

Cinemática y dinámica de robots

Versión 0.3.1

Pedro Jorge De Los Santos
jdelossantos@upgto.edu.mx

4 de agosto de 2022

Índice general

1. Una introducción a los manipuladores seriales	8
1.1. ¿Qué es un robot?	8
1.2. Clasificación de robots de acuerdo con su estructura mecánica	9
1.3. Algunos datos sobre los robots industriales	12
2. Preliminares matemáticos	15
2.1. Matrices	15
2.1.1. Transpuesta de una matriz	16
2.1.2. Suma de matrices	16
2.1.3. Multiplicación por un escalar	16
2.1.4. Multiplicación de matrices	17
2.2. Vectores	17
2.2.1. Producto punto	18
2.2.2. Producto vectorial	18
2.2.3. Ángulo entre dos vectores	18
2.2.4. Proyección escalar y vectorial	19
2.3. Trigonometría	19
2.3.1. Relaciones en un triángulo rectángulo	19
2.3.2. Relaciones en un triángulo oblicuángulo	20
2.3.3. Algunas identidades trigonométricas	21
2.3.4. La función arcotangente de dos argumentos $\arctan2$	22
2.4. Derivadas	25
2.4.1. Algunas fórmulas de derivadas	25
3. Posición, orientación y transformaciones homogéneas	27
3.1. Representación de la posición	27
3.2. Representación de la orientación	29

3.2.1.	Matrices de rotación	29
3.2.2.	Parametrización de las rotaciones	32
3.2.3.	Ángulos de Euler	33
3.3.	Matrices de transformación homogénea	37
3.3.1.	Matrices de transformación homogéneas básicas	41
3.3.2.	Composición de las matrices de transformación homogénea	42
3.3.3.	Traslación	43
3.3.4.	Rotación	44
3.3.5.	Rotación y traslación	44
4.	Cinemática directa	62
4.1.	Sobre cadenas cinemáticas y transformaciones	62
4.2.	La metodología de Denavit-Hartenberg	64
4.2.1.	Estableciendo los sistemas de referencia	65
4.2.2.	La obtención de los parámetros	66
4.2.3.	Calculando las matrices A_i	67
4.2.4.	Calculando la matriz T_n^0	67
4.3.	Ejemplos	68
4.3.1.	Manipulador planar RR	68
4.3.2.	Manipulador RRR	69
4.3.3.	Robot ABB IRB 140	70
4.4.	Problemas	75
5.	Cinemática inversa	82
5.1.	El problema general de la cinemática inversa	82
5.1.1.	Manipulador planar RR	83
5.2.	Cinemática inversa de posición: método geométrico	85
5.2.1.	Manipulador planar RR	86
5.2.2.	Manipulador antropomórfico RRR	89
5.3.	Desacoplo cinemático	92
5.3.1.	Manipulador ABB IRB 140	94
5.4.	Resolviendo la cinemática inversa de forma numérica	101
6.	Cinemática diferencial	104
6.1.	Velocidad lineal del extremo del manipulador	104
6.1.1.	Manipulador RR	105
6.2.	Velocidades angulares en un manipulador serial	105
6.2.1.	Manipulador RR	106
6.3.	Velocidad lineal de un punto ubicado en el manipulador	107
6.4.	Velocidades en un manipulador serial: la matriz jacobiana	108
6.4.1.	Manipulador RR	109

6.5. Ejemplos	111
7. Dinámica de manipuladores seriales	118
8. Generación de trayectorias	119
9. Análisis cinemático y dinámico de manipuladores utilizando Python	120

La versión actual de este documento es un borrador incompleto e inconexo en algunas secciones, sin una revisión exhaustiva del contenido. Tome sus precauciones al respecto.

La última versión de estos apuntes puede descargarlos desde el siguiente enlace:

https://jorgedelossantos.github.io/files/pdf/apuntes_cir_dir.pdf

Estos apuntes se han elaborado con la finalidad de servir como una referencia rápida para los alumnos de los cursos de Cinemática de Robots y Dinámica de Robots de la Universidad Politécnica de Guanajuato, para sumar a su formación conocimientos sólidos en materia del análisis de manipuladores seriales.

La idea de este texto es proporcionar contenido que sea *digerible* para el alumno, incluyendo ejemplos, ejercicios, ejercicios para resolver con la computadora, videos, animaciones, entre otros recursos, que le ayuden a asimilar los temas correspondientes de una mejor manera.

Sobre la notación

A continuación se listan y describen una serie de convenciones y notación a utilizar en el desarrollo del texto:

Las cantidades vectoriales serán representadas mediante una tipografía cuyo énfasis se asemeja a **u**, **v** y **r**.

$\{i\}$ representa el i -ésimo sistema de referencia.

R_n^m denota una matriz de rotación que describe la orientación del sistema $\{n\}$ con respecto a $\{m\}$.

T_n^m denota una matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema $\{n\}$ con respecto a $\{m\}$.

\mathbf{p}^i representa el vector **p** descrito en el sistema de referencia $\{i\}$.

J denota el jacobiano geométrico de un manipulador.

J_a denota el jacobiano analítico de un manipulador.

$\omega_{m,n}^l$ denota la velocidad angular del sistema $\{n\}$ con respecto al sistema $\{m\}$ medida desde el sistema $\{l\}$.

La siguiente lista describe algunas abreviaturas y notaciones reducidas, sobre todo para funciones trigonométricas que aparecerán de forma muy frecuente en los análisis de cinemática de manipuladores:

- $c_m = \cos \theta_m = \cos q_m$, sí m es un valor numérico, en caso contrario: $c_m = \cos m$
- $s_m = \sin \theta_m = \sin q_m$, sí m es un valor numérico, en caso contrario: $s_m = \sin m$
- $c\theta_m = \cos \theta_m$
- $cq_m = \cos q_m$
- $c(\theta_m + \theta_n) = \cos(\theta_m + \theta_n)$
- $c(q_m + q_n) = \cos(q_m + q_n)$
- $c_{mn} = \cos(\theta_m + \theta_n) = \cos(q_m + q_n)$, sí m y n son valores numéricos, en caso contrario: $c_{mn} = \cos(m + n)$
- $s\theta_m = \sin \theta_m$
- $sq_m = \sin q_m$
- $s(\theta_m + \theta_n) = \sin(\theta_m + \theta_n)$
- $s(q_m + q_n) = \sin(q_m + q_n)$
- $s_{mn} = \sin(\theta_m + \theta_n) = \sin(q_m + q_n)$, sí m y n son valores numéricos, en caso contrario: $c_{mn} = \sin(m + n)$

Pedro Jorge De Los Santos

Guanajuato, México.

Una introducción a los manipuladores seriales

1.1. ¿Qué es un robot?

Según la norma ISO 8373:2012, un robot es un *mecanismo accionado programable en dos o más ejes con cierto grado de autonomía, que se mueve dentro de su entorno para realizar las tareas previstas*. Los mecanismos accionados que carecen de la cantidad de ejes programables o que son completamente teleoperados (sin grado de autonomía) pero satisfacen las definiciones de robots industriales o de servicio, se denominan dispositivos robóticos.

Los robots se pueden clasificar en dos grandes tipos de acuerdo con su aplicación prevista: robots industriales o robots de servicio. Los robots industriales son robots *para uso en aplicaciones de automatización industrial*, mientras que un robot de servicio *realiza tareas útiles para humanos o equipos, excluyendo aplicaciones de automatización industrial*.

El tipo de estructura mecánica y/o la composición cinemática de un robot es insuficiente para distinguir los robots industriales de los de servicio. Por lo tanto, según la definición de ISO, la aplicación es un criterio suficiente para distinguir los robots industriales de los de servicio, pero la cinemática no lo es.

Un **robot industrial** es un *manipulador multipropósito, reprogramable y controlado automáticamente, programable en tres o más ejes, que puede ser fijo o móvil para su uso en aplicaciones de automatización industrial*.

Es decir, los robots industriales tienen al menos tres ejes (direcciones utilizadas para especificar el movimiento del robot en modo lineal o giratorio) y satisfacen todas las características que a continuación se describen:

- **Controlado automáticamente:** el sistema de control del robot funciona de acuerdo con el programa de tareas. El programa de tareas es un conjunto de instrucciones para funciones de movimiento y auxiliares que definen la tarea específica prevista. Lo opuesto a la operación controlada automáticamente es la operación manual,

1.2. CLASIFICACIÓN DE ROBOTS DE ACUERDO CON SU ESTRUCTURA MECÁNICA⁹

donde un operador humano usa dispositivos de entrada para controlar los movimientos de la máquina.

- **Reprogramable:** diseñado para que los movimientos programados o las funciones auxiliares puedan cambiarse sin alteración física. Las alteraciones físicas son alteraciones del sistema mecánico. Esto no incluye medios de almacenamiento, ROM, etc.
- **Multipropósito:** capaz de adaptarse a una aplicación diferente con alteración física.
- **Fijo en su lugar o móvil:** el robot se puede montar en un punto estacionario pero también se puede montar en un punto no estacionario (sobre un riel, por ejemplo). En los últimos años, se popularizó la combinación de brazos robóticos y Robots Móviles Autónomos (AMR).

En este texto usaremos los términos **robot**, **manipulador serial** y **brazo robótico**, de forma intercambiable para referirnos a un robot en el sentido que lo describe la RIA: *un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de una variedad de tareas.*

1.2. Clasificación de robots de acuerdo con su estructura mecánica

De acuerdo con la IFR (International Federation of Robotics) los robots se pueden clasificar por su estructura mecánica de la siguiente manera:

- Robot articulado
- Robot cartesiano
- Robot cilíndrico
- Robot paralelo
- Robot SCARA
- Otros

Un **robot articulado** es aquel cuyas articulaciones son todas revolutas. La mayoría de los manipuladores industriales tienen esta estructura mecánica. Se suele denominar a este robot también como antropomórfico, por la similitud de su estructura con los movimientos del cuerpo humano. En la Figura 1.1 se muestra un robot industrial FANUC M-710iC, el cual es un robot de 6 grados de libertad.



Figura 1.1 Robot industrial FANUC M-710iC. ¹

En un **robot cartesiano** las primeras tres articulaciones son prismáticas. Las variables articulares del manipulador cartesiano son las coordenadas cartesianas del efector final con respecto a la base. En general, la descripción cinemática de este manipulador es la más simple de todos los manipuladores. Los manipuladores cartesianos son útiles para aplicaciones de ensamblaje de mesa y, como robots de pórtico, para la transferencia de material o carga. En la Figura 1.2 se puede observar un robot cartesiano KUKA KR 300LP.



Figura 1.2 Robot industrial KUKA Linear Robot KR 300LP. ²

Un **robot paralelo** es aquel en que posee dos o más cadenas cinemáticas que conectan la base (plataforma fija) con el efector final (plataforma móvil). La cinemática de cadena

¹Imagen recuperada de: <https://www.fanuc.eu/es/es/robots/p%C3%A1gina-filtro-robots/serie-m-710/m-710ic-50>

²Imagen recuperada de: https://www.kuka.com/-/media/kuka-downloads/imported/9cb8e311bfd744b4b0eab25ca883f6d3/kuka_datasheet_linear_robot_kr-300lp_en.pdf

cerrada de los robots paralelos puede dar como resultado una mayor rigidez estructural y, por lo tanto, una mayor precisión que los robots de cadena cinemática abierta. En la Figura 1.3 se puede observar el robot paralelo ABB IRB 360 FlexPicker, el cual de acuerdo con el fabricante es capaz de las aplicaciones de recolección más rápidas y se ha optimizado para aplicaciones de embalaje.



Figura 1.3 Robot industrial ABB IRB 360 FlexPicker. ³

Un robot SCARA (*Selective Compliant Assembly Robot Arm*) tiene cuatro grados de libertad, usualmente tiene dos revolutas que sirven para la parte del posicionamiento en un plano, una unión prismática que define altura en dirección vertical y una junta de revoluta que permite orientar el elemento terminal rotando alrededor de la dirección vertical. En la Figura 1.4 se muestra un manipulador SCARA Yaskawa SG400.



Figura 1.4 Robot industrial SCARA Yaskawa SG400. ⁴

³Imagen recuperada de: https://cdn.productimages.abb.com/9IBA179834_720x540.jpg

1.3. Algunos datos sobre los robots industriales

En esta sección se listan algunos datos reportados en el World Robotics 2021 de la IFR. En 2020, el stock operativo de robots industriales se calcula en 3,014,879 unidades (+10 %). En la Figura 1.5 puedes observar el crecimiento de robots industriales instalados en fábricas de todo el mundo.

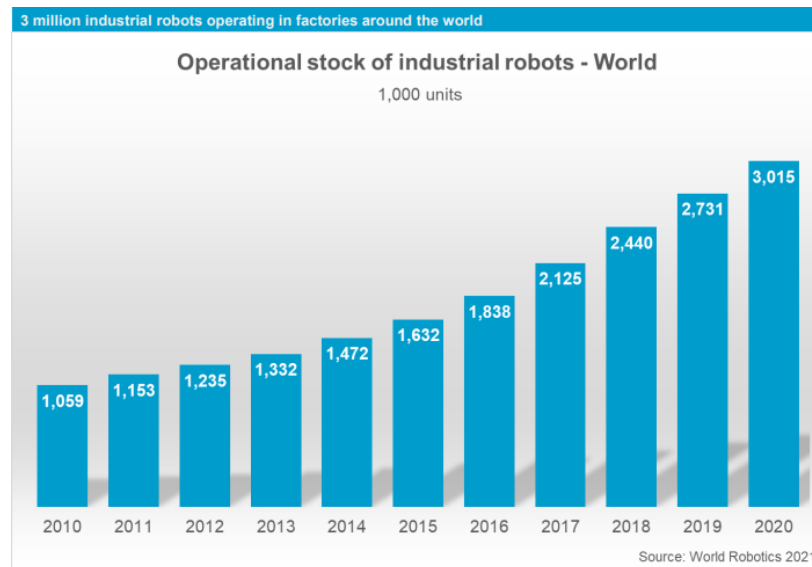


Figura 1.5 Stock de robots industriales

De acuerdo con la IFR, desde 2010, la demanda de robots industriales ha aumentado considerablemente debido a la tendencia actual hacia la automatización y la continua innovación tecnológica en robótica industrial. En 2010, las inversiones aumentaron e impulsaron las instalaciones de robots hasta 120,000 unidades. Para 2015, las instalaciones anuales se habían más que duplicado a casi 254,000 unidades. En 2016 se superó la marca de las 300,000 instalaciones por año y en 2017 las instalaciones aumentaron a casi 400,000 unidades. La marca de las 400,000 unidades al año se superó por primera vez en 2018. En 2020 se instalaron alrededor de 384,000 unidades. En la Figura 1.6 puedes observar la variación de robots industriales instalados anualmente en todo el mundo.

⁴Imagen recuperada de: https://www.motoman.com/getmedia/d01a4f6e-5036-4244-8bba-3ad451e6a5ff/SG400_500.jpg.aspx

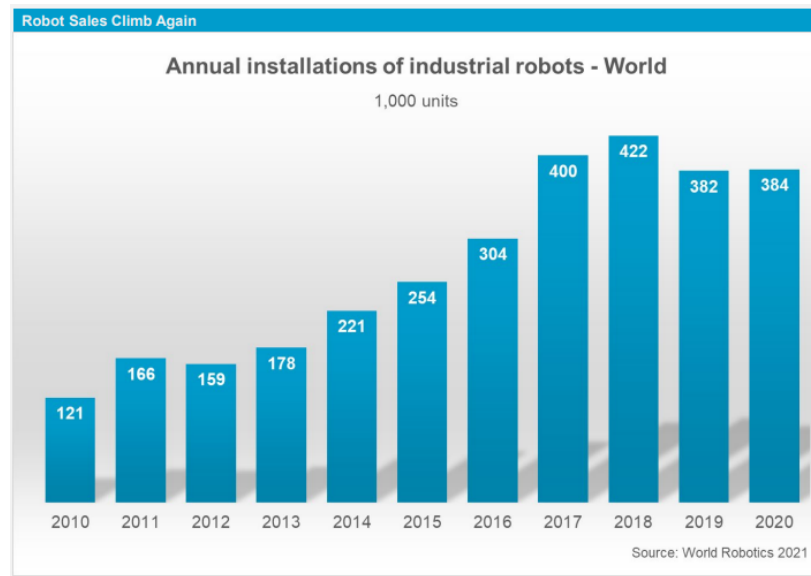


Figura 1.6 Instalaciones anuales de robots industriales

La IFR reporta que Asia es el mercado de robots industriales más grande del mundo. En 2020, se instalaron 266,452 unidades, un 7 % más que las 249,598 unidades de 2019. Las instalaciones en China crecieron con fuerza (168,377 unidades; +20 %), mientras que el mercado japonés (38,653 unidades; -23 %) y el mercado coreano (30,506 unidades; -7 %) tuvieron ciertas dificultades. Las instalaciones de robots en el segundo mercado más grande, Europa, disminuyeron un 8 % a 67,700 unidades, por segundo año consecutivo desde un máximo de 75,560 unidades en 2018. En el continente Americano, las instalaciones cayeron un 17 % a 38,736 unidades en 2020. Al mayor mercado en esta región, Estados Unidos, le ha ido mejor (30,787 unidades; -8 % en 2020) que los otros mercados importantes de México (3,363 unidades; -26 %) y Canadá (2,566 unidades; -29 %).

En la Figura 1.7 se pueden observar los quince países con mayor cantidad de robots instalados durante el 2020. México ocupa el décimo primer lugar con las 3,363 unidades instaladas.

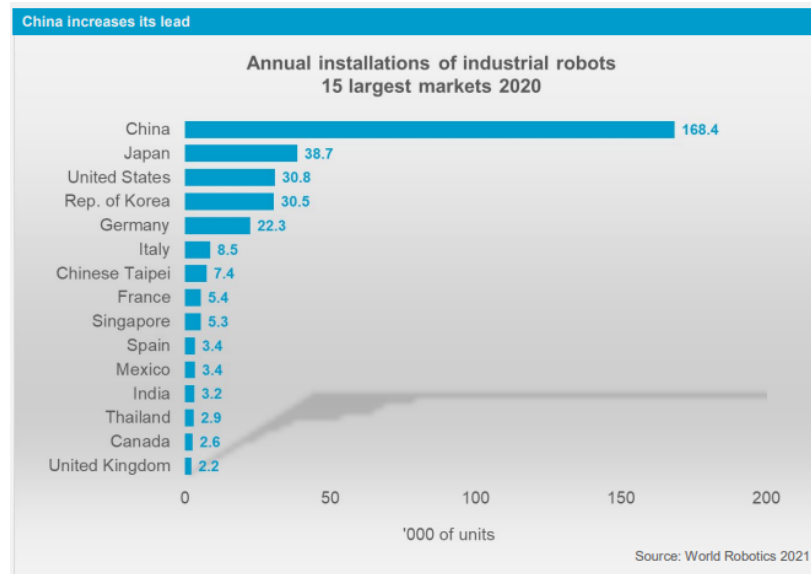


Figura 1.7 Países con mayor cantidad de robots industriales instalados en 2020

Preliminares matemáticos

Antes de comenzar con los tópicos específicos de localización espacial se hará un brevísimo repaso de algunos tópicos de matemáticas universitarias de importancia para el seguimiento del curso. Evidentemente, lo aquí descrito es una revisión muy rápida de dichos conceptos, si requiere información más detallada o específica al respecto, puede consultar en las referencias colocadas al pie de página. ^{1 2 3}

2.1. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular bidimensional de números (o elementos) escritos entre corchetes. Cada número de la matriz se conoce como *elemento* o *entrada* de la matriz. Los elementos de una matriz están dispuestos en filas y columnas, se denota como una matriz de $m \times n$ (léase *m por n*) a aquella que se compone de m filas y n columnas. Usualmente para nombrar las matrices se utilizarán letras mayúsculas, por ejemplo sea A una matriz de $m \times n$, de manera general puede escribirse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

¹Strang, G., Villagomez, H. (2007). Algebra lineal y sus aplicaciones. Mexico: Thomson.

²Grossman, S. I. (1996). Algebra lineal. Mexico: McGraw-Hill.

³Stewart, J. (2018). Cálculo de una variables, trascendentes tempranas. México: Cengage.

2.1.1. Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz A de $m \times n$ se denota como A^T y es una matriz de $n \times m$ que tiene la primera fila de A como su primera columna, la segunda fila de A como su segunda columna y así de manera sucesiva. Por tanto la transpuesta de la matriz A dada en la ecuación 2.2 será:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.1.2. Suma de matrices

La suma matricial está definida para matrices del mismo tamaño y se obtiene sumando los elementos correspondientes. Por ejemplo, sean A y B dos matrices de 2×2 dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

2.1.3. Multiplicación por un escalar

Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada elemento de la matriz se multiplica por dicho escalar. Sea A la matriz de 2×2 descrita con anterioridad y k un escalar, entonces:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

2.1.4. Multiplicación de matrices

Para que la multiplicación de matrices pueda efectuarse se debe cumplir que la matriz que premultiplica debe tener tantas columnas como filas tenga la que postmultiplica. En terminos más *amables*, sea A una matriz de dimensiones $m \times n$ y B una matriz de $p \times q$, para poder multiplicarlas necesariamente se debe cumplir que $n = p$, además, la matriz resultante tendrá un tamaño dado por $m \times q$.

Sean A y B dos matrices tal que puede efectuarse el producto AB y sea C la matriz que resulta de efectuar dicho producto, es decir:

$$C = AB$$

Cada elemento de la matriz C se calcula de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{pj}$$

Por ejemplo, sean A y B dos matrices de 2×2 definidas como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

El producto AB estará dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que el producto de matrices satisface las siguientes propiedades:

- $(AB)^T = B^T A^T$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$
- En general, $AB \neq BA$
- $A(B + C) = AB + AC$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
- $ABC = A(BC) = (AB)C$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

2.2. Vectores

Un vector es una matriz que tiene una sola fila (vector fila) o columna (vector columna), en ambos casos a sus elementos se les conoce como componentes. En este texto usual-

mente se hará referencia a vectores columnas y de manera indistinta se denotarán como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$$

2.2.1. Producto punto

El producto punto o producto escalar está definido para dos vectores del mismo tamaño y da como resultado un escalar. Sean $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ y $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ dos vectores en \mathbb{R}^3 , el producto escalar se calcula como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

2.2.2. Producto vectorial

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores es una operación definida para vectores en un espacio tridimensional y del cual resulta un vector perpendicular a ambos involucrados. Sean $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ y $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ dos vectores en \mathbb{R}^3 , entonces el producto vectorial está dado por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

2.2.3. Ángulo entre dos vectores

El ángulo entre dos vectores se puede calcular a partir de la definición del producto escalar. Se sabe que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \theta$$

Entonces:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv} \right)$$

2.2.4. Proyección escalar y vectorial

La proyección escalar de un vector \mathbf{u} sobre un vector \mathbf{v} está dada por:

$$u_v = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

Donde:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

La proyección vectorial de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} se obtiene multiplicando el resultado anterior por un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} , es decir:

$$\mathbf{u}_v = u_v \hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$$

En el caso particular de que los dos vectores involucrados sean unitarios, la proyección escalar de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ sobre un vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ está dada por:

$$u_v = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

De la definición del producto escalar se sabe que:

$$u_v = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = uv \cos \theta$$

Pero dado que $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ son vectores unitarios, entonces $u = v = 1$, por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \cos \theta$$

Este resultado nos será útil posteriormente cuando estemos realizando descripción de orientaciones.

2.3. Trigonometría

2.3.1. Relaciones en un triángulo rectángulo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

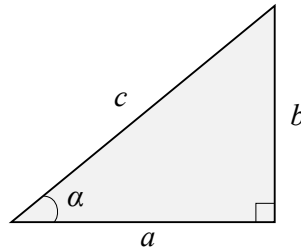


Figura 2.1 Triángulo rectángulo

2.3.2. Relaciones en un triángulo oblicuángulo

Un triángulo oblicuángulo es aquel en el cual ninguno de sus ángulos es recto. Para resolver un triángulo de este tipo, se pueden utilizar la ley de senos o la ley de cosenos, dependiendo de la información que se tenga disponible.

Ley de senos

Para un triángulo oblicuángulo como el mostrado en la Figura 2.2 se cumple que:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (2.3)$$

Esta expresión se conoce como la **ley de senos**. La ley de senos se puede enunciar de forma general como: *en cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.*

Es sencillo notar que de la ecuación 2.3 se pueden obtener tres fórmulas:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad ; \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad ; \quad \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de estas fórmulas a un triángulo específico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si sustituimos estos tres valores en la fórmula apropiada, podemos entonces encontrar el valor de la cuarta variable. Se deduce que la

ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo, siempre que conozcamos cualquiera de lo siguiente:

- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
- Dos ángulos y cualquier lado.

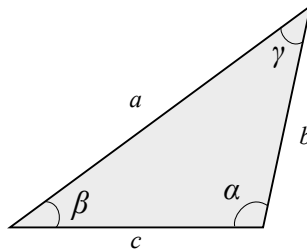


Figura 2.2 Triángulo oblicuángulo

Ley de cosenos

La ley de senos no se puede utilizar para resolver un triángulo oblicuángulo en los siguientes casos:

- Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos.
- Se conocen los tres lados.

En estas situaciones podemos hacer uso de la **ley de cosenos**, la cual establece que para un triángulo oblicuángulo como el mostrado en la Figura 2.2 se cumplen las siguientes tres relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

La ley de cosenos se puede enunciar como *El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los otros dos lados y el coseno del ángulo entre ellos.*

2.3.3. Algunas identidades trigonométricas

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\tan(\theta - \pi) = \tan \theta$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

2.3.4. La función arcotangente de dos argumentos arctan2

La función arcotangente habitual (\arctan) nos permite calcular de forma adecuada un ángulo en el rango $(-90^\circ, 90^\circ)$, es decir, aquellos que corresponden al primer y cuarto cuadrante del plano cartesiano. Sin embargo, cuando el ángulo que queremos calcular corresponde al segundo o tercer cuadrante, la función \arctan no puede manejarlo de forma apropiada. Por ejemplo, vamos a suponer que queremos calcular la dirección θ del vector \mathbf{r} mostrado en la Figura 2.3, utilizando la función arcotangente tendríamos que:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ$$

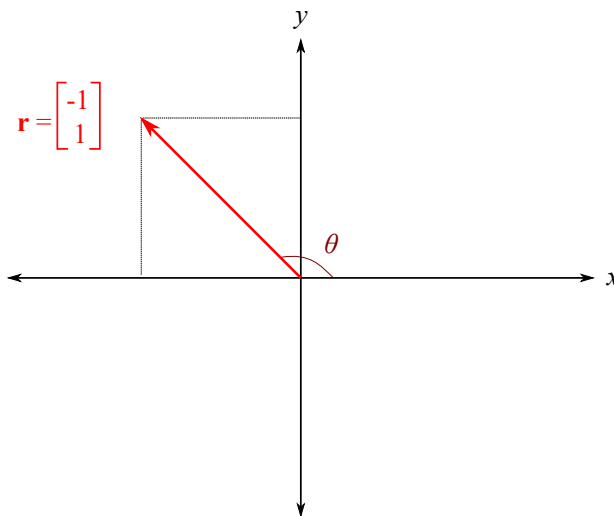


Figura 2.3

Es evidente que el resultado anterior nos da un ángulo ubicado en el cuarto cuadrante, lo cual no corresponde con lo observado en la figura. Como se había mencionado, la función arcotangente ordinaria no puede manejar adecuadamente resultados cuando $x < 0$, puesto que al recibir un argumento único no tiene manera de saber si el signo negativo

corresponde a la componente y o a la de x .

La función arcotangente de dos argumentos ($\arctan2$) permite calcular correctamente ángulos en todos los cuadrantes, dado que preserva la información correspondiente a los signos de cada una de las componentes. De forma simple podemos definir esta función como:

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{para } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Con ayuda de esta función podríamos ahora recalcular el ángulo θ , de lo cual tendríamos que:

$$\theta = \arctan2(1, -1)$$

Dado que el segundo argumento es negativo ($x < 0$), entonces:

$$\theta = \arctan2(1, -1) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + 180^\circ = \arctan(-1) + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$

Este resultado si que es correcto. En términos descriptivos podríamos considerar que la función arcotangente de dos argumentos hace una *corrección* a la función arcotangente en el caso de que la componente en x sea negativa. Esta corrección consiste en sumar 180° al resultado obtenido.

Hay un par de situaciones en las que hay que tener cuidado con la función arcotangente, puesto que si procedemos de forma usual nos conducirá a un error de cálculo (al menos en una calculadora de bolsillo), observa lo que ocurre si quisiéramos calcular la dirección del vector \mathbf{q} mostrado en la Figura 2.4, tendríamos que:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{0}\right)$$

Dado que la componente $x = 0$, nuestra operación implica una división por cero, lo cual nos conduce a una indefinición. Algo similar ocurre en el caso de la dirección β del vector \mathbf{u} . No podemos calcular numéricamente los ángulos, pero por inspección podemos verificar que $\theta = 90^\circ$ y $\beta = -90^\circ$.

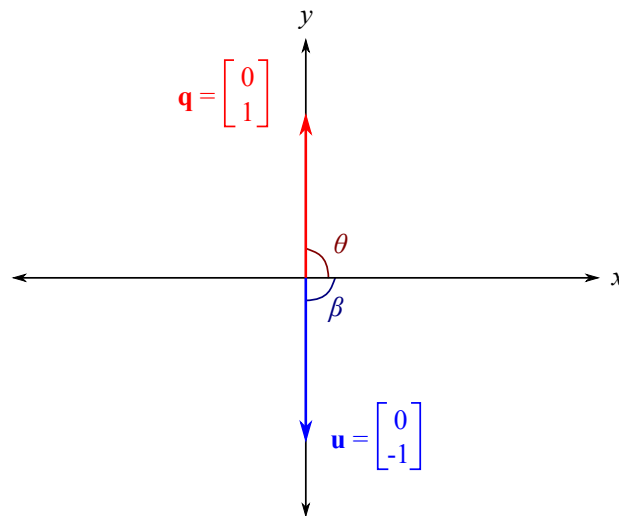


Figura 2.4

Tomando en cuenta lo anterior, una definición un poco más completa para la función arcotangente de dos argumentos incluye estos dos casos particulares:

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{para } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ & \text{para } x < 0 \\ 90^\circ & \text{para } x = 0; y > 0. \\ -90^\circ & \text{para } x = 0; y < 0. \end{cases}$$

i Calculando la función $\arctan2$

Normalmente las calculadoras de bolsillo no nos dan la posibilidad de calcular de manera directa mediante la función $\arctan2$, así que usualmente tenemos que hacer uso de \arctan y hacer la corrección manualmente en el caso que corresponda. Por otro lado, los lenguajes de programación y los programas de cálculo numérico, suelen incluir una función arcotangente de dos argumentos. Por ejemplo, en Python se puede utilizar la librería **math**, tal como se muestra en el siguiente bloque de código:

```
>>> from math import atan2, degrees
>>> degrees(atan2(1, -1))
135.0
```


2.4. Derivadas

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite. Este tipo especial de límite se denomina **derivada** y se puede interpretar como una razón de cambio en muchas aplicaciones de ingeniería [5]. En una gran parte de este texto utilizaremos derivadas para describir la cinemática de manipuladores, de manera específica para calcular las velocidades y aceleraciones a partir de la información de posición.

De manera general, la derivada de una función f en un número a , denotada por $f'(a)$, es:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2.4)$$

Si este límite existe. Ahora, si en lugar de considerar un número a en la ecuación 2.5, utilizamos una variable t , tendremos que:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (2.5)$$

Donde $f'(t)$ es una nueva función llamada **derivada de f** , la cual geométricamente se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

2.4.1. Algunas fórmulas de derivadas

A continuación, se listan algunas fórmulas de derivadas que serán utilizadas de forma recurrente a lo largo de algunos capítulos de este texto. En general, dado que estaremos trabajando con la descripción de cinemática y dinámica de cuerpos rígidos, se considerará que la variable independiente es el tiempo t .

En lo subsiguiente se utilizará la **notación de Newton** para las derivadas, de tal manera que, suponiendo que se tiene una $x(t)$, entonces:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Sean $u = u(t)$, $v = v(t)$ y $w = w(t)$, funciones escalares dependientes de t ; y sea a un escalar constante.

$$\frac{d}{dt}(au) = a\dot{u}$$

$$\frac{d}{dt}(u+v) = \dot{u} + \dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}(uv) = \dot{u}v + u\dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}(uvw) = \dot{u}vw + u\dot{v}w + uv\dot{w}$$

$$\frac{d}{dt}\sin u = \dot{u}\cos u$$

$$\frac{d}{dt}\cos u = -\dot{u}\sin u$$

$$\frac{d}{dt}\sin(u+a) = \dot{u}\cos(u+a)$$

$$\frac{d}{dt}\cos(u+a) = -\dot{u}\sin(u+a)$$

$$\frac{d}{dt}\sin(u+v) = (\dot{u} + \dot{v})\cos(u+v)$$

$$\frac{d}{dt}\cos(u+v) = -(\dot{u} + \dot{v})\sin(u+v)$$

Posición, orientación y transformaciones homogéneas

Se puede considerar que un manipulador serial es un conjunto de eslabones rígidos unidos mediante pares cinemáticos. En el estudio de la cinemática usualmente lo que haremos es colocar sistemas de referencias adheridos a cada uno de los eslabones y posteriormente encontrar las relaciones entre estos sistemas para poder realizar una descripción cinemática completa. Para lograr lo anterior necesitamos conocer los conceptos y herramientas matemáticas fundamentales para la descripción de la posición y orientación de un cuerpo rígido, y eso es justamente el objetivo de este capítulo.

3.1. Representación de la posición

Usualmente la ubicación de un punto en un sistema coordenado se describe mediante vectores de posición. En la Figura 3.1 se muestran dos puntos P y Q , cuyas posiciones están dadas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Naturalmente ambos vectores están descritos en el sistema de referencia XY que se muestra, y dado que únicamente se tiene dicho sistema de referencia, no hay necesidad de especificar con respecto a qué sistema se están midiendo las coordenadas de posición representadas.

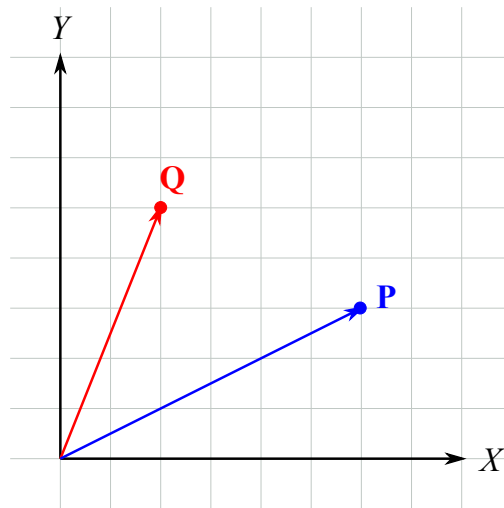


Figura 3.1 Posición de dos puntos P y Q

En la Figura 3.2 se muestra un punto P y dos sistemas de referencia $O_0X_0Y_0$ y $O_1X_1Y_1$. Donde el sistema $\{1\}$ se obtiene mediante operaciones de traslación a partir de $\{0\}$. La descripción de P en cada uno de los sistemas de referencia está dada por:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Es más, notará que tal como se muestra en la figura 3.3 las posiciones descritas en ambos sistemas están relacionadas mediante:

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{r}^0 + \mathbf{P}^1$$

Donde \mathbf{r}^0 describe la posición del origen de coordenadas del sistema $\{1\}$ con respecto al sistema $\{0\}$.

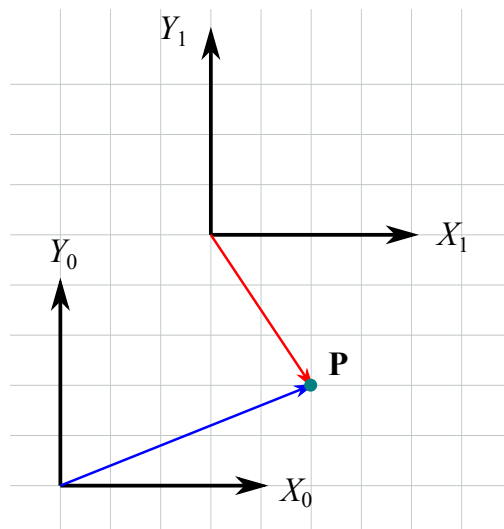
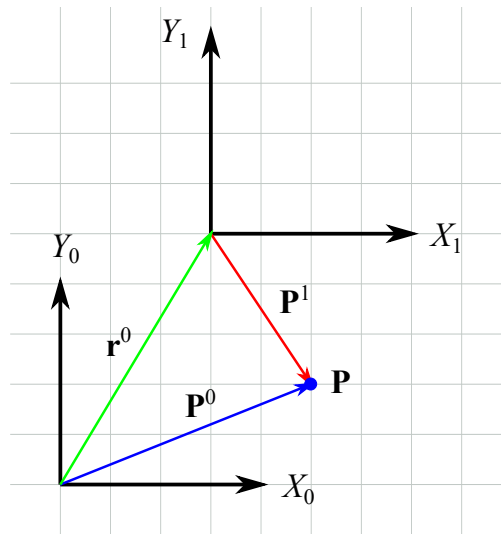


Figura 3.2 Posición de un punto P en dos sistemas de referencia**Figura 3.3** Posición de un punto P en dos sistemas de referencia

3.2. Representación de la orientación

La orientación de un cuerpo rígido en el espacio puede definirse mediante al menos mediante tres parámetros, de la mecánica elemental recordará que habitualmente en aquella se hace uso de los cosenos directores para dicha tarea. En cinemática de robots además de los cosenos directores (agrupados en las matrices de rotación) se hace uso de otros métodos de representación como los ángulos de Euler, los cuaterniones y los pares de rotación.

Para hacer la descripción de la orientación de un sólido rígido, como de la posición, se hace necesario adherir un sistema de referencia solidario al mismo, y posteriormente trabajar con las transformaciones necesarias de descripción entre sistemas de referencia.

3.2.1. Matrices de rotación

En la figura 3.4 se muestra un sistema $\{1\}$ que ha sido obtenido a partir de $\{0\}$ mediante una rotación θ alrededor del eje z . Una manera de representar dicha rotación sería simplemente con el parámetro de rotación θ , pero evidentemente esto no escalaría de manera adecuada para un caso de representación tridimensional.

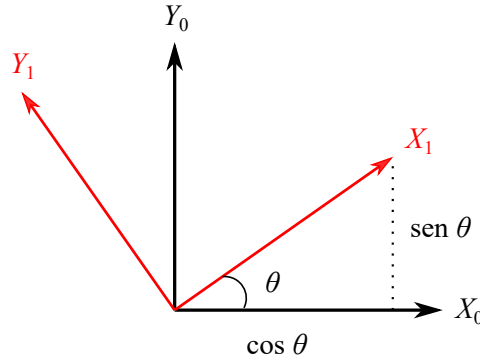


Figura 3.4 Un sistema $\{1\}$ obtenido por rotación a partir de $\{0\}$

Otra opción es describir las componentes de los ejes del sistema de referencia $\{1\}$ en el sistema $\{0\}$, es decir, X_1^0 y Y_1^0 . En el caso particular del ejemplo de la figura 3.4 se puede observar que dichos vectores estarán dados por:

$$\mathbf{X}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Y}_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Si estos vectores se acomodan de tal manera que:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^0 & \mathbf{Y}_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Se obtiene un arreglo conocido como **matriz de rotación**, la cual presenta algunas propiedades características que se describirán posteriormente. La matriz R_1^0 contiene la información necesaria para describir la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$.

Propiedades de la matrices de rotación

Se puede verificar que cada columna de las matrices de rotación son unitarias y mutuamente ortogonales, una matriz de este tipo se dice que es una **matriz ortogonal**. Usualmente se suele referir que las matrices de rotación pertenecen al conjunto de las matrices de $n \times n$ representadas por el símbolo $SO(n)$ que denota el grupo ortogonal especial de orden n . Algunas propiedades de las matrices de rotación se listan enseguida. Sea R una matriz de rotación, entonces:

- $R \in SO(n)$
- $R^{-1} \in SO(n)$
- $R^{-1} = R^T$
- Las columnas de R son mutuamente ortogonales.

- Cada columna de R es un vector unitario.
- $\det(R) = 1$, siempre y cuando los sistemas involucrados sean *derechos*.

Transformaciones de rotación

En la figura 3.5 se observa un sólido rígido de forma rectangular al cual se le ha adherido un sistema de referencia $\{1\}$, además, $\{1\}$ está rotado un ángulo θ con respecto a un sistema base $\{0\}$. Asumiendo que las dimensiones del rectángulo son a y b de largo y ancho respectivamente, entonces las coordenadas de la esquina P descritas en el sistema local $\{1\}$ están dadas por:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{Y}_1$$

Las coordenadas de P en el sistema $\{0\}$ se pueden obtener mediante la proyección de dicho vector en este sistema, es decir:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{Y}_1) \cdot \mathbf{X}_0 \\ (a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{Y}_1) \cdot \mathbf{Y}_0 \\ (a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{Y}_1) \cdot \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_0 + b\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{X}_0 \\ a\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Y}_0 + b\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{Y}_0 \\ a\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Z}_0 + b\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_0 & \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Note que la matriz que multiplica al vector $[a, b]^T$ es justamente R_1^0 , entonces:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1$$

Lo cual implica que la matriz de rotación R_1^0 además de describir la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto al sistema $\{0\}$, sirve para realizar transformaciones de coordenadas de un punto descrito en un sistema a otro.

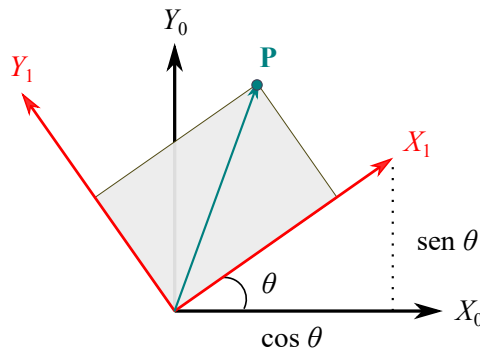
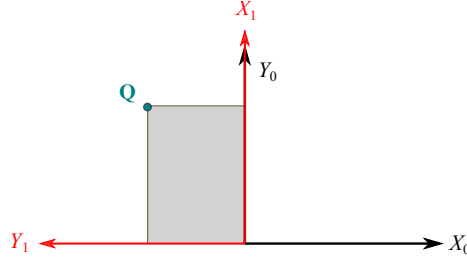


Figura 3.5 Transformaciones de rotación

Ejemplo 3.2.1 Transformación de coordenadas

El sistema $\{1\}$ está rotado 90° alrededor del eje z con respecto a $\{0\}$, se sabe que las coordenadas del punto Q dadas en el sistema $\{1\}$ son $\mathbf{Q}^1 = [10, 5]^T$, calcule las coordenadas del punto Q en el sistema $\{0\}$.

**Solución:**

La matriz de rotación R_1^0 que describe la orientación del sistema $\{1\}$ respecto a $\{0\}$ está dada por:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{Q}^0 = R_1^0 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

En este caso en particular se puede determinar la validez de lo anterior mediante inspección.

3.2.2. Parametrización de las rotaciones

Los nueve elementos r_{ij} de la matriz de rotación R no son cantidades independientes, dadas las propiedades particulares de las matrices en $SO(3)$. Es más, se sabe que para representar la orientación de un sólido rígido en el espacio se requieren al menos tres cantidades independientes. Esto se puede deducir fácilmente si se tiene en cuenta que:

$$\sum r_{ij}^2 = 1 \quad ; \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.1)$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (3.2)$$

Donde la ecuación 3.1 implica que todos los vectores columnas de R son unitarios y la

ecuación 3.2 refiere al hecho que todas las columnas de R son mutuamente ortogonales. De estas condiciones se desprende el hecho que existen seis ecuaciones independientes con nueve incógnitas, que implica tres variables libres.

3.2.3. Ángulos de Euler

Un método común para especificar una matriz de rotación en términos de tres cantidades independientes son los llamados **ángulos de Euler**, que básicamente consiste en realizar tres rotaciones sucesivas alrededor de ciertos ejes determinados. Evidentemente existen varias combinaciones de ejes respecto a los cuales girar que darían una representación conveniente de la orientación, pero aquí se revisarán algunos casos particulares y de uso común dentro de la robótica.

Ángulos ZXZ

En este caso, a partir de un sistema original se puede obtener cualesquiera otro en cualquiera orientación mediante tres rotaciones sucesivas alrededor del sistema local (móvil), a saber:

1. Una rotación ϕ alrededor del eje z
2. Una rotación θ alrededor del eje x
3. Una rotación ψ alrededor del eje z

Lo cual conduce a:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} -s\phi s\psi c\theta + c\phi c\psi & -s\phi c\psi c\theta - s\psi c\phi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + s\psi c\phi c\theta & -s\phi s\psi + c\phi c\psi c\theta & -s\theta c\phi \\ s\psi s\theta & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Evidentemente calcular la matriz de rotación correspondiente a un conjunto de ángulos de Euler es una tarea realizable sin problemas puesto que implica únicamente multiplicaciones matriciales en el orden indicado. Un problema de corte menos trivial es que a partir de una matriz de rotación cualquiera R se obtenga el conjunto de ángulos de Euler equivalentes, de tal forma que:

$$R = R_{ZXZ} \quad (3.4)$$

donde:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Siendo R , naturalmente, una matriz cuyos valores son todos conocidos. Para resolver este problema se considerarán tres casos.

Caso I

Si r_{13} y r_{23} no son ambas cero, de acuerdo a 3.4 implica necesariamente que $s\theta \neq 0$, y consecuentemente que r_{13} y r_{23} no son ambas cero. Lo anterior conduce a que $r_{33} \neq \pm 1$, entonces $c\theta = r_{33}$ y $s\theta = \pm\sqrt{1 - r_{33}^2}$, lo cual implica dos posibles soluciones para θ :

$$\theta = \arctan2\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \quad (3.5)$$

$$\theta = \arctan2\left(-\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \quad (3.6)$$

Si se toma la solución para θ dada por 3.5, entonces:

$$\phi = \arctan2(r_{13}, -r_{23})$$

$$\psi = \arctan2(r_{31}, r_{32})$$

Si se toma la solución para θ dada por 3.6, entonces:

$$\phi = \arctan2(-r_{13}, r_{23})$$

$$\psi = \arctan2(-r_{31}, -r_{32})$$

Caso II

Si $r_{13} = r_{23} = 0$, dado que R es ortogonal implica que $r_{33} = \pm 1$ y $r_{31} = r_{32} = 0$, entonces R tendrá la forma:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Si $r_{33} = 1$ entonces, $\cos \theta = 1$ y $\sin \theta = 0$, lo cual implica necesariamente que $\theta = 0^\circ$. De lo anterior se tiene:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) & 0 \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi + \psi = \arctan2(r_{21}, r_{11})$$

Lo anterior implica una cantidad infinita de soluciones. Por convención se asume $\phi = 0^\circ$ y entonces:

$$\psi = \arctan2(r_{21}, r_{11})$$

Caso III

De manera similar al caso anterior, si $r_{33} = -1$ entonces, $\cos \theta = -1$ y $\sin \theta = 0$, lo cual implica necesariamente que $\theta = 180^\circ$. De lo anterior se tiene:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi - \psi) & \sin(\phi - \psi) & 0 \\ \sin(\phi - \psi) & -\cos(\phi - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi - \psi = \arctan2(r_{21}, r_{11})$$

Lo anterior implica una cantidad infinita de soluciones. Por convención se asume $\phi = 0^\circ$ y entonces:

$$\psi = -\arctan2(r_{21}, r_{11})$$



Ejemplo 3.2.2 Ángulos de Euler

Para la siguiente matriz de rotación, calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXX equivalente.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Dado que $r_{33} \neq \pm 1$ podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el primer caso, es decir:

$$\theta = \arctan2 \left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33} \right) = \arctan2 \left(\sqrt{1 - 0^2}, 0 \right) = 90^\circ$$

$$\phi = \arctan2 (r_{13}, -r_{23}) = \arctan2 (1, 0) = 90^\circ$$

$$\psi = \arctan2 (r_{31}, r_{32}) = \arctan2 \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -30^\circ$$

Ejemplo 3.2.3 Ángulos de Euler

Para la siguiente matriz de rotación, calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalente.

$$R = \begin{bmatrix} 0.9397 & -0.342 & 0 \\ 0.342 & 0.9397 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Dado que $r_{33} = 1$ podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el segundo caso, es decir:

$$\phi = 0^\circ$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$\psi = \arctan2 (0.342, 0.9397) = 20^\circ$$

Entonces, el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalentes es

Ejemplo 3.2.4 Ángulos de Euler

Calcule los ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la matriz de rotación que resulta de la siguiente secuencia de rotaciones alrededor de los ejes móviles: una rotación de 60° alrededor del eje z seguida de una rotación de 135° alrededor del eje y.

Solución:

Para resolver este problema lo primero que debemos hacer es calcular la matriz de rotación que resulta de efectuar las dos operaciones indicadas, para ello multiplicamos las matrices de rotación en el orden correspondiente, es decir:

$$R = R_{z,60^\circ} R_{y,135^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Dado que $r_{33} \neq \pm 1$ podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el primer caso, es decir:

$$\theta = \arctan2 \left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33} \right) = \arctan2 \left(\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 135^\circ$$

$$\phi = \arctan2 (r_{13}, -r_{23}) = \arctan2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4} \right) = 150^\circ$$

$$\psi = \arctan2 (r_{31}, r_{32}) = \arctan2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 270^\circ$$

3.3. Matrices de transformación homogénea

En las secciones anteriores se ha visto cómo representar la posición y orientación, de forma separada; en esta sección se combinarán ambos conceptos para definir el movimiento de sólido rígido. Un movimiento de sólido rígido es un par ordenado (d, R) donde $d \in \mathbb{R}^3$ y $R \in SO(3)$. El grupo de todos los movimientos de sólido rígido se conocen como el Grupo Euclidiano Especial, denotado por $SE(3)$. Recordar que un movimiento de sólido rígido puede interpretarse como una traslación pura combinada con una rotación pura.

En la figura 3.6 podemos observar un sistema de referencia móvil $\{1\}$ adherido a un sólido rígido y un sistema de referencia $\{0\}$ fijo, es sencillo identificar que además de la orientación hay también una variación en la posición de los sistemas de referencia. Un punto P adherido al sólido rígido se puede describir en el sistema de referencia $\{1\}$ mediante el vector de posición \mathbf{P}^1 mostrado, además, la posición del origen del sistema de referencia $\{1\}$ se puede describir en $\{0\}$ mediante el vector \mathbf{d}_1^0 , si quisiéramos determinar la posición de P en $\{0\}$ entonces podríamos hacerlo de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 + \mathbf{d}_1^0 \quad (3.7)$$

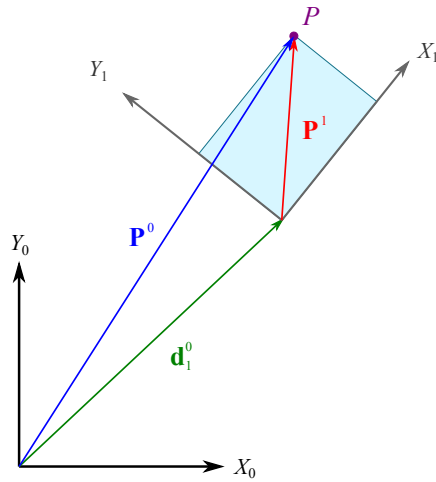


Figura 3.6 Movimiento de sólido rígido

Lo cual podríamos verlo como una suma de vectores (ley del triángulo), sin embargo, es importante recordar que no es posible sumar *directamente* dos vectores que están definidos con respecto a sistemas de referencia con diferente orientación. De tal modo que se debe expresar primeramente a \mathbf{P}^1 en un sistema paralelo a $\{0\}$, lo cual se logra con la multiplicación correspondiente por la matriz de rotación: $R_1^0 \mathbf{P}^1$, para poder sumarlo a \mathbf{d}_1^0 . Aquí, R_1^0 corresponde a la matriz de rotación que describe la orientación del sistema $\{1\}$ con respecto a $\{0\}$.

Supongamos ahora que tenemos tres sistemas de referencia: $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$, donde ahora el punto P pertenece al sólido que tiene adherido el sistema $\{2\}$ tal como se muestra en la Figura 3.7. De forma análoga al caso anterior podemos establecer que las coordenadas de P descritas en el sistema $\{1\}$ están dadas por:

$$\mathbf{P}^1 = R_2^1 \mathbf{P}^2 + \mathbf{d}_2^1 \quad (3.8)$$

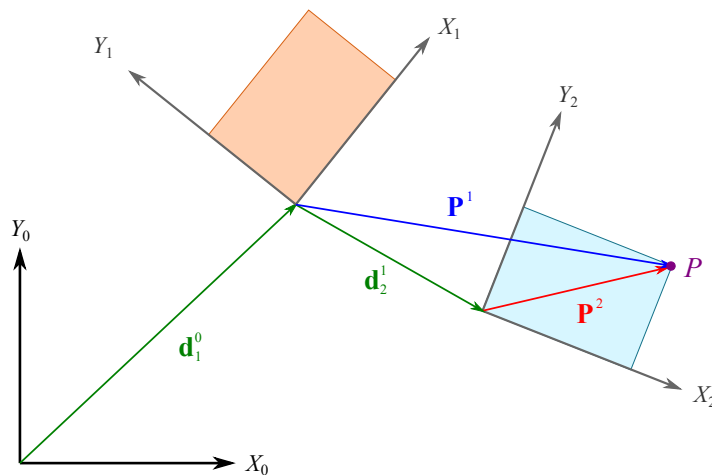


Figura 3.7 Movimiento de sólido rígido

De la Figura 3.8 podemos observar que la descripción de las coordenadas de P en el sistema $\{0\}$ está dada por:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 + \mathbf{d}_1^0 \quad (3.9)$$

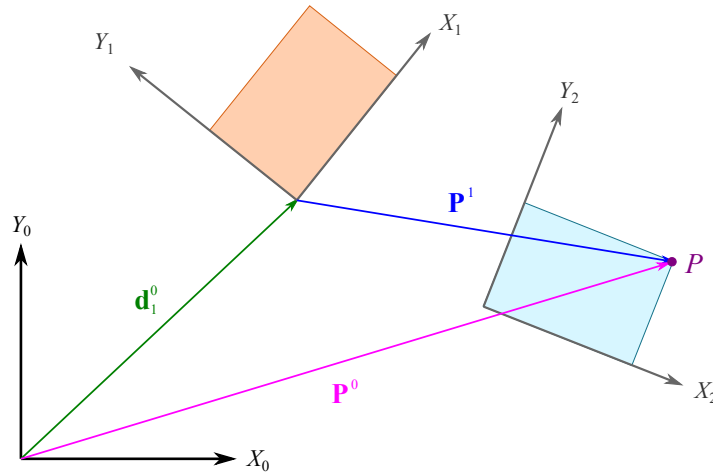


Figura 3.8 Movimiento de sólido rígido

Si sustituimos la ecuación 3.8 en la 3.9 se tiene que:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \left(R_2^1 \mathbf{P}^2 + \mathbf{d}_2^1 \right) + \mathbf{d}_1^0$$

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 R_2^1 \mathbf{P}^2 + R_1^0 \mathbf{d}_2^1 + \mathbf{d}_1^0$$

De acuerdo a lo que sabemos acerca de la composición de matrices de rotación:

$$R_1^0 R_2^1 = R_2^0$$

Además, tal como se observa en la Figura 3.9:

$$R_1^0 \mathbf{d}_2^1 + \mathbf{d}_1^0 = \mathbf{d}_2^0$$

Donde \mathbf{d}_2^0 denota al vector de posición que describe el origen de coordenadas del sistema $\{2\}$ en el sistema $\{0\}$.

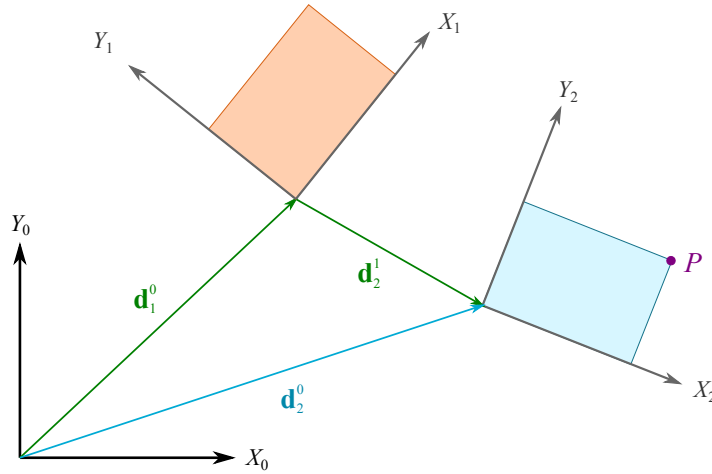


Figura 3.9 Movimiento de sólido rígido

Así, la descripción de las coordenadas de P en $\{0\}$ se pueden escribir como:

$$\mathbf{P}^0 = R_2^0 \mathbf{P}^2 + \mathbf{d}_2^0 \quad (3.10)$$

De esto podemos inferir que las transformaciones de orientación implicadas se pueden calcular simplemente multiplicando las matrices de rotación que describen las relaciones entre los sistemas de referencia, y que las transformaciones de posición se pueden obtener sumando los vectores de posición del origen de coordenadas de cada sistema de referencia involucrado con respecto al inmediatamente anterior, claramente siendo estos vectores siempre expresados en la misma orientación del sistema $\{0\}$, para que la suma vectorial pueda efectuarse adecuadamente.

En este punto es notorio que si procedemos de la forma previamente descrita, en cuanto comencemos a involucrar un conjunto de sistemas de referencia un poco más amplio la cantidad de operaciones y expresiones a manejar se volverá cuando menos lo suficientemente tediosa. Por fortuna, los movimientos de sólido rígido pueden ser representados en forma matricial de tal manera que una secuencia de movimientos se reduzca a una multiplicación de matrices como en el caso de las rotaciones, así, la última transformación abordada podría expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Donde $\mathbf{0} = [0, 0, 0]$. Luego entonces, un movimiento de sólido rígido puede ser representado por un conjunto de matrices de 4×4 de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad R \in SO(3) \quad d \in \mathbb{R}^3$$

Las matrices de transformación que tienen esta forma son llamadas **matrices de transformación homogénea**, y nos permiten conjuntar la información de posición y orientación en una misma entidad.

Con la finalidad de poder expresar y realizar las operaciones de transformación, a cada vector que representa una posición en el espacio se le debe adicionar una componente unitaria como sigue:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde u, v y w son las componentes espaciales del vector \mathbf{P}^0 . La forma anterior del vector es una representación en coordenadas homogéneas del mismo.

Las transformación dada por las ecuación 3.7 se puede escribir utilizando matrices de transformación homogénea de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}^0 = H_1^0 \mathbf{P}^1$$

3.3.1. Matrices de transformación homogéneas básicas

Un conjunto básico de matrices de transformación homogénea que representan movimientos básicos de traslación y rotación alrededor de los ejes x, y, z está dado por:

$$D_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2. Composición de las matrices de transformación homogénea

Las reglas para la composición de las matrices de transformación homogénea son similares al caso de las rotaciones. A continuación, se describen algunos casos particulares.

Secuencia de traslaciones

Cuando las transformaciones son sólo traslaciones en realidad en el resultado final no influye el orden de las mismas, y consecuentemente el orden de *acomodo* de las matrices no es restrictivo, naturalmente se prefiere escribirlas en el orden que son dadas de acuerdo a si son realizadas con respecto a un sistema fijo o móvil. Por ejemplo suponga que un sistema $\{B\}$ se obtiene del sistema $\{A\}$ mediante una traslación a en x , seguida de una traslación b en y , y finalmente una traslación c en z , la matriz de transformación homogénea que representa dichas operaciones está dada por:

$$T_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtendría el mismo resultado si cualquiera de las matrices se coloca en otra posición.

Secuencia de rotaciones

La composición de matrices de transformación homogénea que representan rotaciones siguen exactamente la misma regla dada para las matrices de rotación, se colocan de izquierda a derecha (postmultiplicando) en el orden que son efectuadas cuando se realizan con respecto al sistema móvil y se premultiplican cuando son realizadas con respecto a un sistema fijo.

Secuencia de traslaciones y rotaciones

Cuando se tiene un conjunto tanto de traslaciones como rotaciones la composición suele ser el mismo caso que con las matrices de rotación, es decir:

1. Si las transformaciones son realizadas con respecto a un sistema móvil, entonces hay que escribir las matrices implicadas de izquierda a derecha.
2. Si las transformaciones son realizadas con respecto a un sistema fijo, entonces hay que escribir las matrices implicadas de derecha a izquierda.

Por ejemplo suponga que debe realizar la siguiente secuencia de transformaciones alrededor de los ejes móviles:

1. Rotación α alrededor del eje x
2. Traslación a en z

3. Traslación b en x
4. Rotación β alrededor del eje y
5. Traslación c en y

Entonces el producto matricial que describe la transformación total está dado por:

$$T = R_{\alpha,x} D_{z,a} D_{x,b} R_{y,\beta} D_{y,c}$$

Si esa misma secuencia de transformaciones se realizara con respecto a los ejes de un sistema fijo, entonces la matriz de transformación homogénea resultante estaría dada por:

$$T = D_{y,c} R_{y,\beta} D_{x,b} D_{z,a} R_{x,\alpha}$$

3.3.3. Traslación

En la figura 3.10 se observa un sistema $\{1\}$ que ha sido obtenido mediante una traslación de 3 unidades en x y 5 unidades en y . Así, la matriz de transformación homogénea que representa la descripción de dicho sistema está dada por:

$$T_1^0 = D_{x,3} D_{y,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

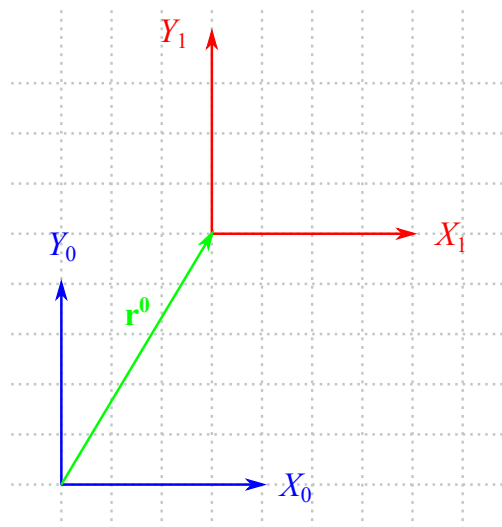


Figura 3.10 Traslación

3.3.4. Rotación

El esquema de la figura 3.11 muestra un sistema $\{1\}$ obtenido de $\{0\}$ mediante una rotación alrededor de z de 30° . La matriz de transformación homogénea que describe dicha transformación es la básica de rotación alrededor de z , sustituyendo, claro está, el valor correspondiente del ángulo, de esa manera:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

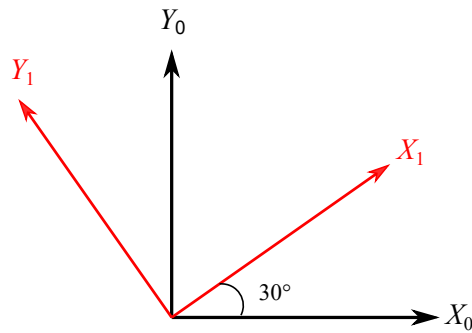


Figura 3.11 Rotación

3.3.5. Rotación y traslación

En la figura 3.12 se observa un sistema $\{1\}$ que puede obtenerse de $\{0\}$ mediante una serie de traslaciones y rotaciones. De manera específica, utilizando los ejes locales, se pueden trasladar 4 unidades en x y en y , y posteriormente una rotación alrededor de z de 45° , estas transformaciones se pueden expresar en forma de un producto matricial como sigue:

$$T_1^0 = D_{x,4}D_{y,4}R_{z,45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

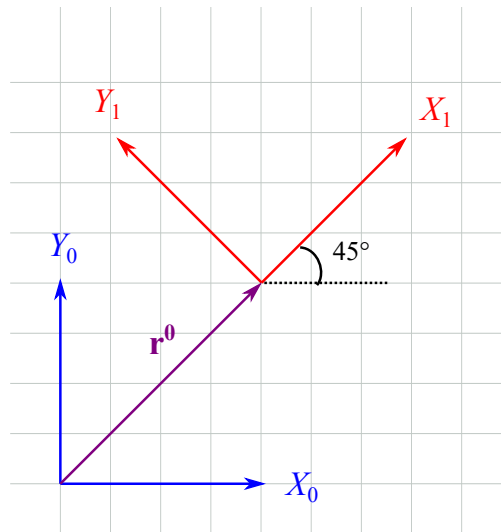


Figura 3.12 Traslación y rotación

Ejemplo 3.3.1 Una barra en rotación pura

En la figura 3.13 se observa una barra en rotación pura, la cual tiene adherido en su extremo un sistema local $\{1\}$ y un sistema fijo $\{0\}$ en su base. El sistema $\{1\}$ está definido de tal manera que el eje X_1 apunta en la dirección de la línea que va desde el centro de rotación hasta su extremo.

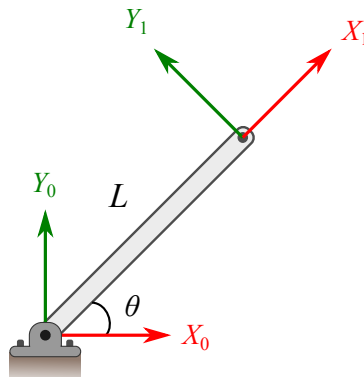


Figura 3.13 Una barra en rotación pura

Se observa que el sistema $\{1\}$ se puede obtener de $\{0\}$ mediante una serie de traslaciones y rotaciones. Por ejemplo, si las transformaciones se hacen respecto a un sistema móvil, entonces una secuencia posible sería la siguiente:

1. Traslación en x de $L \cos \theta$
2. Traslación en y de $L \sin \theta$
3. Rotación alrededor de z un ángulo θ

Lo cual conduce a:

$$T_1^0 = D_{x, L \cos \theta} D_{y, L \sin \theta} R_{z, \theta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & L \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pero claro está que no es la única manera, si se ejecuta la siguiente secuencia alrededor de los ejes móviles:

1. Rotación alrededor de z un ángulo θ .
2. Traslación en x de L .

Se tiene:

$$\begin{aligned}
T_1^0 = R_{z,\theta} D_{x,L} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & L \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Lo cual conduce en efecto a la misma descripción obtenida con anterioridad. De igual manera se pueden establecer transformaciones con respecto a los ejes fijos que produzcan el mismo resultado.

Ejemplo 3.3.2 Múltiples sistemas de referencia

En la figura 3.14 se observa una placa plana rectangular de las dimensiones indicadas en cuyas esquinas se adjuntan sistemas de referencia. A continuación se describen diversas relaciones entre los diversos sistemas y la forma de proceder para calcularlas. Todas las transformaciones se realizarán con respecto a los ejes móviles.

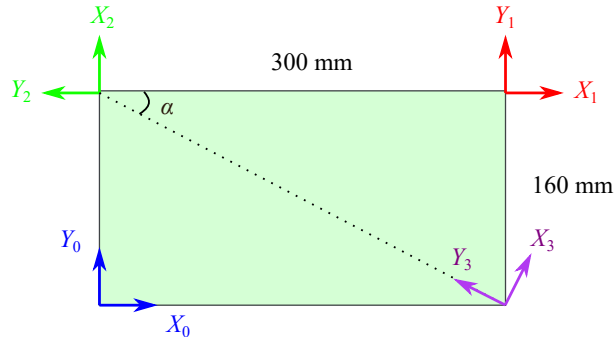


Figura 3.14 Una placa plana con múltiples sistemas de referencia

Descripción de {1} con respecto a {0}

Como se observa en la figura 3.14 el sistema {1} está trasladado 300 mm en x y 160 mm en la dirección de y , luego el producto matricial que proporciona la matriz de transformación total está dado por:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz resultante concuerda con lo esquematizado, T_1^0 indica que el sistema {1} está en las coordenadas (300,160) y en la misma orientación con respecto a {0}.

Descripción de {2} con respecto a {1}

De acuerdo a lo mostrado en la figura 3.14 el sistema {2} puede obtenerse a partir de {1} mediante una traslación de 300 mm en la dirección negativa de x y enseguida una rotación de 90° alrededor de z . Con lo anterior se tiene:

$$T_2^1 = D_{x,-300} R_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que de acuerdo a T_2^1 el eje X_2 apunta en la dirección positiva del eje Y_1 , y que el eje Y_2 apunta en la dirección negativa del eje X_1 , lo cual concuerda con el esquema de referencia. Es más, la posición del origen de {2} respecto a {1} es (-300,0), misma que puede corroborarse en la figura 3.14.

Descripción de {2} con respecto a {0}

Como se observa en la figura 3.14 el sistema {2} puede obtenerse de {0} mediante una traslación de 160 mm en la dirección de y , y una posterior rotación de 90° alrededor de z .

$$T_2^0 = D_{y,160} R_{z,90} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz T_2^0 también puede obtenerse mediante la composición de matrices de transformación, bajo la consideración de que previamente se han calculado T_1^0 y T_2^1 , así:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descripción de {3} con respecto a {2}

De la figura 3.14 se puede identificar que {3} se puede obtener de {2} mediante una rotación horaria de un ángulo α en la dirección de z , seguida de una traslación de d_r en la dirección negativa de y , siendo d_r la longitud de la diagonal del rectángulo, entonces se tiene:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{160}{300}\right) = 28.07^\circ \quad ; \quad d_r = \sqrt{160^2 + 300^2} = 340 \text{ mm}$$

$$T_3^2 = R_{z,-\alpha} D_{y,-d_r} = \begin{bmatrix} 0.8824 & 0.4706 & 0 & 0 \\ -0.4706 & 0.8824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -340 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0.8824 & 0.4706 & 0 & -160.0 \\ -0.4706 & 0.8824 & 0 & -300.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Como es de suponer, además de las series de transformaciones descritas en los puntos anteriores, existen una cantidad considerable de posibles secuencias de transformaciones. Por lo anterior, usualmente en cinemática de manipuladores se establecen ciertos criterios para el establecimiento de los sistemas de referencia así como de las transformaciones a realizar, esto es algo que se verá en el siguiente capítulo.

Problemas

- 3.1 Describe las coordenadas del punto Q en cada uno de los sistemas de referencia mostrados en la Figura 3.15.

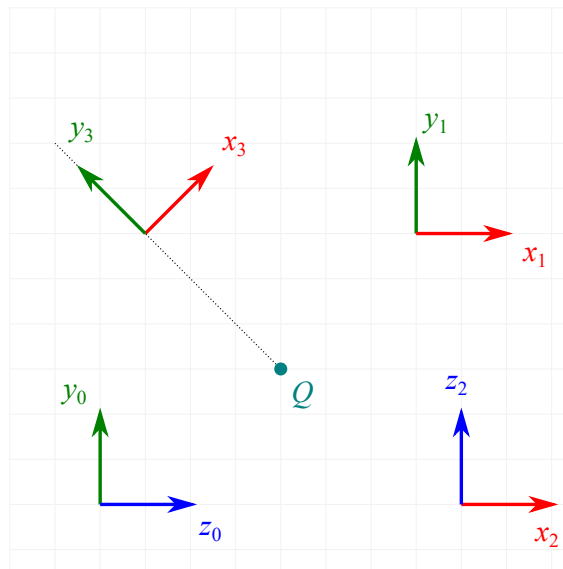


Figura 3.15

- 3.2 Las coordenadas de un punto P en un sistema de referencia $\{A\}$ están dadas por $\mathbf{r}_P^A = [5, 10, 3]^T$. Si se sabe que un sistema de referencia $\{B\}$ se obtiene a partir de $\{A\}$ mediante una traslación en x de 10 unidades y una traslación en z de 5 unidades, calcula las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $\{B\}$.
-
- 3.3 Muestre que la distancia entre dos puntos no cambia con la rotación, es decir, que $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| = \|R\mathbf{p}_1 - R\mathbf{p}_2\|$. Donde R es una matriz de rotación y \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 dos vectores de posición.
- 3.4 Muestre que la rotación efectuada a un vector no altera su magnitud, es decir que $\|\mathbf{p}\| = \|R\mathbf{p}\|$, donde R es una matriz de rotación.
- 3.5 Muestre que para una matriz de rotación se cumple la propiedad $R^{-1} = R^T$. Utilice la matriz de rotación alrededor de x para comprobarlo. Suponga un ángulo θ de rotación y proceda mediante un método convencional para el cálculo de la matriz inversa y compare con lo obtenido transponiendo la matriz de rotación.
- 3.6 Un vector $\mathbf{P} = [0, 10, 0]^T$ se rota alrededor del eje x un ángulo de 90° y enseguida se rota alrededor del eje y un ángulo de 180° , determine las componentes del vector transformado. Esquematice el vector inicial y el transformado.
- 3.7 En la Figura 3.16 se muestra un cuerpo rígido con forma de cubo y cuyas aristas

miden 200 mm. Al sólido se le adhiere un sistema móvil $\{1\}$ que inicialmente coincide con el sistema fijo $\{0\}$. Calcule lo siguiente:

- Las coordenadas del punto Q después de una rotación de 30° alrededor del eje X_0 , seguida por una rotación de 225° alrededor del eje Y_1 .
- Las coordenadas del punto Q después de una rotación de 45° alrededor del eje Y_1 , seguida por una rotación de 60° alrededor del eje Z_0 .
- Las coordenadas del punto Q después de la rotación de 135° alrededor del eje Z_0 , seguida por una rotación de 90° alrededor del eje X_1 y posteriormente una rotación de 60° alrededor del eje X_0 .

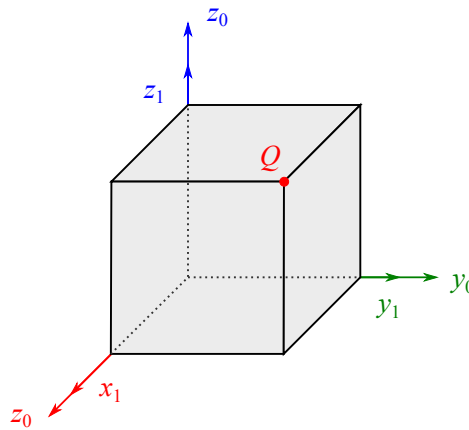


Figura 3.16

3.8 Suponga que tres sistemas de referencia $\{A\}$, $\{B\}$ y $\{C\}$ están dados y que además:

$$R_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad R_C^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule R_B^C .

3.9 La siguiente matriz de rotación corresponde a una secuencia de rotaciones alrededor de un sistema móvil:

- Un ángulo α alrededor del eje x
- Un ángulo β alrededor del eje y
- Un ángulo γ alrededor del eje z

Calcule α , β y γ .

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{6}}{8} & \frac{\sqrt{6}}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{5\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

3.10 El sistema de referencia $\{B\}$ se obtiene a partir del $\{A\}$ mediante una secuencia de rotaciones, a saber:

- a) 45° alrededor del eje z móvil
- b) 30° alrededor del eje x fijo
- c) 135° alrededor del eje y móvil
- d) 60° alrededor del eje z fijo

Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que describe la orientación de $\{B\}$ con respecto de $\{A\}$.

3.11 Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la siguiente matriz de rotación.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.12 Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la siguiente matriz de rotación.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

3.13 Calcule la matriz de rotación correspondiente al conjunto de ángulos de Euler ZXZ $\{45^\circ, 60^\circ, 20^\circ\}$.

3.14 Un sistema de referencia $\{B\}$ está trasladado 5 unidades en x , 4 unidades en y y -10 unidades en z con respecto al sistema $\{A\}$. Se sabe que las coordenadas de un punto P descritas en el sistema $\{B\}$ son $\mathbf{P}^B = [2, 3, -5]^T$, calcule \mathbf{P}^A .

3.15 En la Figura 3.17 se muestra un cuerpo rígido en forma cúbica, con algunos sistemas de referencia adheridos tal como se esquematiza. Calcule las matrices de transformación homogénea T_1^0 , T_2^1 , T_2^0 y T_0^2 . Considere que las aristas del cubo miden 100

mm.

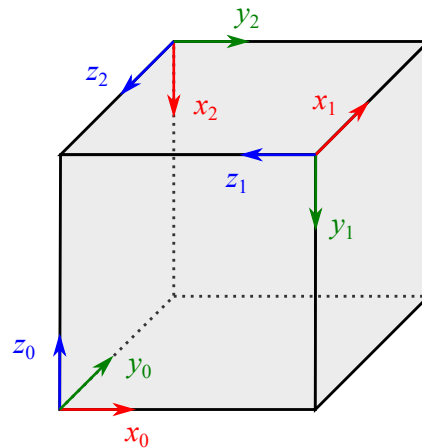


Figura 3.17

- 3.16 Un sistema de referencia móvil {C} se obtiene a partir de un sistema fijo {B} mediante las siguientes transformaciones: una traslación de 3 unidades a lo largo del eje x , seguida por una rotación de 90° alrededor del eje z móvil seguida por una traslación de 5 unidades a lo largo del eje y fijo. Calcule la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación de {C} con respecto de {B}.
- 3.17 La siguiente matriz de transformación homogénea se obtiene de realizar las siguientes transformaciones respecto a un sistema móvil: una rotación alrededor de z seguida por una traslación en el plano xy .

$$T = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 3.536 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 10.61 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Determine el ángulo que se ha rotado, así como las componentes de traslación correspondientes.

- 3.18 Se tiene un triángulo rectángulo definido por los puntos A , B y C , al cual se adhiere un sistema de referencia móvil {1} que inicialmente coincide con el sistema fijo {0} (ver figura 3.18). Considerando que se aplican las siguientes transformaciones alrededor de los ejes móviles:
- Una traslación de 10 unidades en la dirección x
 - Una rotación de 180° alrededor de z
 - Una traslación de -5 unidades en la dirección de y
 - Una rotación de 90° alrededor z .

Calcule la matriz de transformación homogénea correspondiente y las coordenadas

de los puntos que definen el triángulo con respecto al sistema fijo, esquematizando también las posiciones inicial y transformada. Las coordenadas de A , B y C en el sistema $\{1\}$ son:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

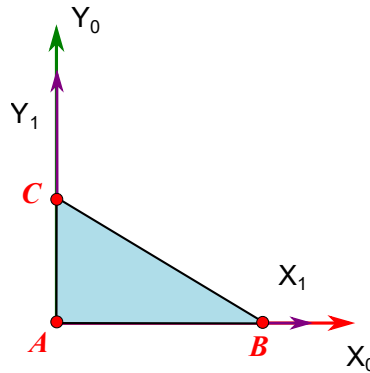


Figura 3.18

3.19 Sea H una matriz de transformación homogénea de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces su inversa viene dada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando la siguiente matriz H , aplica un método convencional para calcular su inversa y compara con el resultado que se obtiene al aplicar la fórmula anterior.

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.20 Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule: $T_1^0, T_2^0, T_2^1, T_0^1$.

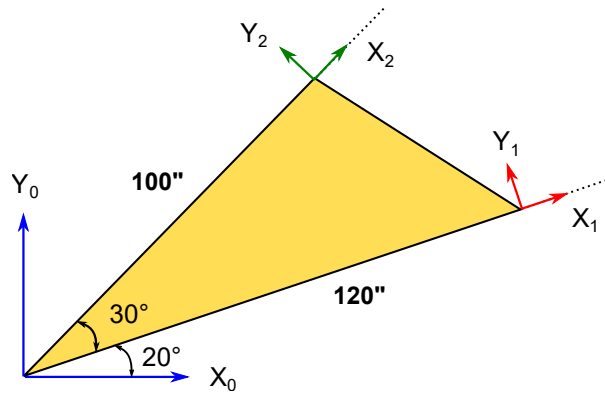


Figura 3.19

- 3.21 Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule: T_1^0 , T_2^0 , T_2^1 , T_3^2 y T_3^0 .

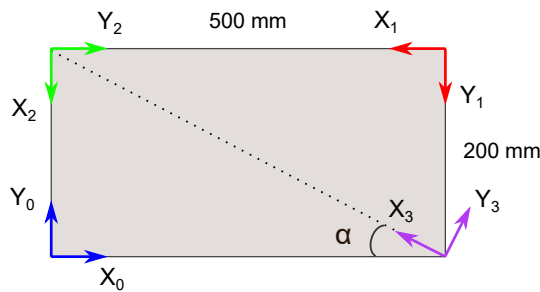
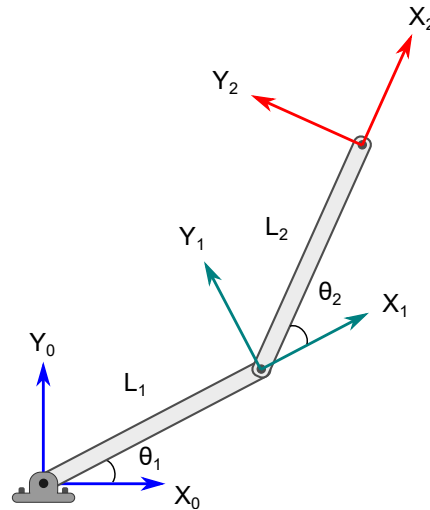


Figura 3.20

- 3.22 En la figura 3.21 se muestra un manipulador planar RR con tres sistemas adheridos a cada eslabón que lo conforma, incluyendo la base, alineados de tal forma que el eje x coincide con la dirección axial del eslabón y con el origen ubicado en el extremo. Si se sabe que la matriz de transformación que describe $\{2\}$ en $\{0\}$ está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule las coordenadas del extremo del manipulador si $\theta_1 = 30^\circ$ y $\theta_2 = -30^\circ$. Considere que $L_1 = 200$ mm y $L_2 = 200$ mm.

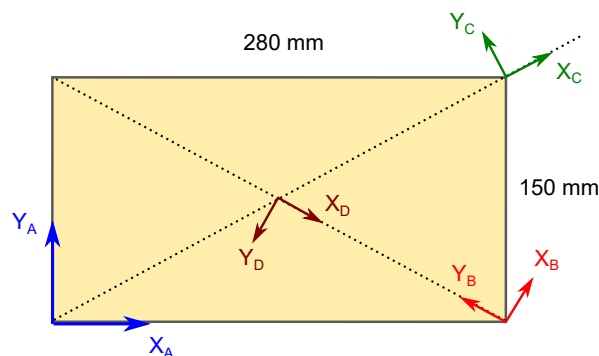
**Figura 3.21**

3.23 Un cuerpo rígido está posicionado y orientado de acuerdo a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -300 \\ 250 \\ 90^\circ \\ 30^\circ \\ 120^\circ \end{bmatrix}$$

Calcule matriz de transformación homogénea que describe la ubicación de dicho cuerpo rígido.

3.24 Para los sistemas de referencia mostrados en la figura 3.22, calcule T_A^B , T_C^B , T_D^C y T_A^D .

**Figura 3.22**

3.25 En la figura 3.23 se muestra el esquema de un manipulador planar RRR que deberá realizar operaciones de soldadura a lo largo de la trayectoria compuesta esquematizada mediante la línea discontinua. Los puntos A y B denotan el inicio y fin de la

trayectoria, y el elemento terminal del manipulador deberá alcanzar estos puntos con la orientación dada por los sistemas {A} y {B}. Para un instante determinado se conoce la relación existente entre {A} y los sistemas de la herramienta {T} y la base {W}:

$$T_A^W = \begin{bmatrix} 0.707107 & -0.707107 & 0 & 300.0 \\ 0.707107 & 0.707107 & 0 & 150.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^T = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.866025 & 0 & 250.694 \\ 0.866025 & -0.5 & 0 & -30.4602 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule las matrices de transformación T_B^A , T_B^W , T_B^T y T_T^W .

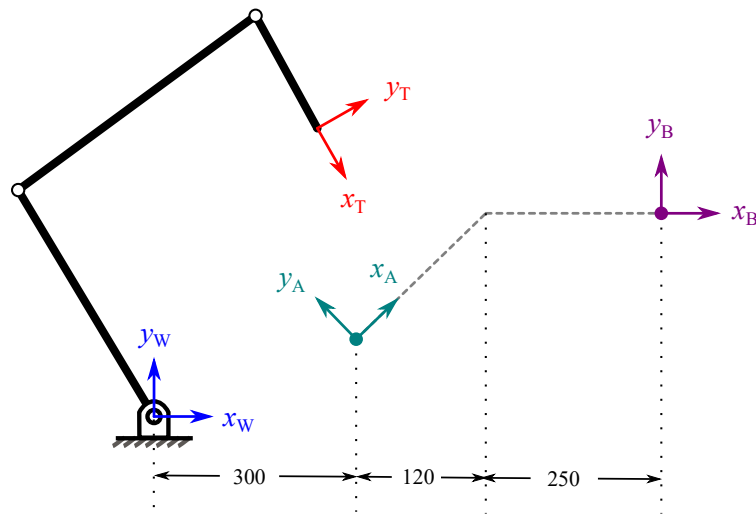


Figura 3.23

- 3.26 En la figura 3.24 se muestra un conjunto de objetos {1}, {2} y {3} que deberán ser manipulados por un brazo robótico cuyo sistema base {0} se ubica como se ilustra. Calcule la posición y orientación de cada objeto con respecto a la base, considere que los objetos son de dimensiones (20x20x20) mm.

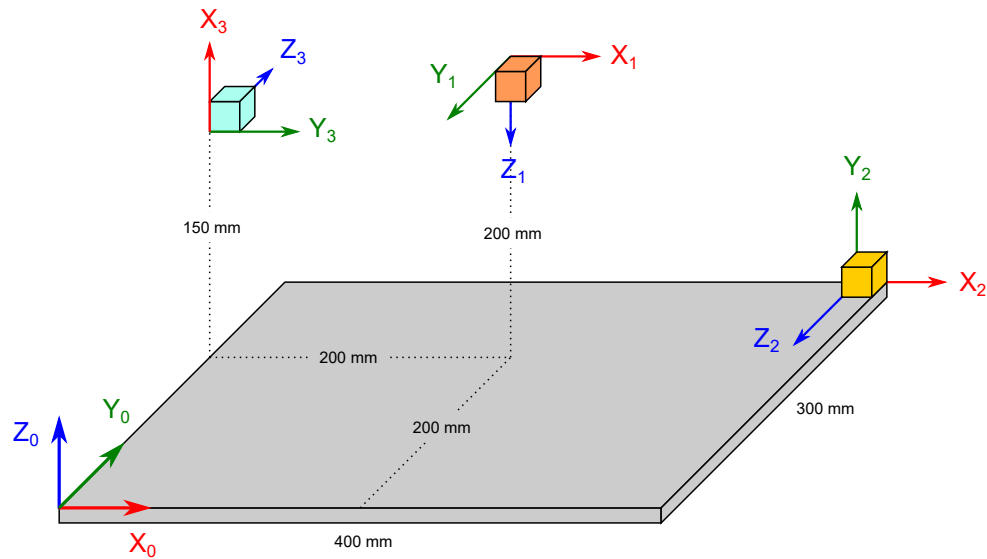


Figura 3.24

3.27 En la figura 3.25 se muestran dos cuerpos rígidos móviles en forma cúbica, de dimensiones (20x20x20) mm, a los cuales se adhieren los sistemas de referencia {B} y {C}. Realice lo siguiente:

- Calcule las matrices de transformación T_B^A , T_C^A y T_C^B .
- Calcule los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {B} con respecto de {A} y de {C} con respecto de {A}.

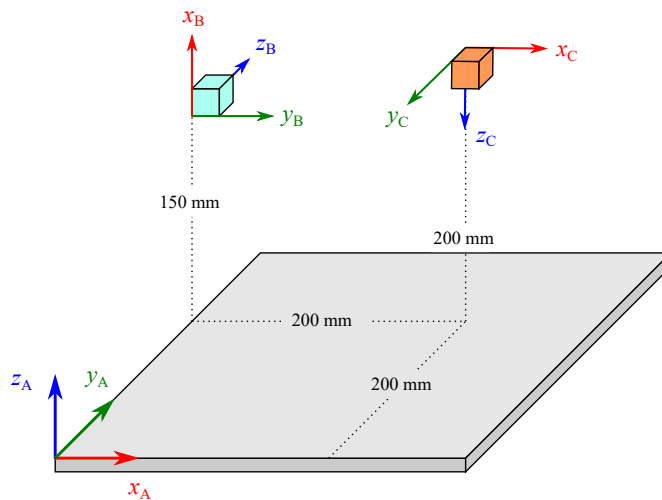


Figura 3.25

3.28 En la figura 3.26 se muestra el esquema de un pequeño manipulador planar PPR que deberá manipular algunos objetos cuya posición y orientación está indicada mediante los sistemas de referencia {A} y {B}. Para un instante determinado en que $\theta_3 = 130^\circ$ se conoce la siguiente información:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 140.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 125.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^3 = \begin{bmatrix} 0.965926 & 0.258819 & 0 & -69.2651 \\ -0.258819 & 0.965926 & 0 & -115.304 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule lo siguiente:

- Las matriz de transformación T_3^0 que describe la posición y orientación del extremo con respecto a la base.
- Las matrices de transformación T_A^0 , T_B^A y T_B^0 .
- Los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {3} con respecto al {0}.

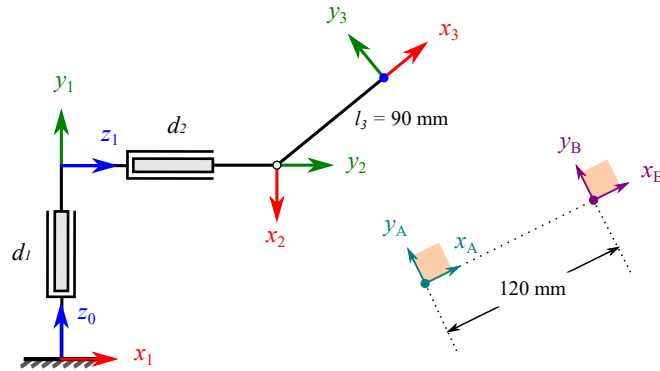


Figura 3.26

- 3.29 En la figura 3.27 se muestra el esquema de un pequeño manipulador planar PRR que deberá manipular algunos objetos cuya posición y orientación está indicada mediante los sistemas de referencia {A} y {B}. Para un instante determinado en que $\theta_3 = 47^\circ$ se conoce la siguiente información:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} 0.956305 & -0.292372 & 0 & 143.446 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0.292372 & 0.956305 & 0 & 143.856 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^3 = \begin{bmatrix} -0.62932 & 0.777146 & 0 & -226.414 \\ -0.777146 & -0.62932 & 0 & -118.938 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule lo siguiente:

- La matriz de transformación T_3^0 que describe la posición y orientación del extremo con respecto a la base.
- Las matrices de transformación T_A^0 , T_B^A y T_B^0 .
- Los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {B} con respecto al {0}.

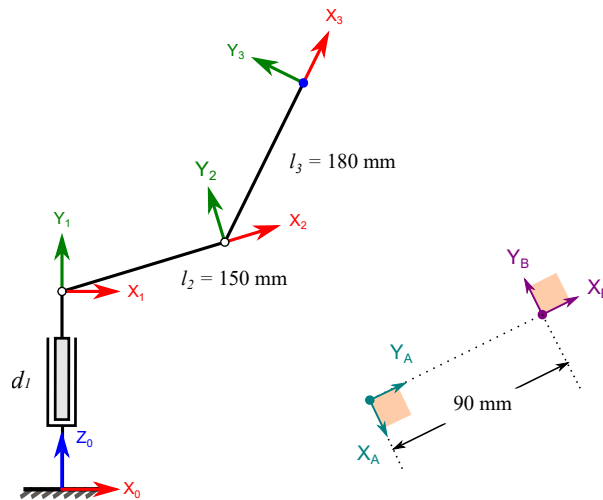


Figura 3.27

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

1. Programe una sub-rutina/función que le devuelva las matrices de transformación homogénea para rotación. Los argumentos de entrada deberán ser el eje de rotación y el ángulo a rotar. La función debe calcular matrices en tanto en forma numérica como simbólica.
2. Programe una función que calcule los ángulos de Euler ZYZ dado como argumento de entrada una matriz de rotación.
3. En la figura 3.21 se muestra un manipulador planar de 2 GDL con sistemas de referencia adheridos a sus eslabones. Se sabe que la matriz de transformación que describe el sistema de referencia del extremo con respecto a la base está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrolle un programa de computadora que calcule la posición del extremo del manipulador para cualesquiera combinación de valores articulares (q_1 y q_2) proporcionados. Asuma que $L_1 = L_2 = 250$ mm.

4. Considere un triángulo equilátero de lados unitarios, al cual se le adhiere un sistema de referencia móvil $x_1 y_1 z_1$. El origen del sistema móvil se encuentra en el centroide del triángulo e inicialmente coincide con el origen del sistema global $x_0 y_0 z_0$, además el eje y_1 apunta en la dirección de uno de sus vértices. Desarrolle un programa que le permita calcular las coordenadas globales de los vértices cuando se efectúa una rotación alrededor del eje z_1 . También deberá mostrarse de forma gráfica la posición inicial y la transformada.
5. Se tiene un sólido con forma de pirámide triangular cuyos vértices se ubican en los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respecto a un sistema móvil $x_1 y_1 z_1$ adherido al sólido, mismo que inicialmente coincide con el marco de referencia global $x_0 y_0 z_0$. Desarrolle un programa de computadora que calcule las coordenadas de los vértices respecto al sistema global cuando se han efectuado las siguientes transformaciones: rotación de 45° respecto al eje x_1 , 30° respecto al eje Y_0 , 60° respecto a z_1 , traslación de 5 unidades en la dirección de x_1 y 4 unidades en dirección de z_1 , y que además represente de manera gráfica las posiciones inicial y transformada del

sólido.

6. La representación **eje y ángulo** es un método para indicar la orientación de un sólido mediante un eje de rotación que no necesariamente corresponde con los principales y un ángulo determinado. Desarrolle una función que calcule la representación eje y ángulo correspondiente a una matriz de rotación proporcionada.

La cinemática directa de manipuladores consiste en determinar la posición y orientación del extremo de un manipulador, a partir de las posiciones articulares. En general suele ser un problema bastante *abordable*, dado que se sigue una metodología para establecer sistemas de referencia y con base a esto formar matrices de transformación homogénea que proporcionan las relaciones entre los mismos.

En la Figura 4.1 se muestra un esquema que representa el papel de la cinemática directa e inversa como herramientas para relacionar el espacio cartesiano (asociado con posiciones y orientaciones del elemento terminal) con el espacio de articulaciones (asociado con las posiciones articulares).

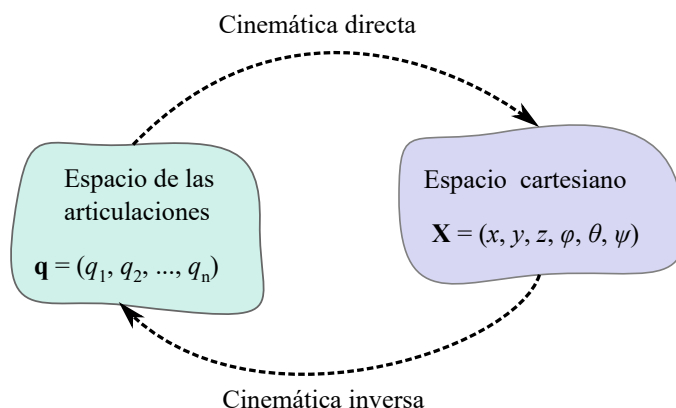


Figura 4.1 Cinemática directa e inversa

4.1. Sobre cadenas cinemáticas y transformaciones

Un robot manipulador está compuesto de un conjunto de eslabones interconectados mediante juntas (pares cinemáticos). En general, un manipulador serial con n juntas tendrá

$n + 1$ eslabones, dado que cada junta (asumiendo que sean de 1 GDL) conecta dos eslabones.

Para identificar los componentes de un manipulador se numeran las juntas de 1 a n y los eslabones de 0 a n , comenzando desde el eslabón base (o referencia fija). Con esta convención, la articulación i conecta al eslabón $i - 1$ con el eslabón i (ver Figura 4.2).

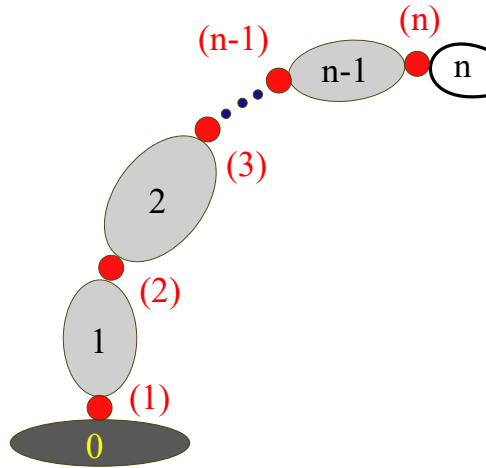


Figura 4.2 Cadena cinemática

Con cada una de las articulaciones se asocia una variable de articulación denotada mediante q_i . En el caso de una junta de revoluta q_i es el ángulo de rotación, y para un par prismático q_i es el desplazamiento de la junta.

Para realizar el análisis cinemático se adjunta rígidamente un sistema de referencia a cada eslabón (ver Figura 4.3). En particular, se adjunta el sistema $\{i\}$ al eslabón i , esto implica que para cualquier movimiento que el robot realice las coordenadas de cada punto en el eslabón i son constantes cuando se expresan o describen con respecto al i -ésimo sistema de referencia.

La descripción de posición y orientación de $\{i\}$ en $\{i - 1\}$ se hace mediante una matriz de transformación A_i . Evidentemente la matriz A_i no es constante puesto que varía cuando lo hace la configuración del manipulador. Sin embargo, dado que cada articulación de los manipuladores a considerar, en este curso, será a lo sumo de un grado de libertad entonces A_i es función de una sola variable de articulación q_i :

$$A_i = A_i(q_i)$$

Para un manipulador de n eslabones y bajo la consideración de que a cada eslabón de la cadena cinemática se le adjunta un sistema de referencia, la posición y orientación del elemento terminal con respecto al sistema de la base, se puede expresar como el

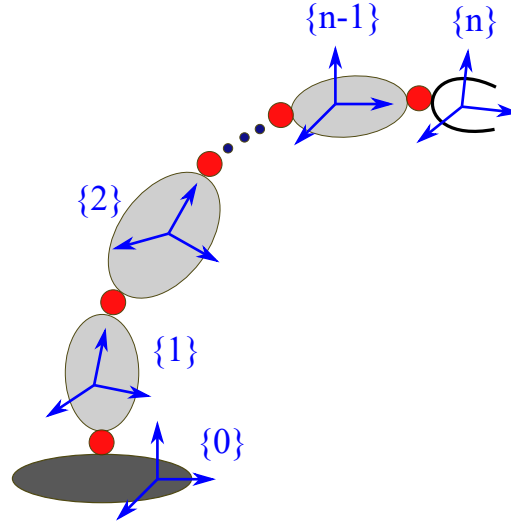


Figura 4.3 Cadena cinemática

producto matricial de todas las matrices de transformación A_i que describen la totalidad del manipulador:

$$T_n^0 = A_1(q_1)A_2(q_2)...A_n(q_n)$$

De manera general, la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación del sistema $\{j\}$ con respecto a $\{i\}$ se denomina matriz de transformación y se denota mediante T_j^i . Una matriz de transformación T_j^i tiene la forma:

$$T_j^i = \begin{bmatrix} R_j^i & \mathbf{d}_j^i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

4.2. La metodología de Denavit-Hartenberg

En esta sección se establecerán una serie de convenciones que proporcionan un procedimiento sistemático para el desarrollo del análisis cinemático directo. La metodología de Denavit-Hartenberg (DH) es un procedimiento que permite establecer sistemas de referencia siguiendo algunas reglas básicas que permiten describir las matrices A_i mediante cuatro transformaciones básicas realizadas en un cierto orden, a las cuales se asocian cuatro parámetros.

Está claro que existen una multitud de posibilidades que proporcionarían una descripción de un sistema transformado respecto a otro, y sería posible realizar un análisis cinemático sin seguir la metodología a describir, sin embargo el análisis cinemático de

un manipulador de n grados de libertad puede llegar a ser extremadamente complejo y sería inconveniente utilizar un procedimiento sin seguir ciertas convenciones.

En la metodología de Denavit-Hartenberg cada transformación A_i se representa como el producto de cuatro transformaciones básicas:

$$A_i = R_{z,\theta_i} D_{z,d_i} D_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Donde las cuatro cantidades θ_i , a_i , d_i y α_i son parámetros asociados con el eslabón y junta i .

4.2.1. Estableciendo los sistemas de referencia

Las cuatro transformaciones anteriores están asociadas a conjunto de reglas para establecer los sistemas de referencia, mismas que se describirán a continuación.

Establecer z_i

El eje z_i de cada sistema de referencia se debe colocar de tal manera que apunte en la dirección del eje de accionamiento de la junta $i + 1$. Considerar que en el caso de una articulación de revoluta el eje de accionamiento será el eje sobre el cual se realiza la rotación y que en el caso de una articulación prismática el eje de accionamiento será la dirección de deslizamiento de la misma. De manera particular, el eje z_n (extremo del manipulador) deberá colocarse en la misma dirección que z_{n-1} .

El sistema $\{0\}$

Una vez se han establecido los ejes z para toda la cadena cinemática, se procede a establecer el sistema base 0. El origen o_0 se coloca sobre cualquier punto en z_0 . La dirección de x_0 y y_0 son arbitrarias y únicamente deben cumplir el hecho de formar un sistema coordenado derecho.

Sistemas de referencia: de $\{i\}$ a $\{n - 1\}$

Una vez se establecieron los ejes z y el sistema de referencia base se comienza un proceso iterativo para definir el sistema $\{i\}$ a partir de $\{i - 1\}$.

Con la finalidad de establecer el sistema de referencia $\{i\}$ es necesario considerar tres casos:

- I) z_i y z_{i-1} no son coplanares.
- II) z_i y z_{i-1} son paralelos.
- III) z_i y z_{i-1} se intersectan.

i. z_i y z_{i-1} no son coplanares. Si z_i y z_{i-1} no son coplanares entonces existe un único segmento de línea perpendicular a ambos ejes que los conecta y tiene longitud mínima. La línea que contiene a esta normal común a z_i y z_{i-1} define la dirección de x_i y el punto en donde esta línea interseca z_i es el origen o_i .

ii. z_i y z_{i-1} son paralelos. Si z_i y z_{i-1} son paralelos entonces existen una cantidad infinita de normales comunes. En general se suele tomar la normal que pasa por o_{i-1} como la dirección para x_i y la intersección de dicha normal con z_i como el origen o_i .

iii. z_i y z_{i-1} se intersectan. En este caso x_i se escoge en la dirección normal al plano formado por z_i y z_{i-1} , y preferentemente en la dirección de $z_{i-1} \times z_i$. El origen o_i se coloca en la intersección de z_i y z_{i-1} .

Para todos los casos anteriores la dirección de y_i se establece de tal manera que complete un sistema coordenado derecho.

4.2.2. La obtención de los parámetros

Una vez que se han establecido los sistemas de referencia, se procede a formar una tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, conformada por cinco columnas: i , a_i , α_i , d_i , θ_i . En cada una de las filas se colocan los parámetros (a_i , α_i , d_i y θ_i) asociados con el i -ésimo eslabón. Estos parámetros se obtienen (miden) de los sistemas de referencia establecidos, tomando en consideración lo que a continuación se describe:

1. El parámetro θ_i es el ángulo que hay que rotar alrededor del eje z_{i-1} para alinear al eje x_{i-1} con el eje x_i . En el caso de que la i -ésima articulación sea una revoluta, entonces θ_i será una variable articular.
2. El parámetro d_i es la distancia entre los ejes x_{i-1} y x_i medida a lo largo del eje z_{i-1} . Si los ejes x_{i-1} y x_i se intersectan, entonces $d_i = 0$. En el caso de que la i -ésima articulación sea de tipo prismática, entonces d_i será una variable articular.
3. El parámetro a_i es la distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i medida a lo largo del eje x_i . Si los ejes z_{i-1} y z_i se intersectan, entonces $a_i = 0$.
4. El parámetro α_i es el ángulo que hay que rotar alrededor del eje x_i para alinear al eje z_{i-1} con el eje z_i . Típicamente, en la mayoría de manipuladores este valor será

90° o -90° .

Es importante tener en cuenta que las variables articulares q_i sólo puede estar asociadas con los parámetros d_i y θ_i . Los parámetros α_i y a_i siempre serán valores constantes. Además, por cada fila de parámetros únicamente tendremos una variable articular, dado que cada matriz $A_i = T_i^{i-1}$ es dependiente de q_i .

4.2.3. Calculando las matrices A_i

De manera general, para un manipulador de n grados de libertad, se tendrá una tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg como la que se muestra en la Tabla ?? . La tabla de parámetros tiene tantas filas como grados de libertad tenga el manipulador. En cada fila de la tabla se colocan los parámetros de Denavit-Hartenberg asociados con el i -ésimo eslabón, y corresponden a la descripción de transformaciones entre los sistemas de referencia $\{i\}$ e $\{i-1\}$. Prácticamente, cuando se sustituyen la i -ésima fila de la tabla de parámetros en la matriz de Denavit-Hartenberg, se obtiene la matriz T_i^{i-1} , denotada también como A_i .

i	a_i	α_i	d_i	q_i
1	a_1	α_1	d_1	θ_1
2	a_2	α_2	d_2	θ_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	a_n	α_n	d_n	θ_n

4.2.4. Calculando la matriz T_n^0

Una vez que se han calculado todas las matrices A_i , se procede a multiplicarlas para determinar a la matriz T_n^0 que describe la cinemática directa del manipulador. Se debe recordar que esta matriz está dada por:

$$T_n^0 = A_1 A_2 \dots A_n = T_1^0 T_2^1 \dots T_n^{n-1}$$

La matriz T_n^0 depende de todas las variables articulares (q_1, q_2, \dots, q_n). Esta matriz nos proporcionará tanto la posición como la orientación del elemento terminal del manipulador con respecto al sistema de la base.

4.3. Ejemplos

4.3.1. Manipulador planar RR

El manipulador planar RR de la Figura 5.1 tiene dos grados de libertad, con los dos ejes de articulación paralelos. Los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg quedarían establecidos como se muestran en la 5.1. Observa que dado que z_0 y z_1 son paralelos, entonces el eje x_1 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes. El mismo caso aplica para colocar a x_2 .

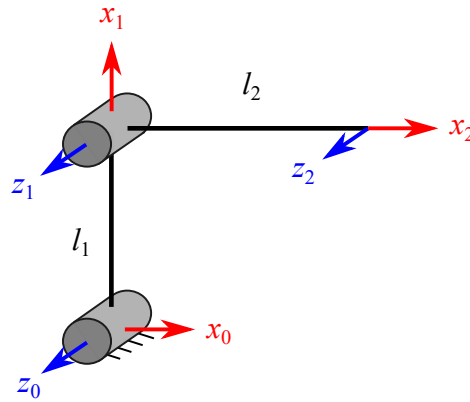


Figura 4.4 Manipulador planar RR

La tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg quedaría de la siguiente manera:

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2

Luego, cada matriz de transformación A_i se obtiene de sustituir los parámetros correspondientes en la matriz de Denavit-Hartenberg (ecuación 4.1):

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz de transformación que relaciona el extremo del manipulador con la base está dada por:

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.2. Manipulador RRR

El manipulador RRR mostrado en la Figura 4.5 tiene tres grados de libertad (posicionamiento). Las direcciones de accionamiento de la primera y segunda articulación son mutuamente perpendiculares, además, las direcciones de la segunda y tercera articulación son paralelas. Los sistemas de referencia quedan establecidos como se muestra en la Figura 4.5. Dado que z_0 y z_1 se intersectan, entonces el eje x_1 se coloca en la dirección normal al plano formado por ambos ejes. Los ejes z_1 y z_2 son paralelos, entonces x_2 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes. Los ejes z_2 y z_3 son paralelos, entonces x_3 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes.

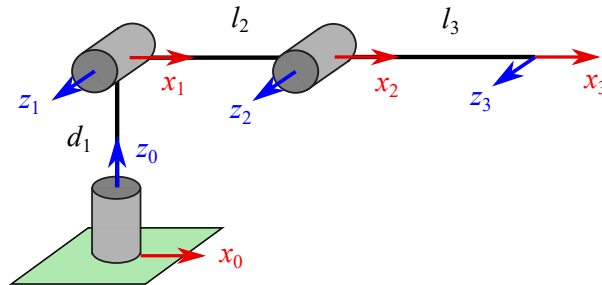


Figura 4.5 Manipulador RRR

Con los sistemas establecidos de tal forma, se obtiene la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg:

i	a_i	α_i	d_i	q_i
1	0	90°	d_1	q_1
2	l_2	0	0	q_2
3	l_3	0	0	q_3

Entonces, las matrices de transformación A_i estarán dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz de transformación que describe el sistema del extremo con respecto a la base será:

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & d_1 + l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.3. Robot ABB IRB 140

En este apartado calcularemos la cinemática directa de un manipulador industrial de seis grados de libertad: el ABB IRB 140, del cual podemos observar una fotografía en la Figura 4.6.

Para calcular la cinemática directa de cualquier manipulador industrial, podemos comenzar buscando información acerca de sus dimensiones. En el caso del IRB 140 se puede encontrar información en [este enlace](#). En la Figura 4.7 se muestra un esquema con las dimensiones del manipulador. Se debe tener en cuenta que no todas las dimensiones son relevantes para un análisis cinemático; usualmente, son de interés cinemático las distancias entre cada uno de los ejes del robot. Con esta información trazamos un diagrama cinemático que nos servirá para esquematizar nuestros sistemas de referencia de una manera más conveniente.



Figura 4.6 Robot ABB IRB 140

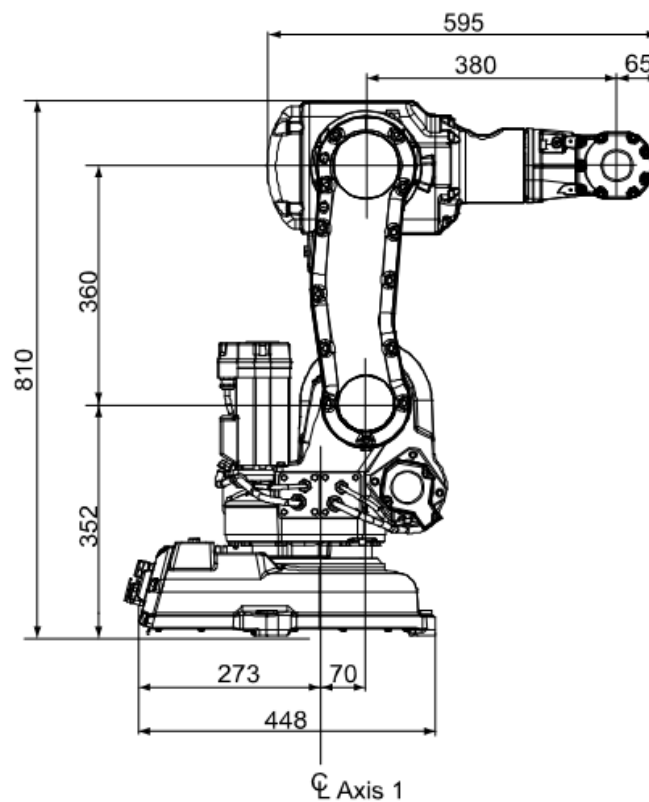


Figura 4.7 Dimensiones del robot ABB IRB 140

En la Figura 5.9 se muestra el diagrama cinemático del IRB 140, así como los sistemas de referencia ya establecidos, siguiendo las reglas de la metodología de Denavit-Hartenberg. A continuación, listamos las consideraciones para colocar cada uno de los sistemas de referencia.

- Cada uno de los ejes z se coloca en la dirección de accionamiento de las articulaciones. De manera particular, z_6 se coloca de forma paralela a la dirección del eje z_5 .
- z_0 y z_1 no son coplanares, entonces el eje x_1 se coloca en la dirección de la normal común a ambos ejes.
- z_1 y z_2 son paralelos, por lo tanto el eje x_2 se coloca en la dirección de la normal común que pasa por el origen de $\{1\}$.
- z_2 y z_3 se intersectan, entonces el eje x_3 se coloca en una dirección que es normal al plano formado por estos ejes.
- z_3 y z_4 se intersectan, por lo tanto el eje x_4 se establece en una dirección normal al plano formado por estos ejes.
- z_4 y z_5 se intersectan, entonces el eje x_5 se coloca en dirección normal al plano formado por ambos ejes.
- z_5 y z_6 son colineales, por lo tanto el eje x_6 se coloca de forma alineada con x_5 . No obstante, es importante comprender que esa alineación no es permanente, dado que el ángulo que se forma entre x_5 y x_6 corresponde a la variable articular q_6 .

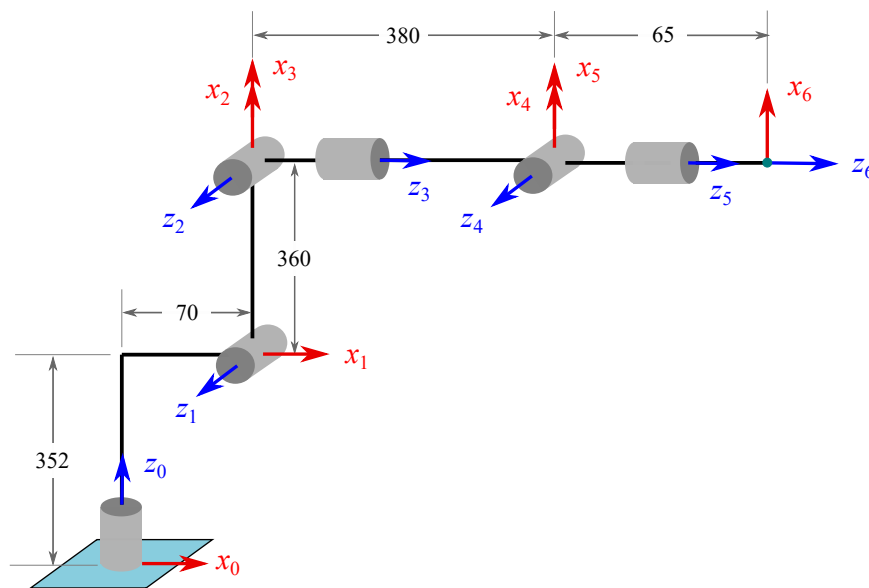


Figura 4.8 Diagrama cinemático del manipulador ABB IRB 140

Una vez establecidos los sistemas de referencia, procedemos a obtener la tabla de parámetros:

i	a_i	α_i	d_i	q_i
1	70	90°	352	q_1
2	360	0°	0	q_2
3	0	90°	0	q_3
4	0	-90°	380	q_4
5	0	90°	0	q_5
6	0	0°	65	q_6

Sustituyendo cada fila de parámetros en la matriz de Denavit-Hartenberg obtenemos cada una de las matrices A_i :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 70 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 70 \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 352 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 360 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 360 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & 0 & -\cos(q_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & -\sin(q_4) & 0 \\ \sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 380 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ \sin(q_5) & 0 & -\cos(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz T_6^0 está dada por:

$$T_6^0 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$r_{11} = c_6 (-c_1 s_5 s_{23} + c_5 (c_1 c_4 c_{23} + s_1 s_4)) + s_6 (-c_1 c_{23} s_4 + c_4 s_1)$$

$$r_{21} = c_6 (c_5 (-c_1 s_4 + c_4 c_{23} s_1) - s_1 s_5 s_{23}) - s_6 (c_1 c_4 + c_{23} s_1 s_4)$$

$$r_{31} = c_6 (c_4 c_5 s_{23} + c_{23} s_5) - s_4 s_6 s_{23}$$

$$r_{12} = c_6 (-c_1 c_{23} s_4 + c_4 s_1) + s_6 (c_1 s_5 s_{23} - c_5 (c_1 c_4 c_{23} + s_1 s_4))$$

$$r_{22} = -c_6 (c_1 c_4 + c_{23} s_1 s_4) + s_6 (c_5 (c_1 s_4 - c_4 c_{23} s_1) + s_1 s_5 s_{23})$$

$$r_{32} = -c_6 s_4 s_{23} - s_6 (c_4 c_5 s_{23} + c_{23} s_5)$$

$$r_{13} = c_1 c_5 s_{23} + s_5 (c_1 c_4 c_{23} + s_1 s_4)$$

$$r_{23} = c_5 s_1 s_{23} + s_5 (-c_1 s_4 + c_4 c_{23} s_1)$$

$$r_{33} = c_4 s_5 s_{23} - c_5 c_{23}$$

$$d_x = 360c_1 c_2 + 65c_1 c_4 c_{23} s_5 + 65c_1 c_5 s_{23} + 380c_1 s_{23} + 70c_1 + 65s_1 s_4 s_5$$

$$d_y = -65c_1 s_4 s_5 + 360c_2 s_1 + 65c_4 c_{23} s_1 s_5 + 65c_5 s_1 s_{23} + 380s_1 s_{23} + 70s_1$$

$$d_z = 65c_4 s_5 s_{23} - 65c_5 c_{23} - 380c_{23} + 360s_2 + 352$$

4.4. Problemas

1. En la Figura 4.9 se muestran tres sistemas de referencia $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{2\}$. De las transformaciones T_1^0 , T_2^0 y T_2^1 , ¿cuáles se pueden expresar mediante los parámetros de Denavit-Hartenberg?

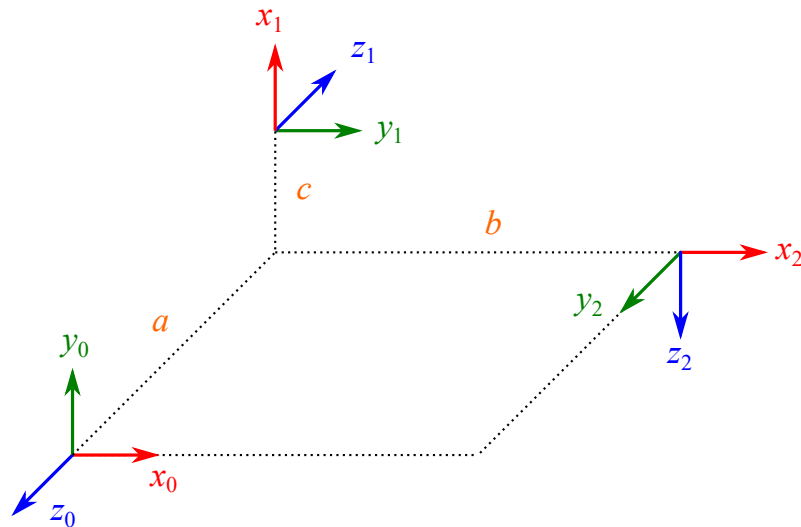


Figura 4.9

2. En la figura 4.10 se muestra un manipulador de 3 GDL (RRP). Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg, obtenga la tabla de parámetros DH, forme las matrices A_i y calcule la matriz T_3^0 que describe la posición y orientación del extremo del manipulador con respecto a la base.

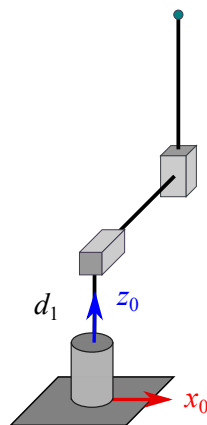


Figura 4.10 Manipulador RPP

3. Dado el manipulador mostrado en la figura 4.11 y los sistemas de referencia esquematizados, determine la posición (x, y, z) del extremo manipulador si $q_1 = 30^\circ$, $q_2 = 45^\circ$ y $q_3 = 150$ mm. Considerar que $a_1 = 180$ mm y $d_2 = 220$ mm.

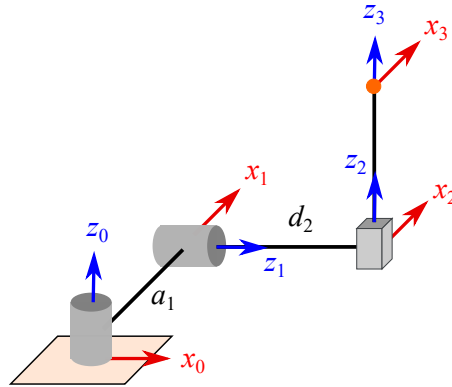


Figura 4.11 Manipulador RRP

4. En la figura 4.12 se muestra un manipulador de 4 GDL cuyas dimensiones son las indicadas. Realice lo siguiente:
- Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de DH.
 - Obtenga la tabla de parámetros $(a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i)$.
 - Forme las matrices de transformación T_i^{i-1} .
 - Calcule la matriz de transformación T_4^0 .

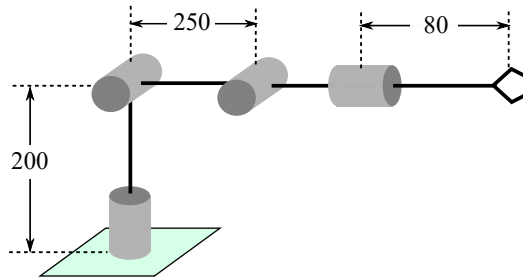


Figura 4.12 Manipulador RRRR

5. Para el manipulador mostrado en la figura 4.13 calcule la cinemática directa.

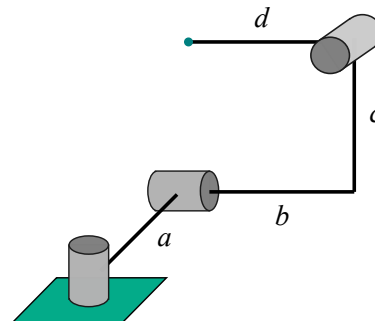
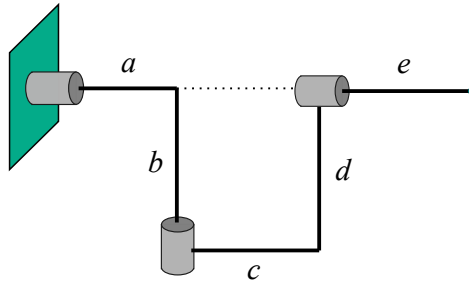
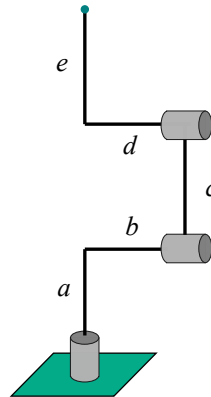


Figura 4.13 Manipulador RRR

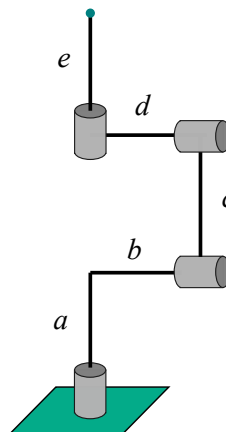
6. Para el manipulador mostrado en la figura 4.14 calcule la cinemática directa.

**Figura 4.14** Manipulador RRR

7. Para el manipulador mostrado en la figura 4.15 calcule la cinemática directa.

**Figura 4.15** Manipulador RRR

8. Para el manipulador mostrado en la figura 4.16 calcule la cinemática directa.

**Figura 4.16** Manipulador RRR

9. Para el manipulador mostrado en la figura 4.17 calcule la cinemática directa.

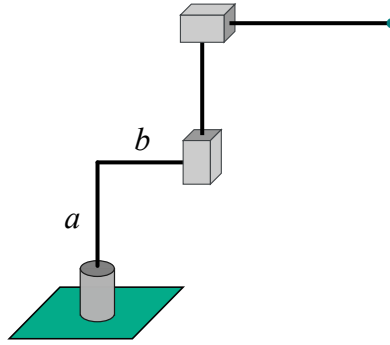


Figura 4.17 Manipulador RRR

10. Calcule la cinemática directa para el manipulador SCARA mostrado en la figura 4.18.

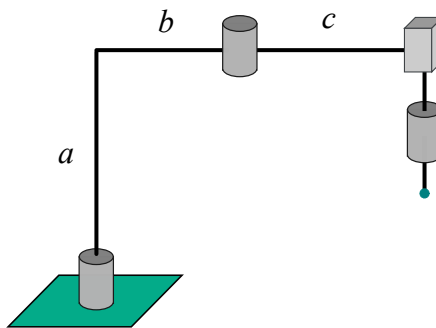


Figura 4.18 Robot SCARA

11. Para el robot industrial Adept Viper s650 realice lo siguiente:
- Trace el diagrama cinemático.
 - Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
 - Obtenga la tabla de parámetros de DH.
 - Calcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.
12. Para el robot Fanuc M710iC realice lo siguiente:
- Trace el diagrama cinemático.
 - Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
 - Obtenga la tabla de parámetros de DH.
 - Cálcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.
13. Para el robot KUKA KR 160 R1570 nano realice lo siguiente:

- a)* Trace el diagrama cinemático.
 - b)* Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
 - c)* Obtenga la tabla de parámetros de DH.
 - d)* Calcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.
- 14. Para el robot industrial ABB IRB 910SC (SCARA) realice lo siguiente:
 - a)* Trace el diagrama cinemático.
 - b)* Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
 - c)* Obtenga la tabla de parámetros de DH.
 - d)* Calcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

Problemas para resolver utilizando computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

1. Desarrolle un programa de computadora que dados como entrada el conjunto de parámetros de Denavit-Hartenberg para una cadena cinemática abierta calcule la posición de su extremo.
2. Se tiene un manipulador RR como el mostrado en la figura 4.2. Si se sabe que los valores de las coordenadas articulares están dados por: $q_1 = \cos t$ y $q_2 = \sin t$, y que sus dimensiones son $l_1 = l_2 = 350$ mm. Desarrolle un programa que calcule y trace la trayectoria descrita por el extremo del manipulador para $0 \leq t \leq 2\pi$.

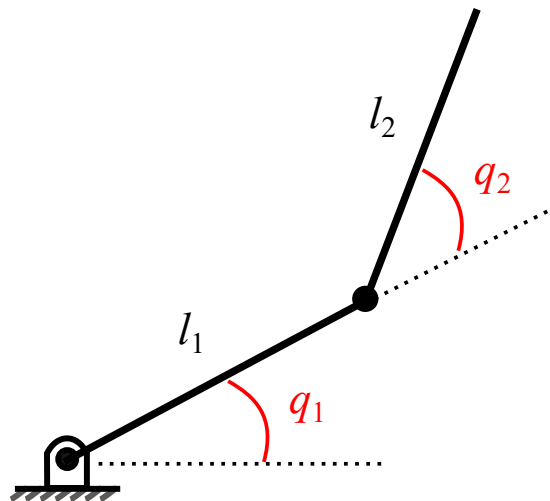


Figura 4.19 Manipulador RR

3. Desarrolle un programa de computadora que permita calcular la posición y orientación del extremo del robot industrial ABB IRB 140 dados como datos de entrada los valores articulares.
4. Desarrolle un programa de computadora que dados como entrada los valores articulares q_1 y q_2 , del manipulador PP mostrado en la figura 4.20, calcule la posición del extremo del manipulador. El programa deberá también esquematizar la posición del manipulador.

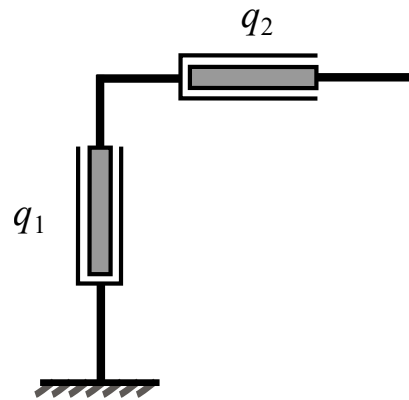


Figura 4.20 Manipulador PP

El problema de la cinemática inversa de manipuladores consiste en determinar los valores articulares requeridos para posicionar y orientar el elemento terminal de una manera predefinida. Usualmente el procedimiento es más complejo que el correspondiente para la cinemática directa, ya que el problema de la cinemática inversa está fuertemente ligado a la morfología del robot y en consecuencia no existe una metodología específica que garantice la obtención de una solución.

5.1. El problema general de la cinemática inversa

El problema general de la cinemática inversa se puede establecer de la siguiente manera. Dada una matriz de transformación homogénea H :

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

con $H \in SE(3)$, calcular las soluciones de la ecuación:

$$T_n^0(q_1, q_2, \dots, q_n) = H \quad (5.2)$$

donde:

$$T_n^0 = A_1(q_1)A_2(q_2)\dots A_n(q_n) \quad (5.3)$$

En lo anterior H representa la posición y orientación deseada para el elemento terminal, la matriz T_n^0 corresponde a la cinemática directa del manipulador. La tarea de la cinemática inversa se centra en calcular los valores de q_1, q_2, \dots, q_n que verifican la ecuación

5.2.

La ecuación matricial 5.2 conduce a un conjunto de dieciséis ecuaciones con n incógnitas (q_1, q_2, \dots, q_n). Cuatro de esas dieciséis ecuaciones son triviales, dado que la última fila de una matriz de transformación homogénea será siempre de la forma $[0, 0, 0, 1]$.

Este procedimiento conduce a un conjunto de ecuaciones, usualmente no lineales y en la mayoría de los casos en términos de funciones trigonométricas. Obtener una solución en forma cerrada para este tipo de sistemas de ecuaciones puede llegar a resultar un poco complejo. Cuando no sea posible obtener una solución cerrada, se pueden aproximar los valores articulares utilizando algún método numérico.

5.1.1. Manipulador planar RR

A continuación, se describe el proceso de solución de la forma analítica para un manipulador RR como el mostrado en la Figura 5.1. Para esto suponemos que se requiere que el extremo del manipulador se posicione en las coordenadas (P_x, P_y) . Naturalmente, las longitudes de los eslabones (l_1 y l_2) del robot son valores constantes y por lo tanto se asumen conocidos.

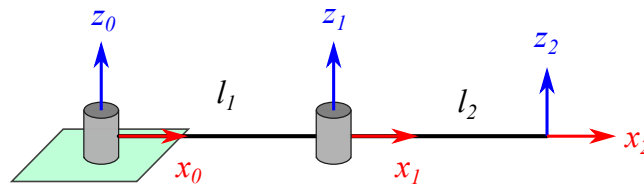


Figura 5.1 Manipulador RR

Para resolver la cinemática directa por el método analítico debemos primero calcular la matriz que describe la cinemática directa. En este caso T_2^0 está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez conocida T_n^0 debemos igualar con los valores de posición y orientación deseados. En este caso la parte de posición debemos igualarla con las coordenadas (P_x, P_y) que se quieren alcanzar. De esto resulta un sistema de dos ecuaciones:

$$l_1 c_1 + l_2 c_{12} = P_x$$

$$l_1 s_1 + l_2 s_{12} = P_y$$

Si se eleva al cuadrado cada miembro de las ecuaciones anteriores y se suman:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 c_1^2 + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + l_2^2 c_{12}^2 + l_1^2 s_1^2 + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} + l_2^2 s_{12}^2$$

Factorizando y recordando que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 &= l_1^2 (\cancel{c_1^2} + \cancel{s_1^2}) + l_2^2 (\cancel{c_{12}^2} + \cancel{s_{12}^2}) + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} \\ P_x^2 + P_y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1 c_{12} + 2l_1 l_2 s_1 s_{12} \end{aligned}$$

Para simplificar un poco más podemos aplicar las identidades trigonométricas de suma de ángulos. Sabemos que:

$$s_{12} = s_1 c_2 + c_1 s_2$$

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + 2l_1 l_2 s_1 (s_1 c_2 + c_1 s_2) \\ P_x^2 + P_y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1^2 c_2 - 2l_1 l_2 c_1 s_1 s_2 + 2l_1 l_2 s_1^2 c_2 + 2l_1 l_2 s_1 c_1 s_2 \end{aligned}$$

Los términos resaltados se eliminan, de lo cual nos queda:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_1^2 c_2 + 2l_1 l_2 s_1^2 c_2$$

Podemos factorizar los dos últimos términos como $2l_1 l_2 c_2 (c_1^2 + s_1^2)$, y aplicar la identidad trigonométrica $c_1^2 + s_1^2 = 1$. De esto resultará:

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2$$

De la expresión anterior el único valor desconocido es q_2 , entonces:

$$\cos q_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} = K$$

Por trigonometría se sabe que:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Entonces podemos escribir la solución para q_2 en términos de la función arcotangente:

$$q_2 = \arctan \left(\frac{\pm \sqrt{1 - K^2}}{K} \right)$$

Para calcular q_1 , de las ecuaciones para x e y podemos expresar el cociente P_y/P_x y trabajar con la expresión resultante:

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{l_1 s_1 + l_2 s_{12}}{l_1 c_1 + l_2 c_{12}}$$

$$P_y (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) = P_x (l_1 s_1 + l_2 s_{12})$$

Aplicando identidades trigonométricas de suma de ángulos:

$$P_y (l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 - l_2 s_1 s_2) = P_x (l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 + l_2 c_1 s_2)$$

Agrupando y factorizando los términos que dependen de $\cos q_1$ y $\sin q_1$:

$$c_1 (P_y l_1 + P_y l_2 c_2 - P_x l_2 s_2) = s_1 (P_x l_1 + P_x l_2 c_2 + P_y l_2 s_2)$$

De lo cual resulta:

$$q_1 = \arctan \left(\frac{P_y l_1 + P_y l_2 c_2 - P_x l_2 s_2}{P_x l_1 + P_x l_2 c_2 + P_y l_2 s_2} \right)$$

5.2. Cinemática inversa de posición: método geométrico

Para manipuladores de a lo sumo tres grados de libertad se puede emplear un enfoque geométrico para calcular las variables articulares. Este enfoque sólo nos servirá para resolver cinemática inversa de posición. En el caso de que se requiera alcanzar una cierta orientación, se deberá complementar el procedimiento con las técnicas analíticas.

La idea general del método geométrico es que si queremos calcular la variable articular q_i , debemos proyectar el manipulador en un plano determinado y realizar construcciones geométricas (usualmente triángulos) que nos ayuden a relacionar las distancias y ángulos conocidos del manipulador con aquellos a calcular.

De manera particular, si necesitamos calcular q_i deberíamos proyectar en el plano:

- $x_{i-1}y_{i-1}$, si la i -ésima articulación es una revoluta.
- $x_{i-1}z_{i-1}$, si la i -ésima articulación es una prismática.

Debemos tener en cuenta que al momento de proyectar el manipulador en los planos que correspondan, es necesario que se haga para una posición lo más general posible ¿A qué nos referimos con esto? Se debe evitar a toda costa representar al manipulador en posiciones articulares asociadas con un ángulo que sean múltiplos de 90° , o bien, posiciones articulares asociadas con una distancia que sean nulas.

Una de las ventajas del método geométrico es que normalmente resultan expresiones mucho más sencillas de manipular y resolver. Es algo que podrás corroborar en los ejemplos que a continuación se abordarán.

5.2.1. Manipulador planar RR

Para ejemplificar el método geométrico vamos a calcular la cinemática inversa de posición del manipulador RR planar que se abordó en la sección anterior. Primero, es importante comprender que el manipulador RR planar puede alcanzar un punto (P_x, P_y) con alguna de las dos configuraciones que se muestran en la Figura 5.2. En el entendido de que dicho punto está dentro de su espacio de trabajo alcanzable. Las configuraciones se denominan *codo arriba* y *codo abajo*, por la obvia analogía de este manipulador con un brazo humano. En lo subsiguiente vamos a desarrollar la solución de cinemática inversa para ambas configuraciones.

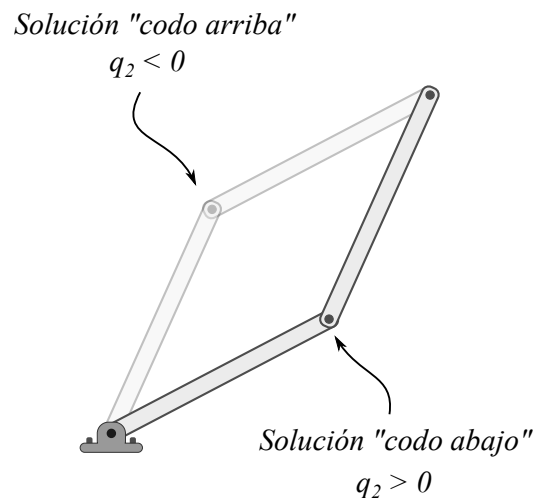


Figura 5.2 Dos posibles configuraciones para el manipulador RR

Solución para la configuración de codo abajo

Lo primero que debemos hacer es proyectar el manipulador en los planos que correspondan. Si queremos resolver para q_1 debemos proyectar en el plano x_0y_0 . Para determinar q_2 debemos proyectar en el plano x_1y_1 . Algo a considerar en este caso es que los planos x_0y_0 y x_1y_1 son planos paralelos entre sí, por lo tanto, tendremos la misma proyección

resultante en ambos casos.

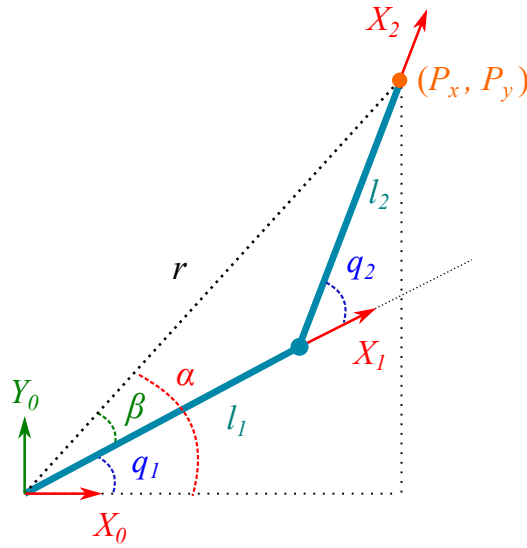


Figura 5.3 Proyección del manipulador RR (codo abajo)

Como se observa en la figura 5.3 el manipulador RR se proyecta en el plano x_0y_0 y se trazan los triángulos mostrados. De este diagrama se observa que el ángulo q_1 puede calcularse una vez conocidos los ángulos α y β mediante una simple diferencia:

$$q_1 = \alpha - \beta$$

El ángulo α se determina a partir del triángulo rectángulo formado por los catetos P_x y P_y , y la hipotenusa r :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

La longitud r puede calcularse como:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

El ángulo β se determina aplicando ley de cosenos:

$$l_2^2 = l_1^2 + r^2 - 2l_1r \cos \beta \quad \rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{l_1^2 + r^2 - l_2^2}{2l_1r}\right)$$

De forma similar a β y utilizando el mismo triángulo se puede determinar q_2 aplicando ley de cosenos:

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2 \quad \rightarrow \quad \cos q_2 = \frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

De lo cual se tiene que:

$$q_2 = \arccos \left(\frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

Solución para la configuración de codo arriba

Vamos a abordar ahora la otra posible solución para la cinemática inversa del manipulador RR, con la configuración de codo arriba. En la Figura 5.4 se puede observar la proyección del manipulador en el plano x_0y_0 .

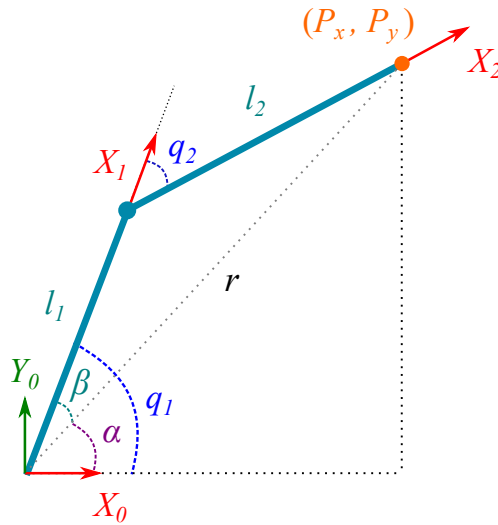


Figura 5.4 Proyección del manipulador RR (codo arriba)

Del diagrama se puede notar rápidamente que el ángulo q_1 es la suma de los ángulos internos α y β , es decir:

$$q_1 = \alpha + \beta$$

El ángulo α lo podemos calcular con las relaciones de triángulo rectángulo:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{P_y}{P_x} \right)$$

Para determinar β podemos aplicar ley de cosenos en el triángulo obtusángulo:

$$l_2^2 = l_1^2 + r^2 - 2l_1r \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{l_1^2 + r^2 - l_2^2}{2l_1r} \right)$$

En la expresión anterior r es un valor no conocido, pero que podemos calcularlo aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

Para calcular a q_2 podemos aplicar ley de cosenos en el triángulo obtusángulo:

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2 \quad \rightarrow \quad \cos q_2 = \frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

Antes de establecer el resultado para q_2 , es importante mencionar que de acuerdo al diagrama de la proyección trazada, el ángulo q_2 debería ser negativo, por la manera en la cual se asume su medición (sentido horario) en el esquema. Entonces, es crucial que al resultado que se obtenga de despejar la expresión anterior, se le multiplique por -1 , para garantizar lo ya mencionado; es decir:

$$q_2 = -\arccos \left(\frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

5.2.2. Manipulador antropomórfico RRR

El manipulador antropomórfico RRR es un manipulador de tres grados de libertad. En este apartado vamos a calcular su cinemática inversa, considerando que se requiere que el elemento terminal alcance una posición general (P_x, P_y, P_z) .

De acuerdo a lo que sabemos, para calcular a q_1 debemos proyectar en el plano x_0y_0 ; para calcular a q_2 en el plano x_1y_1 y para q_3 en el plano x_2y_2 . Estos dos últimos planos son paralelos. En la Figura 5.5 se puede observar una representación tridimensional del manipulador RRR; del lado izquierdo se muestra en color rojizo el plano de proyección x_0y_0 , y del lado derecho en color verde claro se muestra el plano de proyección x_1y_1 .

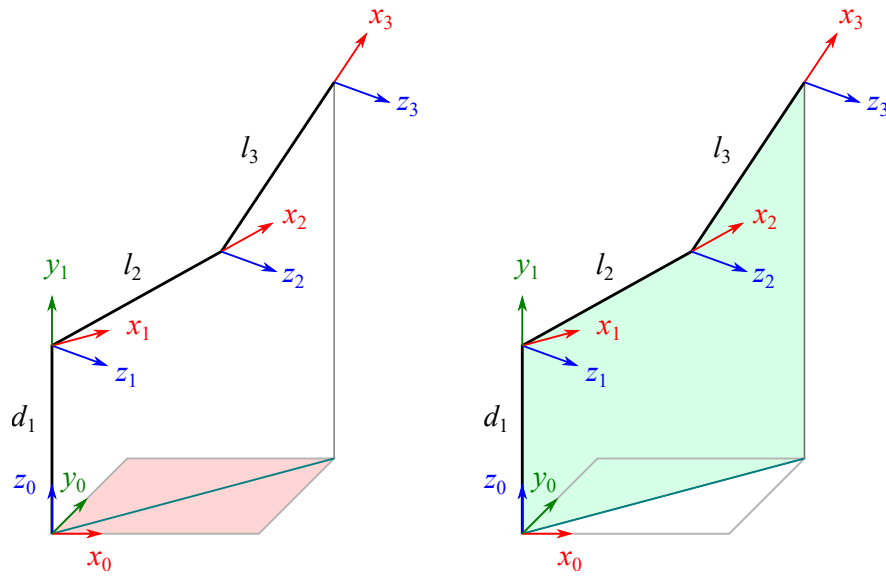


Figura 5.5 Vista tridimensional de los planos de proyección del manipulador RRR

En la Figura 5.6 se puede observar el esquema de la proyección del manipulador en el plano x_0y_0 . Es sencillo notar que el valor de q_1 se puede calcular como sigue:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

Además, el valor de la distancia a sería:

$$a = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

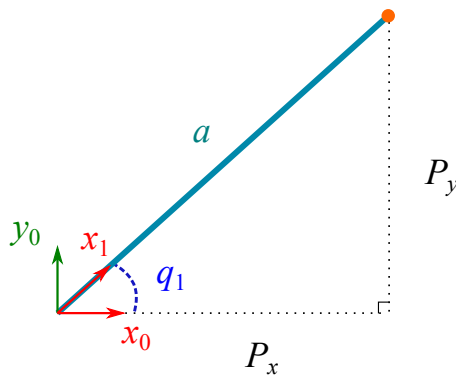


Figura 5.6 Manipulador RRR, proyección en x_0y_0

En la Figura 5.7 se puede observar la proyección del manipulador en el plano x_1y_1 . La manera de proceder en este esquema es muy similar a lo que se hizo con el manipulador RR. Del esquema observamos que se tienen dos triángulos, los cuales denominaremos

de la siguiente manera:

- Triángulo 1: el triángulo rectángulo, cuyos catetos son a y $(P_z - d_1)$, y siendo r la hipotenusa.
- Triángulo 2: el triángulo obtusángulo, cuyos lados son l_2 , l_3 y r .

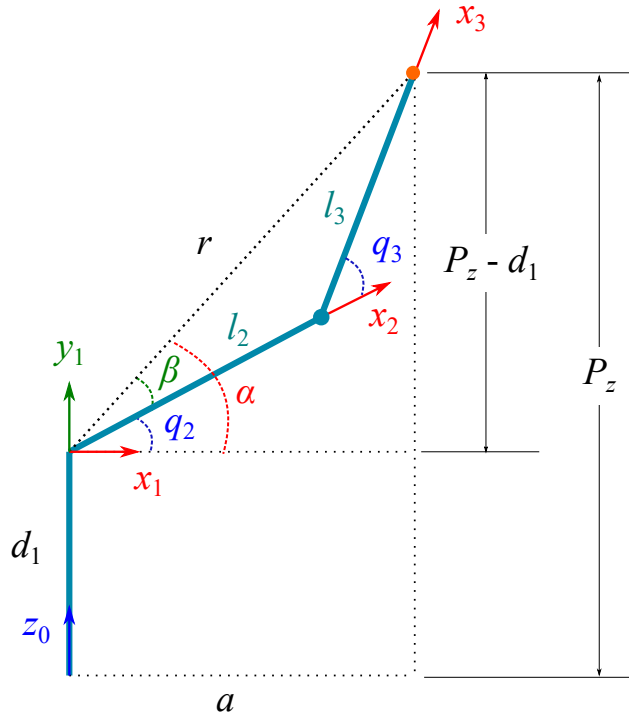


Figura 5.7 Manipulador RRR, proyección en x_1y_1

Del esquema se puede observar que la variable articular q_2 corresponde a la diferencia de los ángulos internos α y β :

$$q_2 = \alpha - \beta$$

Utilizando el triángulo 1 podemos calcular el valor de α y r de la siguiente manera:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P_z - d_1}{a}\right)$$

$$r = \sqrt{a^2 + (P_z - d_1)^2}$$

En el triángulo 2 podemos aplicar ley de cosenos para calcular a β :

$$l_3^2 = l_2^2 + r^2 - 2l_2r \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{l_2^2 + r^2 - l_3^2}{2l_2r} \right)$$

Utilizando el mismo triángulo 2 podemos ahora calcular el valor de q_3 , aplicando también ley de cosenos:

$$r^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos q_3$$

$$q_3 = \arccos \left(\frac{r^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \right)$$

De esta manera queda completado el cálculo de la cinemática inversa para el manipulador RRR.

5.3. Desacoplo cinemático

La mayoría de manipuladores industriales de 6 grados de libertad (como el que se muestra en la Figura 5.8), están conformados por una morfología base (RRR), a la cual se le adiciona un mecanismo de muñeca esférica (RRR). Para este tipo de manipuladores es posible aplicar una técnica conocida como desacoplo cinemático, la cual consiste en dividir el problema de la cinemática inversa en dos subproblemas: cinemática inversa de posición y cinemática inversa de orientación. La cinemática inversa de posición se suele abordar utilizando un enfoque geométrico y la cinemática inversa de orientación mediante un procedimiento analítico.



Figura 5.8 Robot industrial ABB IRB 120

A continuación, vamos a describir una serie de pasos necesarios para realizar cinemática inversa de un manipulador de 6 grados de libertad utilizando la técnica de desacoplo cinemático. Para lo subsiguiente asumimos que se conoce de entrada la matriz de transformación homogénea H que describe la posición y orientación deseada del extremo del manipulador.

Lo primero que hacemos es construir el diagrama cinemático del manipulador, basándonos en los manuales y esquemáticos del fabricante. Es importante identificar correctamente las distancias entre los ejes articulares. Con el diagrama ya realizado, procedemos a establecer los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg. Obtenemos la tabla de parámetros y calculamos las matrices R_3^0 y R_6^3 . Es importante comprender que R_3^0 será una matriz que depende de los primeras tres variables articulares ($R_3^0(q_1, q_2, q_3)$), y que R_6^3 depende de las últimas tres $R_6^3(q_4, q_5, q_6)$.

Una vez hecho lo anterior, comenzamos a calcular las coordenadas del centro de la muñeca esférica, utilizando la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_e - d_6 \mathbf{z}_6^0$$

Donde \mathbf{r}_e son las coordenadas de posición que deberá alcanzar el extremo del manipulador, d_6 la distancia entre los ejes x_5 y x_6 , medida en la dirección del eje z_5 , y \mathbf{z}_6^0 la orientación del eje z del sistema de referencia del elemento terminal con respecto al de la base. Los términos \mathbf{r}_e y \mathbf{z}_6^0 se obtienen de la matriz H , de manera específica:

$$\mathbf{r}_e = H_{1:3,4}$$

$$\mathbf{z}_6^0 = H_{1:3,3}$$

Ahora procedemos a resolver la cinemática inversa de posición utilizando el método geométrico y referenciando todo el procedimiento a las coordenadas del centro de la muñeca esférica. Con esto calcularemos las tres primeras variables articulares (q_1 , q_2 y q_3).

Con los valores de q_1 , q_2 y q_3 ya calculados, procedemos a determinar de forma numérica la matriz de rotación R_3^0 , sustituyendo los valores numéricos calculados previamente.

De la cinemática directa sabemos que:

$$R_6^0 = R_3^0 R_6^3$$

Lo cual implica que:

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R_6^0$$

Donde R_6^0 es la submatriz de rotación de H , R_3^0 la matriz numérica calculada previamente y R_6^3 la matriz de rotación en forma simbólica calculada al inicio del procedimiento. La expresión anterior define una ecuación matricial que deberemos resolver de manera analítica, y con lo cual calcularemos los valores para las tres variables articulares restantes (q_4 , q_5 y q_6). Esta parte es lo que corresponde a la **cinemática inversa de orientación**. Usualmente deberemos trabajar con las ecuaciones que resulten de igualar los elementos correspondientes a la tercera fila y a la tercera columna: r_{31} , r_{32} , r_{33} , r_{23} , r_{13} ; dado que suelen quedar expresiones más sencillas de manipular.

Para comprobar los resultados podemos sustituir los valores calculados en la matriz T_6^0 de la cinemática directa y verificar que sea igual a la matriz H .

5.3.1. Manipulador ABB IRB 140

Para ejemplificar la técnica de desacoplo cinemático vamos a calcular la cinemática inversa del manipulador industrial ABB IRB 140 (ver Figura 4.6). Consideraremos que se requiere que el extremo del robot esté posicionado y orientado de acuerdo con la siguiente matriz H :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & -1 & 650 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la Figura 5.9 se puede observar el diagrama cinemático del manipulador y los sistemas de referencia de Denavit-Hartenberg. La Tabla ?? muestra los parámetros correspondientes. Este procedimiento de cinemática directa para el IRB 140 fue desarrollado en la sección 4.3.3.

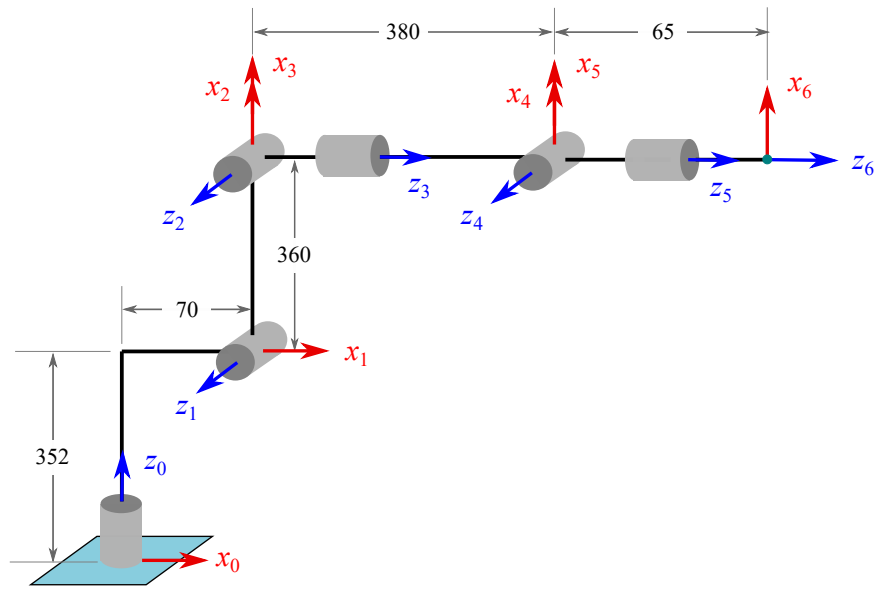


Figura 5.9 Diagrama cinemático del manipulador ABB IRB 140

i	a_i	α_i	d_i	q_i
1	70	90°	352	q_1
2	360	0°	0	q_2
3	0	90°	0	q_3
4	0	-90°	380	q_4
5	0	90°	0	q_5
6	0	0°	65	q_6

Tabla 5.1

Con esta información podemos calcular las matrices R_3^0 y R_6^3 , las cuales se muestran enseguida:

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} \\ c_{23} s_1 & -c_1 & s_1 s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix}$$

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - c_6 s_4 & c_4 s_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & s_4 s_5 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

Una vez calculadas las matrices R_3^0 y R_6^3 , procedemos a determinar las coordenadas del centro de la muñeca esférica, lo cual podemos hacer mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_e - d_6 \mathbf{z}_6^0 = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 650 \end{bmatrix} - 65 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 715 \end{bmatrix}$$

Con las coordenadas del centro de la muñeca esférica ya conocidas, procedemos a realizar la cinemática inversa de posición utilizando el método geométrico, con la finalidad de calcular las primeras tres variables articulares (q_1, q_2, q_3). De acuerdo con lo que aprendimos en secciones previas, si queremos calcular a q_1 deberíamos proyectar en el plano x_0y_0 . En la Figura 5.10 se puede observar la proyección del manipulador IRB 140 en el plano x_0y_0 . El valor de q_1 se puede determinar de forma sencilla de la siguiente manera:

$$q_1 = \arctan2(500, 400) = 51.34^\circ$$

El valor de la distancia a se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{500^2 + 400^2} = 640.31 \text{ mm}$$

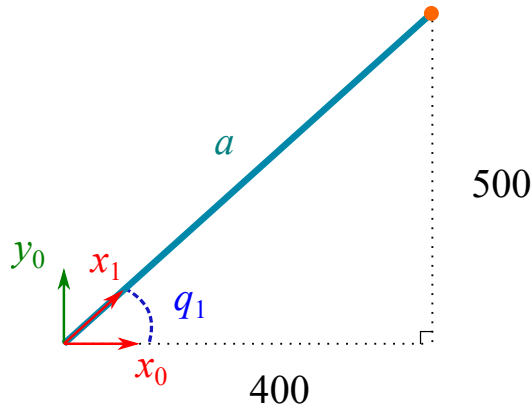
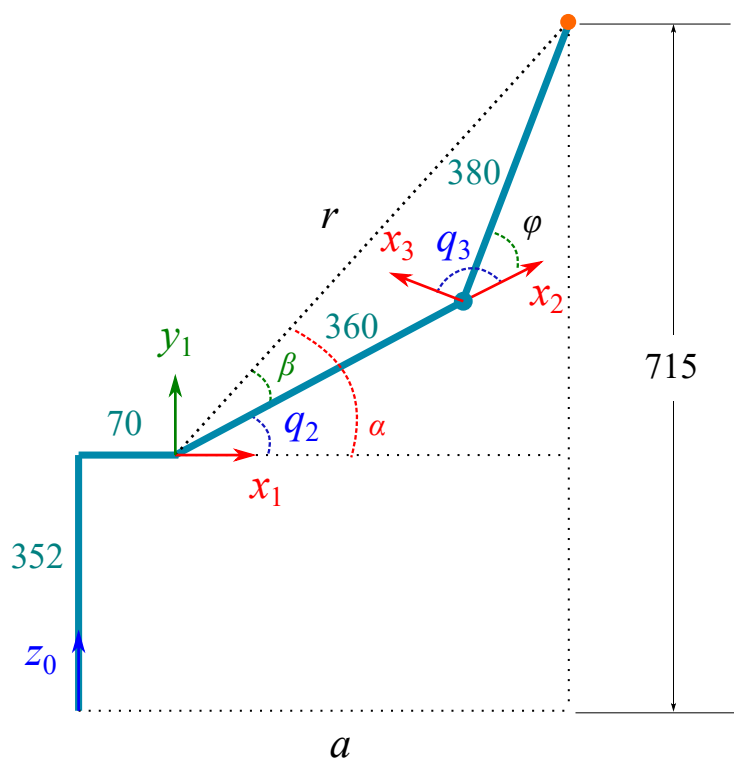


Figura 5.10 Proyección en el plano x_0y_0 del robot ABB IRB 140

Para calcular a q_2 debemos proyectar en x_1y_1 , y para q_3 en el plano x_2y_2 . Se puede verificar que estos planos son paralelos, y por lo tanto la proyección en x_1y_1 nos bastaría para calcular a q_2 y q_3 . En la Figura 5.11 se puede observar la proyección del manipulador en el plano x_1y_1 .



Del esquema podemos notar que el valor de q_2 es la diferencia de los ángulos α y β :

$$q_2 = \alpha - \beta$$

Ahora debemos calcular cada uno de esos valores. Del triángulo rectángulo podemos calcular la distancia (hipotenusa) r :

$$r = \sqrt{(a - 70)^2 + (715 - 352)^2} = 676.03 \text{ mm}$$

Y el ángulo α :

$$\alpha = \arctan_2(715 - 352, a - 70) = 32.48^\circ$$

El valor del ángulo β se puede calcular aplicando ley de cosenos en el triángulo obtusángulo:

$$380^2 = 360^2 + r^2 - 2(360)(r) \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{360^2 + r^2 - 380^2}{2(360)(r)} \right) = 24.7^\circ$$

Entonces, el valor de q_2 sería:

$$q_2 = 32.48^\circ - 24.7^\circ = 7.78^\circ$$

Del esquema de la Figura 5.11 se puede observar que el ángulo q_3 es el valor del ángulo ϕ más 90° , es decir:

$$q_3 = \phi + 90^\circ$$

Donde el ángulo ϕ podemos calcularlo utilizando ley de cosenos:

$$r^2 = 380^2 + 360^2 + 2(380)(360) \cos \phi$$

$$\phi = \arccos \left(\frac{r^2 + 380^2 + 360^2}{2(380)(360)} \right) = 48.02^\circ$$

Por lo tanto:

$$q_3 = 48.02^\circ + 90^\circ = 138.02^\circ$$

Una vez calculados los valores de q_1 , q_2 y q_3 , procedemos a sustituir estos valores en la matriz R_3^0 , de lo cual resulta:

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} -0.5167 & 0.7809 & 0.3511 \\ -0.6458 & -0.6247 & 0.4389 \\ 0.5621 & 0 & 0.8271 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el producto $(R_3^0)^{-1} R_6^0$:

$$(R_3^0)^{-1} R_6^0 = \begin{bmatrix} -0.5167 & -0.6458 & 0.5621 \\ 0.7809 & -0.6247 & 0 \\ 0.3511 & 0.4389 & 0.8271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5167 & 0.6458 & -0.5621 \\ 0.7809 & 0.6247 & 0 \\ 0.3511 & -0.4389 & -0.8271 \end{bmatrix}$$

La matriz que resulta la igualamos con R_6^3 para formar la ecuación matricial que nos servirá para calcular la cinemática inversa de orientación, es decir:

$$R_6^3 = \left(R_3^0\right)^{-1} R_6^0$$

$$\begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - c_6 s_4 & c_4 s_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & s_4 s_5 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5167 & 0.6458 & -0.5621 \\ 0.7809 & 0.6247 & 0 \\ 0.3511 & -0.4389 & -0.8271 \end{bmatrix}$$

Para q_6 podemos resolver dividiendo los elementos r_{32}/r_{31} de ambas matrices e igualando, es decir:

$$\frac{\cancel{s_5} s_6}{-c_6 \cancel{s_5}} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{s_6}{-c_6} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{s_6}{c_6} = \frac{-0.4389}{-0.3511}$$

$$q_6 = \arctan2(-0.4389, -0.3511) = 231.34^\circ$$

En el caso de q_4 podemos hacer r_{23}/r_{13} e igualar:

$$\frac{\cancel{s_4} \cancel{s_5}}{c_4 \cancel{s_5}} = \frac{0}{-0.5621}$$

$$\frac{s_4}{c_4} = \frac{0}{-0.5621}$$

$$q_4 = \arctan2(0, -0.5621) = 180^\circ$$

El valor de q_5 podemos determinarlo igualando los elementos r_{33} de ambas matrices:

$$\cos q_5 = -0.8271 \quad \rightarrow \quad \sin q_5 = \sqrt{1 - (-0.8271)^2}$$

$$q_5 = \arctan2\left(\sqrt{1 - (-0.8271)^2}, -0.8271\right) = 145.8^\circ$$

Con esto quedan calculadas todas las posiciones articulares requeridas para que el robot ABB IRB 140 se posicione y oriente de acuerdo con la matriz H . Podríamos sustituir todos

los valores en la matriz de la cinemática directa T_6^0 y obtendríamos la matriz H . Retomando todos los valores calculados podríamos escribir el vector de posiciones articulares \mathbf{q} de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 51.34^\circ \\ 7.78^\circ \\ 138.02^\circ \\ 180^\circ \\ 145.8^\circ \\ 231.34^\circ \end{bmatrix}$$

Es importante comprender que esta solución obtenida no es única, existen múltiples soluciones para este problema de cinemática inversa. Por ejemplo, para la cinemática inversa de orientación podemos tomar la solución para q_5 dada por:

$$\cos q_5 = -0.8271 \quad \rightarrow \quad \sin q_5 = -\sqrt{1 - (-0.8271)^2}$$

$$q_5 = \arctan2 \left(-\sqrt{1 - (-0.8271)^2}, -0.8271 \right) = 214.2^\circ$$

Y entonces, esto implicaría que q_6 estaría dado por:

$$\frac{-\cancel{s_4}s_6}{c_6\cancel{s_5}} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{-s_6}{c_6} = \frac{-0.4389}{0.3511}$$

$$\frac{s_6}{c_6} = \frac{0.4389}{0.3511}$$

$$q_6 = \arctan2(-0.4389, -0.3511) = 51.34^\circ$$

Y para el caso de q_4 se tendría que:

$$\frac{-\cancel{s_4}\cancel{s_5}}{-c_4\cancel{s_5}} = \frac{0}{-0.5621}$$

$$\frac{s_4}{c_4} = \frac{0}{0.5621}$$

$$q_4 = \arctan2(0, 0.5621) = 0^\circ$$

Esto nos conduciría a una segunda posible solución de la cinemática inversa dada por \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 51.34^\circ \\ 7.78^\circ \\ 138.02^\circ \\ 0^\circ \\ 214.2^\circ \\ 51.34^\circ \end{bmatrix}$$

De igual manera, en la cinemática inversa de posición el manipulador se podría dibujar en una configuración diferente a la planteada, y obtendríamos un conjunto solución diferente. Se recomienda al lector que se tome el tiempo de verificar que las soluciones calculadas son correctas, haciendo la sustitución descrita en párrafos anteriores. El trabajo de multiplicación matricial para obtener T_6^0 , aún cuando se haga de forma completamente numérica, puede llegar a resultar cuando menos tedioso, por lo cual se recomienda que estas operaciones se realicen con el auxilio de herramientas computacionales. En el capítulo 9 se pueden encontrar algunas librerías, funciones y algoritmos, recomendados para calcular matrices de rotación, transformaciones homogéneas, cinemática directa, cinemática inversa, entre otros.

5.4. Resolviendo la cinemática inversa de forma numérica

Problemas

1. Calcula la cinemática inversa del manipulador
2. Utiliza la técnica del desacoplo cinemático para calcular la cinemática inversa del robot FANUC LR Mate 200iC/5L.

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

En los capítulos anteriores hemos abordado la cinemática de posición de manipuladores seriales, que consiste básicamente en relacionar las posiciones articulares con la posición y orientación del elemento terminal. En este capítulo comenzaremos a calcular las relaciones entre las velocidades lineales y angulares del elemento terminal con las velocidades articulares. Comenzaremos primeramente calculando por separado las velocidades lineales y angulares en un manipulador serial; posteriormente conoceremos el concepto de **matriz jacobiana**, la cual nos permite describir en una misma expresión la relación de velocidades articulares con las velocidades lineales y angulares del elemento terminal.

6.1. Velocidad lineal del extremo del manipulador

La velocidad lineal del extremo de un manipulador serial (\mathbf{v}_e) se puede calcular derivando con respecto al tiempo al vector de posición \mathbf{r}_e , este vector nos proporciona una descripción de la posición del extremo del manipulador, en función de las variables articulares de posición (q_1, q_2, \dots, q_n). El vector \mathbf{r}_e se puede obtener de la matriz de cinemática directa T_n^0 ; recordando que la cuarta columna de esta matriz corresponde a la posición del origen de coordenadas del sistema de referencia $\{n\}$, el cual se coloca usualmente en el extremo del manipulador. Tomando en cuenta lo anterior, se puede establecer lo siguiente:

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{r}_e}{dt}$$

Donde:

$$\mathbf{r}_e = \left(T_n^0 \right)_{1:3,4}$$

El vector de velocidad lineal \mathbf{v}_e nos quedará usualmente en términos de las velocidades articulares ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$). Al efectuar la derivada con respecto al tiempo se debe considerar que las variables articulares de posición (q_1, q_2, \dots, q_n) son funciones que dependen del tiempo, es decir $q_i = q_i(t)$. Naturalmente, el resto de parámetros constantes del manipulador, se deben tratar como tal al momento de realizar las derivadas correspondientes.

6.1.1. Manipulador RR

Para ejemplificar el cálculo de la velocidad lineal del extremo de un manipulador, vamos a utilizar el manipulador planar *RR* que hemos estado trabajando como ejemplo en capítulos anteriores (ver Figura 5.1). Recordar que la cinemática directa de este manipulador está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el vector de posición \mathbf{r}_e sería:

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo cual, al derivar con respecto al tiempo tendríamos:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1 s_1 - l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) s_{12} \\ l_1 \dot{q}_1 c_1 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la expresión anterior, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 corresponden a las velocidades articulares asociadas con la primera y segunda articulación, de manera respectiva.

6.2. Velocidades angulares en un manipulador serial

La velocidad angular es una propiedad de cuerpo rígido que indica qué tan rápido está cambiando de orientación el cuerpo rígido, y en qué dirección lo hace. En un manipulador serial, la velocidad angular ω_i de un eslabón i , se puede calcular sumando los vectores de velocidad angular $\omega_{j-1,j}^0$ de los eslabones que le anteceden. Los vectores

$\omega_{j-1,j}^0$ corresponden a la velocidad angular de cada eslabón j con respecto al eslabón inmediatamente anterior $j - 1$. De manera general, lo anterior se puede expresar como:

$$\omega_{0,i}^0 = \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \dots + \omega_{i-1,i}^0 \quad (6.1)$$

Donde $\omega_{0,i}^0$ corresponde a la velocidad angular del eslabón i con respecto al eslabón 0, medida en el sistema de referencia de la base.

Usualmente, los vectores de velocidad angular $\omega_{i-1,i}^0$ no se pueden calcular de forma directa, dado que las componentes de estos vectores serán dependientes de las posiciones articulares. Sin embargo, si estos vectores se describen con respecto al sistema $\{i - 1\}$ y asumiendo que se utiliza la metodología de Denavit-Hartenberg para la descripción de la cinemática directa, entonces un vector de velocidad angular $\omega_{i-1,i}^{i-1}$ siempre tendrá únicamente una componente no nula en z en el caso de que la i -ésima articulación sea una revoluta, o bien un vector de ceros en el caso de una junta prismática.

Un vector de velocidad angular $\omega_{i-1,i}^{i-1}$ siempre tendrá la siguiente forma:

$$\omega_{i-1,i}^{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{en el caso de que la junta } i \text{ sea revoluta}$$

$$\omega_{i-1,i}^{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{en el caso de que la junta } i \text{ sea prismática}$$

Ahora, para poder expresar el vector $\omega_{i-1,i}^{i-1}$ en el sistema de la base y realizar la suma vectorial planteada en la ecuación 6.1, tendríamos que premultiplicarlo por la matriz de rotación R_{i-1}^0 , es decir:

$$\omega_{i-1,i}^0 = R_{i-1}^0 \omega_{i-1,i}^{i-1}$$

Así, la ecuación 6.1 puede formularse como sigue:

$$\omega_{0,i}^0 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 + \dots + R_{i-1}^0 \omega_{i-1,i}^{i-1} \quad (6.2)$$

6.2.1. Manipulador RR

A manera de ejemplo, vamos a calcular la velocidad angular del último eslabón (ω_2) del manipulador planar RR (ver Figura 5.1). Comenzamos formulando la expresión requerida:

$$\omega_2 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1$$

Dado que ambas articulaciones son revoluta, entonces:

$$\omega_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{1,2}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

La matriz R_1^0 se puede obtener de la matriz T_1^0 (calculada en el procedimiento de cinemática directa):

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los términos en la expresión planteada inicialmente:

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

6.3. Velocidad lineal de un punto ubicado en el manipulador

En la sección 6.1 vimos cómo calcular la velocidad lineal del extremo del manipulador. En esta sección abordaremos el cálculo de velocidades lineales de cualquier punto ubicado en un manipulador.

Sea P un punto ubicado en el eslabón i del manipulador serial, entonces la velocidad lineal de P (\mathbf{v}_P) está dada por:

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

Donde \mathbf{r}_P es un vector que describe la posición del punto P con respecto al sistema de

referencia de la base $\{0\}$. Habitualmente, el vector \mathbf{r}_P se formará de manera más simple si primero lo describimos en el sistema de referencia adherido al eslabón que pertenece, y luego aplicamos una transformación de coordenadas para describirlo en el sistema de la base. De acuerdo con lo anterior, se tendría que:

$$\mathbf{r}_P = T_i^0 \mathbf{r}_P^i$$

Donde T_i^0 es una matriz de transformación homogénea que describe al sistema del eslabón $\{i\}$ con respecto al de la base, y \mathbf{r}_P^i es un vector que describe la posición del punto P en el sistema $\{i\}$. Bajo la consideración de que el punto P pertenece al eslabón i , el vector \mathbf{r}_P^i tendrá siempre componentes constantes.

6.4. Velocidades en un manipulador serial: la matriz jacobiana

Al inicio del capítulo se mencionaba que el objetivo era conocer las relaciones entre **velocidades articulares** y las **velocidades en el espacio cartesiano** de un manipulador serial. Esta relación la proporciona una matriz habitualmente llamada **matriz jacobiana** o simplemente **jacobiano**. La matriz jacobiana asociada a un manipulador de n grados de libertad, es una matriz de $6 \times n$, y relaciona las velocidades de un manipulador mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{V} = J\dot{\mathbf{q}} \quad (6.3)$$

Donde \mathbf{V} es el vector de velocidades, tanto lineales como angulares, de alguna ubicación específica en el manipulador (usualmente el extremo):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$$

$\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades articulares:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Y J la matriz jacobiana.

A continuación, vamos a ver el procedimiento para calcular la matriz jacobiana. La i -ésima columna de la matriz jacobiana directa se forma de la siguiente manera:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

Donde J_{v_i} es el jacobiano de velocidad lineal y J_{ω_i} el jacobiano de velocidad angular. Si la i -ésima articulación es una revoluta, entonces, J_{v_i} y J_{ω_i} , están dados por:

$$J_{v_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{i-1})$$

$$J_{\omega_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Si la i -ésima articulación es prismática, entonces, J_{v_i} y J_{ω_i} , están dados por:

$$J_{v_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

$$J_{\omega_i} = \mathbf{0}$$

En las ecuaciones anteriores, las cantidades implicadas son:

- \mathbf{d}_n , es el vector que define la posición del extremo del manipulador. Naturalmente, lo calculamos u obtenemos de la matriz T_n^0 , cuarta columna, primeras tres filas.
- \mathbf{d}_{i-1} , es el vector que define la posición del sistema de referencia $\{i-1\}$. Lo obtenemos de la matriz T_{i-1}^0 , cuarta columna, primeras tres filas.
- \mathbf{z}_{i-1} , es el vector que define la dirección del $(i-1)$ -ésimo eje z , con respecto a la base. Lo obtenemos de la matriz T_{i-1}^0 , tercera columna, primeras tres filas.
- $\mathbf{0}$ es un vector de ceros, $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^T$.
- Particularmente, los vectores \mathbf{z}_0 y \mathbf{d}_0 siempre tendrán la siguiente forma:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.4.1. Manipulador RR

Vamos a ejemplificar el cálculo de la matriz jacobiana con el manipulador planar RR (ver Figura 5.1). De la cinemática directa se sabe que:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que ambas articulaciones son revolutas la matriz jacobiana quedará de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{v_1} & J_{v_2} \\ J_{\omega_1} & J_{\omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando los productos vectoriales correspondientes se tiene:

$$J_{v_1} = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_2} = \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que ambas articulaciones son revolutas, tanto J_{ω_1} como J_{ω_2} están dadas por:

$$J_{\omega_1} = \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad J_{\omega_2} = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, acomodando los términos calculados, se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.5. Ejemplos

Ejemplo 6.5.1 Velocidad del extremo del manipulador RR

Para el manipulador planar RR de la Figura 5.1, calcule la velocidad lineal y angular de su extremo, para un instante en el cual $q_1 = 45^\circ$ y $q_2 = 30^\circ$, siendo $\dot{q}_1 = 1.5$ rad/s y $\dot{q}_2 = 3$ rad/s. Considere que $l_1 = l_2 = 280$ mm.

Solución:

Tomamos como punto de partida la matriz jacobiana calculada en la subsección 6.4.1, sustituimos los valores correspondientes, de lo cual se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -468.449 & -270.459 \\ 270.459 & 72.4693 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector de velocidades del extremo del manipulador, debemos multiplicar la matriz jacobiana J por el vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$, mismo que está dado por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación, tenemos:

$$\mathbf{V} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -468.449 & -270.459 \\ 270.459 & 72.4693 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1514.05 \\ 623.097 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

Lo cual resulta en el vector de velocidades lineales y angulares del extremo del manipulador.

Ejemplo 6.5.2 Manipulador RPP

Para el manipulador RPP mostrado en la Figura 6.1 calcule las velocidades del extremo, para un instante en el cual $q_1 = 90^\circ$, $q_2 = 200$ mm y $q_3 = 100$ mm, además,

se sabe que las velocidades articulares son $\dot{q}_1 = -2.5 \text{ rad/s}$, $\dot{q}_2 = 30 \text{ mm/s}$, $\dot{q}_3 = 45 \text{ mm/s}$. Considere que $a = 200 \text{ mm}$ y $b = 70 \text{ mm}$.

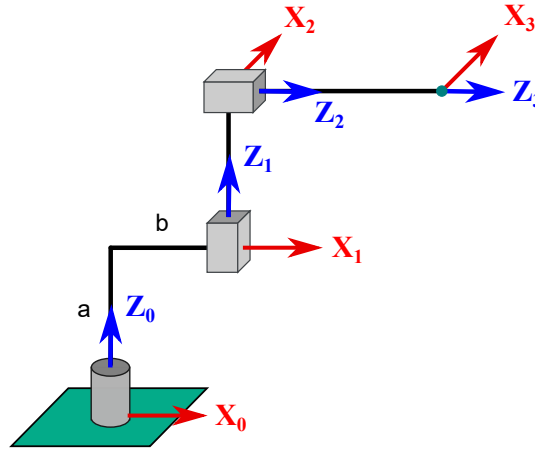


Figura 6.1 Manipulador RPP

Solución:

Calculando la cinemática directa, se tiene:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & b \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & b \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & b \cos(q_1) \\ \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & b \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & a + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & (b + q_3) \cos(q_1) \\ \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & (b + q_3) \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & a + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que estamos trabajando con un manipulador RPP, la matriz jacobiana tendrá la forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{v_1} & J_{v_2} & J_{v_3} \\ J_{\omega_1} & J_{\omega_2} & J_{\omega_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_0) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Recuerde que tanto la segunda como tercera articulación son prismáticas, lo cual facilita en gran medida el cálculo de la matriz jacobiana. Identificando cada término

implicado:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} (b + q_3) \cos(q_1) \\ (b + q_3) \sin(q_1) \\ a + q_2 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto vectorial para calcular J_{v_1} :

$$J_{v_1} = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_0) = \begin{bmatrix} -(b + q_3) \sin(q_1) \\ (b + q_3) \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acomodando los términos como corresponde, formamos la matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} -(b + q_3) \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) \\ (b + q_3) \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numéricos, se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -170 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el vector de velocidades articulares podemos definirlo como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Para calcular las velocidades del extremo, efectuamos el producto de J y $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{V} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -170 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.5 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425.0 \\ 45 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} 425 \\ 45 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ mm/s}$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.5 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

Problemas

6.1 Calcule la matriz jacobiana del manipulador RR mostrado en la Figura 6.2.

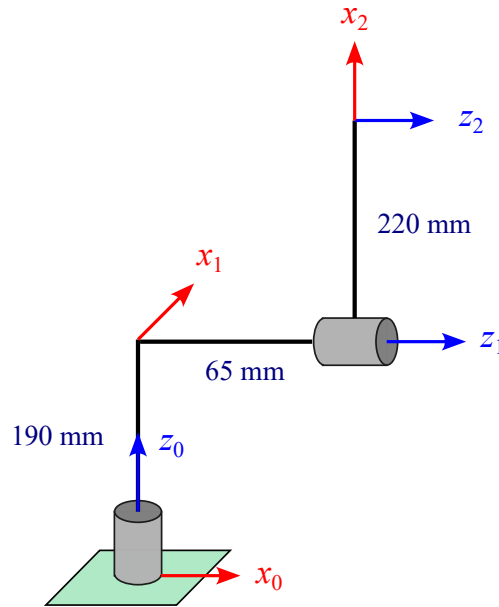


Figura 6.2 Manipulador RR

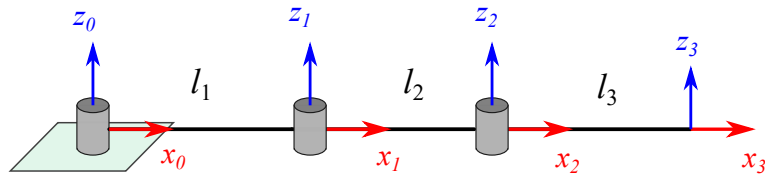
6.2 Para el manipulador RR mostrado en la Figura 6.2 calcule la velocidad lineal y angular del extremo para un instante en el que:

$$\begin{aligned} q_1 &= 30^\circ & \dot{q}_1 &= -0.75 \text{ rad/s} \\ q_2 &= 45^\circ & \dot{q}_2 &= 1.65 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

6.3 Para el manipulador RR de la Figura 6.2, se sabe que el centro de masa del eslabón 2 está ubicado de acuerdo con el siguiente vector de posición: $\mathbf{r}_{G_2}^2 = [-110, 0, 0]^T$. Calcule la velocidad del centro de masa G_2 con respecto al sistema de referencia de la base, para un instante en el cual las posiciones y velocidades articulares son las que se listan enseguida.

$$\begin{aligned} q_1 &= 90^\circ & \dot{q}_1 &= 0.25 \text{ rad/s} \\ q_2 &= 60^\circ & \dot{q}_2 &= 1.5 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

6.4 Calcule la matriz jacobiana para el manipulador RRR mostrado en la Figura 6.3.

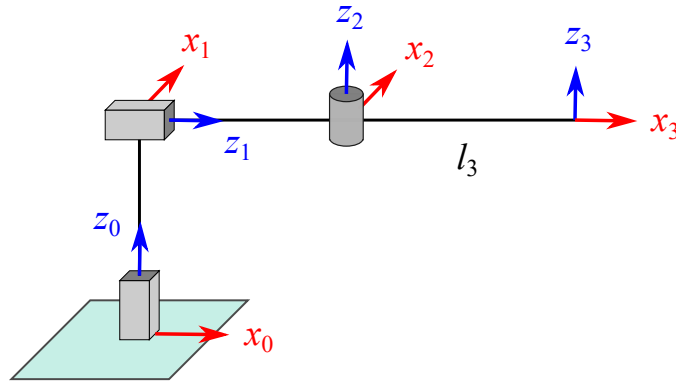
**Figura 6.3** Manipulador RRR

6.5 Para el manipulador RRR mostrado en la Figura 6.3 calcule la velocidad lineal del extremo del manipulador para un instante en el que:

$$\begin{array}{ll} q_1 = 30^\circ & \dot{q}_1 = 1.5 \text{ rad/s} \\ q_2 = 90^\circ & \dot{q}_2 = 2 \text{ rad/s} \\ q_3 = 135^\circ & \dot{q}_3 = 1.25 \text{ rad/s} \end{array}$$

Considere que las longitudes de los eslabones son $l_1 = l_2 = 300 \text{ mm}$ y $l_3 = 200 \text{ mm}$.

6.6 En la Figura 6.4 se muestra un manipulador PPR, calcule la matriz jacobiana.

**Figura 6.4** Manipulador PPR

6.7 Calcule la velocidad lineal y angular del extremo del robot ABB IRB 140, para un instante en el que:

$$\begin{array}{ll} q_1 = 0^\circ & \dot{q}_1 = 0.75 \text{ rad/s} \\ q_2 = 0^\circ & \dot{q}_2 = 1.25 \text{ rad/s} \\ q_3 = 0^\circ & \dot{q}_3 = 0.5 \text{ rad/s} \\ q_4 = 0^\circ & \dot{q}_4 = 0 \text{ rad/s} \\ q_5 = 0^\circ & \dot{q}_5 = 2 \text{ rad/s} \\ q_6 = 0^\circ & \dot{q}_6 = 0.5 \text{ rad/s} \end{array}$$

Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python como lenguaje de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

1. Para el manipulador planar RRR de la Figura 6.3 se sabe que las posiciones articulares están dadas por:

$$q_1 = \cos t \quad q_2 = \sin t \quad q_3 = t$$

Grafique las componentes de velocidad lineal (v_x, v_y, v_z) del extremo del manipulador en el intervalo $0 \leq t \leq 5$. Considere que $l_1 = l_2 = l_3 = 250$ mm.

Dinámica de manipuladores seriales

APE

Generación de trayectorias

APE

Análisis cinemático y dinámico de manipuladores utilizando Python

Este capítulo lo puedes encontrar en [este enlace](#).

Respuestas a ejercicios seleccionados

3. Posición, orientación y transformaciones homogéneas

4. Cinemática directa

5. Cinemática inversa

6. Cinemática diferencial

Ejercicio 6.1

$$J = \begin{bmatrix} -220 \sin(q_1) \cos(q_2) + 65 \cos(q_1) & -220 \sin(q_2) \cos(q_1) \\ 65 \sin(q_1) + 220 \cos(q_1) \cos(q_2) & -220 \sin(q_1) \sin(q_2) \\ 0 & 220 \cos(q_2) \\ 0 & \sin(q_1) \\ 0 & -\cos(q_1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.2

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} -206.17 \\ -253.76 \\ 256.68 \end{bmatrix} \text{ mm/s} ; \quad \boldsymbol{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0.825 \\ -1.4289 \\ -0.75 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

Ejercicio 6.3

$$\mathbf{v}_{G_2} = \begin{bmatrix} -13.75 \\ -126.64 \\ 82.5 \end{bmatrix} \text{ mm/s}$$

Ejercicio 6.4

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.5

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} -216.7 \\ -381.17 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6.6

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -l_3 \cos(q_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \sin(q_3) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bibliografía

- [1] Spong, M. W. (2006). Robot modeling and control. Hoboken. New Jersey: John Wiley Sons.
- [2] Oriolo, G., Sciavicco, L., Siciliano, B., Villani, L. (2010). Robotics: Modelling, planning and control. London: Springer.
- [3] Barrientos, A. (2012). Fundamentos de Robótica. Espana: McGraw-Hill España.
- [4] Reza, N. J. (2010). Theory of Applied Robotics. New York: Springer.
- [5] Stewart, J. (2018). Cálculo de una variables, trascendentes tempranas. México: Cengage.