

5.6 Ecuaciones de equilibrio

Como se estableció en la sección 5.1, las condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido sometido a un sistema tridimensional de fuerzas requieren que la fuerza *resultante* y el momento de par *resultante* que actúan sobre el cuerpo sean iguales a *cero*.

Ecuaciones vectoriales de equilibrio. Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden expresarse matemáticamente en forma vectorial como

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= 0 \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= 0\end{aligned}\tag{5-5}$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en el cuerpo o fuera de él.

Ecuaciones escalares de equilibrio. Si todas las fuerzas externas y los momentos de par aplicados se expresan en forma vectorial cartesiana y se sustituyen en las ecuaciones 5-5, tenemos

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Como las componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son independientes entre sí, las ecuaciones anteriores se satisfacen siempre que

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0\end{aligned}\tag{5-6a}$$

y

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\tag{5-6b}$$

Estas *seis ecuaciones escalares de equilibrio* pueden usarse para resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones 5-6a exigen que la suma de las componentes externas de fuerza que actúan en las direcciones x , y y z sea igual a cero; asimismo, las ecuaciones 5-6b requieren que la suma de las componentes de momento con respecto a los ejes x , y y z , sea igual a cero.

5.7 Restricciones y determinación estática

Para asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también debe estar sostenido o restringido propiamente por sus soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes que los necesarios para el equilibrio, mientras que otros pueden no tener suficientes o estar colocados de tal manera que ocasionen el movimiento del cuerpo. A continuación se analiza cada uno de esos casos.

Restricciones redundantes. Cuando un cuerpo tiene soportes redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve estáticamente indeterminado. *Estáticamente indeterminado* significa que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo, la viga de la figura 5-24a, y el ensamble de tubos de la figura 5-24b, que se muestran junto con sus diagramas de cuerpo libre, son estáticamente indeterminados debido a las reacciones adicionales (o redundantes) en los soportes. Para la viga hay cinco incógnitas, M_A , A_x , A_y , B_y y C_y , para las cuales sólo se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_O = 0$, ecuaciones 5-2). El ensamble de tubos tiene ocho incógnitas, para las cuales sólo se pueden escribir seis ecuaciones de equilibrio, ecuaciones 5-6.

Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas estáticamente indeterminados del tipo que se muestra en la figura 5-24 se obtienen generalmente a partir de las condiciones de deformación presentes en los puntos de soporte. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas relacionados con la mecánica elástica, como la “mecánica de materiales”*.

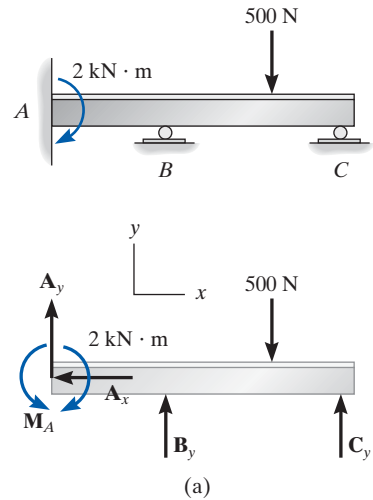
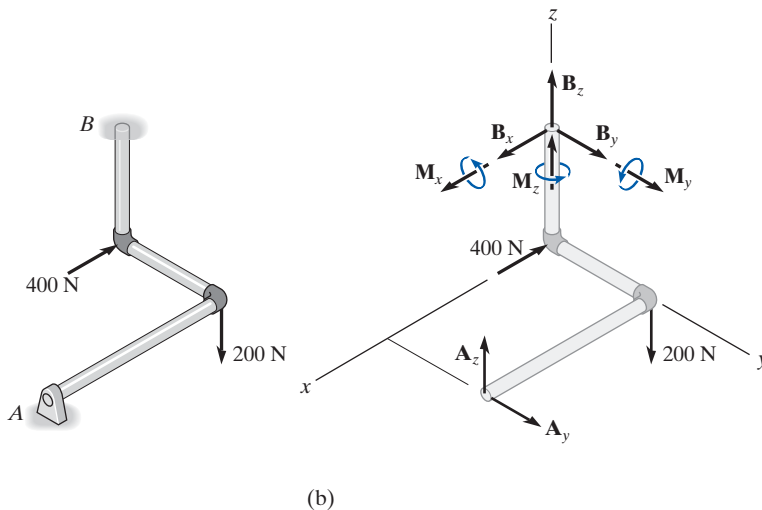


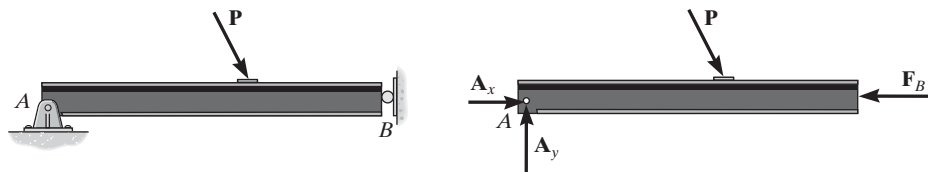
Fig. 5-24



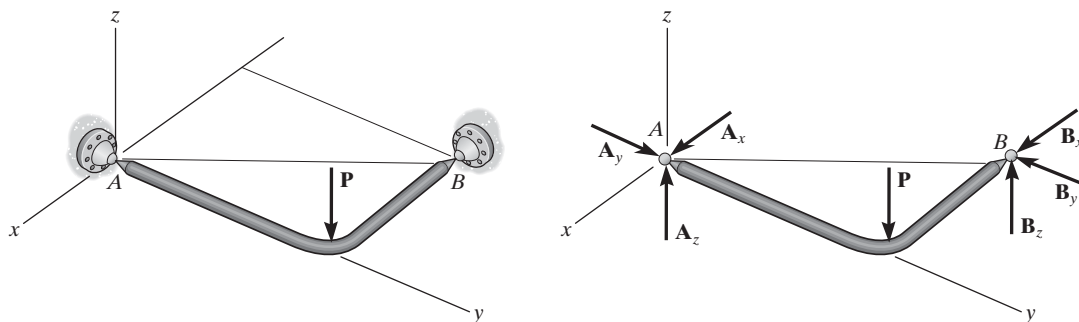
*Vea R.C. Hibbeler, *Mecánica de materiales*, 7a. ed., Pearson Education/Prentice Hall, Inc.

Restricciones impropias. Cuando se tienen tantas fuerzas reactivas desconocidas como ecuaciones de equilibrio, no siempre se garantiza que un cuerpo se encuentre estable cuando está sometido a una carga particular. Por ejemplo, el soporte de pasador en A y el soporte de rodillo en B para la viga de la figura 5-25a, están colocados de tal modo que las líneas de acción de las fuerzas de reacción son *concurrentes* en un punto A . En consecuencia, la carga \mathbf{P} aplicada ocasionará que la viga gire un poco con respecto a A , por lo que la viga está impropriamente restringida, $\Sigma M_A \neq 0$.

En tres dimensiones, un cuerpo estará impropriamente restringido si las líneas de acción de todas las fuerzas reactivas intersecan un eje común. Por ejemplo, las fuerzas reactivas en los soportes de rótula esférica, ubicados en los puntos A y B de la figura 5-25b, intersecan el eje que pasa por A y B . Como los momentos de estas fuerzas con respecto a A y B son todos iguales a cero, entonces la carga \mathbf{P} hará que el elemento gire con respecto al eje AB , $\Sigma M_{AB} \neq 0$.



(a)



(b)

Fig. 5-25

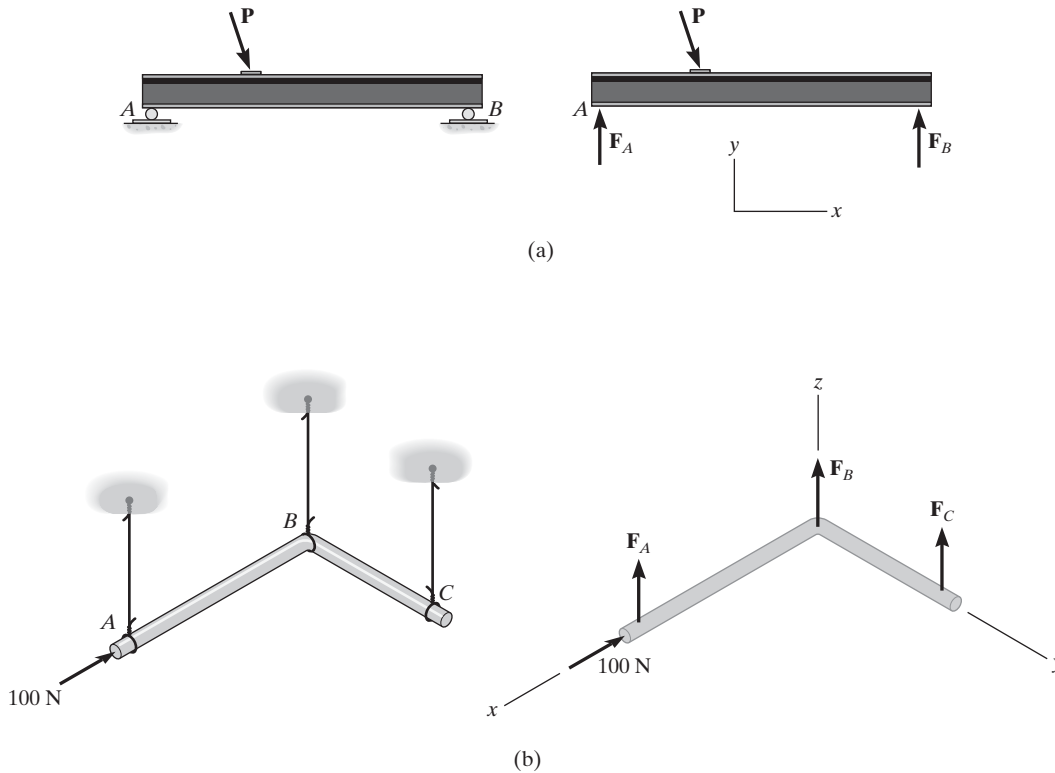


Fig. 5-26

Otra manera en que una restricción impropia conduce a la inestabilidad ocurre cuando todas las *fuerzas de reacción* son *paralelas*. En la figura 5-26 se muestran ejemplos bidimensionales y tridimensionales de esto. En ambos casos, la suma de fuerzas a lo largo del eje x no será igual a cero.

En algunos casos, un cuerpo puede tener *menos* fuerzas de reacción que ecuaciones de equilibrio que deben ser satisfechas. Entonces, el cuerpo está sólo *parcialmente restringido*. Por ejemplo, considere el elemento AB de la figura 5-27a con su correspondiente diagrama de cuerpo libre en la figura 5-27b. Aquí, $\Sigma F_y = 0$ no será satisfecha para las condiciones de carga, y por lo tanto no se mantendrá el equilibrio.

Para resumir estos puntos, un cuerpo se considera *impropiamente restringido* si todas las fuerzas de reacción se intersectan en un punto común o pasan por un eje común, o si todas las fuerzas de reacción son paralelas. En la práctica de la ingeniería, estas situaciones deben evitarse en todo momento ya que pueden causar una condición inestable.

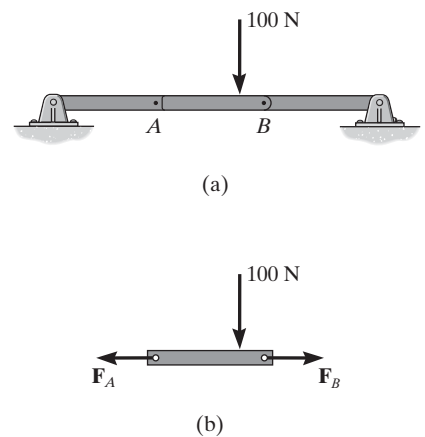


Fig. 5-27

Puntos importantes

- Al resolver cualquier problema de equilibrio, siempre trace primero el diagrama de cuerpo libre.
- Si un soporte *evita la traslación* de un cuerpo en una dirección específica, entonces el soporte ejerce una *fuerza* sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si un soporte *evita la rotación con respecto a un eje*, entonces el soporte ejerce un *momento de par* sobre el cuerpo con respecto al eje.
- Si un cuerpo está sometido a más reacciones desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles, entonces el problema es *estáticamente indeterminado*.
- Un cuerpo estable requiere que las líneas de acción de las fuerzas reactivas no intersequen un eje común y no sean paralelas entre sí.

Procedimiento para el análisis

Los problemas de equilibrio tridimensional para un cuerpo rígido pueden resolverse por el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el contorno del cuerpo.
- Muestre todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Establezca el origen de los ejes x , y , z en un punto conveniente y oriente los ejes de manera que sean paralelos a las fuerzas y momentos externos tanto como sea posible.
- Rotule todas las cargas y especifique sus direcciones relativas a los ejes x , y , z . En general, muestre todas las componentes *desconocidas* con un *sentido positivo* a lo largo de los ejes x , y , z .
- Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ecuaciones de equilibrio.

- Si las componentes x , y , z de fuerza y momento parecen fáciles de determinar, entonces aplique las seis ecuaciones escalares de equilibrio; de otra manera, use las ecuaciones vectoriales.
- No es necesario que el conjunto de ejes seleccionados para la sumatoria de fuerzas coincida con el conjunto de ejes elegidos para la sumatoria de momentos. En realidad, para realizar la suma de fuerzas y momentos puede elegirse un eje en cualquier dirección arbitraria.
- Elija la dirección de un eje para la suma de momentos de manera que interseque la línea de acción de las fuerzas desconocidas tanto como sea posible. Tenga en cuenta que los momentos de las fuerzas que pasan por los puntos sobre este eje y las fuerzas que son paralelas al eje serán iguales a cero.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da como resultado un escalar negativo para una magnitud de fuerza o de momento de par, esto indica que el sentido es contrario al supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 5.15

La placa homogénea que se muestra en la figura 5-28a tiene una masa de 100 kg y está sometida a una fuerza y un momento de par a lo largo de sus bordes. Si está soportada en el plano horizontal por medio de un rodillo en A , una rótula esférica en B y una cuerda en C , determine las componentes de reacción en estos soportes.

SOLUCIÓN (ANÁLISIS ESCALAR)

Diagrama de cuerpo libre. Hay cinco reacciones desconocidas que actúan sobre la placa, como se muestra en la figura 5-28b. Se supone que cada una de esas reacciones actúa en una dirección coordenada positiva.

Ecuaciones de equilibrio. Como la geometría tridimensional es bastante sencilla, un *análisis escalar* proporciona una *solución directa* a este problema. Una suma de fuerzas a lo largo de cada eje resulta en

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; & B_x &= 0 & \text{Resp.} \\ \Sigma F_y &= 0; & B_y &= 0 & \text{Resp.} \\ \Sigma F_z &= 0; & A_z + B_z + T_C - 300 \text{ N} - 981 \text{ N} &= 0 & (1)\end{aligned}$$

Recuerde que el momento de una fuerza con respecto a un eje es igual al producto de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular (brazo de momento) desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje. Asimismo, las fuerzas que son paralelas a un eje o pasan por él no generan momento con respecto al eje. Por consiguiente, al sumar momentos con respecto a los ejes x y y positivos, tenemos

$$\Sigma M_x = 0; \quad T_C(2 \text{ m}) - 981 \text{ N}(1 \text{ m}) + B_z(2 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_y &= 0; \\ 300 \text{ N}(1.5 \text{ m}) + 981 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - B_z(3 \text{ m}) - A_z(3 \text{ m}) - 200 \text{ N} \cdot \text{m} &= 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Las componentes de la fuerza en B se pueden eliminar si los momentos se suman con respecto a los ejes x' y y' . Obtenemos

$$\Sigma M_{x'} = 0; \quad 981 \text{ N}(1 \text{ m}) + 300 \text{ N}(2 \text{ m}) - A_z(2 \text{ m}) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{y'} &= 0; \\ -300 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 981 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 200 \text{ N} \cdot \text{m} + T_C(3 \text{ m}) &= 0 \quad (5)\end{aligned}$$

Resolver las ecuaciones 1 a 3, o las más convenientes 1, 4 y 5, da como resultado

$$A_z = 790 \text{ N} \quad B_z = -217 \text{ N} \quad T_C = 707 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que \mathbf{B}_z actúa hacia abajo.

NOTA: la solución de este problema no requiere el uso de una sumatoria de momentos con respecto al eje z . La placa está parcialmente restringida, ya que los soportes no pueden impedir que gire respecto del eje z si se aplica una fuerza en el plano x - y .

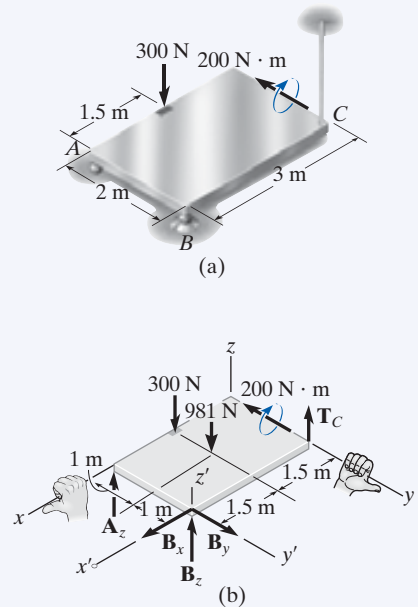


Fig. 5-28

EJEMPLO 5.16

Determine las componentes de reacción que ejercen la junta de rótula esférica ubicada en A, la chumacera lisa en B y el soporte de rodillo en C, sobre el ensamble de barras que se muestra en la figura 5-29a.

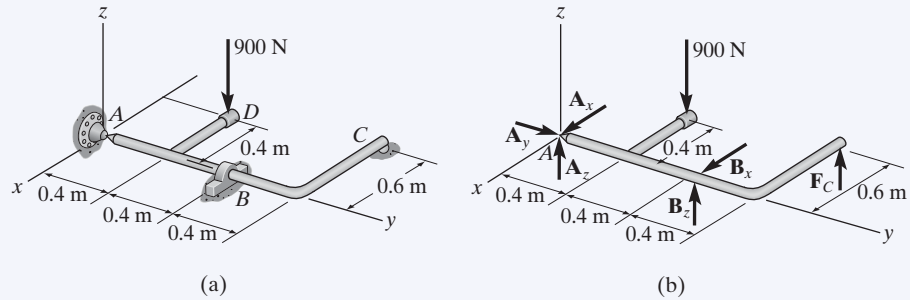


Fig. 5-29

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5-29b, las fuerzas de reacción de los soportes evitarán que el ensamble gire con respecto a cada eje coordenado, de esta manera la chumacera en B sólo ejerce fuerzas de reacción sobre el elemento.

Ecuaciones de equilibrio. Podemos obtener una solución directa para A_y si sumamos fuerzas a lo largo del eje y .

$$\Sigma F_y = 0; \quad A_y = 0 \quad \text{Resp.}$$

La fuerza F_C puede determinarse directamente al sumar momentos con respecto al eje y .

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0; \quad F_C(0.6 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) &= 0 \\ F_C &= 600 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Con este resultado, B_z puede determinarse al sumar momentos con respecto al eje x .

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0; \quad B_z(0.8 \text{ m}) + 600 \text{ N}(1.2 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) &= 0 \\ B_z &= -450 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que B_z actúa hacia abajo. La fuerza B_x puede encontrarse al sumar momentos con el respecto al eje z .

$$\Sigma M_z = 0; \quad -B_x(0.8 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

Así,

$$\Sigma F_x = 0; \quad A_x + 0 = 0 \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

Por último, con los resultados de B_z y F_C .

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0; \quad A_z + (-450 \text{ N}) + 600 \text{ N} - 900 \text{ N} &= 0 \\ A_z &= 750 \text{ N} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.17

El pescante se usa para sostener la maceta de 75 lb que se muestra en la figura 5-30a. Determine la tensión desarrollada en los cables AB y AC.

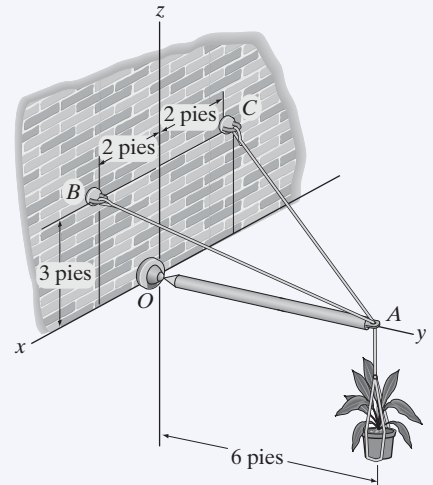
SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 5-30b, se muestra el diagrama de cuerpo libre del pescante.

Ecuaciones de equilibrio. Usaremos un análisis vectorial.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{AB} &= F_{AB} \left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} \right) = F_{AB} \left(\frac{\{2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ pies}}{\sqrt{(2 \text{ pies})^2 + (-6 \text{ pies})^2 + (3 \text{ pies})^2}} \right) \\ &= \frac{2}{7} F_{AB} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AB} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AB} \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{AC} &= F_{AC} \left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}} \right) = F_{AC} \left(\frac{\{-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ pies}}{\sqrt{(-2 \text{ pies})^2 + (-6 \text{ pies})^2 + (3 \text{ pies})^2}} \right) \\ &= -\frac{2}{7} F_{AC} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AC} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AC} \mathbf{k}\end{aligned}$$



(a)

Fig. 5-30

Podemos eliminar la reacción de la fuerza en O al escribir la ecuación de equilibrio del momento con respecto al punto O.

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$(6\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{2}{7} F_{AB} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AB} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AB} \mathbf{k} \right) + \left(-\frac{2}{7} F_{AC} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AC} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AC} \mathbf{k} \right) + (-75\mathbf{k}) \right] = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{18}{7} F_{AB} + \frac{18}{7} F_{AC} - 450 \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{12}{7} F_{AB} + \frac{12}{7} F_{AC} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad \frac{18}{7} F_{AB} + \frac{18}{7} F_{AC} - 450 = 0 \quad (1)$$

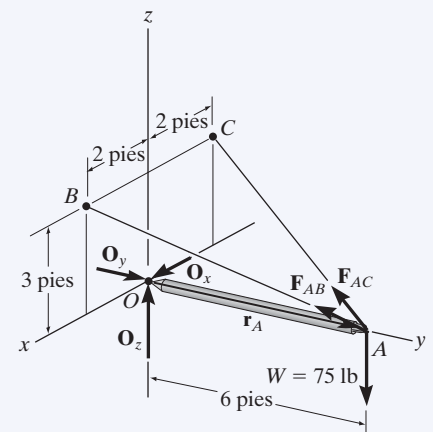
$$\Sigma M_y = 0; \quad 0 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad -\frac{12}{7} F_{AB} + \frac{12}{7} F_{AC} = 0 \quad (2)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (2),

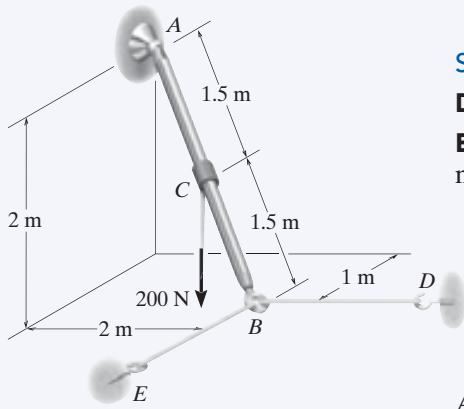
$$F_{AB} = F_{AC} = 87.5 \text{ lb}$$

Resp.

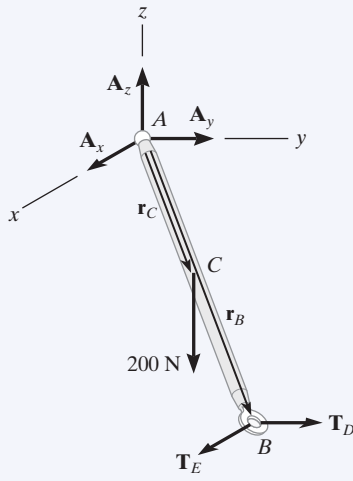


(b)

EJEMPLO 5.18



(a)



(b)

Fig. 5-31

La barra AB que se muestra en la figura 5-31a está sometida a la fuerza de 200 N. Determine las reacciones en la junta de rótula esférica A y la tensión en los cables BD y BE .

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama de cuerpo libre. Figura 5-31b.

Ecuaciones de equilibrio. Al representar cada fuerza del diagrama de cuerpo libre en forma vectorial cartesiana tenemos

$$\mathbf{F}_A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_E = T_E \mathbf{i}$$

$$\mathbf{T}_D = T_D \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = \{-200\mathbf{k}\} \text{ N}$$

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_A + \mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(A_x + T_E)\mathbf{i} + (A_y + T_D)\mathbf{j} + (A_z - 200)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad A_x + T_E = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad A_y + T_D = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z - 200 = 0 \quad (3)$$

Al sumar momentos con respecto al punto A resulta

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (\mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}\mathbf{r}_B$, entonces

$$(0.5\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (-200\mathbf{k}) + (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (T_E\mathbf{i} + T_D\mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

Al desarrollar y reordenar términos se obtiene

$$(2T_D - 200)\mathbf{i} + (-2T_E + 100)\mathbf{j} + (T_D - 2T_E)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad 2T_D - 200 = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad -2T_E + 100 = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad T_D - 2T_E = 0 \quad (6)$$

Si resolvemos las ecuaciones de la 1 a la 5 obtenemos

$$T_D = 100 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$T_E = 50 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$A_x = -50 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$A_y = -100 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$A_z = 200 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

NOTA: el signo negativo indica que A_x y A_y tienen un sentido que es opuesto al que se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 5-31b.

EJEMPLO 5.19

La barra doblada que se muestra en la figura 5-32a está soportada en A por una chumacera, en D por una junta de rótula esférica, y en B por medio del cable BC . Con sólo *una ecuación de equilibrio*, obtenga una solución directa para la tensión en el cable BC . La chumacera en A es capaz de ejercer componentes de fuerza sólo en las direcciones z y y y puesto que está apropiadamente alineada sobre el eje.

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 5-32b, hay seis incógnitas.

Ecuaciones de equilibrio. La tensión \mathbf{T}_B en el cable puede obtenerse *directamente* al sumar momentos con respecto a un eje que pase por los puntos D y A . ¿Por qué? La dirección del eje está definida por el vector unitario \mathbf{u} , donde

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}_{DA}}{r_{DA}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \\ &= -0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de los momentos con respecto a este eje será cero siempre que

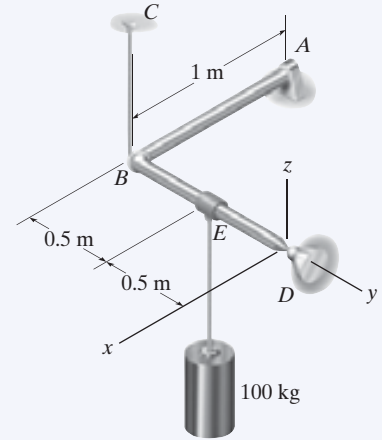
$$\Sigma M_{DA} = \mathbf{u} \cdot \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

Aquí \mathbf{r} representa un vector de posición trazado desde *cualquier punto* sobre el eje DA hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} (vea la ecuación 4-11). Con referencia a la figura 5-32b, podemos escribir

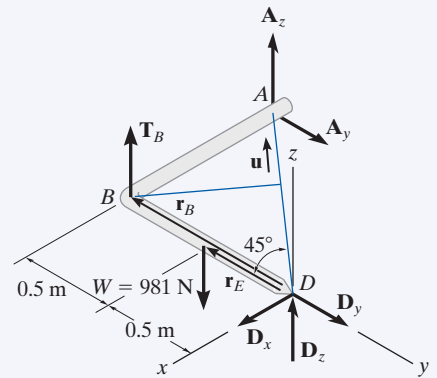
$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_E \times \mathbf{W}) &= 0 \\ (-0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}) \cdot [(-1\mathbf{j}) \times (T_B\mathbf{k}) \\ &\quad + (-0.5\mathbf{j}) \times (-981\mathbf{k})] = 0 \\ (-0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}) \cdot [(-T_B + 490.5)\mathbf{i}] &= 0 \\ -0.7071(-T_B + 490.5) + 0 + 0 &= 0 \\ T_B &= 490.5 \text{ N} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Como los brazos de momento desde el eje hasta \mathbf{T}_B y \mathbf{W} son fáciles de obtener, también podemos determinar este resultado con un análisis escalar. Como se muestra en la figura 5-32b,

$$\begin{aligned}\Sigma M_{DA} &= 0; \quad T_B(1 \text{ m sen } 45^\circ) - 981 \text{ N}(0.5 \text{ m sen } 45^\circ) = 0 \\ T_B &= 490.5 \text{ N} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$



(a)



(b)

Fig. 5-32