Universidad Politécnica de Guanajuato
Ingeniería Robótica
Mecanismos y máquinas

Análisis cinemático de mecanismos planos [1]

M.C. Pedro Jorge De Los Santos Lara
jdelossantos@upgto.edu.mx

[1] Éstas notas no sustituyen la bibliografía básica, tómelas simplemente como una referencia rápida sobre el contenido abordado en la unidad temática correspondiente al análisis cinemático de mecanismos planos.

Índice general

1

Análisis cinemático de mecanismos planos

1.1 Introducción

Estos apuntes tienen la finalidad de servir como guía de referencia rápida para la asignatura de mecanismos y máquinas. Los conceptos elementales de dinámica se abordan asumiendo que el lector ha tomado un curso anterior.

1.2 Posición, desplazamiento y velocidad de un punto

Para analizar el movimiento de un sistema debemos definir los conceptos de posición y desplazamiento. El movimiento de un punto es una serie de desplazamientos en el tiempo, a lo largo de posiciones sucesivas.

La **posición** de un punto se define respecto a un marco de referencia. El sistema coordenado puede ser polar o cartesiano (ver figura 1.1).

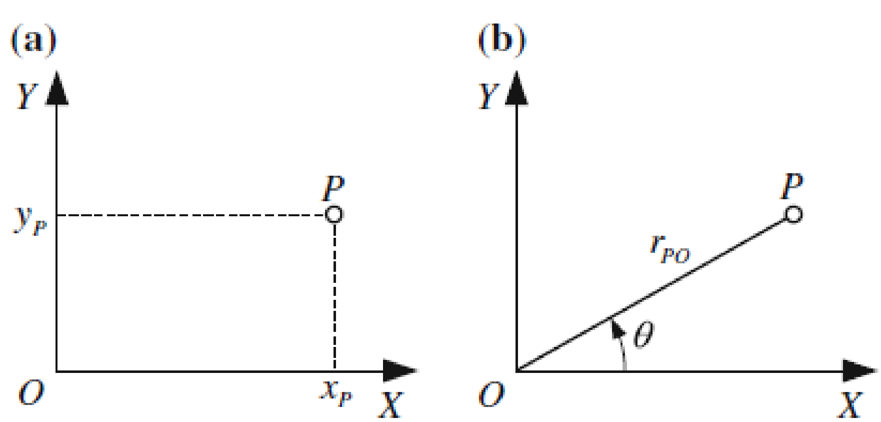


Figura 1.1 Vector de posición en el plano

Un punto en el plano puede definirse mediante un vector de posición $\mathbf{r}$, que parte del origen del sistema hasta el par coordenado.

Cuando un punto cambia su posición, un **desplazamiento** tiene lugar. Si en un instante t el punto está en una posición P y en el instante $t + \Delta t$, el punto se encuentra en P', el desplazamiento durante Δt se define como el vector que mide el cambio de posición:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P$$

El desplazamiento es un vector que conecta el punto P en el instante t con un punto P' en $t + \Delta t$ y no depende de la trayectoria descrita por el punto si no de su posición inicial y final.

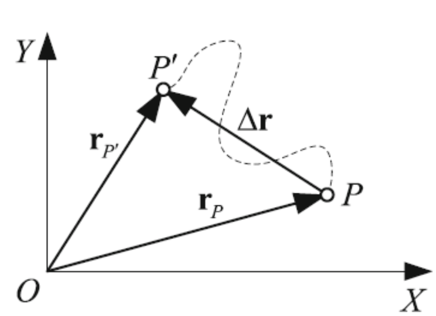


Figura 1.2 Desplazamiento de un punto en el plano

La razón entre el desplazamiento de un punto y el tiempo que le lleva se conoce como velocidad promedio de un punto. Luego, la velocidad promedio es un vector de magnitud $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ y tiene la misma dirección que el vector de desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$. Si el tiempo Δt tiende a cero, la velocidad del punto es ahora una velocidad instantánea:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

La magnitud del vector de velocidad instantánea es dr/dt. En un cambio infinitesimal de posición, la dirección del vector de desplazamiento coincide con la trayectoria. Cuando O es el centro instantáneo de la trayectoria de P, podemos expresar la magnitud de la velocidad como:

$$v_P = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot r_P = \omega \cdot r_P$$

Siendo la dirección de la misma, tangente a la trayectoria que describe P.

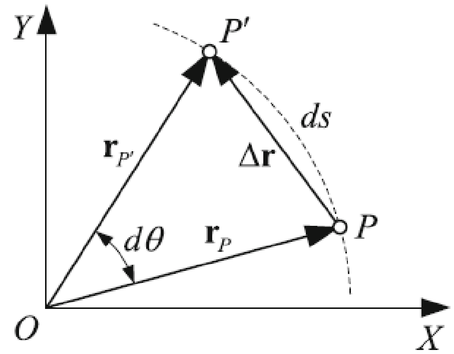


Figura 1.3 Desplazamiento en un tiempo infinitesimal dt

1.3 Tipos de movimiento

1.3.1 Traslación pura

Se afirma que un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento. También puede observarse que en la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas.

Si estas trayectorias son líneas rectas, se afirma que el movimiento es una traslación rectilínea, si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento es una traslación curvilínea.

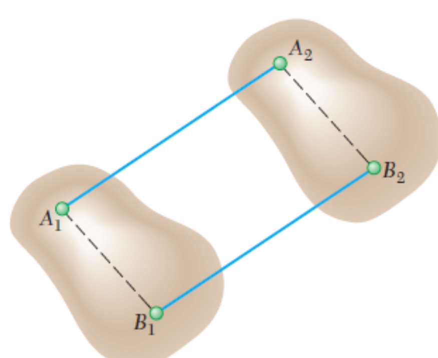


Figura 1.4 Traslación rectilinea

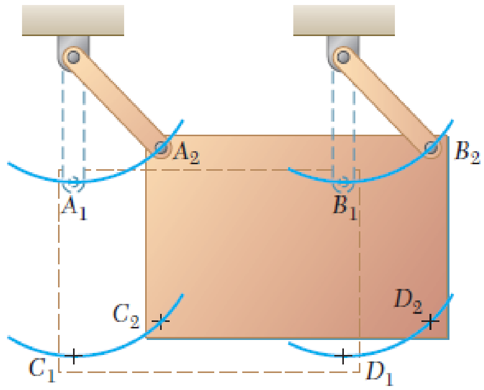


Figura 1.5 Traslación curvilinea

Las ecuaciones cinemáticas para un cuerpo rígido en traslación vienen dadas por:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Lo cual implica que todos los puntos de un sólido rígido en traslación pura tienen la misma velocidad y aceleración.

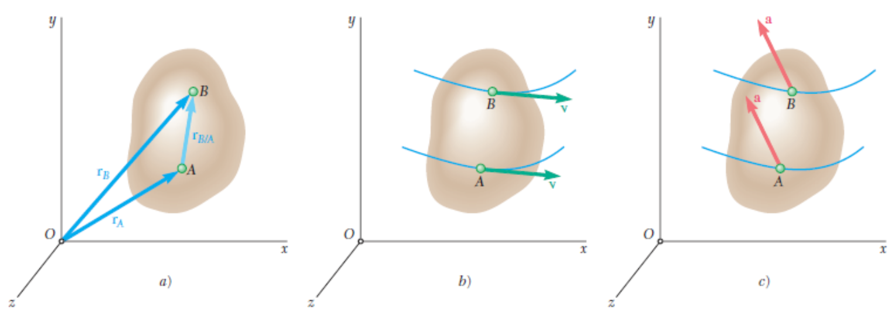


Figura 1.6 Esquemarización de un sólido en traslación pura

1.3.2 Rotación alrededor de un eje fijo

En este movimiento, las partículas que forman al cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo.

Si este eje, llamado eje de rotación, interseca al cuerpo rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad cero y aceleración cero.

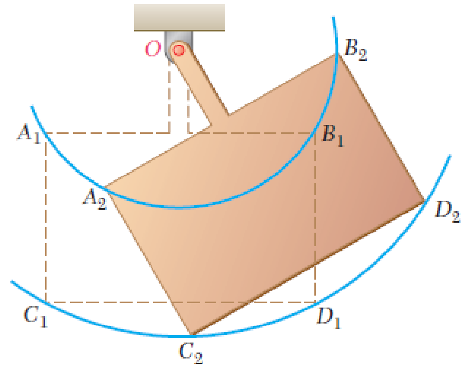


Figura 1.7 Sólido rígido en rotación pura

Las ecuaciones cinemáticas para un sólido rígido en rotación están dadas por:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$

Donde $\mathbf{r}$ es un vector de posición desde el eje de rotación hasta el punto de interés y ω un vector que define la dirección del eje respecto al cual gira el cuerpo rígido.

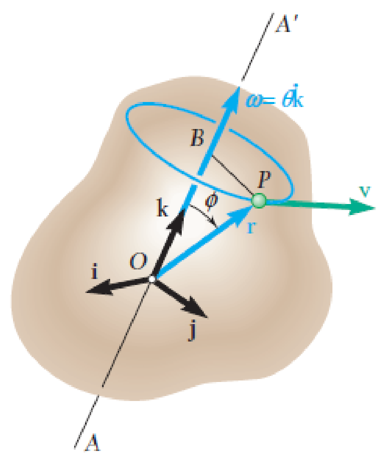


Figura 1.8 Esquematización de la cinemática de rotación

1.3.3 Movimiento plano general

Hay muchos otros tipos de movimiento plano, esto es, movimientos en los cuales todas las partículas del cuerpo se mueven en planos paralelos.

Cualquier movimiento plano que no es ni una rotación ni una traslación se conoce como un movimiento plano general.

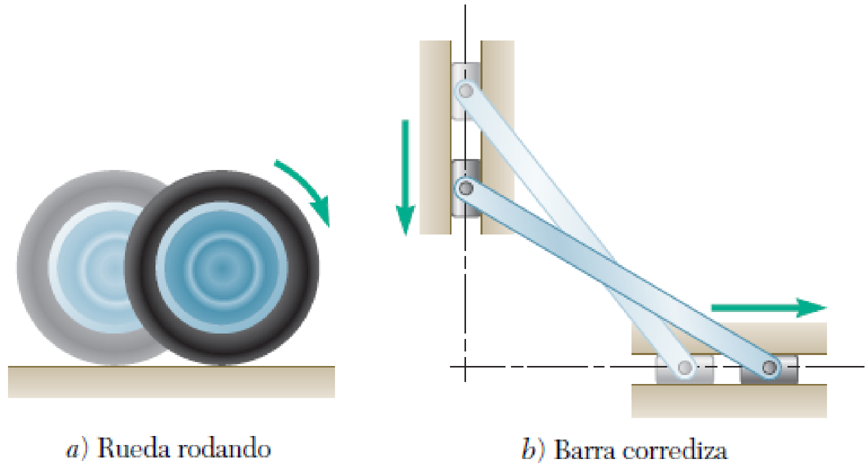


Figura 1.9 Ejemplos de movimiento plano

Un movimiento plano se puede descomponer en una traslación pura usando un punto como referencia y una rotación alrededor de ese mismo punto. En general, las ecuaciones que definen las velocidades relativas de dos puntos sobre un mismo sólido rígido en movimiento plano general vienen dadas por:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{B/A})$$

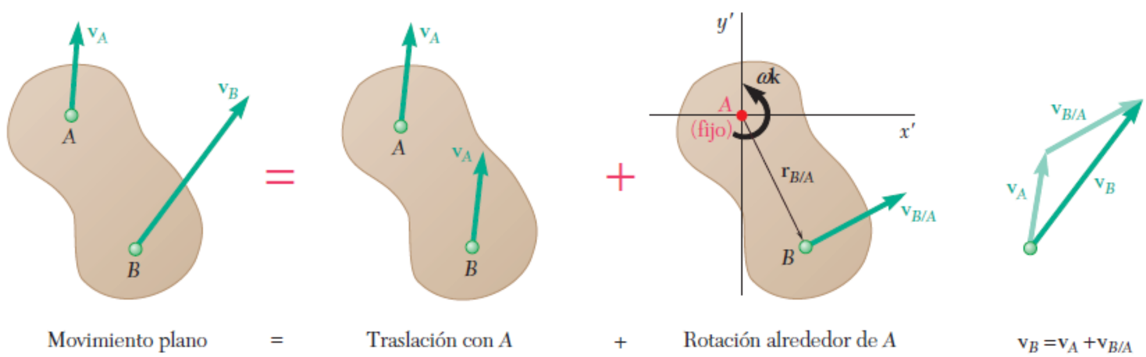


Figura 1.10 Descomposición de un movimiento plano general

1.4 Análisis cinemático de mecanismos planos

1.4.1 La importancia del análisis cinemático

Una vez que el diseño tentativo de un mecanismo ha sido sintetizado, debe entonces ser analizado. Un objetivo fundamental del análisis cinemático es determinar las aceleraciones de todas las partes móviles del ensamble. Las fuerzas dinámicas son proporcionales a la aceleración, según la segunda ley de Newton. Es necesario conocer las fuerzas dinámicas para calcular los esfuerzos en los componentes.

El ingeniero de diseño debe garantizar que el mecanismo o máquina propuesta no fallará en condiciones de operación. Por lo tanto, los esfuerzos en los materiales deben mantenerse por debajo de los niveles permisibles. Para calcular los esfuerzos, es necesario conocer las fuerzas estáticas y dinámicas sobre las partes. Para calcular las fuerzas dinámicas se necesita conocer las aceleraciones, primero se deben localizar las posiciones de todos los eslabones o elementos en el mecanismo por cada incremento del movimiento de entrada, y luego diferenciar las ecuaciones de posición contra el tiempo para hallar las velocidades y luego diferenciar otra vez para obtener expresiones para la aceleración. [1]

Lo anterior se puede hacer mediante varios métodos. Se puede utilizar un **método gráfico** para determinar la posición, velocidad y aceleración de los eslabones de salida en todas las posiciones de interés, o derivar las ecuaciones generales de movimiento para cualquier posición, diferenciarlas para velocidad y aceleración, y luego resolver estas **expresiones analíticas** para todas las posiciones de entrada del eslabón motriz.

1.4.2 La ecuación de lazo vectorial: Método de Raven

Caso I. Dirección dependiente del tiempo $\theta(t)$

Es el caso más común en un mecanismo articulado puesto que normalmente los eslabones son sólidos rigidos cuya longitud no varía, pero si lo hace la dirección.

En este caso el vector de posición viene dado por:

$$\mathbf{r_P} = re^{j\theta} \tag{1.1}$$

Dado que θ es una función del tiempo $\theta(t)$, entonces la velocidad estará expresada como:

$$\mathbf{v_P} = jr\frac{d\theta}{dt}e^{j\theta} \tag{1.2}$$

Sabemos además que la tasa de variación de la coordenada angular θ no es más que la velocidad angular, es decir:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{1.3}$$

Sustituyendo lo anterior en la expresión de velocidad:

$$\mathbf{v_P} = jr\omega e^{j\theta} \tag{1.4}$$

Para obtener la aceleración debemos derivar la expresión anterior y considerar qué parámetros son dependientes del tiempo, evidentemente tanto j como r son constantes, luego, la velocidad angular en el caso más general será también dependiente del tiempo, es decir $\omega = \omega(t)$, entonces derivando la ecuación de velocidad se obtiene:

$$\mathbf{a_P} = (\frac{d\omega}{dt})jre^{j\theta} + (j\frac{d\theta}{dt}e^{j\theta})(jr\omega) \tag{1.5}$$

De la cinemática de cuerpos rígidos sabemos que la tasa de variación de la velocidad angular es justamente la aceleración angular, misma que denotaremos con la letra griega α. Además, recordemos que el cuadrado de la unidad imaginaria es -1. Simplificando la expresión anterior se tiene:

$$\mathbf{a_P} = jr\alpha e^{j\theta} - r\omega^2 e^{j\theta} \tag{1.6}$$

Notará que la expresión de aceleración tiene dos términos, que corresponden justamente a las dos componentes vectoriales de la aceleración: componentes normal y tangencial. Así:

$$\mathbf{a_P} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = jr\alpha e^{j\theta} - r\omega^2 e^{j\theta} \tag{1.7}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= jr\alpha e^{j\theta} \\ \mathbf{a}_n &= -r\omega^2 e^{j\theta} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Caso II. Longitud dependiente del tiempo $r(t)$

En este caso, la dirección del vector permanece inalterable y la longitud depende del tiempo, normalmente corresponderá a mecanismos que tienen una corredera o bloque deslizante respecto a una posición fija, como sucede en el caso de un mecanismo de manivela-biela-corredera.

Naturalmente el vector de posición vendrá dado por:

$$\mathbf{r_P} = re^{j\theta} \tag{1.9}$$

Considerando ahora que r es una función $r(t)$ y θ un valor constante, de tal forma que cuando derivemos ese vector respecto al tiempo para obtener la expresión de velocidad llegaremos a:

$$\mathbf{v_P} = \frac{dr}{dt}e^{j\theta} \tag{1.10}$$

Por comodidad utilizaremos la notación de puntos para expresar una derivada temporal, es decir: $dr/dt = \dot{r}$, entonces:

$$\mathbf{v_P} = \dot{r}e^{j\theta} \tag{1.11}$$

Derivando la expresión anterior para obtener la aceleración:

$$\mathbf{a_P} = \ddot{r}e^{j\theta} \tag{1.12}$$

Sobre los signos de $\dot{r}$ y $\ddot{r}$

Por convención sabemos que las velocidades y aceleraciones angulares serán positivas cuando van en sentido antihorario. En el caso de $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ que son velocidades y aceleraciones lineales el signo dependerá si el vector está *acortándose* o *alargándose*. Cuando el vector se *alarga* la velocidad y aceleración serán positivas.

Caso III. Longitud y dirección dependientes del tiempo

En el caso más general la longitud y dirección del vector de posición dependen del tiempo. Esto normalmente ocurrirá en mecanismos de retorno rápido, en donde un collarín o bloque se desliza respecto a un eslabón en movimiento.

El vector de posición naturalmente será la misma expresión manejada anteriormente, con las consideraciones de que tanto r como θ son funciones dependientes del tiempo.

$$\mathbf{r_P} = re^{j\theta} \tag{1.13}$$

Derivando la ecuación de posición obtenemos:

$$\mathbf{v_P} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\omega e^{j\theta} \tag{1.14}$$

Donde el término $\dot{r}e^{j\theta}$ es la velocidad de deslizamiento y $jr\omega e^{j\theta}$ la velocidad de transmisión. Es decir:

$$\mathbf{v_P} = \mathbf{v}_{deslizamiento} + \mathbf{v}_{transmision} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\omega e^{j\theta} \tag{1.15}$$

Ahora, derivando la ecuación de velocidad para obtener la aceleración, podemos observar que r, $\dot{r}$, ω, y θ dependen del tiempo.

$$\mathbf{a_P} = \left(\ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\omega e^{j\theta}\right) + \left(j\dot{r}\omega e^{j\theta} + jr\alpha e^{j\theta} - r\omega^2 e^{j\theta}\right) \tag{1.16}$$

Agrupando términos:

$$\mathbf{a_P} = jr\alpha e^{j\theta} - r\omega^2 e^{j\theta} + \ddot{r}e^{j\theta} + 2j\dot{r}\omega e^{j\theta} \tag{1.17}$$

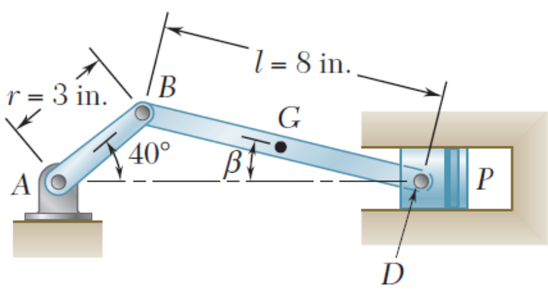
Donde:

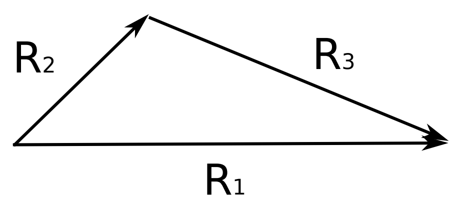
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= jr\alpha e^{j\theta} \\ \mathbf{a}_n &= -r\omega^2 e^{j\theta} \\ \mathbf{a}_{deslizamiento} &= \ddot{r}e^{j\theta} \\ \mathbf{a}_{coriolis} &= 2j\dot{r}\omega e^{j\theta} \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.5 Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.5.1 Mecanismo de manivela biela corredera

La manivela AB del mecanismo mostrado en la figura tiene una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de 2 000 rpm. Para la posición que se muestra de la manivela, determine la aceleración angular de la biela BD y la aceleración del punto D.





Solución:
Ecuación de lazo vectorial:

$$r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1}$$

Separando componentes reales e imaginarias:

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_1 \cos\theta_1$$

$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 = r_1 \sin\theta_1$$

Dado que $\theta_1 = 0^o$, entonces: $\sin\theta_1 = 0$ y $\cos\theta_1 = 1$, lo cual resulta en:

$$3\cos 40^\circ + 8\cos\theta_3 = r_1 \tag{1.19}$$

$$3\sin 40^\circ + 8\sin\theta_3 = 0 \tag{1.20}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para θ_3 y r_1, se tiene:

$$\theta_3 = -13.95° \quad ; \quad r_1 = 10.06 \text{ in}$$

Análisis de velocidad
Derivando la ecuación de posición respecto al tiempo:

$$jr_2\omega_2 e^{j\theta_2} + jr_3\omega_3 e^{j\theta_3} = \dot{r}_1 e^{j\theta_1}$$

Separando en componentes reales e imaginarias:

$$-r_2\omega_2 \sin\theta_2 - r_3\omega_3 \sin\theta_3 = \dot{r}_1 \tag{1.21}$$

$$r_2\omega_2 \cos\theta_2 + r_3\omega_3 \cos\theta_3 = 0 \tag{1.22}$$

Resolviendo para ω_3 y $\dot{r}_1$:

$$\omega_3 = 62 \text{ rad/s}$$

$$\dot{r}_1 = 523.4 \text{ in/s}$$

Análisis de aceleración
Derivando la ecuación de velocidad respecto al tiempo:

$$\left(-r_2\omega_2^2 e^{j\theta_2}\right) + \left(jr_3\alpha_3 e^{j\theta_3} - r_3\omega_3^2 e^{j\theta_3}\right) = \ddot{r}_1 e^{j\theta_1}$$

Separando en componentes reales e imaginarias:

$$-r_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - r_3\alpha_3 \sin\theta_3 - r_3\omega_3^2 \cos\theta_3 = \ddot{r}_1 \tag{1.23}$$

$$-r_2\omega_2^2 \sin\theta_2 + r_3\alpha_3 \cos\theta_3 - r_3\omega_3^2 \sin\theta_3 = 0 \tag{1.24}$$

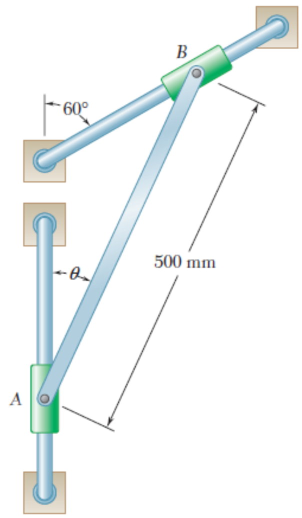
Resolviendo para α_3 y $\ddot{r}_1$:

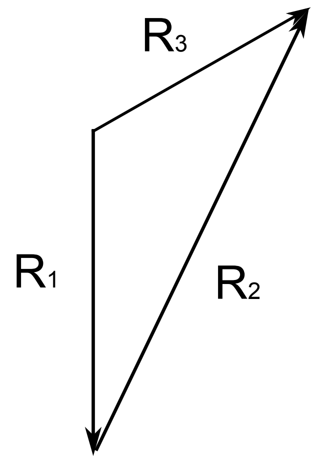
$$\alpha_3 = 9940 \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{r}_1 = -111482 \text{ in/s}^2$$

Ejemplo 1.5.2

El collarín A se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 1.2 m/s. En el instante mostrado cuando $\theta = 25°$, determine a) la velocidad angular de la varilla AB, b) la velocidad del collarín B.





Solución:

Los datos de entrada que en principio conocemos son $\theta_1 = 270°$, $\theta_2 = 65°$, $\theta_3 = 30°$ y $r_2 = 0.5$ m. La ecuación de lazo vectorial acorde al esquema mostrado sería:

$$r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} = r_3 e^{j\theta_3}$$

Derivando la ecuación de posición respecto al tiempo:

$$\dot{r}_1 e^{j\theta_1} + j r_2 \omega_2 e^{j\theta_2} = \dot{r}_3 e^{j\theta_3}$$

Separando en la parte real e imaginaria:

$$\dot{r}_1 \cos\theta_1 - r_2\omega_2 \sin\theta_2 = \dot{r}_3 \cos\theta_3$$

$$\dot{r}_1 \sin\theta_1 + r_2\omega_2 \cos\theta_2 = \dot{r}_3 \sin\theta_3$$

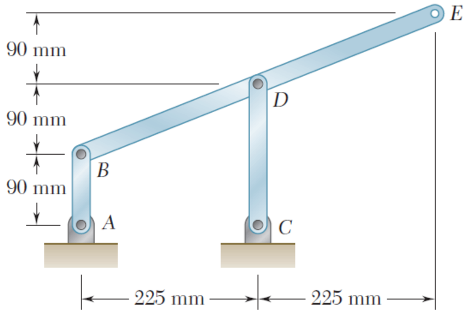
Resolviendo para ω_w y $\dot{r}_3$:

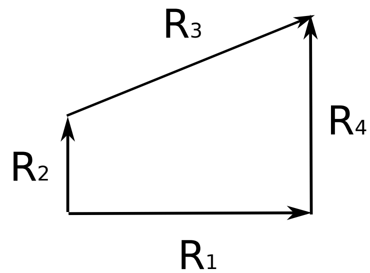
$$\omega_3 = \frac{-\dot{r}_1 \sin\theta_1}{r_2 \sin\theta_2 \tan\theta_3 + r_2 \cos\theta_2} = \boxed{2.34}$$

$$\dot{r}_3 = \frac{-r_2\omega_2 \sin\theta_2}{\cos\theta_3} = \boxed{1.37}$$

Ejemplo 1.5.3 Mecanismo de cuatro barras

Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine a) la aceleración angular del elemento BDE y b) la aceleración del punto E.





Solución:
De la geometría del mecanismo podemos determinar todas las longitudes y posiciones angulares de los eslabones.
Planteando la ecuación de lazo vectorial:

$$r_2e^{j\theta_2} + r_3e^{j\theta_3} = r_1e^{j\theta_1} + r_4e^{j\theta_4}$$

Derivando la ecuación anterior para obtener la expresión de velocidad:

$$jr_2\omega_2e^{j\theta_2} + jr_3\omega_3e^{j\theta_3} = jr_4\omega_4e^{j\theta_4}$$

Separando componentes reales e imaginarias:

$$-r_2\omega_2\sin\theta_2 - r_3\omega_3\sin\theta_3 = -r_4\omega_4\sin\theta_4 \tag{1.25}$$
$$r_2\omega_2\cos\theta_2 + r_3\omega_3\cos\theta_3 = r_4\omega_4\cos\theta_4 \tag{1.26}$$

De 1.26 se tiene que:

$$\omega_3 = 0$$

Luego sustituyendo en 1.25 y resolviendo para ω_4:

$$\omega_4 = \frac{r_2\omega_2}{r_4}$$

Derivando la ecuación de velocidad obtenemos la expresión para la aceleración:

$$-r_2\omega_2^2e^{j\theta_2} + jr_3\alpha_3e^{j\theta_3} - \cancelto{0}{r_3\omega_3^2e^{j\theta_3}} = jr_4\alpha_4e^{j\theta_4} - r_4\omega_4^2e^{j\theta_4}$$

Separando componentes reales e imaginarias:

$$-r_2\omega_2^2\cos\theta_2 - r_3\alpha_3\sin\theta_3 = -r_4\alpha_4\sin\theta_4 - r_4\omega_4^2\cos\theta_4 \tag{1.27}$$
$$-r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\alpha_3\cos\theta_3 = r_4\alpha_4\cos\theta_4 - r_4\omega_4^2\sin\theta_4 \tag{1.28}$$

Resolviendo para α_3 y α_4:

$$\alpha_3 = \frac{r_2\omega_2^2 \sin\theta_2 - r_4\omega_4^2 \sin\theta_4}{r_3 \cos\theta_3}$$

$$\alpha_4 = \frac{r_3\alpha_3 \sin\theta_3}{r_4 \sin\theta_4}$$

2

Análisis cinemático utilizando software

Bibliografía

[1] Norton, R. L. (2012). Diseño de maquinaria: Sintesis y analisis de maquinas y mecanismos. Mexico D.F: McGraw-Hill.

[2] Mabie, H. H., Reinholtz, C. F. (2008). Mecanismos y dinamica de maquinaria. Mexico: Limusa.

[3] Myszka, D. H. (2002). Machines mechanism: Applied kinematic analysis. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall.

[4] Erdman, A. G., Sandor, G. N., Kota, S. (2004). Mechanism design: Analysis and synthesis. Taipei: Pearson Education Taiwan.

[5] Beer, F. P., Mazurek, D. F., Johnston, E. R., Cornwell, P. J. (2013). Mecanica vectorial para ingenieros. Mexico: McGraw-Hill.