4.6 Momento de un par

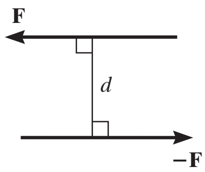


Fig. 4-25

Un *par* se define como dos fuerzas paralelas que tienen la misma magnitud, con direcciones opuestas, y están separadas por una distancia perpendicular d, figura 4-25. Como la fuerza resultante es cero, el único efecto de un par es producir una rotación o tendencia a rotar en una dirección específica. Por ejemplo, imagine que usted conduce un automóvil con ambas manos en el volante y está haciendo un giro. Una mano empujará el volante mientras que la otra lo jalará, con esto el volante girará.

El momento producido por un par se denomina *momento de par*. Podemos determinar su valor encontrando la suma de los momentos de ambas fuerzas del par con respecto a *cualquier* punto arbitrario. Por ejemplo, en la figura 4-26, los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ están dirigidos desde el punto O hasta los puntos A y B que se encuentran sobre la línea de acción de $-\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}$. Por lo tanto, el momento del par calculado con respecto a O es

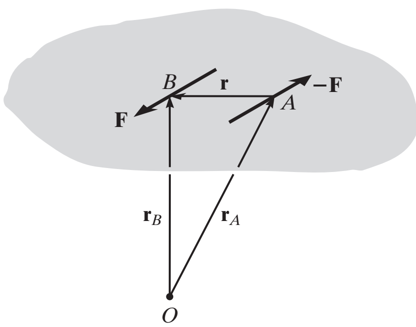


Fig. 4-26

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_A \times -\mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

Sin embargo, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$ o bien $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, de forma que

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-13}$$

Este resultado indica que un momento de par es un *vector libre*, es decir, puede actuar en *cualquier punto* ya que $\mathbf{M}$ depende *sólo* del vector de posición $\mathbf{r}$ dirigido *entre* las fuerzas y *no* de los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, dirigidos desde el punto arbitrario O hacia las fuerzas. Por lo tanto, este concepto es diferente al momento de una fuerza, que requiere un punto definido (o eje) con respecto al cual se determinan los momentos.

Formulación escalar. El momento de un par, $\mathbf{M}$, figura 4-27, se define con una *magnitud* de

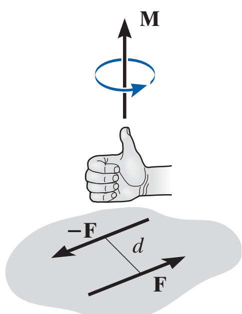


Fig. 4-27

$$\boxed{M = Fd} \tag{4-14}$$

donde F es la magnitud de una de las fuerzas y d la distancia perpendicular o brazo de momento entre las fuerzas. La *dirección* y el sentido del momento de par se determinan mediante la regla de la mano derecha, donde el pulgar indica la dirección cuando los dedos se cierran con el sentido de rotación causado por las dos fuerzas. En todos los casos, $\mathbf{M}$ actúa perpendicularmente al plano que contiene estas fuerzas.

Formulación vectorial. El momento de un par puede expresarse también por el vector producto cruz con la ecuación 4-13, es decir,

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{4-15}$$

La aplicación de esta ecuación se recuerda fácilmente si se piensa en tomar los momentos de ambas fuerzas con respecto a un punto que se encuentre sobre la línea de acción de una de las fuerzas. Por ejemplo, si los momentos se toman con respecto al punto A en la figura 4-26, el momento de $-\mathbf{F}$ es *cero* con respecto a este punto, y el momento de $\mathbf{F}$ se define a partir de la ecuación 4-15. Por lo tanto, en la formulación, $\mathbf{r}$ se multiplica vectorialmente por la fuerza $\mathbf{F}$ a la cual está dirigida.

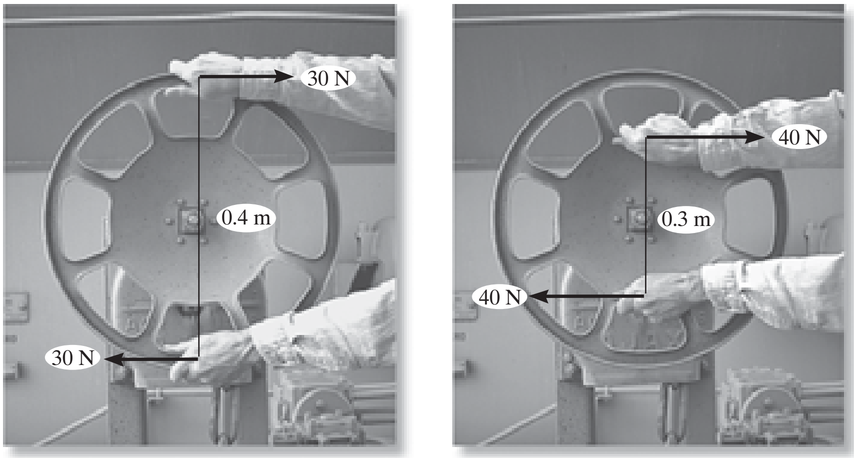


Fig. 4-28

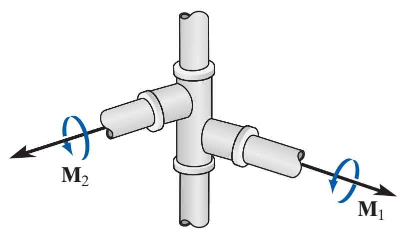
Pares equivalentes. Se dice que dos pares son *equivalentes* si producen un momento con la *misma magnitud y dirección*. Por ejemplo, los dos pares mostrados en la figura 4-28 son *equivalentes* porque cada momento de par tiene una magnitud de $M = 30\text{ N}(0.4\text{ m}) = 40\text{ N}(0.3\text{ m}) = 12\text{ N}\cdot\text{m}$, y cada uno de ellos está dirigido hacia el plano de la página. Observe que en el segundo caso se requieren fuerzas más grandes para crear el mismo efecto de giro, debido a que las manos están colocadas más cerca una de la otra. Además, si la rueda estuviera conectada al eje en un punto distinto de su centro, ésta giraría de igual forma al aplicar cada uno de los pares porque el par de $12\text{ N}\cdot\text{m}$ es un vector libre.

Momento de par resultante. Como los momentos de par son vectores libres, sus resultantes pueden determinarse mediante la suma de vectores. Por ejemplo, considere los momentos de par $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ que actúan sobre el tubo de la figura 4-29*a*. Como cada momento de par es un vector libre, podemos unir sus colas en cualquier punto arbitrario y encontrar el momento de par resultante, $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, como se muestra en la figura 4-29*b*.

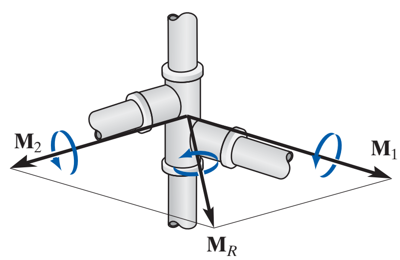
Si sobre el cuerpo actúan más de dos momentos de par, podemos generalizar este concepto y escribir el vector resultante como

$$\mathbf{M}_R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{4-16}$$

Estos conceptos se ilustran numéricamente en los ejemplos que siguen. En general, los problemas proyectados en dos dimensiones deben resolverse con un análisis escalar puesto que los brazos de momento y las componentes son fáciles de determinar.

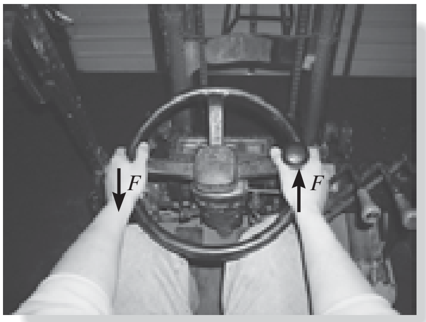


(a)



(b)

Fig. 4-29



Los volantes de los vehículos actuales se fabrican más pequeños que en los automóviles antiguos, debido a que de esta forma no se requiere que el conductor aplique un momento de par grande al rin de la rueda.

Puntos importantes

- Un momento de par lo producen dos fuerzas no colineales que son iguales en magnitud pero opuestas en dirección. Su efecto es producir una rotación pura, o una tendencia a girar en una dirección especificada.
- Un momento de par es un vector libre y, como resultado, causa el mismo efecto de rotación sobre un cuerpo independientemente de dónde se aplique al cuerpo.
- El momento de las dos fuerzas de par se puede determinar con respecto a *cualquier punto*. Por conveniencia, a menudo ese punto se selecciona sobre la línea de acción de una de las fuerzas para eliminar el momento de esta fuerza con respecto al punto.
- En tres dimensiones, el momento de par a menudo se determina por la formulación vectorial, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre la línea de acción de una de las fuerzas a *cualquier punto* sobre la línea de acción de otra fuerza $\mathbf{F}$.
- Un momento de par resultante es simplemente la suma vectorial de todos los momentos de par del sistema.

EJEMPLO 4.10

Determine el momento de par resultante de los tres pares que actúan sobre la placa de la figura 4-30.

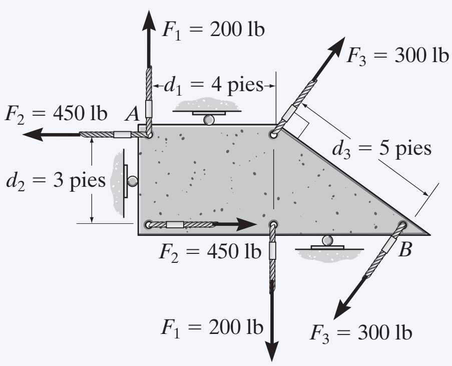


Fig. 4-30

SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura, las distancias perpendiculares entre cada par de fuerzas son $d_1 = 4$ pies, $d_2 = 3$ pies y $d_3 = 5$ pies. Si se considera que los momentos de par con sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos, tenemos

$$\circlearrowleft + M_R = \Sigma M; \; M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$

$$= (-200 \text{ lb})(4 \text{ pies}) + (450 \text{ lb})(3 \text{ pies})$$

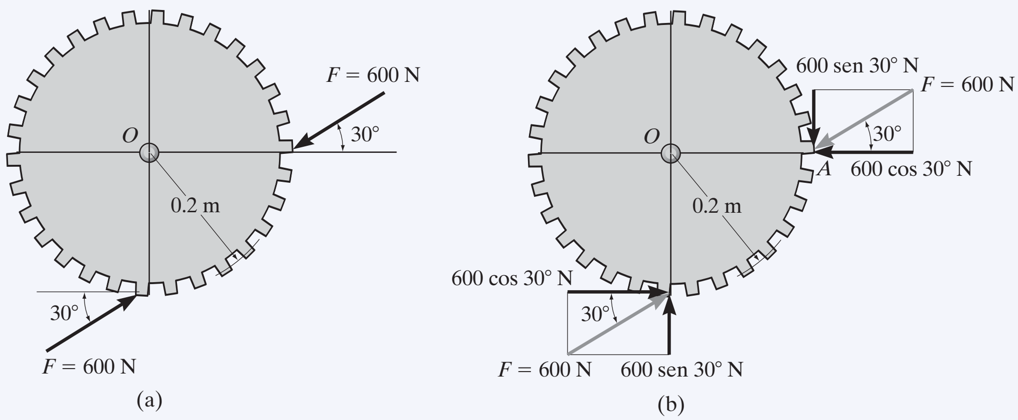
$$- (300 \text{ lb})(5 \text{ pies})$$

$$= -950 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 950 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowright$$ ***Resp.***

El signo negativo indica que $\mathbf{M}_R$ tiene un sentido rotacional en el sentido de las manecillas del reloj.

EJEMPLO 4.11

Determine la magnitud y la dirección del momento de par que actúa sobre el engrane de la figura 4-31*a*.



SOLUCIÓN

La solución más fácil requiere descomponer cada fuerza en sus componentes como se muestra en la figura 4-31*b*. El momento de par puede determinarse al sumar los momentos de estas componentes de fuerza con respecto a cualquier punto, por ejemplo, el centro O del engrane o el punto A. Si consideramos que los momentos con sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos, tenemos

$$\curvearrowleft + M = \Sigma M_O; \quad M = (600 \cos 30^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) - (600 \text{ sen } 30^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m})$$
$$= 43.9 \text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

o bien

$$\curvearrowleft + M = \Sigma M_A; \quad M = (600 \cos 30^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) - (600 \text{ sen } 30^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m})$$
$$= 43.9 \text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Este resultado positivo indica que **M** tiene un sentido de rotación inverso al de las manecillas del reloj, de manera que está dirigido hacia fuera, perpendicular a la página.

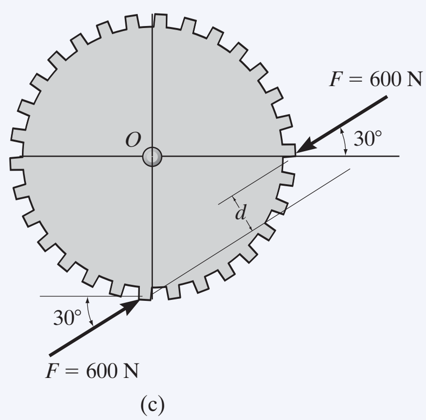
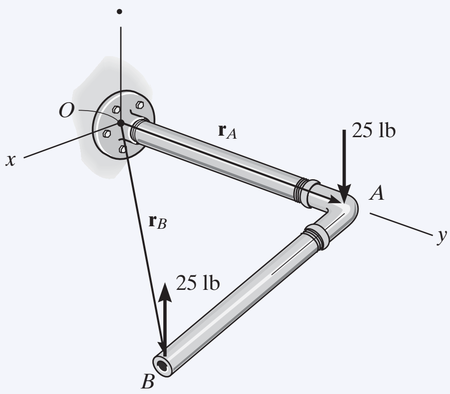


Fig. 4-31

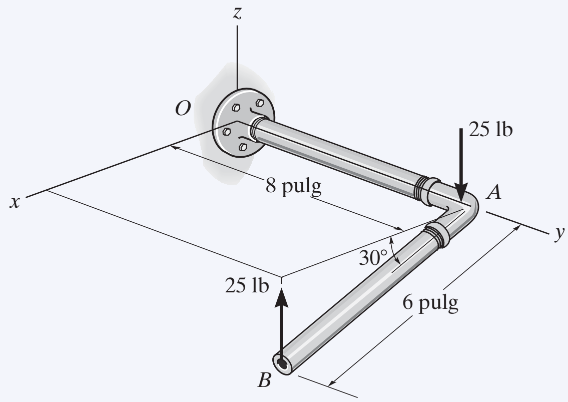
NOTA: también se puede obtener el mismo resultado con $M = Fd$, donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas, figura 4-31*c*. Sin embargo, el cálculo para d es más complicado. Observe que el momento de par es un vector libre, por lo que puede actuar en cualquier punto del engrane y produce el mismo efecto de giro con respecto al punto O.

EJEMPLO 4.12

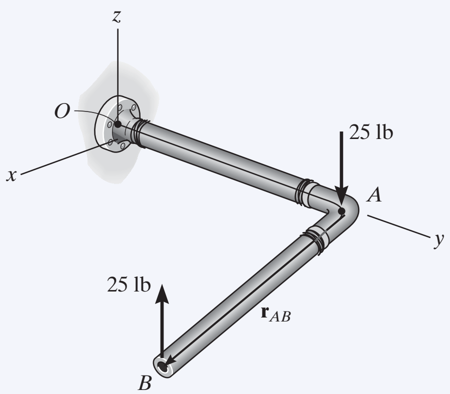
Determine el momento de par que actúa sobre el tubo de la figura 4-32*a*. El segmento *AB* está dirigido 30° por debajo del plano *x*-*y*.



(b)



(a)



(c)

SOLUCIÓN I *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

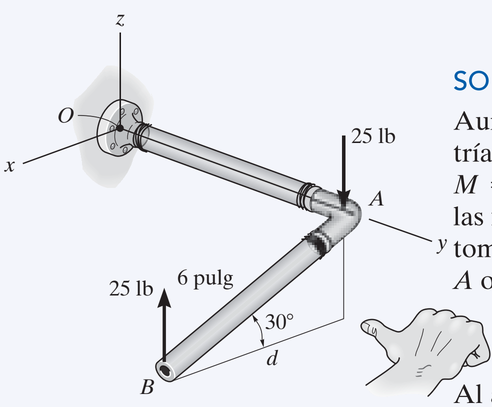
El momento de las dos fuerzas de par puede encontrarse con respecto a *cualquier punto*. Si se considera el punto *O*, figura 4-32*b*, tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (25\mathbf{k}) \\
&= (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6\cos 30^\circ\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\,\text{sen}\,30^\circ\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\
&= -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i} \\
&= \{-130\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}
\end{aligned}
$$

Es *más fácil* tomar momentos de las fuerzas de par con respecto a un punto que esté sobre la línea de acción de una de las fuerzas, por ejemplo, el punto *A*, figura 4-32*c*. En este caso, el momento de la fuerza en *A* es cero, por lo que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k}) \\
&= (6\cos 30^\circ\mathbf{i} - 6\,\text{sen}\,30^\circ\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\
&= \{-130\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}
\end{aligned}
$$

SOLUCIÓN II *(ANÁLISIS ESCALAR)*



(d)

Fig. 4-32

Aunque este problema se muestra en tres dimensiones, la geometría es suficientemente simple como para usar la ecuación escalar $M = Fd$. La distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas es $d = 6\cos 30^\circ = 5.196$ pulg, figura 4-32*d*. Por lo tanto, tomando momentos de las fuerzas con respecto a cualquier punto *A* o *B* resulta

$$M = Fd = 25\ \text{lb}(5.196\ \text{pulg}) = 129.9\ \text{lb}\cdot\text{pulg}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha, **M** actúa en la dirección $-\mathbf{j}$. Entonces,

$$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

EJEMPLO 4.13

Reemplace los dos pares que actúan sobre la columna tubular en la figura 4-33*a* por un momento de par resultante.

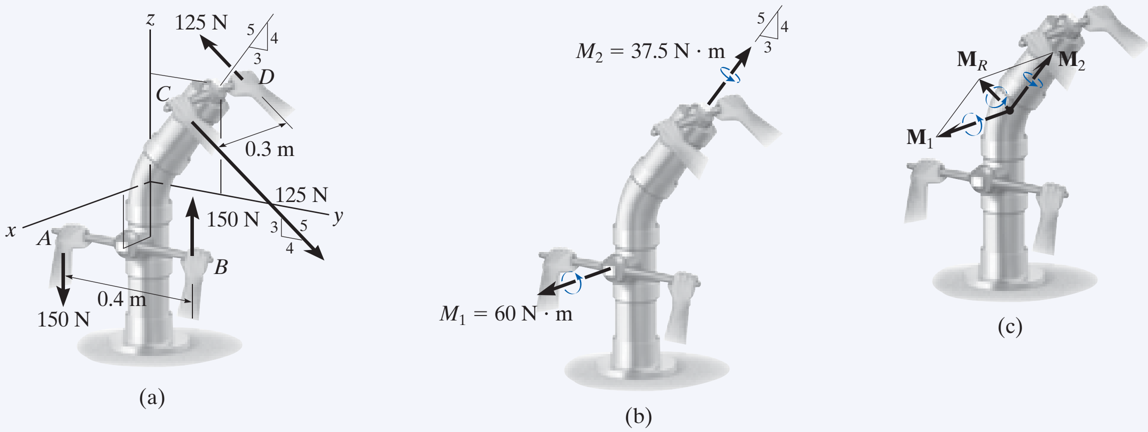


Fig. 4-33

4

SOLUCIÓN *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

El momento de par $\mathbf{M}_1$, desarrollado por las fuerzas presentes en A y B, pueden determinarse con facilidad a partir de una formulación escalar.

$$M_1 = Fd = 150 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por la regla de la mano derecha, $\mathbf{M}_1$ actúa en la dirección $+\mathbf{i}$, figura 4-33*b*. Por consiguiente,

$$\mathbf{M}_1 = \{60\mathbf{i}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se usará el análisis vectorial para determinar $\mathbf{M}_2$, causado por las fuerzas en C y D. Si los momentos se calculan con respecto al punto D, figura 4-33*a*, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_2 &= \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C = (0.3\mathbf{i}) \times \left[125\left(\tfrac{4}{5}\right)\mathbf{j} - 125\left(\tfrac{3}{5}\right)\mathbf{k}\right] \\
&= (0.3\mathbf{i}) \times [100\mathbf{j} - 75\mathbf{k}] = 30(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 22.5(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\
&= \{22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son vectores libres, pueden desplazarse hacia algún punto arbitrario y sumarse en forma vectorial, figura 4-33*c*. El momento de par resultante se convierte en

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \{60\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$