_2} c_2$$

Calculando las ecuaciones de movimiento de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + m_2 l_{c_2} \ddot{q}_2 c_2 - m_2 l_{c_2} \dot{q}_2^2 s_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0$$

$$\therefore \boxed{(m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + m_2 l_{c_2} c_2 \ddot{q}_2 - m_2 l_{c_2} \dot{q}_2^2 s_2 = \tau_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \tau_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = (m_2 l_{c_2}^2 + I_{z_2 z_2}) \ddot{q}_2 + m_2 l_{c_2} c_2 \ddot{q}_1 - m_2 l_{c_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -m_2 l_{c_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 - m_2 g l_{c_2} s_2$$

$$\therefore \boxed{(m_2 l_{c_2}^2 + I_{z_2 z_2}) \ddot{q}_2 + m_2 l_{c_2} c_2 \ddot{q}_1 + m_2 g l_{c_2} s_2 = \tau_2}$$

6.2.5. Modelo dinámico en forma compacta

Considere un robot manipulador de n grados de libertad compuesto de eslabones rígidos interconectados mediante juntas sin fricción. La energía cinética total de este manipulador se puede expresar como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Donde $M(\mathbf{q})$ es una matriz de $n \times n$ denominada **matriz de inercia**. Esta matriz es una matriz simétrica y definida positiva.

La energía potencial \mathcal{P} no tiene una forma particular como en el caso de la energía cinética, pero se sabe que depende de las posiciones articulares \mathbf{q} . El lagrangiano, definido en secciones previas, se puede escribir entonces como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{P}$$

Entonces, la ecuación de Lagrange se puede establecer como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

Se puede verificar que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Considerando las expresiones anteriores, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

O en forma compacta:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (6.43)$$

Donde

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right]$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}}$$

La ecuación 6.43 corresponde a la dinámica de un manipulador de n grados de libertad. $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es un vector de n elementos denominado **vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis**, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de n elementos que contiene las fuerzas y pares gravitacionales. El vector τ es el vector de fuerzas y pares externos, que en general corresponden a los pares y fuerzas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ si que lo es. Cada elemento c_{ij} de la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se puede determinar mediante:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k$$

Donde los coeficientes c_{ijk} se denominan símbolos de Christoffel de primer tipo, y se pueden determinar mediante:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

Donde m_{ij} denota el ij -ésimo elemento de la matriz de inercia.

La matriz de inercia M de un manipulador de n grados de libertad se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$M = \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I_i J_{\omega_i} \right] \quad (6.44)$$

Donde J_{v_i} y J_{ω_i} corresponden a los jacobianos de velocidad lineal y angular del centro de masa del eslabón i , respectivamente. Como en la sección previa, I_i es el tensor de inercia del eslabón i descrito en un sistema paralelo a $\{0\}$ pero ubicado en el centro de masa del eslabón i . Recordando que I_i se puede determinar mediante la transformación de similaridad:

$$I_i = R_i^0 I_i^{i'} \left(R_i^0 \right)^T$$

Entonces la ecuación 6.44 se puede escribir como:

$$M = \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T R_i^0 I_i^{i'} \left(R_i^0 \right)^T J_{\omega_i} \right] \quad (6.45)$$

Ejemplo 6.13 **Modelo dinámico en forma compacta: manipulador RP**

Obtenga el modelo dinámico en forma compacta del manipulador RP mostrado en la figura. Considere que ambos eslabones son simétricos con respecto al menos dos planos del sistema ubicado en su centro de masa.

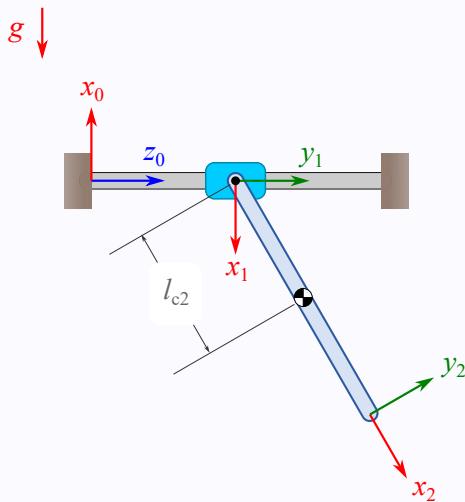


Figura 6.17

Solución:

Las matrices de cinemática directa del manipulador están dadas por:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_2^0 = \begin{bmatrix} -c_2 & s_2 & 0 & -l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a las condiciones de simetría, los tensores de inercia de cada eslabón expresados en su propio sistema de referencia están dados por:

$$I_1^{1'} = \begin{bmatrix} I_{x_1 x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1 y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1 z_1} \end{bmatrix}; \quad I_2^{2'} = \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2 y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$$

Calculando los jacobianos de cada eslabón:

$$J_{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{d}_{G_2} - \mathbf{d}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_{c_2}s_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & l_{c_2}c_2 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedemos a formar la matriz de inercia M :

$$M = \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T R_i^0 I_i^{i'} \left(R_i^0 \right)^T J_{\omega_i} \right]$$

$$m_1 J_{v_1}^T J_{v_1} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_1}^T R_1^0 I_1^{1'} \left(R_1^0 \right)^T J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_2 J_{v_2}^T J_{v_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 l_{c_2} c_2 \\ m_2 l_{c_2} c_2 & m_2 l_{c_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_2}^T R_2^0 I_2^{2'} \left(R_2^0 \right)^T J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l_{c_2} c_2 \\ m_2 l_{c_2} c_2 & m_2 l_{c_2}^2 + I_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$$

Ahora procedemos a determinar la matriz de Coriolis, cada uno de sus elementos está dado por:

$$c_{11} = \sum_{i=1}^2 c_{11k} \dot{q}_k = c_{111} \dot{q}_1 + c_{112} \dot{q}_2$$

$$c_{12} = \sum_{i=1}^2 c_{12k} \dot{q}_k = c_{121} \dot{q}_1 + c_{122} \dot{q}_2$$

$$c_{21} = \sum_{i=1}^2 c_{21k} \dot{q}_k = c_{211} \dot{q}_1 + c_{212} \dot{q}_2$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^2 c_{22k} \dot{q}_k = c_{221} \dot{q}_1 + c_{222} \dot{q}_2$$

Calculando los coeficientes c_{ijk} :

$$c_{111} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} \right) = 0$$

$$c_{112} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} \right) = 0$$

$$c_{121} = c_{112} = 0$$

$$c_{122} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} \right) = -m_2 l_{c_2} s_2$$

$$c_{211} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} \right) = 0$$

$$c_{212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} \right) = 0$$

$$c_{221} = c_{212} = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} \right) = 0$$

Por lo tanto:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_{c_2} s_2 \dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el vector de pares y fuerzas gravitacionales:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l_{c_2} s_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el modelo dinámico del manipulador RP en forma compacta queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l_{c_2} c_2 \\ m_2 l_{c_2} c_2 & m_2 l_{c_2}^2 + I_{z_2 z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_{c_2} s_2 \dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l_{c_2} s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

6.2.6. Fuerzas generalizadas

En la ecuación 6.40 el término τ_i corresponde a la fuerza y/o torque aplicados en la dirección de la i-ésima coordenada generalizada, naturalmente, si las fuerzas externas se aplican en una dirección que no se corresponde con las coordenadas generalizadas, entonces se deben *proyectar* las fuerzas externas en la dirección de dichas coordenadas.

Consideremos primeramente que se tiene un manipulador serial sujeto a una fuerza \mathbf{F}_1 y un torque $\boldsymbol{\mu}_1$ aplicados en el punto B_1 . Si tanto \mathbf{F}_1 como $\boldsymbol{\mu}_1$ se expresan en el sistema de referencia de la base, entonces es posible proyectarlos en la dirección de las coordenadas generalizadas del manipulador, mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\tau} = J_{B_1}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \end{bmatrix} = (J_v)_{B_1}^T \mathbf{F}_1 + (J_\omega)_{B_1}^T \boldsymbol{\mu}_1 \quad (6.46)$$

Donde J_{B_1} es la matriz jacobiana, $(J_v)_{B_1}$ es el jacobiano de velocidad lineal y $(J_\omega)_{B_1}$ el jacobiano de velocidad angular, en todos los casos calculadas en el punto B_1 . Puede revisar la sección 5.5.2 para recordar cómo determinar las matrices jacobianas asociadas con un punto del manipulador.

La ecuación anterior se puede reescribir para cuando se tienen varias fuerzas y torques aplicados en diversas ubicaciones del manipulador serial, así pues, para una N cantidad de fuerzas y torques aplicados en un manipulador serial se tiene:

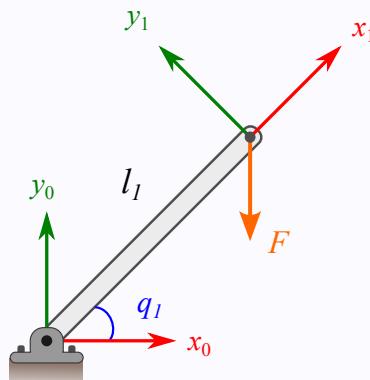
$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{k=1}^N J_{B_k}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N (J_v)_{B_k}^T \mathbf{F}_k + (J_\omega)_{B_k}^T \boldsymbol{\mu}_k \quad (6.47)$$

En las ecuaciones previas el término $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de las fuerzas generalizadas:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

**Ejemplo 6.14 Fuerzas generalizadas: manipulador R**

Determine la fuerza generalizada τ para el manipulador R mostrado en la Figura 6.18, considerando que está sujeto a una carga externa F aplicada en su extremo, de magnitud constante y que permanece siempre en dirección vertical hacia abajo, tal como se esquematiza.

**Figura 6.18****Solución:**

El vector de fuerzas generalizadas para el manipulador R se puede determinar mediante:

$$\boldsymbol{\tau} = (J_v)_{o_1}^T \mathbf{F}$$

Donde $(J_v)_{o_1}$ es el jacobiano de velocidad lineal extremo del manipulador (punto o_1), el cual puede determinarse de la siguiente manera:

$$(J_v)_{o_1} = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r}_{o_1} - \mathbf{r}_{o_0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que \mathbf{F} permanece siempre apuntando en dirección vertical hacia abajo, entonces:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\tau} = (J_v)_{o_1}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -l_1 s_1 & l_1 c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} = [-Fl_1 c_1]$$

Entonces:

$$\tau_1 = -Fl_1c_1$$

6.2.7. Propiedades del modelo dinámico

6.3. Formulación de Newton-Euler

6.4. Obtención del modelo dinámico utilizando Python

6.4.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección veremos cómo obtener, utilizando Python y la librería SymPy, el modelo dinámico de un manipulador serial mediante la formulación de Euler-Lagrange.

Primero, vamos a procurar comprender cómo podemos obtener, de forma sistematizada, el modelo dinámico de un manipulador. Comenzaremos teniendo en cuenta que para determinar cada ecuación de movimiento de Lagrange, necesitamos conocer el *lagrangiano* (\mathcal{L}) del manipulador, y para calcular este requerimos conocer tanto la energía cinética como la energía potencial de cada uno de los eslabones que conforman el manipulador. Para calcular estas energías necesitamos determinar posición y velocidad del centro de masa, velocidad angular del eslabón, el tensor de inercia del eslabón y el vector de gravedad. Y así podríamos seguir describiendo lo que se requiere para formar cada uno de los términos subsiguientes. En la Figura 6.19 se muestra un diagrama que pone de manifiesto algunos de los términos o cantidades requeridas para formar el modelo dinámico.

En los niveles más bajos de cada una de las ramas del diagrama de árbol mostrado en 6.19 se puede observar que se requieren las siguientes cantidades:

1. Las matrices de transformación T_i^0
2. Las matrices de rotación R_i^0
3. Los vectores de posición $\mathbf{r}_{G_i}^i$
4. Los tensores de inercia $I_i^{i'}$
5. Las velocidades angulares $\omega_{j-1,j}^{j-1}$
6. Las masas de los eslabones m_i
7. El vector de gravedad \mathbf{g}

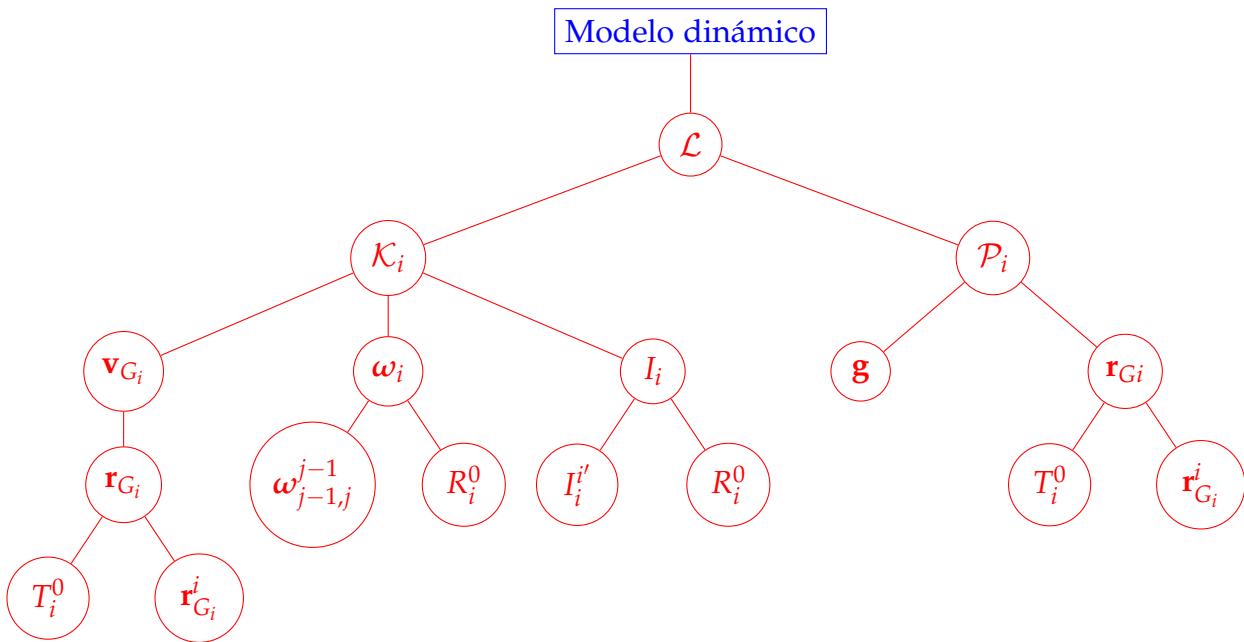


Figura 6.19 Un desglose de la dinámica del manipulador

Primero, es importante notar que R_i^0 es una submatriz de T_i^0 , en consecuencia, si calculamos T_i^0 tendríamos también a R_i^0 . De la cinemática directa sabemos que cada matriz T_i^0 se puede calcular mediante composición de matrices de la siguiente manera:

$$T_i^0 = T_1^0 T_2^1 \cdots T_{i-1}^{i-1}$$

Es decir, necesitamos determinar previamente cada una de las matrices de la forma T_i^{i-1} para el manipulador. Recuerde que estas matrices se obtienen directamente al sustituir los parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador en la matriz dada por la ecuación 3.1. Así pues, lo primero que notamos es que necesitamos conocer los parámetros de Denavit-Hartenberg, se asumirá que estos parámetros se proporcionarán como datos de entrada.

Los vectores de posición $\mathbf{r}_{G_i}^i$ describen la ubicación del centro de masa de cada uno de los eslabones, en el sistema de referencia $\{i\}$. Estos vectores no se pueden calcular a partir de otros datos, se asumirá que son datos de entrada que deberán ser proporcionados.

Los tensores de inercia I_i'' describen las propiedades de inercia de cada eslabón con respecto a un sistema de referencia ubicado en su centro de masa y paralelo al sistema $\{i\}$. Consideraremos que estas matrices se proporcionarán como datos de entrada.

El término $\omega_{j-1,j}^{j-1}$ corresponde a la velocidad angular de cada eslabón ((j)) con respecto al eslabón inmediatamente anterior ($(j-1)$), descrita en el sistema de referencia adherido a ese eslabón previo $\{j-1\}$. Las velocidades angulares $\omega_{j-1,j}^{j-1}$, de acuerdo con lo visto en la sección 5.2 tienen siempre la forma:

$$\boldsymbol{\omega}_{j-1,j}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} ; \quad \text{en el caso de que la junta } j \text{ sea revoluta}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{j-1,j}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \text{en el caso de que la junta } j \text{ sea prismática}$$

Es decir, todo lo que necesitamos es saber el tipo de cada una de las juntas que conforman el manipulador, asumiremos entonces que esto deberá ser un dato de entrada.

Tanto la masa de los eslabones m_i , como el vector de gravedad \mathbf{g} , son cantidades que no se pueden determinar a partir de algún otro dato, así que asumiremos que se proporcionarán como datos de entrada.

De acuerdo con lo visto hasta ahora, podemos establecer que se requieren al menos los siguientes valores conocidos (o datos de entrada) para poder comenzar con el cálculo del modelo dinámico:

1. Los parámetros de Denavit-Hartenberg
2. Los vectores de posición $\mathbf{r}_{G_i}^i$
3. Los tensores de inercia $I_i^{i'}$
4. Los tipos de junta o articulación
5. La masa de los eslabones m_i
6. El vector de gravedad \mathbf{g}

Problemas

- 6.1 En la figura se muestra una placa compuesta delgada y de espesor uniforme, está conformada por dos secciones de diferente material unidas rígidamente. Se sabe que $m_1 = 0.130 \text{ kg}$ y $m_2 = 0.452 \text{ kg}$. Las unidades de longitud son milímetros. Calcule a) el centro de masa, b) los momentos de inercia y c) los productos de inercia.

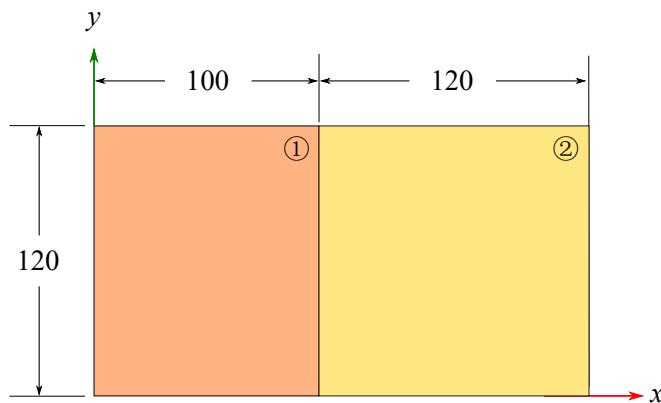


Figura 6.20

- 6.2 En la figura se muestra una placa compuesta delgada y de espesor uniforme, está conformada por dos secciones de diferente material unidas rígidamente. Se sabe que $m_1 = 0.152 \text{ kg}$ y $m_2 = 0.265 \text{ kg}$. Calcule a) el centro de masa, b) los momentos de inercia y c) los productos de inercia. Las unidades de longitud son milímetros.

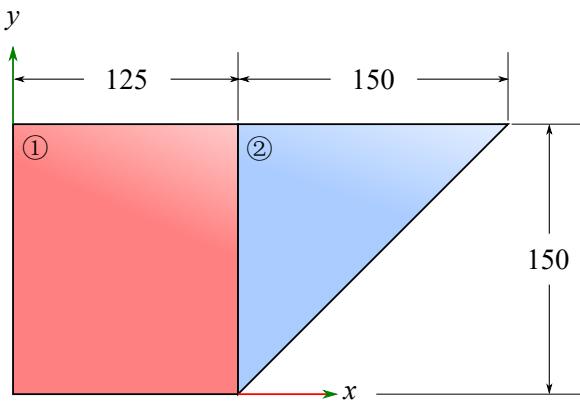


Figura 6.21

- 6.3 En la figura se muestra una placa compuesta delgada y de espesor uniforme, está conformada por dos secciones de diferente material unidas rígidamente. Se sabe que $\rho_1 = 10.8 \text{ kg/m}^2$ y $\rho_2 = 31.4 \text{ kg/m}^2$. Calcule a) el centro de masa, b) los momentos de inercia y c) los productos de inercia. Las unidades de longitud son

milímetros.

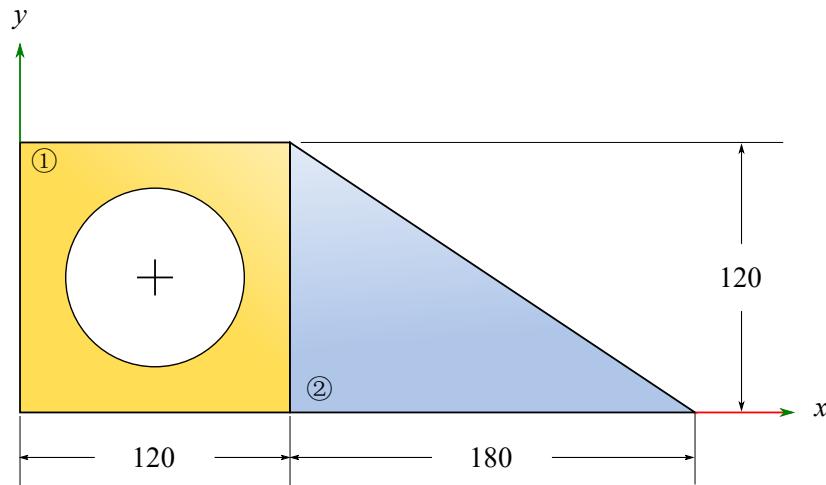


Figura 6.22

6.4 Para el sólido mostrado en la figura, calcule:

- a) El centro de masa
- b) Los momentos de inercia
- c) Los productos de inercia

Considerese que el sólido es de un material homogéneo cuya densidad es de $2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

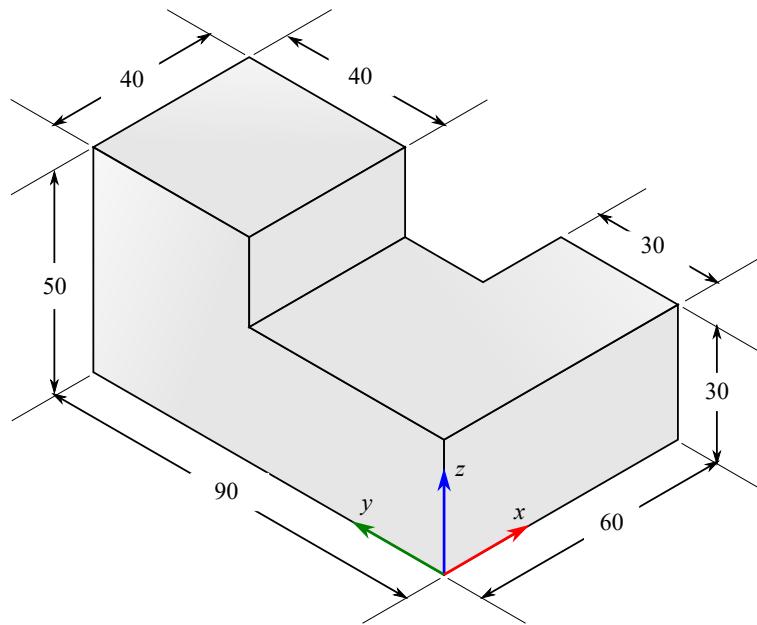


Figura 6.23

6.5 Obtenga el modelo dinámico del manipulador PP mostrado en la Figura 6.24. Con-

sidere que las masas de los eslabones son m_1 y m_2 . El CM_1 está ubicado a una distancia l_{c1} del origen de {1}, y el CM_2 coincide con el origen de {2}.

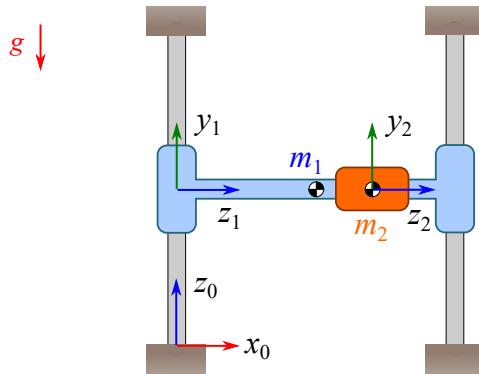


Figura 6.24

- 6.6 Obtenga el modelo dinámico del manipulador PP mostrado en la Figura 6.25. Considerese que las masas de los eslabones son m_1 y m_2 . El CM_1 está ubicado a una distancia l_{c1} del origen de {1}, tal como se esquematiza, y el CM_2 coincide con el origen de {2}.

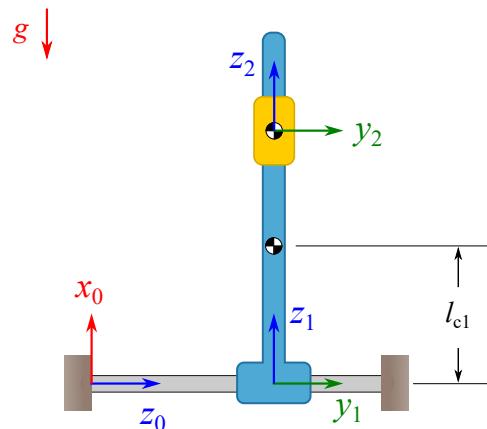


Figura 6.25

- 6.7 Obtenga el modelo dinámico del manipulador RP mostrado en la Figura 6.26. Las masas de los eslabones son m_1 y m_2 . Los tensores de inercia expresados en un sistema ubicado en el centro de masa de cada eslabón están dados por:

$$I_1^{1'} = \begin{bmatrix} I_{x_1 x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1 y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1 z_1} \end{bmatrix}; \quad I_2^{2'} = \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2 y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$$

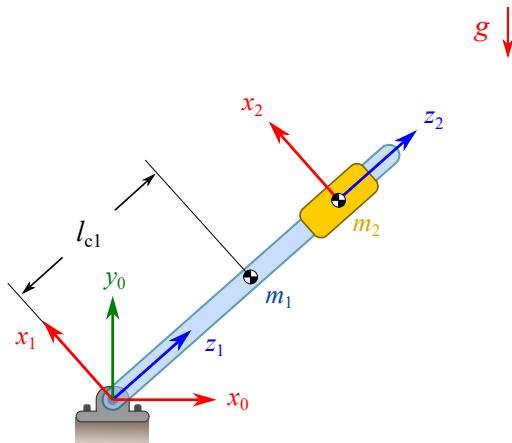


Figura 6.26

6.8 Obtenga el modelo dinámico del manipulador PR mostrado en la Figura. Las masas de los eslabones son m_1 y m_2 . Los tensores de inercia expresados en un sistema ubicado en el centro de masa de cada eslabón están dados por:

$$I_1^{1'} = \begin{bmatrix} I_{x_1 x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1 y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1 z_1} \end{bmatrix}; \quad I_2^{2'} = \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2 y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix}$$

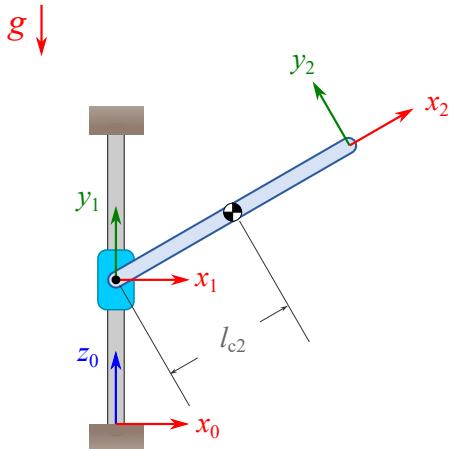


Figura 6.27

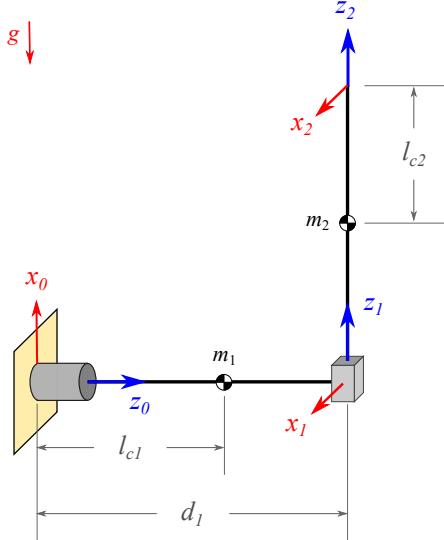
6.9 Para el manipulador RP mostrado en la figura, realice lo siguiente:

- Calcule la energía cinética del manipulador.
- Calcule la energía potencial del manipulador.
- Calcule el lagrangiano del manipulador.
- Calcule las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

Se proporcionan enseguida las matrices T_i^0 y los tensores de inercia I_i .

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & q_2 s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & -q_2 c_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 \\ B_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{y_1 y_1} \end{bmatrix}; \quad I_2 = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 & 0 \\ B_2 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{y_2 y_2} \end{bmatrix}$$



7

Generación de trayectorias

Por escribir



Preliminares matemáticos

En esta sección se hará un brevísimo repaso de algunos tópicos de matemáticas universitarias de importancia para el seguimiento del curso de Cinemática de Robots. Evidentemente, lo aquí descrito es una revisión muy rápida de dichos conceptos, si requiere información más detallada o específica al respecto, puede consultar en las referencias colocadas al pie de página.^{1 2 3}

A.1. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular bidimensional de números (o elementos) escritos entre corchetes. Cada número de la matriz se conoce como *elemento* o *entrada* de la matriz. Los elementos de una matriz están dispuestos en filas y columnas, se denota como una matriz de $m \times n$ (léase *m por n*) a aquella que se compone de m filas y n columnas. Usualmente para nombrar las matrices se utilizarán letras mayúsculas, por ejemplo sea A una matriz de $m \times n$, de manera general puede escribirse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

¹Strang, G., Villagomez, H. (2007). Algebra lineal y sus aplicaciones. Mexico: Thomson.

²Grossman, S. I. (1996). Algebra lineal. Mexico: McGraw-Hill.

³Stewart, J. (2018). Cálculo de una variables, trascendentales tempranas. México: Cengage.

Suma de matrices

La suma matricial está definida para matrices del mismo tamaño y se obtiene sumando los elementos correspondientes. Por ejemplo, sean A y B dos matrices de 2×2 dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Multiplicación por un escalar

Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada elemento de la matriz se multiplica por dicho escalar. Sea A la matriz de 2×2 descrita con anterioridad y k un escalar, entonces:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Para que la multiplicación de matrices pueda efectuarse se debe cumplir que la matriz que premultiplica debe tener tantas columnas como filas tenga la que postmultiplica. En términos más *amables*, sea A una matriz de dimensiones $m \times n$ y B una matriz de $p \times q$, para poder multiplicarlas necesariamente se debe cumplir que $n = p$, además, la matriz resultante tendrá un tamaño dado por $m \times q$.

Sean A y B dos matrices tal que puede efectuarse el producto AB y sea C la matriz que resulta de efectuar dicho producto, es decir:

$$C = AB$$

Cada elemento de la matriz C se calcula de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Por ejemplo, sean A y B dos matrices de 2×2 definidas como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

El producto AB estará dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que el producto de matrices satisface las siguientes propiedades:

- $(AB)^T = B^T A^T$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$
- En general, $AB \neq BA$
- $A(B + C) = AB + AC$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
- $ABC = A(BC) = (AB)C$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz A de $m \times n$ se denota como A^T y es una matriz de $n \times m$ que tiene la primera fila de A como su primera columna, la segunda fila de A como su segunda columna y así de manera sucesiva. Por tanto la transpuesta de la matriz A dada en la ecuación A.1 será:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Matrices antisimétricas

Se dice que una matriz S es antisimétrica si y sólo si:

$$S^T + S = 0$$

O en términos de sus elementos:

$$s_{ij} + s_{ji} = 0$$

De la ecuación anterior se puede observar que $s_{ii} = 0$, es decir, que todos los elementos de la diagonal de S son ceros y que los elementos fuera de la diagonal: s_{ij} con $j \neq i$, satisfacen que $s_{ij} = -s_{ji}$. De manera particular, las matrices antisimétricas de 3×3 contienen sólo tres cantidades independientes, cada matriz antisimétrica de 3×3 tiene la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si \mathbf{a} es un vector de tres componentes $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, podemos definir la matriz antisimétrica $S(\mathbf{a})$ como:

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices antisimétricas de 3×3 pueden ser utilizadas para representar el producto vectorial como un producto de matrices. Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores en \mathbb{R}^3 , entonces:

$$S(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Esto se puede verificar de forma sencilla desarrollando directamente ambos lados de la ecuación. El operador S es un operador lineal, es decir:

$$S(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha S(\mathbf{a}) + \beta S(\mathbf{b})$$

Para cualesquiera vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbb{R}^3 , y escalares α y β .

Sea R una matriz ortogonal, y \mathbf{a} un vector en \mathbb{R}^3 , se puede verificar que:

$$RS(\mathbf{a})R^T = S(R\mathbf{a}) \tag{A.3}$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa una transformación de similitud de la matriz $S(\mathbf{a})$. Esta ecuación establece que la representación matricial de $S(\mathbf{a})$ en un sistema de referencia rotado por R es la misma que la matriz antisimétrica $S(R\mathbf{a})$ correspondiente al vector \mathbf{a} rotado por R .

A.2. Vectores

Un vector es una matriz que tiene una sola fila (vector fila) o columna (vector columna), en ambos casos a sus elementos se les conoce como componentes. En este texto usualmente se hará referencia a vectores columnas y de manera indistinta se denotarán como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$$

Producto punto

El producto punto o producto escalar está definido para dos vectores del mismo tamaño y da como resultado un escalar. Sean $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ y $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ dos vectores en \mathbb{R}^3 , el producto escalar se calcula como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Producto vectorial

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores es una operación definida para vectores en un espacio tridimensional y del cual resulta un vector perpendicular a ambos involucrados. Sean $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ y $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ dos vectores en \mathbb{R}^3 , entonces el producto vectorial está dado por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

Ángulo entre dos vectores

El ángulo entre dos vectores se puede calcular a partir de la definición del producto escalar. Se sabe que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \theta$$

Entonces:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv} \right)$$

Proyección escalar y vectorial

La proyección escalar de un vector \mathbf{u} sobre un vector \mathbf{v} está dada por:

$$u_v = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

Donde:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

La proyección vectorial de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} se obtiene multiplicando el resultado anterior por un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} , es decir:

$$\mathbf{u}_v = u_v \hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$$

En el caso particular de que los dos vectores involucrados sean unitarios, la proyección escalar de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ sobre un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ está dada por:

$$u_v = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

De la definición del producto escalar se sabe que:

$$u_v = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = uv \cos \theta$$

Pero dado que $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ son vectores unitarios, entonces $u = v = 1$, por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \cos \theta$$

Este resultado nos será útil posteriormente cuando estemos realizando descripción de orientaciones.

A.3. Trigonometría

Relaciones en un triángulo rectángulo

El triángulo rectángulo es un tipo especial de triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90° . Los otros dos ángulos agudos suman 90° también. La propiedad más distintiva de un triángulo rectángulo es que satisface el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En un triángulo rectángulo, hay tres razones trigonométricas fundamentales asociadas con un ángulo agudo (α):

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

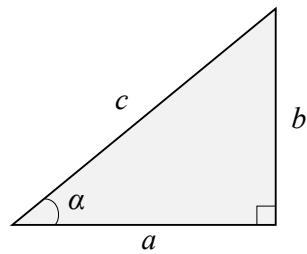


Figura A.1 Triángulo rectángulo

Relaciones en un triángulo oblicuángulo

Un triángulo oblicuángulo es aquel en el cual ninguno de sus ángulos es recto. Para resolver un triángulo de este tipo, se pueden utilizar la ley de senos o la ley de cosenos, dependiendo de la información que se tenga disponible.

Ley de senos

Para un triángulo oblicuángulo como el mostrado en la Figura A.2 se cumple que:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (\text{A.4})$$

Esta expresión se conoce como la **ley de senos**. La ley de senos se puede enunciar de forma general como: *en cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.*

Es sencillo notar que de la ecuación A.4 se pueden obtener tres fórmulas:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} ; \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} ; \quad \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de estas fórmulas a un triángulo específico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si sustituimos estos tres valores en la fórmula apropiada, podemos entonces encontrar el valor de la cuarta variable. Se deduce que la ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo, siempre que conozcamos cualquiera de lo siguiente:

- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
- Dos ángulos y cualquier lado.

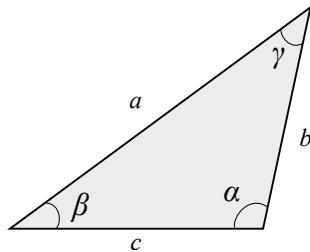


Figura A.2 Triángulo oblicuángulo

Ley de cosenos

La ley de senos no se puede utilizar para resolver un triángulo oblicuángulo en los siguientes casos:

- Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos.
- Se conocen los tres lados.

En estas situaciones podemos hacer uso de la **ley de cosenos**, la cual establece que para un triángulo oblicuángulo como el mostrado en la Figura A.2 se cumplen las siguientes tres relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

La ley de cosenos se puede enunciar como *El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los otros dos lados y el coseno del ángulo entre ellos.*

Algunas identidades trigonométricas

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\tan(\theta - \pi) = \tan \theta$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

La función arcotangente de dos argumentos arctan2

La función arcotangente habitual (arctan) nos permite calcular de forma adecuada un ángulo en el rango ($-90^\circ, 90^\circ$), es decir, aquellos que corresponden al primer y cuarto cuadrante del plano cartesiano. Sin embargo, cuando el ángulo que queremos calcular corresponde al segundo o tercer cuadrante, la función arctan no puede manejarlo de forma apropiada. Por ejemplo, vamos a suponer que queremos calcular la dirección θ del vector \mathbf{r} mostrado en la Figura A.3, utilizando la función arctangente tendríamos que:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ$$

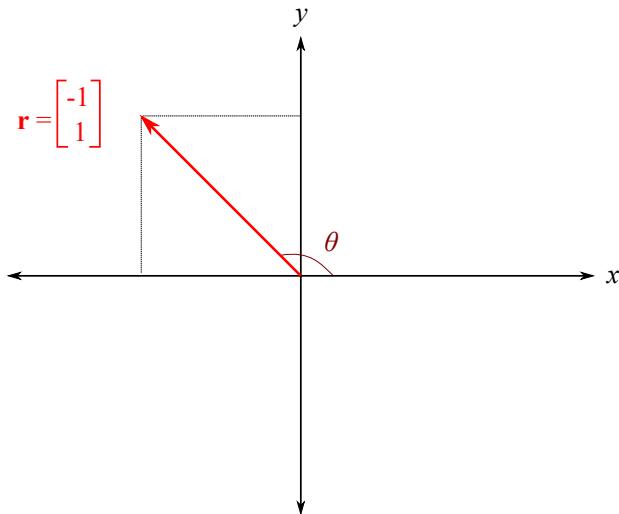


Figura A.3

Es evidente que el resultado anterior nos da un ángulo ubicado en el cuarto cuadrante, lo cual no corresponde con lo observado en la figura. Como se había mencionado, la función arcotangente ordinaria no puede manejar adecuadamente resultados cuando $x < 0$, puesto que al recibir un argumento único no tiene manera de saber si el signo negativo corresponde a la componente y o a la de x .

La función arcotangente de dos argumentos ($\text{arctan}2$) permite calcular correctamente ángulos en todos los cuadrantes, dado que preserva la información correspondiente a los signos de cada una de las componentes. De forma simple podemos definir esta función como:

$$\text{arctan}2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{para } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Con ayuda de esta función podríamos ahora recalcular el ángulo θ , de lo cual tendríamos que:

$$\theta = \text{arctan}2(1, -1)$$

Dado que el segundo argumento es negativo ($x < 0$), entonces:

$$\theta = \text{arctan}2(1, -1) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + 180^\circ = \arctan(-1) + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

Este resultado si que es correcto. En términos descriptivos podríamos considerar que la función arcotangente de dos argumentos hace una *corrección* a la función arcotangente en el caso de que la componente en x sea negativa. Esta corrección consiste en sumar 180°

al resultado obtenido.

Hay un par de situaciones en las que hay que tener cuidado con la función arcotangente, puesto que si procedemos de forma usual nos conducirá a un error de cálculo (al menos en una calculadora de bolsillo), observa lo que ocurre si quisieramos calcular la dirección del vector \mathbf{q} mostrado en la Figura A.4, tendríamos que:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{0}\right)$$

Dado que la componente $x = 0$, nuestra operación implica una división por cero, lo cual nos conduce a una indefinición. Algo similar ocurre en el caso de la dirección β del vector \mathbf{u} . No podemos calcular numéricamente los ángulos, pero por inspección podemos verificar que $\theta = 90^\circ$ y $\beta = -90^\circ$.

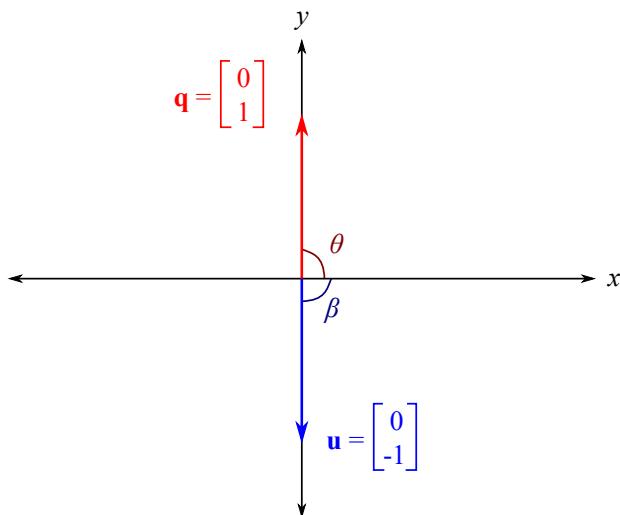


Figura A.4

Tomando en cuenta lo anterior, una definición un poco más completa para la función arcotangente de dos argumentos incluye estos dos casos particulares:

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{para } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ & \text{para } x < 0 \\ 90^\circ & \text{para } x = 0; y > 0. \\ -90^\circ & \text{para } x = 0; y < 0. \end{cases}$$

i Calculando la función arctan2

Normalmente las calculadoras de bolsillo no nos dan la posibilidad de calcular de manera directa mediante la función `arctan2`, así que usualmente tenemos que hacer uso de `arctan` y hacer la corrección manualmente en el caso que corresponda. Por otro lado, los lenguajes de programación y los programas de cálculo numérico, suelen incluir una función arcotangente de dos argumentos. Por ejemplo, en Python se puede utilizar la librería `math`, tal como se muestra en el siguiente bloque de código:

```
>>> from math import atan2,degrees
>>> degrees(atan2(1,-1))
135.0
```

A.4. Derivadas

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite. Este tipo especial de límite se denomina **derivada** y se puede interpretar como una razón de cambio en muchas aplicaciones de ingeniería [5]. En una gran parte de este texto utilizaremos derivadas para describir la cinemática de manipuladores, de manera específica para calcular las velocidades y aceleraciones a partir de la información de posición.

De manera general, la derivada de una función f en un número a , denotada por $f'(a)$, es:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{A.5})$$

Si este límite existe. Ahora, si en lugar de considerar un número a en la ecuación A.6, utilizamos una variable t , tendremos que:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (\text{A.6})$$

Donde $f'(t)$ es una nueva función llamada **derivada de f** , la cual geométricamente se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Algunas fórmulas de derivadas

A continuación, se listan algunas fórmulas de derivadas que serán utilizadas de forma recurrente a lo largo de algunos capítulos de este texto. En general, dado que estaremos trabajando con la descripción de cinemática y dinámica de cuerpos rígidos, se considerará que la variable independiente es el tiempo t .

En lo subsiguiente se utilizará la **notación de Newton** para las derivadas, de tal manera que, suponiendo que se tiene una $x(t)$, entonces:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Sean $u = u(t)$, $v = v(t)$ y $w = w(t)$, funciones escalares dependientes de t ; y sea a un escalar constante.

$$\frac{d}{dt}(au) = a\dot{u}$$

$$\frac{d}{dt}(u + v) = \dot{u} + \dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}(uv) = \dot{u}v + u\dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}(uvw) = \dot{u}vw + u\dot{v}w + uv\dot{w}$$

$$\frac{d}{dt}\sin u = \dot{u} \cos u$$

$$\frac{d}{dt}\cos u = -\dot{u} \sin u$$

$$\frac{d}{dt}\sin(u + a) = \dot{u} \cos(u + a)$$

$$\frac{d}{dt}\cos(u + a) = -\dot{u} \sin(u + a)$$

$$\frac{d}{dt}\sin(u + v) = (\dot{u} + \dot{v}) \cos(u + v)$$

$$\frac{d}{dt}\cos(u + v) = -(\dot{u} + \dot{v}) \sin(u + v)$$



Métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar problemas en ciencias e ingeniería que implican el cambio de una variable con respecto a otra. La mayoría de estos problemas requieren la solución de un problema de valor inicial, es decir, la solución de una ecuación diferencial que satisface una condición inicial dada.

En situaciones comunes de la vida real, la ecuación diferencial que modela el problema es demasiado complicada para resolverla exactamente y se adopta uno de dos enfoques para aproximar la solución. El primer enfoque consiste en modificar el problema simplificando la ecuación diferencial a uno que se puede resolver exactamente y luego usar la solución de la ecuación simplificada para aproximar la solución al problema original. El otro enfoque, utiliza métodos para aproximar la solución del problema original. Este es el enfoque que se adopta con mayor frecuencia porque los métodos de aproximación dan resultados más precisos e información de error realista.

Los métodos que se abordarán en esta sección no producen una aproximación continua a la solución del problema de valor inicial. Más bien, las aproximaciones se encuentran en ciertos puntos específicos y, a menudo, igualmente espaciados. Si se necesitan valores intermedios, se utiliza algún método de interpolación.

B.1. Método de Euler

El método de Euler es la técnica de aproximación más elemental para resolver problemas con valores iniciales. Aunque rara vez se usa en la práctica, la simplicidad de su derivación puede usarse para ilustrar las técnicas involucradas en la construcción de algunas de las técnicas más avanzadas, sin el engorroso álgebra que acompaña a estas construcciones.

El objetivo del método de Euler es obtener aproximaciones al problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y); \quad a \leq t \leq b; \quad y(t_0) = y_0 \quad (\text{B.1})$$

El método de Euler consiste en ir trazando rectas tangentes sucesivas a partir del valor inicial. Comenzamos linealizando la solución desconocida $y(t)$ de B.1 en $t = t_0$:

$$L(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad (\text{B.2})$$

La gráfica de esta linealización es una línea recta tangente a la gráfica de $y = y(t)$ en el punto (t_0, y_0) y cuya pendiente está dada por $f(t_0, y_0)$, tal como se puede observar en la Figura B.1.

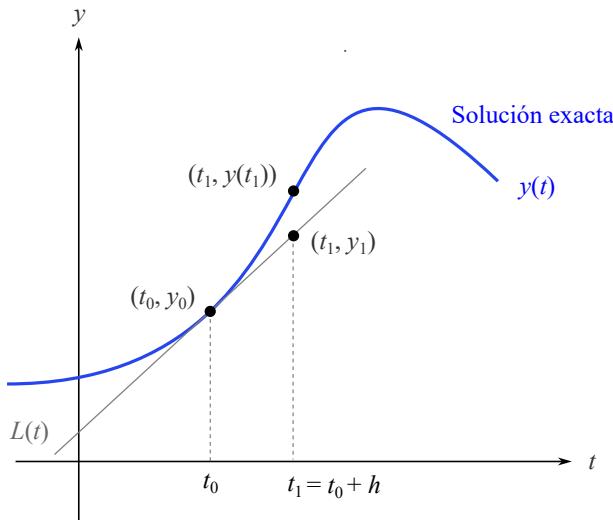


Figura B.1 Aproximación mediante el método de Euler

Ahora, considerando un incremento h positivo en el eje t , al reemplazar t por $t_1 = t_0 + h$ en B.2 se tiene:

$$L(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_0 + h - t_0)$$

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

Donde $y_1 = L(t_1)$. En la línea tangente, el punto (t_1, y_1) es una aproximación al punto $(t_1, y(t_1))$ ubicado sobre la curva solución (ver Figura B.1). La exactitud de la aproximación $y_1 \approx y(t_1)$ depende en gran medida del tamaño del incremento h . La recomendación es que debemos elegir este tamaño del paso lo razonablemente pequeño. Ahora repetimos el proceso mediante una segunda línea tangente en (t_1, y_1) . Tomando como punto de base a la aproximación anterior (t_1, y_1) podemos obtener una aproximación $y_2 \approx y(t_2)$ correspondiente a dos pasos de longitud h desde t_0 , es decir, $t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$, así:

$$y(t_2) = y(t_0 + 2h) = y(t_1 + h) \approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

Si continuamos de esta manera, las sucesivas aproximaciones se pueden expresar de manera general como:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad (\text{B.3})$$

Donde $t_i = t_0 + ih$, donde $i = 0, 1, 2, \dots$. Observe que cada aproximación se realiza con base en la estimación previa.

Ejemplo B.1 Método de Euler

Utilice el método de Euler para obtener una aproximación a $y(0.5)$, con un paso $h = 0.1$.

$$\frac{dy}{dt} = 3t + 2; \quad y(0) = 5$$

Solución:

Se observa que $f(t, y) = 3t + 2$, además $t_0 = 0$ y $y_0 = 5$. Para la primera aproximación se tiene que:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 5 + 0.1(3(0) + 2) = 5.2$$

Siendo $t_1 = t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$. Para y_2 se tiene que:

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 5.2 + 0.1(3(0.1) + 2) = 5.43; \quad t_2 = t_0 + 2h = 0.2$$

De manera similar, para las subsiguientes aproximaciones:

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 5.2 + 0.1(3(0.2) + 2) = 5.69; \quad t_3 = t_0 + 3h = 0.3$$

$$y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) = 5.69 + 0.1(3(0.3) + 2) = 5.98; \quad t_4 = t_0 + 4h = 0.4$$

$$y_5 = y_4 + hf(t_4, y_4) = 5.98 + 0.1(3(0.4) + 2) = 6.3; \quad t_5 = t_0 + 5h = 0.5$$

Así, la aproximación buscada es $y(0.5) \approx y_5 \approx 6.3$. Se puede verificar de forma sencilla que la solución exacta para este problema de valor inicial está dada por:

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + 5$$

Entonces, el valor real de la función solución en $t = 0.5$ es $y(0.5) = 6.375$. En la Figura B.2 se pueden observar la curva solución y la aproximación realizada mediante el método de Euler en el intervalo $0 \leq t \leq 0.5$. Podemos notar que

conforme nos alejamos de la aproximación del valor inicial, la diferencia entre la función solución y la aproximación se hace un poco más evidente.

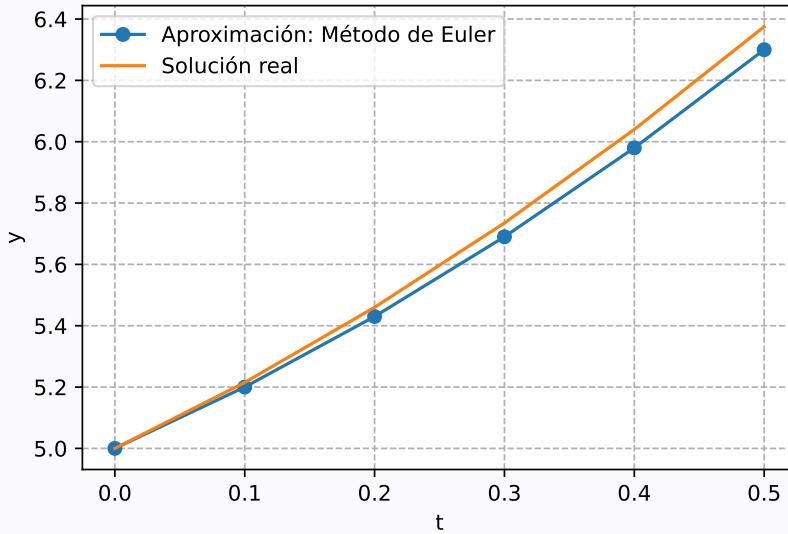


Figura B.2

B.2. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Son métodos iterativos, lo que significa que se basan en aproximaciones sucesivas para obtener la solución. La idea básica detrás del método de Runge-Kutta es aproximar la solución de una EDO mediante una serie de pasos. En cada paso, se calculan varios valores intermedios que se utilizan para mejorar la aproximación.

Los métodos de Runge-Kutta tienen la forma generalizada:

$$y_{i+1} = y_i + h \phi(t_i, y_i, h) \quad (\text{B.4})$$

donde $\phi(t_i, y_i, h)$ se conoce como función incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo. La función incremento se escribe en forma general como:

$$\phi = (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n)$$

donde las a son constantes y las k son:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

donde las p y las q son constantes. Observe que las k son relaciones de recurrencia. Es decir, k_1 aparece en la ecuación k_2 , la cual aparece en la ecuación k_3 , etc. Como cada k es una evaluación funcional, esta recurrencia vuelve eficientes a los métodos RK para cálculos en computadora. Es posible tener varios tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función incremento especificada por n .

Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El más popular de los métodos Runge-Kutta es el de cuarto orden. Hay un número infinito de versiones. La siguiente, es la forma comúnmente usada y, por lo tanto, le llamamos método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden (o $RK4$ en forma abreviada):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\
k_4 &= f(t_i + h, y_i + k_3 h)
\end{aligned}$$

Las constantes k_1 , k_2 , k_3 y k_4 , representan una pendiente calculada, tal como se muestra en la Figura B.3. Cada aproximación es un promedio ponderado de estas pendientes. Observe que k_2 se calcula en el medio paso $t_i + 0.5h$ y utilizando el valor previamente estimado mediante k_1 , algo similar ocurre con k_3 y k_4 .

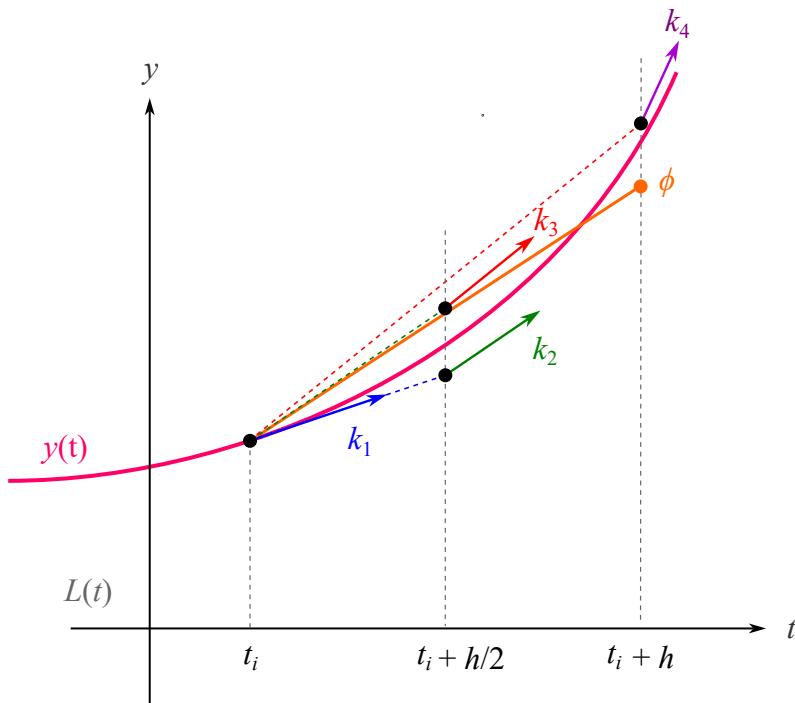


Figura B.3 Pendientes ponderadas del método RK4

Ejemplo B.2 Runge-Kutta de cuarto orden

Utilice un método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener una aproximación al problema de valor inicial en el intervalo $0 \leq t \leq 0.5$, con un paso $h = 0.1$.

$$\frac{dy}{dt} = 3t + 2; \quad y(0) = 5$$

Solución:

Calculamos las pendientes para la primera aproximación con $t_0 = 0$ y $y_0 = y(t_0) = 5$:

$$k_1 = f(t_0, y_0) = 3(0) + 2 = 2$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1h\right) = 3(0 + 0.5(0.1)) + 2 = 0.15 + 2 = 2.15$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2h\right) = 3(0 + 0.5(0.1)) + 2 = 0.15 + 2 = 2.15$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3h) = 3(0 + 0.1) + 2 = 0.3 + 2 = 2.3$$

Entonces, la aproximación y_1 está dada por:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 5 + \frac{0.1}{6} (2 + 2(2.15) + 2(2.15) + 2.3) = 5.215$$

Para la siguiente aproximación y_2 , con $t_1 = 0.1$ y $y_1 = 5.215$, se tiene que:

$$k_1 = 2.3$$

$$k_2 = 2.45$$

$$k_3 = 2.45$$

$$k_4 = 2.6$$

$$y_2 = 5.46$$

Las anteriores y las subsecuentes aproximaciones en el intervalo propuesto se resumen en la siguiente tabla:

t_i	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i
0.10	2.0000	2.1500	2.1500	2.3000	5.2150
0.20	2.3000	2.4500	2.4500	2.6000	5.4600
0.30	2.6000	2.7500	2.7500	2.9000	5.7350
0.40	2.9000	3.0500	3.0500	3.2000	6.0400
0.50	3.2000	3.3500	3.3500	3.5000	6.3750

En la Figura B.4 se observan las gráficas de las aproximaciones mediante el método de Euler y el de Runge-Kutta de cuarto orden (ambos con $h = 0.1$). Se puede notar que la aproximación de RK4 prácticamente *cae* sobre la curva solución real.

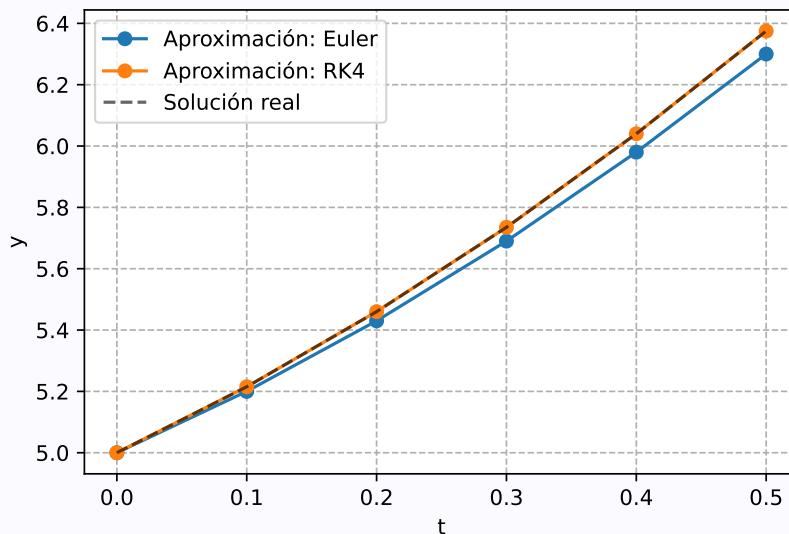


Figura B.4

B.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

El problema de valor inicial de segundo orden se puede escribir de forma general como:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= f(t, y, \dot{y}) \\ y(t_0) &= y_0; \quad \dot{y}(t_0) = u_0\end{aligned}$$

Este problema se puede escribir como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo la sustitución:

$$\dot{y} = u \tag{B.6}$$

Entonces:

$$\dot{u} = f(t, y, u) \tag{B.7}$$

Las ecuaciones B.6 y B.7 conforman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora el problema se centra en determinar las funciones solución y y u sujetas a las condiciones iniciales:

$$y(t_0) = y_0; \quad u(t_0) = u_0$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver numéricamente, aplicando algún método en particular a cada una de las ecuaciones.

Método de Euler

Así pues, la aproximación mediante el método de Euler para un sistema de EDO de primer orden como el de las ecuaciones B.6 y B.7, se puede escribir como:

$$y_{i+1} = y_i + hu_i \tag{B.8}$$

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, y_i, u_i) \tag{B.9}$$



Ejemplo B.3 EDO de segundo orden

Aproxime la solución para:

$$4\ddot{y} + 4\dot{y} + 17y = 0, \quad y(0) = -1; \quad \dot{y}(0) = 2$$

En el intervalo $0 \leq t \leq 1$, con un paso de $h = 0.1$.

Solución:

La EDO de segundo orden se puede escribir como un sistema de EDO de primer orden mediante la sustitución $\dot{y} = u$, así:

$$\dot{y} = u$$

$$\dot{u} = -u - \frac{17}{4}y$$

La primera aproximación, con $f(t, y, u) = -u - 4.25y$, $t_0 = 0$, $y_0 = -1$ y $u_0 = 2$, está dada por:

$$y_1 = y_0 + hu_0 = -1 + 0.1(2) = -0.8$$

$$u_1 = u_0 + hf(t_0, y_0, u_0) = 2 + 0.1(-2 - 4.25(-1)) = 2.225$$

Para la segunda:

$$y_2 = y_1 + hu_1 = -0.8 + 0.1(2.225) = -0.5775$$

$$u_2 = u_1 + hf(t_1, y_1, u_1) = 2.225 + 0.1(-2.225 - 4.25(-0.8)) = 2.3425$$

Las sucesivas aproximaciones se resumen en la siguiente tabla:

t_i	y_i	u_i
0.00	-1.000000	2.000000
0.10	-0.800000	2.225000
0.20	-0.577500	2.342500
0.30	-0.343250	2.353688
0.40	-0.107881	2.264200
0.50	0.118539	2.083630
0.60	0.326902	1.824888
0.70	0.509390	1.503466
0.80	0.659737	1.136628
0.90	0.773400	0.742577
1.00	0.847658	0.339624

B.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Considerando que se tiene un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (\text{B.11})$$

$$\vdots \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (\text{B.13})$$

Sujetas a las condiciones iniciales:

$$y_1(t_0) = \alpha_1; \quad y_2(t_0) = \alpha_2; \quad \dots; \quad y_n(t_0) = \alpha_n$$

El sistema de ecuaciones y las condiciones iniciales se pueden escribir en forma vectorizada como:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}); \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (\text{B.14})$$

Donde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{y}) \\ f_2(t, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{y}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Observe que la ecuación vectorial B.14 es análoga a la ecuación escalar B.1. Las expresiones de las secciones previas se pueden utilizar para resolver el sistema de ecuaciones en forma vectorizada, haciendo los ajustes correspondientes en la formulación.

Método de Euler

Cada aproximación, mediante el método de Euler, del problema de valor de inicial B.14 se puede determinar como sigue:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) \quad (\text{B.15})$$

donde:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{y}) \\ f_2(t, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Cada aproximación, mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, del problema de valor de inicial B.14 se puede determinar como sigue:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (\text{B.17})$$

donde:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1 h\right) \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2 h\right) \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3 h) \quad (\text{B.21})$$

B.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= f_1(t, y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_n, \dot{y}_n) \\ \ddot{y}_2 &= f_2(t, y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_n, \dot{y}_n) \\ &\vdots \\ \ddot{y}_n &= f_n(t, y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_n, \dot{y}_n) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
y_1(t_0) &= \alpha_1 \\
\dot{y}_1(t_0) &= \alpha_2 \\
y_2(t_0) &= \alpha_3 \\
\dot{y}_2(t_0) &= \alpha_4 \\
&\vdots \\
y_n(t_0) &= \alpha_{n-1} \\
\dot{y}_n(t_0) &= \alpha_n
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo la sustitución descrita en la sección B.3 para cada una de las ecuaciones, es decir:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_k &= u_k \\
\dot{u}_k &= f_k(t, y_1, u_1, y_2, u_2, \dots, y_n, u_n)
\end{aligned}$$

Para $k = 1, 2, \dots, n$. Así pues, el sistema de EDO de segundo orden se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= u_1 \\
\dot{u}_1 &= f_1(t, y_1, u_1, y_2, u_2, \dots, y_n, u_n) \\
\dot{y}_2 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= f_2(t, y_1, u_1, y_2, u_2, \dots, y_n, u_n) \\
&\vdots \\
\dot{y}_n &= u_n \\
\dot{u}_n &= f_n(t, y_1, u_1, y_2, u_2, \dots, y_n, u_n)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
y_1(t_0) &= \alpha_1 \\
u_1(t_0) &= \alpha_2 \\
y_2(t_0) &= \alpha_3 \\
u_2(t_0) &= \alpha_4 \\
&\vdots \\
y_n(t_0) &= \alpha_{n-1} \\
u_n(t_0) &= \alpha_n
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Un problema de valor de inicial como este se puede *resolver* de la manera que se describe en la sección [B.4](#).

Problemas

1. Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución del problema de valor inicial de segundo orden. Compare las aproximaciones obtenidas con la solución real.

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = te^t - t$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$0 \leq t \leq 1; \quad h = 0.1$$

$$\text{Solución real: } y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$$

2. Utilice el método de RK4 para aproximar la solución al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\dot{y}_1 = 3y_1 + 2y_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}$$

$$\dot{y}_2 = 4y_1 + y_2 + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}$$

$$y_1(0) = 1; \quad y_2(0) = 1; \quad 0 \leq t \leq 1; \quad h = 0.2$$

Compare las aproximaciones obtenidas con las soluciones reales dadas por:

$$y_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$$

3. Utilice el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\dot{y}_1 = -4y_1 - 2y_2 + \cos t + 4 \operatorname{sen} t$$

$$\dot{y}_2 = 3y_1 + y_2 - 3 \operatorname{sen} t$$

$$y_1(0) = 0; \quad y_2(0) = -1; \quad 0 \leq t \leq 2; \quad h = 0.1$$

Compare las aproximaciones obtenidas con las soluciones reales dadas por:

$$y_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \operatorname{sen} t$$

$$y_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

4. La dinámica de un manipulador simple de un grado de libertad está determinada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g = \tau_1$$

Donde m_1 es la masa del manipulador, g la constante de aceleración de la gravedad y τ_1 una fuerza generalizada aplicada al manipulador. Utilice el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución de la ecuación diferencial en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, bajo las siguientes condiciones iniciales y tamaño de paso:

$$q_1(0) = \dot{q}_1(0) = 0; \quad h = 0.05$$

Considere que $m_1 = 0.5$ kg, $g = 9.81$ m/s² y $\tau_1 = 5$ N.

C

Una breve introducción a Python

Python es un lenguaje de programación, interpretado, de alto nivel y propósito general, además de ser un proyecto libre y de código abierto, con una comunidad enorme implicada en el desarrollo y mantenimiento de librerías que hacen posible el multidominio actual de Python.

Dada su concepción como lenguaje de propósito general, Python es utilizado en una diversidad de aplicaciones, desde desarrollo web, análisis de datos, procesamiento de imágenes, aprendizaje automático, computación simbólica, etc.

Las características de este lenguaje le hacen propicio para el prototipado de aplicaciones, dado que es muy sencillo y rápido revisar y modificar el código desarrollado. Otra característica muy notable de Python es su sintaxis simple y fácil de aprender, lo cual ayuda al momento de introducirse en el desarrollo de algoritmos o el mundo propio de la programación de computadoras.

C.1. Fundamentos del lenguaje

Instalación de Python

En este capítulo se utilizará la distribución Anaconda de Python, la cual contiene el intérprete y las librerías del *core*, pero que además, incluye la mayoría de librerías utilizadas para el desarrollo de aplicaciones de corte técnico-científico.

La descarga de Anaconda puede realizarla desde el sitio <https://www.anaconda.com/products/individual>, selecciona el paquete de descarga conforme al sistema operativo (Windows, MacOS o Linux), así como la arquitectura de su PC. La instalación suele ser muy sencilla, puede seguir las instrucciones dadas en la documentación correspondiente: <https://docs.anaconda.com/anaconda/install/>.

Variables, operadores y expresiones

Variables

Al ser un lenguaje de alto nivel, Python dispone de los tipos de datos elementales en cualquier lenguaje de programación, pero además incluye estructuras de datos más complejas y con altas prestaciones que facilitan en muchos aspectos la tarea del programador.

Python es un lenguaje de tipado dinámico en el que no hace falta declarar el tipo de dato que asignará a una variable, de igual manera una variable puede cambiar de tipo conforme la ejecución del programa, por ello se debe tener cuidado con la sintaxis para definir cada tipo de dato.

En Python todo lo que creamos son objetos y las variables son referencias a esos objetos, las variables se definen por asignación utilizando el signo `=`, por ejemplo:

```
a = 5  
b = 8.0  
nombre = "Catalina"
```

Piensa el proceso de asignación como la acción de etiquetar las direcciones de memorias en donde se almacenan los objetos de Python, tal como se esquematiza en la figura.

Tipos de datos básicos

Al ser un lenguaje de alto nivel, Python dispone de los tipos de datos elementales en cualquier lenguaje de programación, pero además incluye estructuras de datos más complejas y con altas prestaciones que facilitan en muchos aspectos la tarea del programador. A continuación, se describen los tipos de datos básicos en Python.

Los enteros son un tipo de dato básico en cualquier lenguaje de programación. En Python para definir un valor entero se debe colocar el número sin ningún punto decimal, por ejemplo:

```
a = 1  
print(type(a))
```

En el código anterior la función `type` nos sirve para identificar la clase/tipo de un objeto. De manera explícita se puede definir un valor entero utilizando la función `int`:

```
m = 5.0  
n = int(5.0)
```

```
type(m), type(n)
```

Operadores aritméticos

En cualquier lenguaje de programación los operadores aritméticos permiten realizar las operaciones aritméticas básicas con tipos numéricos, además de que permiten formar expresiones compuestas. En la Tabla C.1 se muestran los operadores aritméticos disponibles en Python y la operación que realizan.

Operación	Operador
Suma	+
Resta	-
Multiplicación	*
División	/
División entera	//
Módulo	%
Exponenciación	**

Tabla C.1 Operadores aritméticos

Operadores relacionales

Los operadores relacionales (o de comparación) nos permite efectuar comparaciones entre objetos de Python. El resultado de una comparación es un valor booleano **True** o **False**. En la Tabla C.2 se muestran los operadores relacionales que podemos utilizar en Python.

Operación	Operador
Igual que	==
Mayor que	>
Menor que	<
Menor o igual que	<=
Mayor o igual que	>=

Tabla C.2 Operadores relacionales

Operadores lógicos

Los operadores lógicos nos sirven para realizar operaciones de lógica booleana entre valores de tipo bool. En Python podemos utilizar los operadores lógicos **and**, **or** y **not**.

En la Tabla C.3 se muestra la tabla de verdad para los valores lógicos.

X	Y	X and Y	X or Y	not X
True	True	True	True	False
True	False	False	True	False
False	True	False	True	True
False	False	False	False	True

Tabla C.3 Tabla de verdad para operadores lógicos

Estructuras de control

En un lenguaje de programación, las estructuras de control permiten modificar el flujo de la ejecución de un conjunto de instrucciones. Se pueden distinguir tres tipos básicos de control de flujo, a saber:

- Control secuencial
- Control de selección
- Control de repetición

En el control secuencial las instrucciones se ejecutan de manera secuencial desde el inicio hasta el fin del programa. En el control de selección se tiene una condición que puede ser falsa o verdadera, dependiendo de esto se ejecutará uno u otro bloque de instrucciones. En el control de repetición, un bloque de instrucciones se ejecuta de manera repetitiva mientras una condición sea verdadera, en caso contrario el flujo de ejecución se pasará a otro conjunto de instrucciones.

Condicional if-elif-else

El condicional **if-elif-else** es una estructura de control de selección que sirve para tomar decisiones, basándose en la evaluación de condiciones y/o comparaciones, en el flujo del programa. La sintaxis más general para if-elif-else es:

```
if cond1:
    # hacer algo
elif cond2:
    # hacer otra cosa
...
elif condn:
    # hacer algo más
else:
    # hacer algo por default
```

Donde **cond1**, **cond2**, ..., **condn** son valores lógicos que resultan de una comparación. Esta estructura se evalúa secuencialmente hasta encontrar una condición que se cumpla, si ninguna lo hace, entonces se ejecuta la instrucción colocada en el caso por default else.

Hay que tener especial cuidado con las indentaciones de los bloques de código, en Python las indentaciones no son opcionales, tienen un significado sintáctico. La mayoría de los editores de código de Python indentarán de manera automática la siguiente línea, cada vez que coloques los dos puntos al final de una línea.

En el siguiente fragmento de código se muestra un programa que verifica si el valor de a es mayor, menor o igual al valor de b.

```
a = 10
b = 30

if a > b:
    print("a es mayor que b")
elif a < b:
    print("a es menor que b")
else:
    print("a es igual a b")
```

Es muy común que en algunos casos, por cuestiones inherentes a lo que se está programando, únicamente se decida entre dos posibilidades que son excluyentes, en esos casos basta con una estructura reducida **if-else**. Por ejemplo, el siguiente código determina si un número es par o impar (un número entero cualquiera o es par o es impar, no hay otra posibilidad).

```
n = 1001

if (-1)**(n) > 0:
    print("El número es par")
else:
    print("El número es impar")
```

La verificación que realiza el código anterior se basa en el hecho de que las potencias pares de -1 siempre serán 1, y las impares -1, es decir:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } n \text{ es par} \\ -1 & ; \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ciclo `for`

El bucle `for` es una estructura de control de repetición, en la cual se conocen a priori el número de iteraciones a realizar. En lenguajes como C++ o Java, el ciclo for necesita de una variable de ciclo de tipo entero que irá incrementándose en cada iteración. En Python, la cuestión es un poco diferente, el ciclo `for` recorre una secuencia y en la k-ésima iteración la variable de ciclo adopta el valor del elemento en la k-ésima posición de la secuencia.

De manera general, la sintaxis de `for` es:

```
for var in secuencia:  
    # Hacer algo ...
```

Donde var es la variable de ciclo o variable de control y secuencia la secuencia de valores que deberá iterarse. Es necesario remarcar la importancia de los dos puntos al final de esta primera línea y en indentar el bloque de código subsecuente que definirá el cuerpo del ciclo `for`.

Como primer ejemplo vamos a recorrer una lista de números y mostrarlos por consola:

```
numeros = [18,50,90,-20,100,80,37]  
for n in numeros:  
    print(n)
```

Observe que en cada iteración la variable de ciclo n adopta el valor de cada uno de los elementos de la lista numeros.

Como ya se mencionó, en Python la variable de ciclo no necesariamente adopta valores numéricos enteros secuenciales, si no valores dentro de una secuencia. Esta secuencia podría ser también una cadena de caracteres, por ejemplo:

```
palabra = "Python"  
for letra in palabra:  
    print(letra)
```

Dentro de un ciclo for podemos colocar cualquier otra instrucción de control de flujo. Un caso muy común es el de incluir otro ciclo for, algo que habitualmente se denota como ciclos anidados. Por ejemplo, supongamos que se requieren mostrar por consola todos los elementos de algunas listas contenidas dentro de otra lista principal, en ese caso se hace necesario primero iterar sobre la lista principal y enseguida hacerlo sobre las listas contenidas, por ejemplo:

```
matriz = [[-5,2,0], [9,5,6], [1,7,15]]
for fila in matriz:
    for elemento in fila:
        print(elemento)
```

Ciclo while

El ciclo while ejecuta un bloque de instrucciones mientras haya una condición que se cumpla. La sintaxis de while es:

```
while cond:
    # hacer algo
```

Donde **cond** es un valor de tipo booleano que usualmente resulta de realizar una comparación; mientras **cond** sea un valor booleano **True** entonces el bloque de instrucciones contenidas en while se ejecutarán. Veamos un ejemplo:

```
x = 1
while x < 5:
    print(x)
    x += 1
```

En el código anterior, inicialmente **x** tiene un valor de **1**, el flujo del programa entra en el ciclo while, puesto que la condición se cumple (dado que en ese momento **1 < 5**), posteriormente se ejecutan de manera repetitiva las instrucciones que están dentro del ciclo while, hasta que **x = 5**. La instrucción **x += 1** suma **1** al valor de **x** en cada iteración.

Aunque es menos común y poco práctico, con **while** podríamos iterar, como con **for**, sobre una secuencia:

```
nombre = "Pablo"
k = 0
while k < len(nombre):
    print(nombre[k])
    k += 1
```

El ciclo while suele ser muy utilizado en métodos numéricos, donde el número de iteraciones requeridas puede establecerse por el usuario de manera directa o bien mediante la indicación de una tolerancia. Por ejemplo, el método de Newton es un algoritmo que se

utiliza para aproximar raíces de una función real. Este método se puede establecer como sigue:

Sea f una función real derivable, y sea r un cero real de f . Si x_n es una aproximación a r , entonces la siguiente aproximación x_{n+1} está dada por:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde f' denota la derivada de f .

Vamos a aproximar una de las raíces de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3$, para ello necesitamos conocer también la derivada de esta función, derivando se tiene que $f'(x) = 3x^2 - 10x$. Observe el siguiente código implementado:

```
f = lambda x: x**3 - 5*x**2 + 3 # función f
fp = lambda x: 3*x**2 - 10*x # derivada de la función f'
nit = 5 # número de iteraciones
k = 0 # contador de iteraciones
xn = 0.5 # valor inicial

while k < nit:
    xnm1 = xn - ( f(xn) / fp(xn) )
    xn = xnm1
    k += 1
    print(f"N = {k} | xn = {xn}")
```

En **f** y **fp** se definen como funciones lambda las expresiones correspondientes a la función y su derivada, de manera respectiva. En la variable **nit** establecemos el número de iteraciones a realizar, la variable **k** funciona como un contador de iteraciones y en **xn** se guarda primeramente el valor inicial, y posteriormente, cada una de las aproximaciones realizadas.

Ahora veamos otro ejemplo, en donde se combina el uso de while con el condicional if-else.

```
from random import randint

print("Bienvenido a Adivina el Número!")
n = randint(1,10) # Genera un entero aleatorio en el intervalo [1,10]
k = 1 # número de intentos

while True:
```

```
x = int( input("Ingrese un entero entre 1 y 10: " ) )
if x == n:
    print(f"Has adivinado después de {k} intentos")
    break
else:
    print(f"{x} no es el número, intenta nuevamente\n")
k += 1
```

El código anterior es un juego muy simple de adivinar un número entero entre 1 y 10 que la computadora genera de manera aleatoria mediante la función `randint`. Observa que el ciclo `while`, en principio, se ejecutará de forma indefinida, dado que la condición es la constante booleana `True`; en este caso para romper la ejecución iterativa se hace uso de la instrucción `break`, en conjunto con la sentencia de selección `if-else`, observa que si la condición del `if` se cumple (`x == n`) entonces el programa rompe el ciclo while con la instrucción `break`, en caso contrario simplemente se sigue ejecutando el juego.

Funciones

Las funciones son porciones de código que nos sirven para modularizar nuestros programas y evitar en muchos casos la repetitividad de código. De manera general una función recibe algunos valores de entrada, los procesa y devuelve algunos valores de salida (o bien modifica algunas variables).

Funciones *built-in*

Python dispone de algunas funciones nativas que se cargan cuando se inicia el intérprete. Por ejemplo la función `max` devuelve el mayor valor numérico de una lista de números:

```
max([10,35,5,110,48,30,112,98,87])
```

También existe una función `min`, análoga a `max`:

```
min([10,35,5,110,48,30,112,98,87])
```

Otro ejemplo de función nativa es `bin`, la cual dado un número en base 10 devuelve una cadena con la representación en base 2.

```
bin(10)
```

Naturalmente, el valor devuelto por una función se puede asignar a una variable y posteriormente ser utilizado:

```
a = max([10,5,8])
b = min([10,5,8])
h = (a - b)/10
print(h)
```

Existen también funciones que aceptan más de un argumento, por ejemplo a la función **round** podemos pasarle dos argumentos: un número real y la cantidad de lugares decimales a considerar para el redondeo.

```
round(3.141592653589793, 6)
```

Hay funciones que no devuelven como tal un valor, si no que pueden modificar directamente alguna variable global o simplemente mostrar algo en la salida estándar como el caso de **print**. La función **print** se utiliza para mostrar en pantalla el valor (o la representación) de los objetos Python. A **print** le podemos pasar un sólo argumento, por ejemplo:

```
print("Hola mundo")
```

O una lista de argumentos que se mostrarán en consola:

```
print("hola", "mundo", 5, 8, [1,2,3])
```

Como se puede observar en la línea anterior, realmente, le podemos pasar cualquier objeto de Python y print nos devolverá la representación de dicho objeto.

Adicionalmente, también podemos indicar de manera explícita, mediante el keyword argument **sep**, el separador que queremos utilizar, por default el separador es un espacio.

```
print(20,30,"python", sep=",")
print("Hola", 90, 80, sep=" -- ")
```

La función **input** permite obtener entrada por teclado, con la finalidad de tomar información proporcionada por el usuario. La sintaxis de input es:

```
var = input(prompt)
```

Donde **prompt** es el mensaje que se muestra al usuario al momento que se le solicita la información, **var** es la variable en la cual se almacena lo que el usuario ingresa hasta que presiona la tecla Enter. Veamos un ejemplo:

```
nombre = input("Ingrese su nombre: ")
print("Hola", nombre, "bienvenido")
```

Como puedes observar, el programa anterior solicita al usuario un valor de entrada utilizando el prompt Ingrese su nombre: ; en este caso el usuario ingresó la cadena Jorge. Con la segunda línea únicamente se toma el valor guardado en la variable nombre y se muestra junto con las cadenas "Hola" "bienvenido".

Es importante tener en cuenta que la función input devuelve siempre un valor de tipo string. Así, si quisiéramos solicitar un valor de tipo numérico y realizar operaciones con él, entonces, se debe tener el cuidado de convertir el string a un tipo numérico de manera explícita, de lo contrario podríamos tener un programa que nos lance un error, o en el peor de los casos, que funcione de manera incorrecta.

```
# No podemos sumar un string con un entero
n = input("Ingrese un número: ")
print(n + 10)
```

```
# Aquí n+n+n corresponde a concatenar la cadena "12", en lugar de sumar los valores
# numéricos.
n = input("Ingrese un número: ")
print(n + n + n)
```

```
# Ahora n+n+n si corresponde a sumar dichos valores numéricamente
n = float( input("Ingrese un número: ") )
print(n + n + n)
```

Funciones definidas por el usuario

Además de las funciones nativas de Python, es posible definir nuestras propias funciones. En Python, de manera general, una función se define siguiendo la estructura mostrada a continuación:

```
def nombre_fun(arg1, arg2, ..., argN):
```

```
# Cuerpo de la función
#
#
#
# .
# .
# .

return val1, val2, ..., valN
```

Donde **def** es una palabra que debe anteceder siempre a la definición de una función, **nombre_fun** es el nombre que se asignará a la función, entre paréntesis y separados por comas se colocan los nombres de los argumentos de entrada, los dos puntos se colocan después de cerrar el paréntesis e indican que ahí termina el encabezado de la función y comenzará el cuerpo de la misma, aquí se colocarán todas las instrucciones que deberán realizarse; la palabra reservada **return** sirve para indicar los valores a devolver, mismos que se colocarán separados por comas.

Vamos a definir una función llamada **saluda**, la cual recibe un nombre (string) y devuelve un saludo (string) formado mediante concatenación:

```
def saluda(nombre):
    s = "Hola " + nombre + ", bienvenido."
    return s

print(saluda("Jorge"))
```

Lo único que hace la función anterior es tomar un string como argumento y unirlo a algunas cadenas ya establecidas dentro de la función.

C.2. Una introducción a NumPy

NumPy es una biblioteca fundamental en el ecosistema de Python para computación numérica. Su nombre proviene de "Numerical Python". La biblioteca proporciona soporte para arrays multidimensionales y matrices, junto con funciones matemáticas para operar eficientemente con estos arrays. NumPy es esencial para realizar cálculos numéricos en Python debido a su eficiencia y capacidad para manejar grandes conjuntos de datos.

C.3. Graficando con Matplotlib

Matplotlib es una librería Python que permite generar gráficas estáticas, animadas e interactivas. Matplotlib es ampliamente utilizado en la comunidad científica y de análisis

de datos debido a su flexibilidad y facilidad de uso.

La función `plot`

La función `plot` de Matplotlib se utiliza para crear gráficos de líneas en 2D. Es una de las funciones fundamentales de esta librería y permite visualizar datos de manera sencilla y efectiva. Esta función soporta varias maneras de ejecutarla dependiendo la cantidad de argumentos que se pasen.

La forma más básica de la función `plot` es pasarle un sólo argumento, por ejemplo:

```
plt.plot([1,2,1,0,-1,1])
```

Al pasarle un sólo argumento, este se toma como los valores de la coordenada vertical, y se asume que la horizontal varía de 0 a N-1, donde N es el número de elementos contenidos en la lista de valores que se introducen.

La sintaxis más habitual es introducir dos argumentos, donde el primero contiene una lista X que define los valores de la coordenada horizontal, y el segundo una lista Y correspondiente a los valores de la coordenada vertical, por ejemplo:

```
plt.plot([10,25,30,60,70,100], [100,200,-100,300,0,-250])
```

C.4. Álgebra simbólica con SymPy

SymPy es una biblioteca de Python para matemáticas simbólicas. A diferencia de NumPy, que se centra en la manipulación numérica y el cálculo con arrays, SymPy se especializa en la manipulación simbólica de expresiones matemáticas. En lugar de trabajar con valores numéricos, SymPy maneja símbolos algebraicos, variables y expresiones simbólicas.

Variables simbólicas

Las variables simbólicas son el alma de SymPy, todas las operaciones de álgebra simbólica se basan en estas. A una variable simbólica se le asigna un símbolo que la representa mediante la función `symbols`:

```
x = symbols("x")
```

Con la función `symbols` se define una nueva variable simbólica que se guarda en `x`, se puede verificar que se crea un objeto de la clase `Symbol`. Con la variable `x` ya definida se puede comenzar a formar expresiones algebraicas y efectuar manipulaciones.

Además de la forma anterior, también es posible tener variables simbólicas disponibles si se importan del módulo `abc` de SymPy:

```
from sympy.abc import a,b,c,d
```

Manipulación algebraica

SymPy es una poderosa herramienta de manipulación y simplificación algebraica, en lo subsiguiente se revisarán algunos casos elementales y se describirá el uso de las herramientas (funciones) que proporciona.

En primera instancia se definen algunas variables simbólicas a utilizar:

```
x,y,z = symbols("x,y,z")
a,b,c,d,k,m,n = symbols("a,b,c,d,k,m,n")
```

Para las expresiones algebraicas formadas en SymPy por default se evalúan y simplifican los términos semejantes. Vea los siguientes casos:

```
print( x**2 + 5*x**3 - 10*x**2 + 5*x - 10*(x + 1) )
print( a*b + c*d + x/y - 7*a*b )
```

Naturalmente para simplificaciones y operaciones un poco menos obvias, habrá que especificarle lo que se requiere. Una de las operaciones elementales de simplificación en álgebra es la factorización, SymPy dispone de la función `factor`, la cual toma una expresión algebraica y la factoriza conforme sea posible. Por ejemplo, suponiendo que se tiene la expresión $ab + ac$, es sencillo identificar que se puede factorizar como $a(b + c)$, SymPy hace lo mismo sin sobresalto alguno:

```
factor(a*b + a*c)
```

Vectores

Un vector denota una cantidad física que tiene magnitud y orientación en un determinado sistema de referencia. En SymPy los vectores se pueden definir mediante la clase Matrix del módulo matrices, de tal manera que en primera instancia haría falta importar dicho módulo, para esto hacemos:

```
>>> from sympy.matrices import Matrix
```

Ahora vamos a definir dos vectores **u** y **v**:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
>>> u = Matrix([2,1,-5])
>>> v = Matrix([4,-1,3])
```

Una suma y resta vectorial se pueden ejecutar sin muchas complicaciones, mediante los operadores aritméticos ya conocidos.

```
>>> u + v
Matrix([
[ 6],
[ 0],
[-2]])
```

```
>>> v - u
Matrix([
[ 2],
[-2],
[ 8]])
```

La magnitud de un vector se puede calcular utilizando el método **norm**:

```
>>> u.norm()
sqrt(30)
```

El producto escalar de dos vectores se puede calcular utilizando el método `dot`, por ejemplo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se puede especificar como:

```
>>> u.dot(v)
-8
```

Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de números o cantidades simbólicas. En SymPy, se definen utilizando la clase `Matrix`, pasándole como argumentos una lista de listas, donde cada sublistas corresponde a una fila de la matriz.

Por ejemplo, vamos a definir las matrices A , B y C , dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 50 & 100 \\ 10 & 35 & 200 \\ -30 & 20 & 80 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 26 & 45 \\ 3 & -15 & 18 \\ 54 & 20 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}$$

Primero, importamos la clase `Matrix` del módulo `matrices`:

```
>>> from sympy.matrices import Matrix
```

Luego escribiríamos:

```
>>> A = Matrix([[20,50,100], [10,35,200], [-30,20,80]])
>>> B = Matrix([[12,26,45],[3,-15,18],[54,20,0]])
>>> C = Matrix([[5,9], [2,3], [-10,8]])
```

De manera muy sencilla podríamos realizar operaciones matriciales básicas, por ejemplo, una suma:

```
>>> A + B
Matrix([
[32, 76, 145],
[13, 20, 218],
[24, 40, 80]])
```

Para la multiplicación de matrices utilizamos el operador `*`:

```
>>> A * C
Matrix([
[ -800, 1130],
[-1880, 1795],
[ -910, 430]])
```

Observe que si intentáramos efectuar el producto CA , Python lanzaría un **ShapeError**:

```
>>> C * A
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
  File "C:\Users\delos\anaconda3\lib\site-packages\sympy\core\decorators.py", line
    106, in binary_op_wrapper
    return func(self, other)
  File "C:\Users\delos\anaconda3\lib\site-packages\sympy\matrices\common.py", line
    2774, in __mul__
    return self.multiply(other)
  File "C:\Users\delos\anaconda3\lib\site-packages\sympy\matrices\common.py", line
    2796, in multiply
    raise ShapeError("Matrix size mismatch: %s * %s." % (
sympy.matrices.common.ShapeError: Matrix size mismatch: (3, 2) * (3, 3).
```

El determinante de una matriz podemos calcularlo mediante la función **det**:

```
>>> det(B)
60102
```

O bien, mediante el propio método **det**:

```
>>> B.det()
60102
```

La matriz inversa podemos calcularla utilizando el método **inv**:

```
>>> A.inv()
Matrix([
[ 6/1195, 2/239, -13/478],
[34/1195, -23/1195, 3/239],
[ -5/956, 19/2390, -1/1195]])
```

La transpuesta de una matriz se puede obtener accediendo al atributo **T**:

```
>>> C.T  
Matrix([  
[5, 2, -10],  
[9, 3, 8]])
```



Respuestas a ejercicios seleccionados

2. Posición, orientación y transformaciones homogéneas

Ejercicio 2.1

$$\mathbf{Q}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

Ejercicio 2.7

a)

$$\mathbf{Q}^0 = R_1^0 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200\sqrt{2} \\ 100\sqrt{3} \\ 100 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -282.8 \\ 173.2 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

b)

$$\mathbf{Q}^0 = R_1^0 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31.78 \\ 344.9 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

c)

$$\mathbf{Q}^0 = R_1^0 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -31.78 \\ 344.9 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Ejercicio 2.8

$$R_B^C = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.9

$$\alpha = 60^\circ; \quad \beta = 45^\circ; \quad \gamma = 90^\circ$$

3. Cinemática directa

4. Cinemática inversa

5. Cinemática diferencial

Ejercicio 5.1

$$J = \begin{bmatrix} -220 \sin(q_1) \cos(q_2) + 65 \cos(q_1) & -220 \sin(q_2) \cos(q_1) \\ 65 \sin(q_1) + 220 \cos(q_1) \cos(q_2) & -220 \sin(q_1) \sin(q_2) \\ 0 & 220 \cos(q_2) \\ 0 & \sin(q_1) \\ 0 & -\cos(q_1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.2

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} -206.17 \\ -253.76 \\ 256.68 \end{bmatrix} \text{ mm/s} \quad ; \quad \boldsymbol{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0.825 \\ -1.4289 \\ -0.75 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

Ejercicio 5.3

$$\mathbf{v}_{G_2} = \begin{bmatrix} -13.75 \\ -126.64 \\ 82.5 \end{bmatrix} \text{ mm/s}$$

Ejercicio 5.4

a)

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} -129.9 \\ -225.0 \\ 389.7 \end{bmatrix} \text{ mm/s}$$

b)

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ rad/s} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

c)

$$J = \begin{bmatrix} -259.81 & 0 \\ 0 & -150.0 \\ 0 & 259.81 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} -81.6 \\ -176.0 \\ 244.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.5

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.6

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} -216.7 \\ -381.17 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.7

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -l_3 \cos(q_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \sin(q_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Dinámica

Ejercicio 6.1

a)

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (135.43, 60) \text{ mm}$$

b)

$$I_{xx} = 2793.6 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{yy} = 12546.9 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{zz} = 15340.5 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

c)

$$I_{xy} = -4729.2 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

Bibliografía

- [1] Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M. (2020). Robot modeling and control (Second edition). John Wiley Sons, Inc.
- [2] Oriolo, G., Sciavicco, L., Siciliano, B., Villani, L. (2010). Robotics: Modelling, planning and control. Springer.
- [3] Barrientos, A. (2012). Fundamentos de Robótica. Espana: McGraw-Hill España.
- [4] Reza, N. J. (2010). Theory of Applied Robotics (2nd ed). Springer.
- [5] Stewart, J. (2018). Cálculo de una variables, trascendentes tempranas. Cengage.
- [6] Chapra, S. C., Canale, R. P. (2011). Metodos numericos para ingenieros (6a ed). McGraw Hill.
- [7] Hibbeler, R.C. (2010). Ingeniería mecánica - Dinámica (12va ed). Pearson Educación.
- [8] Williams, J.H. (2006). Fundamentals of Applied Dynamics. John Wiley Sons.
- [9] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1996). Mechanics (3rd ed). Butterworth-Heinemann.