

## 5.3 Ecuaciones de equilibrio

En la sección 5.1 desarrollamos las dos ecuaciones que se requieren y bastan para obtener el equilibrio de un cuerpo rígido, esto es,  $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ . Cuando el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, las cuales se encuentran en el plano  $x$ - $y$ , las fuerzas se pueden descomponer en sus componentes  $x$  y  $y$ . En consecuencia, las condiciones de equilibrio en dos dimensiones son

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0\end{aligned}\quad (5-2)$$

Aquí,  $\Sigma F_x$  y  $\Sigma F_y$  representan, respectivamente, las sumas algebraicas de las componentes  $x$  y  $y$  de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y  $\Sigma M_O$  representa la suma algebraica de los momentos de par y los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto al eje  $z$ , el cual es perpendicular al plano  $x$ - $y$  y que pasa por el punto arbitrario  $O$ .

### Conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio.

Aunque las ecuaciones 5-2 se usan con *mayor frecuencia* para resolver problemas de equilibrio coplanar, pueden usarse también dos conjuntos *alternativos* de tres ecuaciones de equilibrio independientes. Uno de estos conjuntos es

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0\end{aligned}\quad (5-3)$$

Al usar estas ecuaciones se requiere que una línea que pase por los puntos  $A$  y  $B$  *no sea paralela* al eje  $y$ . Para probar que las ecuaciones 5-3 proporcionan las *condiciones* de equilibrio, considere el diagrama de cuerpo libre de la placa que se muestra en la figura 5-11a. Con los métodos de la sección 4.8, todas las fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre pueden reemplazarse por una fuerza resultante equivalente  $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$ , que actúan en el punto  $A$ , y un momento de par resultante  $\mathbf{M}_{R_A} = \Sigma \mathbf{M}_A$ , figura 5-11b. Si se satisface  $\Sigma M_A = 0$ , es necesario que  $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$ . Además, para que  $\mathbf{F}_R$  satisfaga a  $\Sigma F_x = 0$ , *no debe tener componentes* a lo largo del eje  $x$ , y por lo tanto,  $\mathbf{F}_R$  debe ser paralela al eje  $y$ , figura 5-11c. Finalmente, se requiere que  $\Sigma M_B = 0$ , donde  $B$  no se encuentra sobre la línea de acción de  $\mathbf{F}_R$ , entonces  $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ . Como las ecuaciones 5-3 muestran que ambas resultantes son iguales a cero, ciertamente el cuerpo que aparece en la figura 5-11a debe estar en equilibrio.

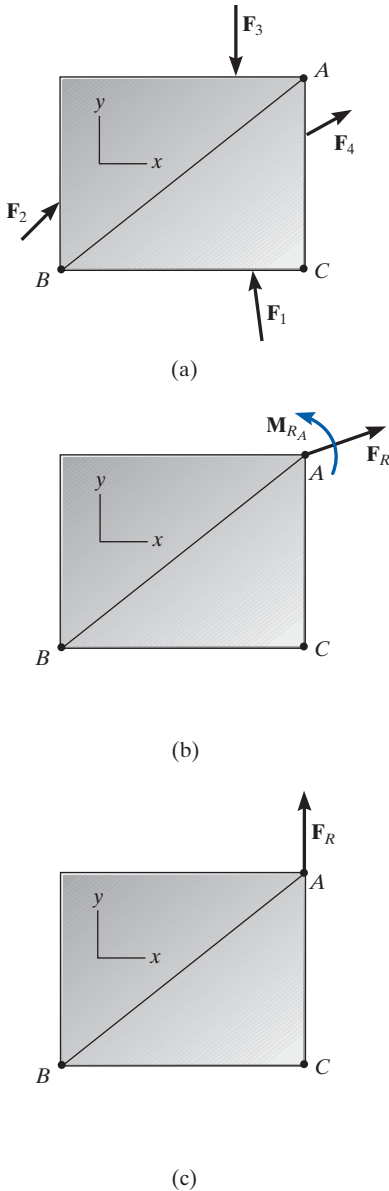


Fig. 5-11

Un segundo conjunto alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \\ \Sigma M_C &= 0\end{aligned}\quad (5-4)$$

Aquí es necesario que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no se encuentren en la misma línea. Para probar que al satisfacer esas ecuaciones se garantiza el equilibrio, considere de nuevo el diagrama de cuerpo libre de la figura 5-11b. Si  $\Sigma M_A = 0$  debe ser satisfecha, entonces  $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$ .  $\Sigma M_C = 0$  se satisface si la línea de acción de  $\mathbf{F}_R$  pasa por el punto  $C$  como se muestra en la figura 5-11c. Por último, si requerimos que  $\Sigma M_B = 0$ , es necesario que  $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ , y entonces la placa de la figura 5-11a debe estar en equilibrio.

## Procedimiento para el análisis

Los problemas de equilibrio de fuerzas coplanares para un cuerpo rígido pueden resolverse por el siguiente procedimiento.

### Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca los ejes coordenados  $x$ ,  $y$  en cualquier orientación adecuada.
- Trace un contorno del cuerpo.
- Muestre todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Marque todas las cargas y especifique sus direcciones relativas a los ejes  $x$  o  $y$ . El sentido de una fuerza o momento de par que tiene una magnitud *desconocida*, pero línea de acción conocida, puede *suponerse*.
- Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Aplique la ecuación de equilibrio de momentos,  $\Sigma M_O = 0$ , con respecto a un punto ( $O$ ) que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas. De este modo, los momentos de esas incógnitas son cero con respecto a  $O$ , y se puede determinar una *solución directa* para la tercera incógnita.
- Al aplicar las ecuaciones de equilibrio mediante fuerzas,  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$ , oriente los ejes  $x$  y  $y$  a lo largo de líneas que proporcionen la descomposición más simple de las fuerzas en sus componentes  $x$  y  $y$ .
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da como resultado un escalar negativo para una magnitud de fuerza o de momento de par, esto indica que el sentido es contrario al que se supuso en el diagrama de cuerpo libre.

## EJEMPLO 5.5

Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en la viga, causada por el pasador en  $B$  y el soporte de mecedora en  $A$ , como se muestra en la figura 5-12a. No tome en cuenta el peso de la viga.

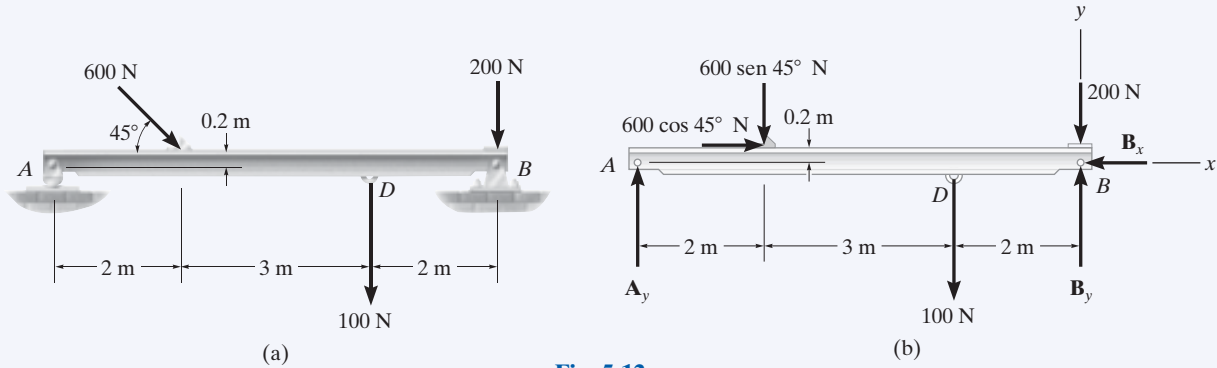


Fig. 5-12

## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Identifique cada una de las fuerzas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 5-12b. (Vea el ejemplo 5.1). Por sencillez, la fuerza de 600 N se representa mediante sus componentes  $x$  y  $y$  como se muestra en la figura 5-12b.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar las fuerzas en la dirección  $x$  se obtiene

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 600 \cos 45^\circ \text{ N} - B_x = 0$$

$$B_x = 424 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Una solución directa para  $A_y$  se puede obtener mediante la ecuación de momentos  $\Sigma M_B = 0$  con respecto al punto  $B$ .

$$\begin{aligned} \zeta + \Sigma M_B = 0; \quad & 100 \text{ N}(2 \text{ m}) + (600 \sin 45^\circ \text{ N})(5 \text{ m}) \\ & - (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) - A_y(7 \text{ m}) = 0 \\ A_y = 319 \text{ N} \quad & \text{Resp.} \end{aligned}$$

Al sumar fuerzas en la dirección  $y$ , y usar este resultado, obtenemos

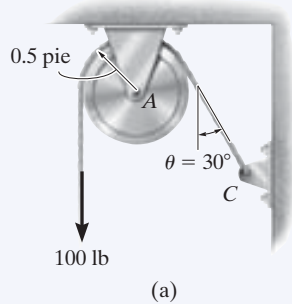
$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad & 319 \text{ N} - 600 \sin 45^\circ \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0 \\ B_y = 405 \text{ N} \quad & \text{Resp.} \end{aligned}$$

**NOTA:** podemos verificar este resultado al sumar momentos con respecto al punto  $A$ .

$$\begin{aligned} \zeta + \Sigma M_A = 0; \quad & -(600 \sin 45^\circ \text{ N})(2 \text{ m}) - (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) \\ & - (100 \text{ N})(5 \text{ m}) - (200 \text{ N})(7 \text{ m}) + B_y(7 \text{ m}) = 0 \\ B_y = 405 \text{ N} \quad & \text{Resp.} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 5.6**

La cuerda de la figura 5-13a soporta una fuerza de 100 lb y se enrolla sobre la polea sin fricción. Determine la tensión en la cuerda en C y las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador A.

**Fig. 5-13****SOLUCIÓN**

**Diagramas de cuerpo libre.** Los diagramas de cuerpo libre de la cuerda y la polea se muestran en la figura 5-13b. Tenga presente que el principio de acción igual pero reacción opuesta se debe observar con gran cuidado al trazar cada uno de esos diagramas: la cuerda ejerce una distribución de carga desconocida  $p$  sobre la polea en la superficie de contacto, mientras que la polea ejerce un efecto igual pero opuesto sobre la cuerda. Sin embargo, para encontrar la solución es más sencillo *combinar* los diagramas de cuerpo libre de la polea y esta porción de la cuerda, de manera que la carga distribuida se vuelva *interna* al “sistema” y, por lo tanto, pueda eliminarse del análisis, figura 5-13c.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto al punto A para eliminar  $A_x$  y  $A_y$ , figura 5-13c, tenemos

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad 100 \text{ lb} (0.5 \text{ pie}) - T(0.5 \text{ pie}) = 0$$

$$T = 100 \text{ lb}$$

**Resp.**

Con el resultado

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -A_x + 100 \sin 30^\circ \text{ lb} = 0$$

$$A_x = 50.0 \text{ lb}$$

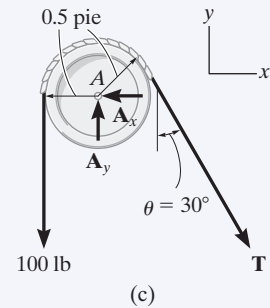
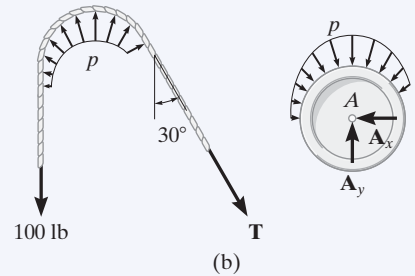
**Resp.**

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 100 \text{ lb} - 100 \cos 30^\circ \text{ lb} = 0$$

$$A_y = 187 \text{ lb}$$

**Resp.**

**NOTA:** se observa que la tensión permanece *constante* al pasar la cuerda sobre la polea. (Por supuesto, esto es cierto para *cualquier* ángulo  $\theta$  en el que esté dirigida la cuerda y para *cualquier* radio  $r$  de la polea).



## EJEMPLO 5.7

El elemento que se muestra en la figura 5-14a está articulado en  $A$  y descansa contra un soporte liso ubicado en  $B$ . Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador  $A$ .

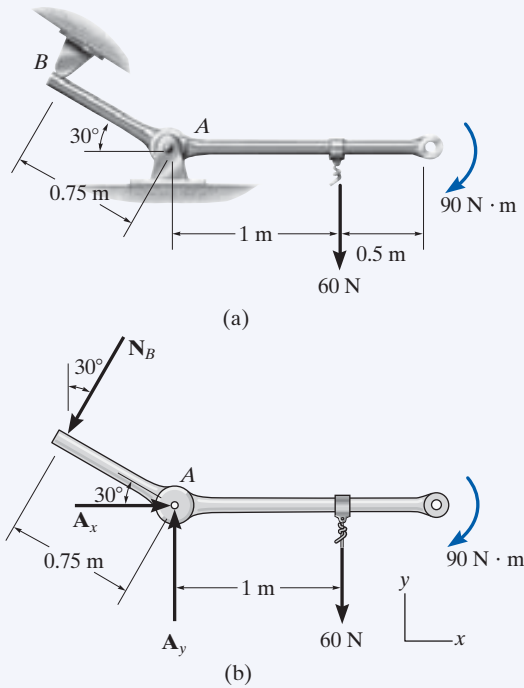


Fig. 5-14

## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 5-14b, la reacción  $N_B$  es perpendicular al eslabón en  $B$ . También, las componentes horizontal y vertical de reacción están representadas en  $A$ .

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto a  $A$ , obtenemos una solución directa para  $N_B$ ,

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad -90 \text{ N} \cdot \text{m} - 60 \text{ N}(1 \text{ m}) + N_B(0.75 \text{ m}) = 0$$

$$N_B = 200 \text{ N}$$

Con este resultado,

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 200 \sin 30^\circ \text{ N} = 0$$

$$A_x = 100 \text{ N}$$

Resp.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 200 \cos 30^\circ \text{ N} - 60 \text{ N} = 0$$

$$A_y = 233 \text{ N}$$

Resp.

**EJEMPLO 5.8**

La llave de cubo que se muestra en la figura 5-15a se usa para apretar el perno en A. Si la llave no gira cuando se aplica la carga al maneral, determine el par de torsión o el momento aplicado al perno y la fuerza de la llave sobre el perno.

**SOLUCIÓN**

**Diagrama de cuerpo libre.** El diagrama de cuerpo libre para la llave se muestra en la figura 5-15b. Dado que el perno actúa como un “soporte fijo”, ejerce las componentes de fuerza  $A_x$  y  $A_y$  y un momento  $M_A$  sobre la llave en A.

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 52\left(\frac{5}{13}\right) \text{ N} + 30 \cos 60^\circ \text{ N} = 0$$

$$A_x = 5.00 \text{ N}$$

**Resp.**

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 52\left(\frac{12}{13}\right) \text{ N} - 30 \sin 60^\circ \text{ N} = 0$$

$$A_y = 74.0 \text{ N}$$

**Resp.**

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; M_A - \left[ 52\left(\frac{12}{13}\right) \text{ N} \right] (0.3 \text{ m}) - (30 \sin 60^\circ \text{ N})(0.7 \text{ m}) = 0$$

$$M_A = 32.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**Resp.**

Observe que en esta sumatoria de momentos debe *incluirse*  $M_A$ . Este momento de par es un vector libre y representa la resistencia del perno a girar sobre la llave. Por la tercera ley de Newton, la llave ejerce un momento o par de torsión igual pero opuesto sobre el perno. Además, la fuerza resultante sobre la llave es

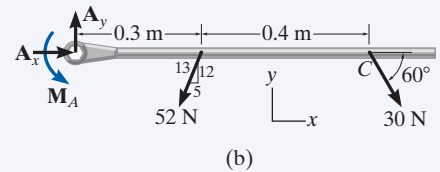
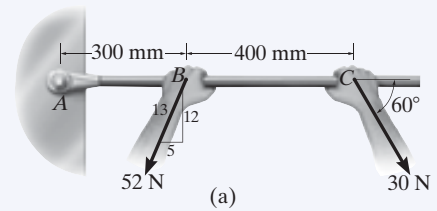
$$F_A = \sqrt{(5.00)^2 + (74.0)^2} = 74.1 \text{ N}$$

**Resp.**

**NOTA:** aunque sólo pueden escribirse *tres* ecuaciones independientes de equilibrio para un cuerpo rígido, es un buen hábito *revisar* los cálculos mediante una cuarta ecuación de equilibrio. Por ejemplo, los cálculos anteriores se pueden verificar en parte al sumar momentos con respecto al punto C:

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \left[ 52\left(\frac{12}{13}\right) \text{ N} \right] (0.4 \text{ m}) + 32.6 \text{ N} \cdot \text{m} - 74.0 \text{ N}(0.7 \text{ m}) = 0$$

$$19.2 \text{ N} \cdot \text{m} + 32.6 \text{ N} \cdot \text{m} - 51.8 \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

**Fig. 5-15**

## EJEMPLO 5.9

Determine las componentes horizontal y vertical de reacción sobre el elemento en el pasador  $A$ , y la reacción normal en el rodillo  $B$  de la figura 5-16a.

## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 5.16b se muestra el diagrama de cuerpo libre. El pasador en  $A$  ejerce dos componentes de reacción sobre el elemento,  $A_x$  y  $A_y$ .

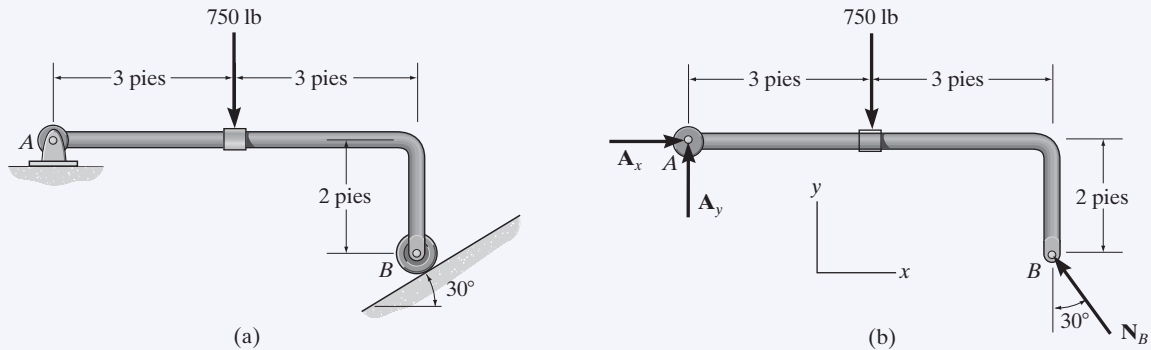


Fig. 5-16

**Ecuaciones de equilibrio.** La reacción  $N_B$  puede obtenerse *directamente* al sumar momentos con respecto al punto  $A$  puesto que  $A_x$  y  $A_y$  no producen momentos con respecto a  $A$ .

$$\zeta + \Sigma M_A = 0;$$

$$[N_B \cos 30^\circ](6 \text{ pies}) - [N_B \sin 30^\circ](2 \text{ pies}) - 750 \text{ lb}(3 \text{ pies}) = 0$$

$$N_B = 536.2 \text{ lb} = 536 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

Con este resultado

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - (536.2 \text{ lb}) \sin 30^\circ = 0$$

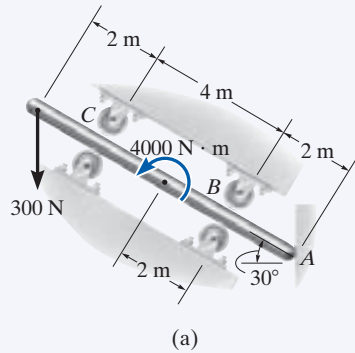
$$A_x = 268 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + (536.2 \text{ lb}) \cos 30^\circ - 750 \text{ lb} = 0$$

$$A_y = 286 \text{ lb} \quad \text{Resp.}$$

**EJEMPLO 5.10**

La barra uniforme lisa que se muestra en la figura 5-17a está sometida a una fuerza y a un momento de par. Si la barra está soportada en  $A$  por una pared lisa, y en  $B$  y  $C$  por rodillos colocados en la parte superior o inferior, determine las reacciones en esos soportes. No tome en cuenta el peso de la barra.

**SOLUCIÓN**

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se ve en la figura 5-17b, todas las reacciones de soporte actúan en forma normal a las superficies de contacto ya que dichas superficies son lisas. Se muestra que las reacciones en  $B$  y  $C$  actúan en la dirección  $y'$  positiva. Esto hace suponer que los rodillos ubicados al fondo de la barra sólo se usan para soporte.

**Ecuaciones de equilibrio.** Si utilizamos el sistema coordenado  $x$ ,  $y$  que se muestra en la figura 5-17b, tenemos

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad C_{y'} \sin 30^\circ + B_{y'} \sin 30^\circ - A_x = 0 \quad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -300 \text{ N} + C_{y'} \cos 30^\circ + B_{y'} \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad -B_{y'}(2 \text{ m}) + 4000 \text{ N} \cdot \text{m} - C_{y'}(6 \text{ m}) + (300 \cos 30^\circ \text{ N})(8 \text{ m}) = 0 \quad (3)$$

Al escribir la ecuación de momentos, debe observarse que la línea de acción de la componente de fuerza  $300 \cos 30^\circ \text{ N}$  pasa por el punto  $A$  y, por lo tanto, esta fuerza no está incluida en la ecuación de momentos.

Al resolver simultáneamente las ecuaciones 2 y 3 obtenemos

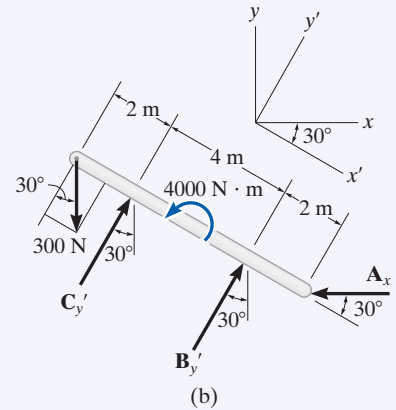
$$B_{y'} = -1000.0 \text{ N} = -1 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$C_{y'} = 1346.4 \text{ N} = 1.35 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Como  $B_{y'}$  es un escalar negativo, el sentido de  $\mathbf{B}_{y'}$  es opuesto al del diagrama de cuerpo libre de la figura 5-17b. Por consiguiente, el rodillo superior ubicado en  $B$  sirve como soporte en vez del inferior. Se retiene el signo negativo para  $B_{y'}$  (¿por qué?) y al sustituir los resultados en la ecuación 1, obtenemos

$$1346.4 \sin 30^\circ \text{ N} + (-1000.0 \sin 30^\circ \text{ N}) - A_x = 0$$

$$A_x = 173 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$



**Fig. 5-17**



## EJEMPLO 5.11



(a)

La rampa uniforme del camión que se muestra en la figura 5-18a pesa 400 lb y está articulada al bastidor del camión en cada lado; asimismo, se mantiene en la posición mostrada mediante los dos cables laterales. Determine la tensión en los cables.

## SOLUCIÓN

En la figura 5-18b se muestra el modelo idealizado de la rampa, que indica todas las dimensiones y soportes necesarios. Aquí el centro de gravedad está localizado en el punto medio ya que la rampa es aproximadamente uniforme.

**Diagrama de cuerpo libre.** A partir del modelo idealizado, el diagrama de cuerpo libre de la rampa se muestra en la figura 5-18c.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto al punto A se tendrá una solución directa para la tensión en el cable. Si se usa el principio de momentos, hay varias maneras de determinar el momento de **T** con respecto a A. Si usamos las componentes *x* y *y*, con **T** aplicada en B, tenemos

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; -T \cos 20^\circ (7 \sin 30^\circ \text{ pie}) + T \sin 20^\circ (7 \cos 30^\circ \text{ pie}) + 400 \text{ lb} (5 \cos 30^\circ \text{ pie}) = 0$$

$$T = 1425 \text{ lb}$$

La manera más simple de calcular el momento de **T** con respecto a A es descomponerla en componentes a lo largo y de manera perpendicular a la rampa en B. Entonces, el momento de la componente a lo largo de la rampa es cero con respecto a A, por lo que

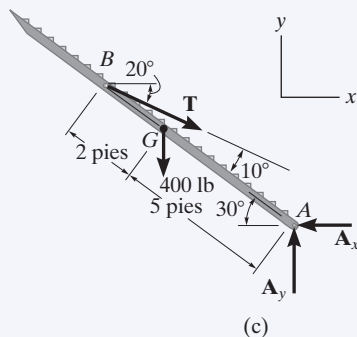
$$\zeta + \Sigma M_A = 0; -T \sin 10^\circ (7 \text{ pies}) + 400 \text{ lb} (5 \cos 30^\circ \text{ pie}) = 0$$

$$T = 1425 \text{ lb}$$

Dado que dos cables soportan la rampa,

$$T' = \frac{T}{2} = 712 \text{ lb}$$

**Resp.**



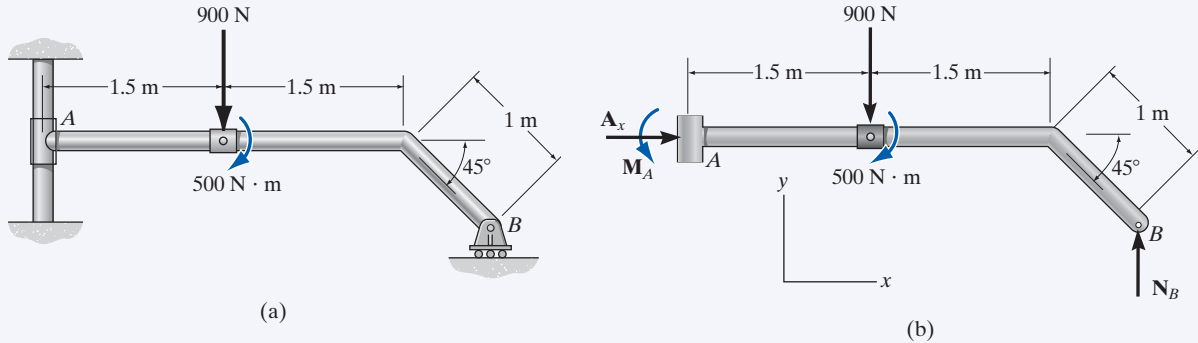
(c)

Fig. 5-18

**NOTA:** como ejercicio, demuestre que  $A_x = 1339 \text{ lb}$  y  $A_y = 887.4 \text{ lb}$ .

**EJEMPLO 5.12**

Determine las reacciones del soporte sobre el elemento que se muestra en la figura 5-19a. El collar en  $A$  está fijo al elemento y puede deslizarse verticalmente a lo largo del eje vertical.

**Fig. 5-19****SOLUCIÓN**

**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 5-19b se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento. El collar ejerce una fuerza horizontal  $A_x$  y un momento  $M_A$  sobre el elemento. La reacción  $N_B$  del rodillo sobre el elemento es vertical.

**Ecuaciones de equilibrio.** Las fuerzas  $A_x$  y  $N_B$  pueden calcularse directamente a partir de las ecuaciones de equilibrio de fuerza.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad N_B - 900 \text{ N} = 0$$

$$N_B = 900 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

El momento  $M_A$  puede determinarse al sumar los momentos con respecto al punto  $A$  o bien con respecto al punto  $B$ .

$$\zeta + \Sigma M_A = 0;$$

$$M_A - 900 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 500 \text{ N} \cdot \text{m} + 900 \text{ N}[3 \text{ m} + (1 \text{ m}) \cos 45^\circ] = 0$$

$$M_A = -1486 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.49 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Resp.}$$

o bien

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad M_A + 900 \text{ N}[1.5 \text{ m} + (1 \text{ m}) \cos 45^\circ] - 500 \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_A = -1486 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.49 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que  $M_A$  tiene el sentido de rotación opuesto al del diagrama de cuerpo libre.