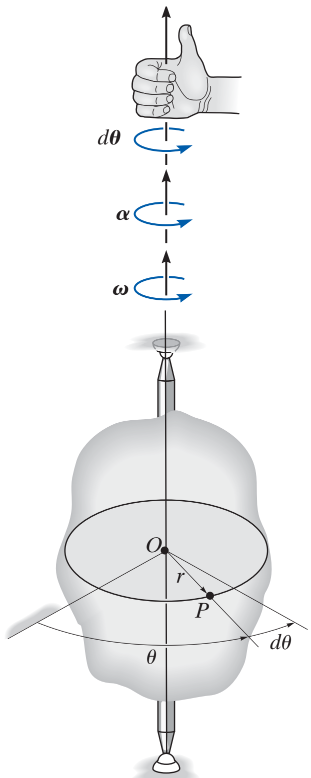
16.3 Rotación alrededor de un eje fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto P localizado en él se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular*. Para estudiar este movimiento es necesario analizar primero el movimiento angular del cuerpo alrededor del eje.

Movimiento angular. Como un punto no tiene dimensiones, no puede tener movimiento angular. *Solamente las líneas o cuerpos experimentan movimiento angular.* Por ejemplo, considere el cuerpo en la figura 16-4*a* y el movimiento angular de una línea radial r localizada en el plano sombreado.

Posición angular. En el instante que se muestra, la *posición angular* de r está definida por el ángulo θ, medido desde una línea de referencia *fija* hasta r.

Desplazamiento angular. El cambio de la posición angular, el cual puede medirse como una diferencial $d\boldsymbol{\theta}$, se llama *desplazamiento angular.** La *magnitud* de este vector es $d\theta$, medida en grados, radianes o revoluciones, donde 1 rev $= 2\pi$ rad. Como el movimiento es en torno a un *eje fijo*, la dirección de $d\boldsymbol{\theta}$ *siempre* es a lo largo de este eje. Específicamente, la *dirección* se determina con la regla de la mano derecha; es decir, los dedos de la mano derecha se curvan en el sentido de rotación, de modo que en este caso el pulgar, o $d\boldsymbol{\theta}$, apunta hacia arriba, figura 16-4*a*. En dos dimensiones, como se muestra en la vista desde arriba del plano sombreado, figura 16-4*b* tanto θ como $d\theta$ están en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y por tanto el pulgar apunta hacia fuera de la página.

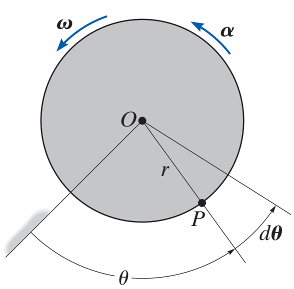


(a)

Velocidad angular. El cambio con respecto al tiempo de la posición angular se conoce como *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ (omega). Como $d\boldsymbol{\theta}$ ocurre durante un instante de tiempo dt, entonces,

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \qquad (16\text{-}1)$$

La *magnitud* de este vector se suele medir en rad/s. Aquí está expresado en forma escalar, puesto que su *dirección* también va a lo largo del eje de rotación, figura 16-4*a*. Cuando se indica el movimiento angular en el plano sombreado, figura 16-4*b*, podemos referirnos al sentido de rotación como en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario a las manecillas del reloj. En este caso elegimos *arbitrariamente* las rotaciones en sentido contrario a las manecillas del reloj como *positivas* y esto se indica por medio del bucle que aparece entre paréntesis al lado de la ecuación 16-1. Dese cuenta, sin embargo, que el sentido direccional de $\boldsymbol{\omega}$ en realidad es hacia fuera de la página.



(b)

Fig. 16-4

*En la sección 20.1 se demuestra que las rotaciones finitas o los desplazamientos angulares finitos *no* son cantidades vectoriales, aun cuando las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\theta}$ son vectores.

Aceleración angular. La *aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa) mide el cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular. La *magnitud* de este vector es

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \qquad (16\text{-}2)$$

Con la ecuación 16-1, también es posible expresar α como

$$(\circlearrowleft +) \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (16\text{-}3)$$

La línea de acción de $\boldsymbol{\alpha}$ es la misma que la de $\boldsymbol{\omega}$, figura 16-4*a*; sin embargo, su sentido de *dirección* depende de si $\boldsymbol{\omega}$ se incrementa o decrece. Si $\boldsymbol{\omega}$ decrece, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ se llama *desaceleración angular* y por consiguiente su dirección se opone a $\boldsymbol{\omega}$.

Al eliminar dt de las ecuaciones 16-1 y 16-2, obtenemos una relación diferencial entre la aceleración angular, la velocidad angular y el desplazamiento angular, es decir,

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega} \qquad (16\text{-}4)$$

La similitud entre las relaciones diferenciales del movimiento angular y las desarrolladas para movimiento rectilíneo de una partícula ($v = ds/dt$, $a = dv/dt$, y $a\, ds = v\, dv$) debe ser aparente.

Aceleración angular constante. Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_c$, entonces cuando se integran las ecuaciones 16-1, 16-2 y 16-4, se obtiene un conjunto de fórmulas que relacionan la velocidad angular, la posición angular de un cuerpo, y el tiempo. Estas ecuaciones son semejantes a las ecuaciones 12-4 a 12-6 que se utilizaron para movimiento rectilíneo. Los resultados son

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad (16\text{-}5)$$

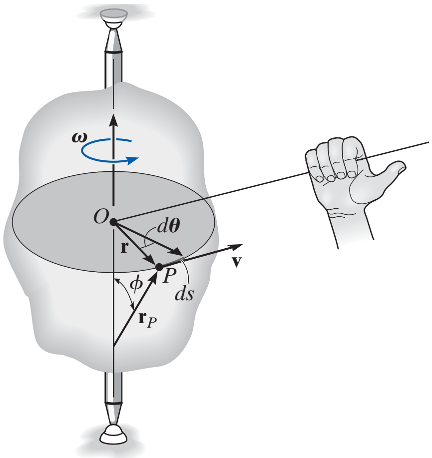
$$(\circlearrowleft +) \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad (16\text{-}6)$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \qquad (16\text{-}7)$$

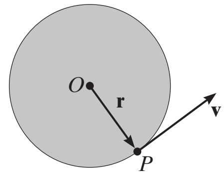
Aceleración angular constante

En este caso, θ_0 y ω_0 son los valores iniciales de la posición angular y la velocidad angular del cuerpo, respectivamente.

16



(c)



(d)

Fig. 16-4 (cont.)

Movimiento de un punto *P*. Cuando el cuerpo rígido de la figura 16-4*c* gira, el punto P se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular* de radio r con centro en el punto O. Esta trayectoria está contenida en el plano sombreado de la vista superior, figura 16-4*d*.

Posición y desplazamiento. La posición de P está definida por el vector de posición $\mathbf{r}$, el cual se extiende desde O hasta P. Si el cuerpo gira $d\theta$ entonces P se desplazará $ds = r\,d\theta$.

Velocidad. La magnitud de la velocidad de P se calcula al dividir $ds = r\,d\theta$ entre dt de modo que

$$\boxed{v = \omega r} \tag{16-8}$$

Como se muestra en las figuras 16-4*c* y 16-4*d*, la *dirección* de $\mathbf{v}$ es *tangente* a la trayectoria circular.

Tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{v}$ también pueden tenerse en cuenta si se utiliza el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_P$ (vea el apéndice B). En este caso, la dirección $\mathbf{r}_P$ es de *cualquier punto* sobre el eje de rotación al punto P, figura 16-4*c*. Tenemos

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P} \tag{16-9}$$

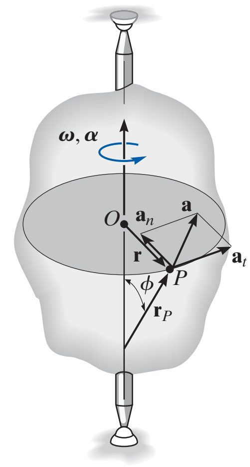
El orden de los vectores en esta formulación es importante, puesto que el producto vectorial no es conmutativo, es decir, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \boldsymbol{\omega}$. Observe en la figura 16-4*c* cómo se establece la dirección correcta de $\mathbf{v}$ con la regla de la mano derecha. Los dedos de la mano derecha se enroscan de $\boldsymbol{\omega}$ hacia $\mathbf{r}_P$ ($\boldsymbol{\omega}$ "cruz" $\mathbf{r}_P$). El pulgar indica la dirección correcta de $\mathbf{v}$, la cual es tangente a la trayectoria en la dirección del movimiento. De acuerdo con la ecuación B-8, la magnitud de $\mathbf{v}$ en la ecuación 16-9 es $v = \omega r_P$ seno ϕ, y puesto que $r = r_P$ seno ϕ, figura 16-4*c*, entonces $v = \omega r$, la cual concuerda con la ecuación 16-8. Como un caso especial, el vector de posición $\mathbf{r}$ puede elegirse para $\mathbf{r}_P$. Aquí, $\mathbf{r}$ queda en el plano del movimiento y de nueva cuenta la velocidad del punto P es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{16-10}$$

Aceleración. La aceleración de P puede expresarse en función de sus componentes normal y tangencial. Como $a_t = dv/dt$ y $a_n = v^2/\rho$, donde $\rho = r$, $v = \omega r$ y $\alpha = d\omega/dt$, tenemos

$$\boxed{a_t = \alpha r} \tag{16-11}$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 r} \tag{16-12}$$



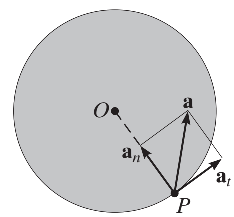
(e)

El *componente tangencial de la aceleración*, figuras 16-4*e* y 16-4*f*, representa el cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad. Si la rapidez de P se incrementa, entonces $\mathbf{a}_t$ actúa en la misma dirección que $\mathbf{v}$; si se reduce, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección opuesta de $\mathbf{v}$, y finalmente, si permanece constante, $\mathbf{a}_t$ es cero.

La *componente normal de la aceleración* representa el cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. La *dirección* de $\mathbf{a}_n$ siempre es hacia O, el centro de la trayectoria circular, figuras 16-4*e* y 16-4*f*.

Al igual que la velocidad, la aceleración del punto P puede expresarse en función del producto vectorial (producto cruz). Si consideramos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-9, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$



(f)

Fig. 16-4 (cont.)

Si se recuerda que $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ y se utiliza la ecuación 16-9 ($d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$), se obtiene

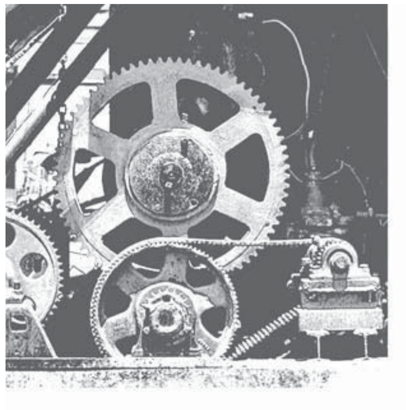
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \tag{16-13}$$

Por la definición del producto vectorial, la magnitud del primer término de la derecha es $a_t = \alpha r_P \operatorname{seno} \phi = \alpha r$, y por la regla de la mano derecha, $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$ está en la dirección de $\mathbf{a}_t$, figura 16-4*e*. Asimismo, la magnitud del segundo término es $a_n = \omega^2 r_P \operatorname{seno} \phi = \omega^2 r$, y al aplicar la regla de la mano derecha dos veces, primero para determinar el resultado $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ entonces $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P$, se ve que este resultado está en la misma dirección que $\mathbf{a}_n$, como se muestra en la figura 16-4*e*. Si observamos que ésta también es la *misma* dirección que $-\mathbf{r}$, la cual queda en el plano del movimiento, podemos expresar $\mathbf{a}_n$ en una forma mucho más simple que $\mathbf{a}_n = -\omega^2\mathbf{r}$. Por consiguiente, la ecuación 16-13 puede identificarse por sus dos componentes como

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} \end{aligned}} \tag{16-14}$$

Puesto que $\mathbf{a}_t$ y $\mathbf{a}_n$ son perpendiculares entre sí, si se requiere, la magnitud de la aceleración puede determinarse con el teorema de Pitágoras, es decir, $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, figura 16-4*f*.

16



Los engranes utilizados en la operación de una grúa giran alrededor de ejes fijos. Los ingenieros deben ser capaces de relacionar sus movimientos angulares para diseñar apropiadamente este sistema de engranes.

Puntos importantes

- Un cuerpo puede experimentar dos tipos de traslación. Durante la traslación rectilínea todos los puntos siguen trayectorias de línea recta paralelas, y durante la traslación curvilínea los puntos siguen trayectorias curvas que tienen la misma forma y son equidistantes una de otra.
- Todos los puntos de un cuerpo que se traslada se mueven con la misma velocidad y aceleración.
- Los puntos localizados en un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo siguen trayectorias circulares.
- La relación $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$ se deriva de $\alpha = d\omega/dt$ y $\omega = d\theta/dt$ al eliminar dt.
- Una vez conocidos los movimientos angulares ω y α, pueden determinarse la velocidad y aceleración de cualquier punto del cuerpo.
- La velocidad siempre actúa tangente a la trayectoria del movimiento.
- La aceleración tiene dos componentes. La aceleración tangencial mide el cambio de la magnitud de la velocidad y se determina con $a_t = \alpha r$. La aceleración normal mide el cambio de la dirección de la velocidad y se determina con $a_n = \omega^2 r$.

Procedimiento para el análisis

La velocidad y aceleración de un punto localizado en un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo se determinan mediante el siguiente procedimiento.

Movimiento angular.

- Establezca el sentido positivo de rotación alrededor del eje de rotación y muéstrelo junto a cada ecuación cinemática conforme se aplique.
- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables α, ω, θ y t, entonces puede obtenerse una tercera variable al usar una de las siguientes ecuaciones cinemáticas, la cual relaciona las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

- Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, entonces pueden utilizarse las siguientes ecuaciones:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- Una vez que se obtiene la solución, el sentido de θ, ω y α se determina con el signo algebraico de sus cantidades numéricas.

Movimiento de un punto *P*.

- En la mayoría de los casos, la velocidad de P y sus dos componentes de aceleración se determinan con las ecuaciones escalares

$$v = \omega r$$
$$a_t = \alpha r$$
$$a_n = \omega^2 r$$

- Si la geometría del problema es difícil de visualizar, deberán utilizarse las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2\mathbf{r}$$

- En este caso la dirección de $\mathbf{r}_P$ es desde cualquier punto sobre el eje de rotación al punto P, mientras que $\mathbf{r}$ queda en el plano del movimiento de P. Cualquiera de estos vectores, junto con $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, deberán expresarse en función de sus componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, y, si es necesario, los productos vectoriales determinados al utilizar una expansión determinante (vea la ecuación B-12).

16

EJEMPLO 16.1

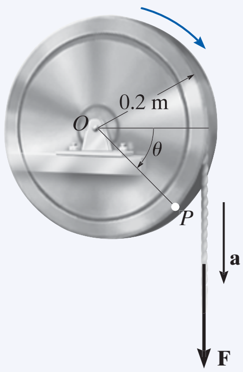


Fig. 16-5

Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura 16-5, la cual inicialmente está en reposo cuando $\theta = 0$. Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una aceleración $a = (4t)$ m/s^2, donde t está en segundos, determine, como una función del tiempo, (a) la velocidad angular de la rueda, y (b) la posición angular de la línea OP en radianes.

SOLUCIÓN

Parte (a). La rueda está sometida a rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O. Por tanto, un punto P en la rueda describe una trayectoria circular y su aceleración tiene componentes *tanto* tangenciales como normales. La componente tangencial es $(a_P)_t = (4t)$ m/s^2, puesto que la cuerda está enrollada alrededor de la rueda y se desplaza *tangente* a ella. Por consiguiente, la aceleración angular de la rueda es

$$(\circlearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$

$$(4t)\ \text{m/s}^2 = \alpha(0.2\ \text{m})$$

$$\alpha = (20t)\ \text{rad/s}^2 \circlearrowright$$

Con este resultado y $\alpha = d\omega/dt$, ahora podemos determinar la velocidad ω angular de la rueda, puesto que esta ecuación relaciona α, t y ω. Al integrar, con la condición inicial de que $\omega = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene

$$(\circlearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \text{rad/s}^2$$

$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 20t\ dt$$

$$\omega = 10t^2\ \text{rad/s} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Parte (b). Con este resultado y $\omega = d\theta/dt$, podemos determinar la posición angular θ de OP, puesto que esta ecuación relaciona θ, ω y t. Al integrar, con la condición inicial de que $\theta = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t 10t^2\ dt$$

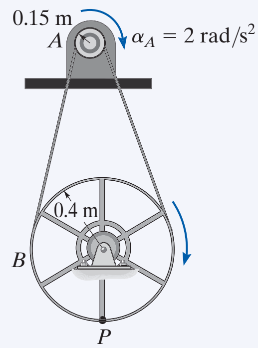
$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

NOTA: no podemos utilizar la ecuación de aceleración angular constante, puesto que α es una función del tiempo.

16

EJEMPLO 16.2

El motor que se muestra en la fotografía se utiliza para hacer girar un ensamble de rueda y soplador alojado en la caja. Los detalles del diseño se muestran en la figura 16-6*a*. Si la polea *A* conectada al motor comienza a girar desde el punto de reposo con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 2 \text{ rad/s}^2$, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del punto *P* en la rueda, después de que la polea ha realizado dos revoluciones. Suponga que la banda de transmisión no se resbala en la polea y la rueda.



(a)

SOLUCIÓN

Movimiento angular. Primero convertiremos las dos revoluciones en radianes. Como una revolución equivale a 2π rad, entonces

$$\theta_A = 2 \text{ rev}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 12.57 \text{ rad}$$

Como α_A es constante, la velocidad angular de la polea *A* es por consiguiente

$$(\circlearrowright +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$\omega_A^2 = 0 + 2(2 \text{ rad/s}^2)(12.57 \text{ rad} - 0)$$

$$\omega_A = 7.090 \text{ rad/s}$$

La banda tiene la misma velocidad y componente tangencial de la aceleración cuando pasa por la polea y la rueda. Por tanto,

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B; \;\; 7.090 \text{ rad/s } (0.15 \text{ m}) = \omega_B(0.4 \text{ m})$$

$$\omega_B = 2.659 \text{ rad/s}$$

$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B; \;\; 2 \text{ rad/s}^2 \,(0.15 \text{ m}) = \alpha_B(0.4 \text{ m})$$

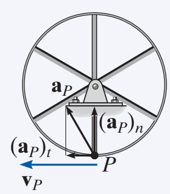
$$\alpha_B = 0.750 \text{ rad/s}^2$$

Movimiento de *P*. Como se muestra en el diagrama cinemático en la figura 16-6*b*, tenemos

$$v_P = \omega_B r_B = 2.659 \text{ rad/s } (0.4 \text{ m}) = 1.06 \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0.750 \text{ rad/s}^2 \,(0.4 \text{ m}) = 0.3 \text{ m/s}^2$$

$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (2.659 \text{ rad/s})^2(0.4 \text{ m}) = 2.827 \text{ m/s}^2$$



(b)

Fig. 16-6

Por tanto

$$a_P = \sqrt{(0.3 \text{ m/s}^2)^2 + (2.827 \text{ m/s}^2)^2} = 2.84 \text{ m/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$