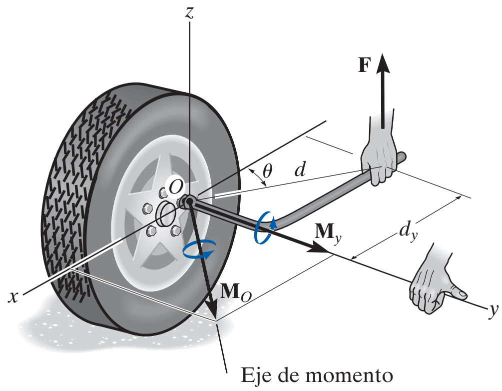
4.5 Momento de una fuerza con respecto a un eje específico

En ocasiones debe determinarse el momento producido por una fuerza con respecto a un *eje específico*. Por ejemplo, suponga que hay que aflojar la tuerca del punto O de la llanta de automóvil que se muestra en la figura 4-20*a*. La fuerza aplicada a la llave producirá una tendencia a que ésta y la tuerca giren en torno al *eje de momento* que pasa por O; sin embargo, la tuerca sólo puede girar alrededor del eje y. Por lo tanto, para determinar el efecto de giro, sólo se necesita la componente y del momento, y el momento total producido no es importante. Para determinar esta componente, podemos usar un análisis escalar o vectorial.



(a)

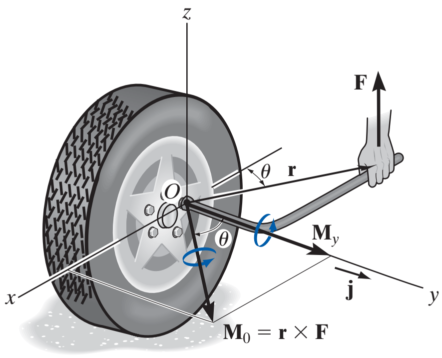
Fig. 4-20

4

Análisis escalar. Para usar un análisis escalar en el caso de la tuerca de la figura 4-20*a*, el brazo de momento o distancia perpendicular desde el eje hasta la línea de acción de la fuerza es $d_y = d \cos \theta$. Así, el momento de $\mathbf{F}$ respecto al eje y es $M_y = F\,d_y = F(d \cos \theta)$. De acuerdo con la regla de la mano derecha, $\mathbf{M}_y$ está dirigido a lo largo del eje y positivo como se muestra en la figura. En general, para cualquier eje a, el momento es

$$\boxed{M_a = F d_a} \qquad (4\text{-}10)$$

Si tiene un largo suficiente, la fuerza del cable **F** sobre el aguilón de esta grúa puede hacer que la grúa se voltee. Para investigar esto, el momento de la fuerza debe calcularse con respecto a un eje que pasa por la base de las piernas en A y B.



(b)

Fig. 4-20

4

Análisis vectorial. Para encontrar el momento de la fuerza **F** en la figura 4-20*b* con respecto al eje *y* por medio de un análisis vectorial, primero debemos determinar el momento de la fuerza con respecto a *cualquier punto O* sobre el eje *y*, y aplicar la ecuación 4-7, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La componente $\mathbf{M}_y$ a lo largo del eje *y* es la *proyección* de $\mathbf{M}_O$ sobre el eje *y*. Ésta puede encontrarse usando el *producto punto* analizado en el capítulo 2, de manera que $M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde **j** es el vector unitario para el eje *y*.

Este método puede generalizarse considerando que $\mathbf{u}_a$ es el vector unitario que especifica la dirección del eje *a* mostrada en la figura 4-21. Después, el momento de **F** con respecto al eje es $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. Esta combinación se denomina *triple producto escalar*. Si los vectores se escriben en su forma cartesiana, tenemos

$$\begin{aligned} M_a &= [u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}] \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= u_{a_x}(r_yF_z - r_zF_y) - u_{a_y}(r_xF_z - r_zF_x) + u_{a_z}(r_xF_y - r_yF_x) \end{aligned}$$

Este resultado también se puede escribir en la forma de un determinante, con lo que es más fácil memorizarlo.*

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{4-11}$$

donde

u_{ax}, u_{ay}, u_{az}	representan las componentes *x*, *y*, *z* del vector unitario que define la dirección del eje *a*
r_x, r_y, r_z	representan las componentes *x*, *y*, *z* del vector de posición trazado desde *cualquier punto O* sobre el eje *a* hacia *cualquier punto A* sobre la línea de acción de la fuerza
F_x, F_y, F_z	representan las componentes *x*, *y*, *z* del vector fuerza

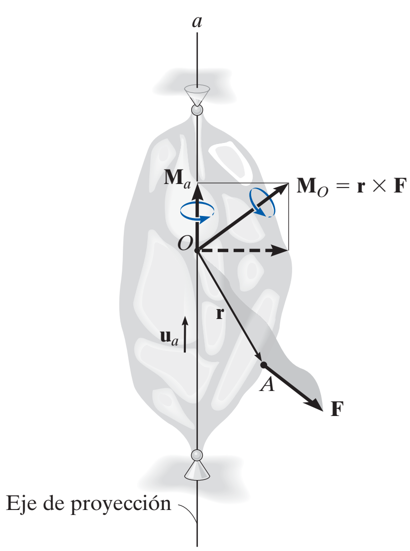


Fig. 4-21

Cuando M_a sea evaluado con la ecuación 4-11, generará un escalar positivo o negativo. El signo de este escalar indica el sentido de dirección de $\mathbf{M}_a$ a lo largo del eje *a*. Si es positivo, entonces $\mathbf{M}_a$ tendrá el mismo sentido que $\mathbf{u}_a$, mientras que si es negativo $\mathbf{M}_a$ actuará en sentido opuesto a $\mathbf{u}_a$.

Una vez determinado M_a, podemos expresar $\mathbf{M}_a$ como un vector cartesiano, a saber,

$$\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a \tag{4-12}$$

Los ejemplos siguientes ilustran aplicaciones numéricas de los conceptos descritos en esta sección.

*Tome un momento para desarrollar esta determinante, a fin de demostrar que producirá el resultado presentado.

Puntos importantes

- El momento de una fuerza con respecto a un eje específico puede determinarse siempre que la distancia perpendicular d_a desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje pueda ser determinada. $M_a = Fd_a$.
- Si se usa el análisis vectorial, $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde $\mathbf{u}_a$ define la dirección del eje y $\mathbf{r}$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre el eje hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza.
- Si M_a se calcula como un escalar negativo, entonces el sentido de dirección de $\mathbf{M}_a$ es opuesto a $\mathbf{u}_a$.
- El momento $\mathbf{M}_a$ expresado como un vector cartesiano se determina a partir de $\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a$.

4

EJEMPLO 4.7

Determine el momento resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura 4-22 con respecto al eje x, al eje y y al eje z.

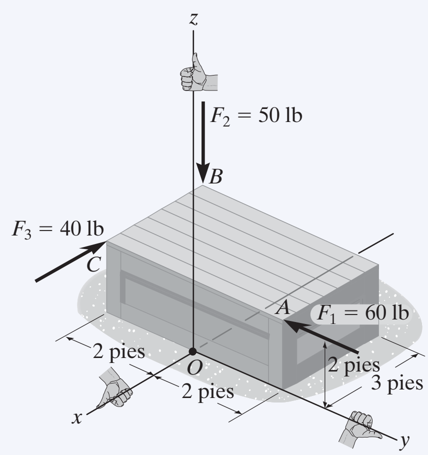


Fig. 4-22

SOLUCIÓN

Una fuerza que es *paralela* a un eje coordenado o tiene una línea de acción que pasa por el eje *no* produce ningún momento o tendencia a girar alrededor de ese eje. Por lo tanto, al definir la dirección positiva del momento de una fuerza de acuerdo con la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura, tenemos

$$M_x = (60 \text{ lb})(2 \text{ pies}) + (50 \text{ lb})(2 \text{ pies}) + 0 = 220 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$M_y = 0 - (50 \text{ lb})(3 \text{ pies}) - (40 \text{ lb})(2 \text{ pies}) = -230 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$M_z = 0 + 0 - (40 \text{ lb})(2 \text{ pies}) = -80 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Los signos negativos indican que $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ actúan en las direcciones $-y$ y $-z$, respectivamente.

EJEMPLO 4.8

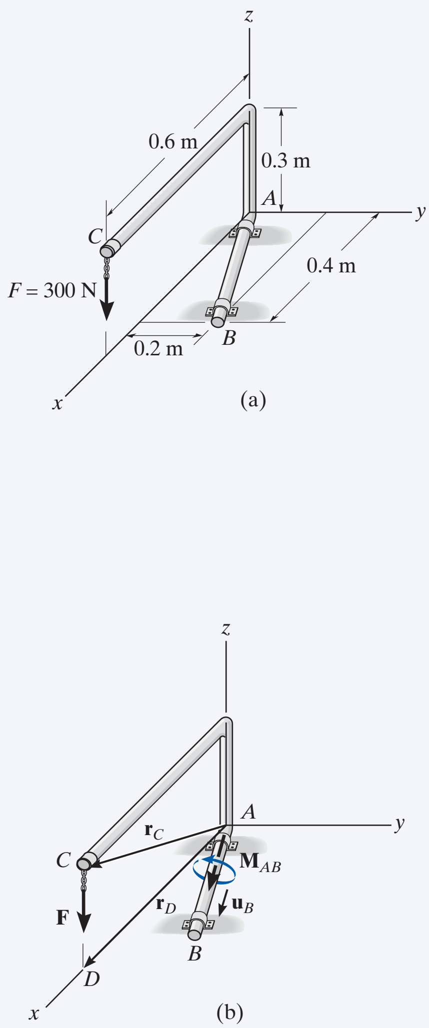


Fig. 4-23

Determine el momento $\mathbf{M}_{AB}$ producido por la fuerza $\mathbf{F}$ que se muestra en la figura 4-23*a*, la cual tiende a girar la barra con respecto al eje AB.

SOLUCIÓN

Para encontrar la solución, se considerará un análisis vectorial si usamos $M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ en vez de encontrar el brazo de momento o la distancia perpendicular desde la línea de acción de $\mathbf{F}$ hasta el eje AB. Ahora se identificará cada uno de los términos presentes en la ecuación.

El vector unitario $\mathbf{u}_B$ define la dirección del eje AB de la barra, figura 4-23*b*, donde

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{\{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (0.2\text{ m})^2}} = 0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}$$

El vector $\mathbf{r}$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre el eje AB hacia *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza. Por ejemplo, los vectores de posición $\mathbf{r}_C$ y $\mathbf{r}_D$ son los adecuados, figura 4-23*b*. (Aunque no se muestran en la figura, también se pueden usar $\mathbf{r}_{BC}$ o $\mathbf{r}_{BD}$.) Por simplicidad, seleccionamos $\mathbf{r}_D$, donde

$$\mathbf{r}_D = \{0.6\mathbf{i}\}\text{ m}$$

La fuerza es

$$\mathbf{F} = \{-300\mathbf{k}\}\text{ N}$$

Al sustituir estos vectores en la forma de determinante, y desarrollarlos tenemos

$$M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= 0.8944[0(-300) - 0(0)] - 0.4472[0.6(-300) - 0(0)] + 0[0.6(0) - 0(0)]$$

$$= 80.50\text{ N}\cdot\text{m}$$

Este resultado positivo indica que el sentido de $\mathbf{M}_{AB}$ es en la misma dirección que $\mathbf{u}_B$.

Al expresar $\mathbf{M}_{AB}$ como un vector cartesiano resulta,

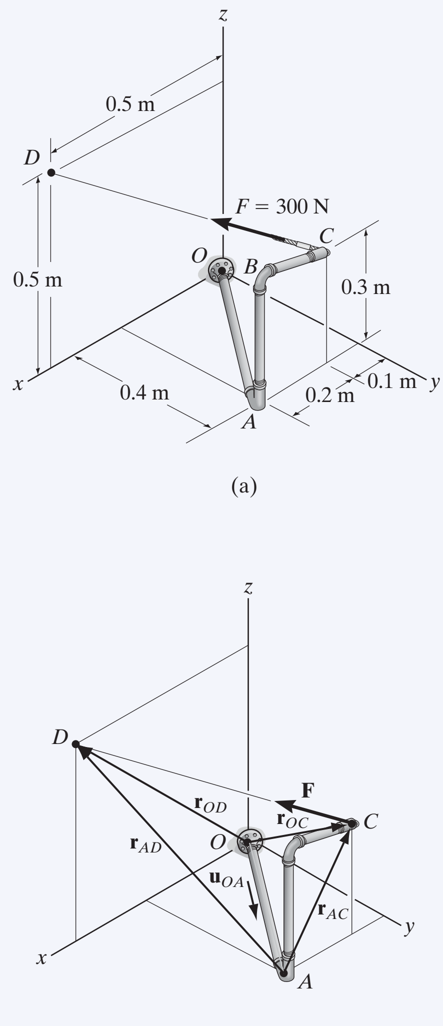
$$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\mathbf{u}_B = (80.50\text{ N}\cdot\text{m})(0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j})$$
$$= \{72.0\mathbf{i} + 36.0\mathbf{j}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***

El resultado se muestra en la figura 4-23*b*.

NOTA: si el eje AB se define con un vector unitario dirigido desde B hacia A, entonces en la formulación anterior tendría que haberse usado $-\mathbf{u}_B$. Esto conduciría a $M_{AB} = -80.50\text{ N}\cdot\text{m}$. En consecuencia, $\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}(-\mathbf{u}_B)$, y se obtendría el mismo resultado.

EJEMPLO 4.9

Determine la magnitud del momento de la fuerza **F** con respecto al segmento OA del ensamble de tubos que se muestra en la figura 4-24*a*.



(a)

(b)

Fig. 4-24

SOLUCIÓN

El momento de **F** con respecto al eje OA se determina a partir de $M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde **r** es un vector de posición que se extiende desde cualquier punto sobre el eje OA hasta cualquier punto sobre la línea de acción de **F**. Como se indica en la figura 4-24*b*, es posible usar $\mathbf{r}_{OD}$, $\mathbf{r}_{OC}$, $\mathbf{r}_{AD}$ o $\mathbf{r}_{AC}$; sin embargo, aquí se considerará $\mathbf{r}_{OD}$ porque esto simplificará los cálculos.

El vector unitario $\mathbf{u}_{OA}$, que especifica la dirección del eje OA, es

$$\mathbf{u}_{OA} = \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{\{0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.3\text{ m})^2 + (0.4\text{ m})^2}} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$$

y el vector de posición $\mathbf{r}_{OD}$ es

$$\mathbf{r}_{OD} = \{0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{k}\}\text{ m}$$

La fuerza **F** expresada como un vector cartesiano es

$$\mathbf{F} = F\left(\frac{\mathbf{r}_{CD}}{r_{CD}}\right)$$

$$= (300\text{ N})\left[\frac{\{0.4\mathbf{i} - 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (-0.4\text{ m})^2 + (0.2\text{ m})^2}}\right]$$

$$= \{200\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\}\text{ N}$$

Por lo tanto,

$$M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F})$$

$$= \begin{vmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 200 & -200 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= 0.6[0(100) - (0.5)(-200)] - 0.8[0.5(100) - (0.5)(200)] + 0$$

$$= 100\text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***

4