

Resultantes de sistemas de fuerzas

4

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar el concepto del momento de una fuerza y mostrar cómo calcularla en dos y tres dimensiones.
- Proporcionar un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico.
- Definir el momento de un par.
- Presentar métodos para determinar las resultantes de sistemas de fuerzas no concurrentes.
- Indicar cómo reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una ubicación específica.

4.1 Momento de una fuerza, formulación escalar

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta producirá una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como *par de torsión*, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el *momento*. Por ejemplo, considere una llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la figura 4-1a. Si se aplica una fuerza al maneral de la llave ésta tenderá a girar el perno alrededor del punto O (o el eje z). La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de \mathbf{F} y a la distancia perpendicular o *brazo de momento* d . Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Observe que si se aplica la fuerza \mathbf{F} a un ángulo $\theta \neq 90^\circ$, figura 4-1b, entonces será más difícil girar el perno puesto que el brazo de momento $d' = d \sin \theta$ será menor que d . Si se aplica \mathbf{F} a lo largo de la llave, figura 4-1c, su brazo de momento será igual a cero puesto que la línea de acción de \mathbf{F} intersectará el punto O (el eje z). En consecuencia, el momento de \mathbf{F} respecto de O también es cero y no puede ocurrir el giro.

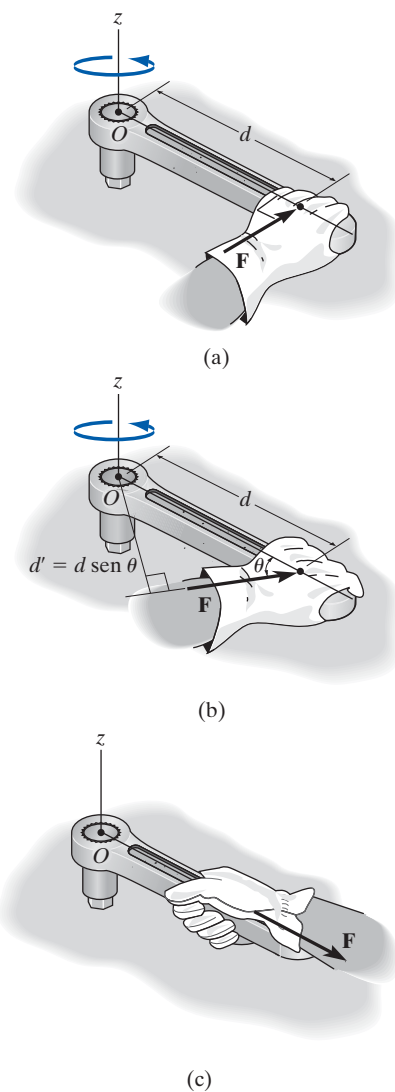


Fig. 4-1

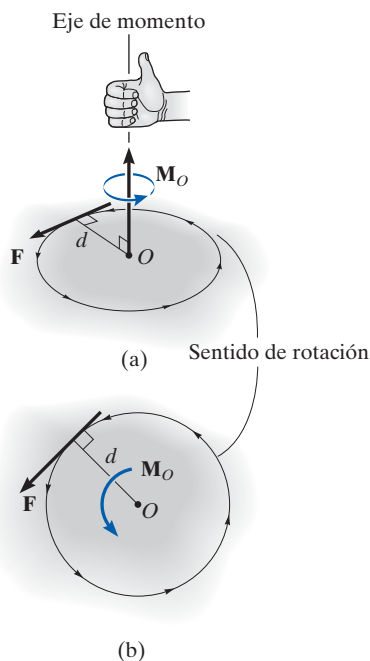


Fig. 4-2

Ahora podemos generalizar el análisis anterior y considerar la fuerza \mathbf{F} y el punto O que se encuentran en un plano sombreado como se muestra en la figura 4-2a. El momento \mathbf{M}_O con respecto al punto O , o con respecto a un eje que pase por O y sea perpendicular al plano, es una *cantidad vectorial* puesto que tiene magnitud y dirección específicas.

Magnitud. La magnitud de \mathbf{M}_O es

$$M_O = Fd \quad (4-1)$$

donde d es el *brazo de momento* o *distancia perpendicular* desde el eje en el punto O hasta la línea de acción de la fuerza. Las unidades de la magnitud del momento son el producto de la fuerza multiplicada por la distancia, es decir, $\text{N} \cdot \text{m}$ o $\text{lb} \cdot \text{pie}$.

Dirección. La dirección de \mathbf{M}_O está definida por su *eje de momento*, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza \mathbf{F} , y por su brazo de momento d . Para establecer el sentido de dirección de \mathbf{M}_O se utiliza la regla de la mano derecha. De acuerdo con esta regla, el curvado natural de los dedos de la mano derecha cuando éstos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación causada por el momento. Cuando se realiza esta acción, el pulgar de la mano derecha dará el sentido de la dirección de \mathbf{M}_O , figura 4-2a. Observe que, en tres dimensiones, el vector de momento se ilustra mediante una flecha curva alrededor de una flecha. En dos dimensiones, este vector se representa sólo con la flecha curva como en la figura 4-2b. Como en este caso el momento tenderá a causar una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el vector de momento se dirige en realidad hacia fuera de la página.

Momento resultante. Para problemas bidimensionales, donde todas las fuerzas se encuentran en el plano x - y , figura 4-3, el momento resultante $(\mathbf{M}_R)_O$ con respecto al punto O (el eje z) puede determinarse al *encontrar la suma algebraica* de los momentos causados por todas las fuerzas en el sistema. Como convención consideraremos de manera general los *momentos positivos* como *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* por estar dirigidos a lo largo del eje positivo z (fuera de la página). Los *momentos en el sentido de las manecillas del reloj* serán *negativos*. Al hacer esto, el sentido de dirección de cada momento puede representarse mediante un signo de *más* o de *menos*. Por lo tanto, si se utiliza esta convención de signos, el momento resultante en la figura 4-3 es

$$\zeta + (\mathbf{M}_R)_O = \Sigma Fd; \quad (\mathbf{M}_R)_O = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

Si el resultado numérico de esta suma es un escalar positivo, $(\mathbf{M}_R)_O$ será un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj (fuera de la página); y si el resultado es negativo, $(\mathbf{M}_R)_O$ será un momento en el sentido de las manecillas del reloj (dentro de la página).

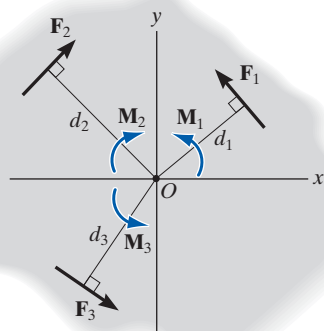


Fig. 4-3

EJEMPLO 4.1

Para cada caso ilustrado en la figura 4-4, determine el momento de la fuerza con respecto al punto O .

SOLUCIÓN (ANÁLISIS ESCALAR)

La línea de acción de cada fuerza está extendida como una línea discontinua para establecer el brazo de momento d . También se ilustra la tendencia de rotación del elemento causada por la fuerza. Además, la órbita de la fuerza respecto de O se muestra con una flecha curva de color azul. Entonces,

Fig. 4-4a $M_O = (100 \text{ N})(2 \text{ m}) = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$

Resp.

Fig. 4-4b $M_O = (50 \text{ N})(0.75 \text{ m}) = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$

Resp.

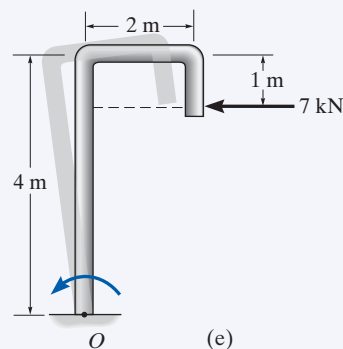
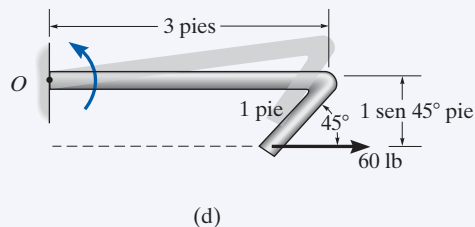
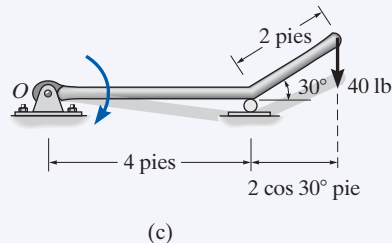
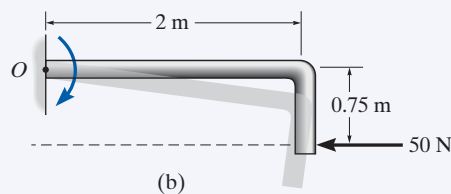
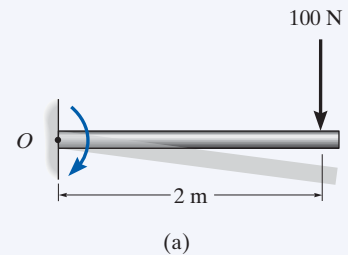
Fig. 4-4c $M_O = (40 \text{ lb})(4 \text{ pies} + 2 \cos 30^\circ \text{ pie})$
 $= 229 \text{ lb} \cdot \text{pie} \curvearrowright$

Resp.

Fig. 4-4d $M_O = (60 \text{ lb})(1 \text{ sen } 45^\circ \text{ pie}) = 42.4 \text{ lb} \cdot \text{pie} \curvearrowright$

Resp.

Fig. 4-4e $M_O = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

Resp.**Fig. 4-4**

EJEMPLO 4.2

Determine el momento resultante de las cuatro fuerzas que actúan sobre la barra de la figura 4-5 con respecto al punto O .

SOLUCIÓN

Si se supone que los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{k}$, es decir, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, tenemos

$$\zeta + M_{R_O} = \Sigma Fd;$$

$$M_{R_O} = -50 \text{ N}(2 \text{ m}) + 60 \text{ N}(0) + 20 \text{ N}(3 \text{ sen } 30^\circ \text{ m}) \\ -40 \text{ N}(4 \text{ m} + 3 \text{ cos } 30^\circ \text{ m})$$

$$M_{R_O} = -334 \text{ N} \cdot \text{m} = 334 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

Resp.

Para este cálculo, observe cómo se establecen las distancias de brazo de momento para las fuerzas de 20 N y 40 N desde las líneas de acción extendidas (línea discontinua) de cada una de estas fuerzas.

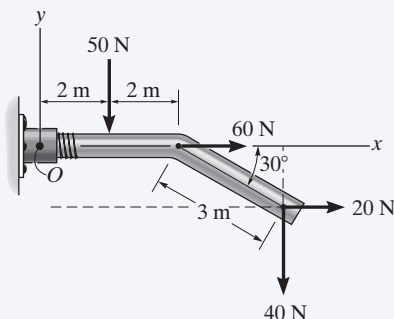
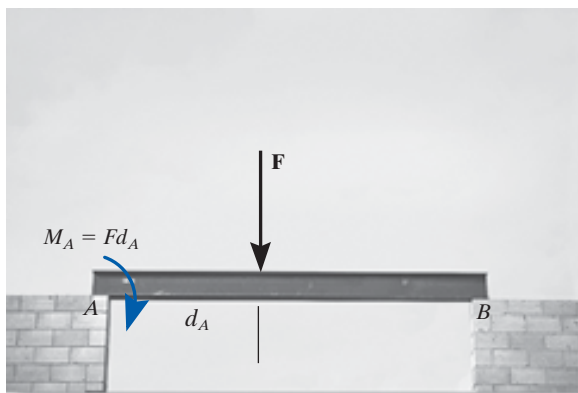
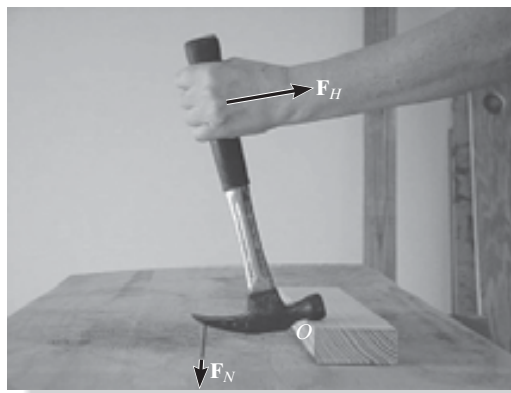


Fig. 4-5



Como se ilustra en los problemas de ejemplo, el momento de una fuerza no siempre ocasiona rotación. Por ejemplo, la fuerza \mathbf{F} tiende a girar la viga en el sentido de las manecillas del reloj en torno a su soporte en A con un momento $M_A = Fd_A$. Si se quitara el soporte en B se daría la rotación real.



Para poder sacar el clavo se requerirá que el momento de \mathbf{F}_H con respecto al punto O sea más grande que el momento de la fuerza \mathbf{F}_N con respecto a O que se necesita para sacar el clavo.