# Cinemática y dinámica de manipuladores seriales <sup>1</sup>

Versión 0.2.1

Pedro Jorge De Los Santos jdelossantos@upgto.edu.mx

13 de mayo de 2022

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Éstas notas no sustituyen la bibliografía básica, tómelas simplemente como una referencia rápida sobre el contenido abordado a lo largo de los cursos de Cinemática y Dinámica de Robots

# Índice general

1.	Una	introducción a los manipuladores seriales	7
	1.1.	Un poco de historia	7
	1.2.	Clasificación de robots	7
2.	Pree	eliminares matemáticos	8
	2.1.	Matrices	8
		2.1.1. Transpuesta de una matriz	8
		2.1.2. Suma de matrices	9
		2.1.3. Multiplicación por un escalar	9
		2.1.4. Multiplicación de matrices	9
	2.2.	Vectores	10
		2.2.1. Producto punto	10
		2.2.2. Producto vectorial	11
		2.2.3. Ángulo entre dos vectores	11
		2.2.4. Proyección escalar y vectorial	11
	2.3.	Trigonometría	12
		2.3.1. Relaciones en un triángulo rectángulo	12
		2.3.2. Ley de senos y cosenos	13
		2.3.3. Algunas identidades trigonométricas	13
	2.4.	La función arcotangente de dos argumentos arctan2	14
3.	Posi	ción, orientación y transformaciones	17
	3.1.	Representación de la posición	17
	3.2.	Representación de la orientación	19
		3.2.1. Matrices de rotación	20
		3.2.2. Parametrización de las rotaciones	23
		3.2.3. Ángulos de Euler	23

	3.3. Matrices de transformación homogénea		27
	3.3.1. Matrices de transformación homogéneas básicas		31
	3.3.2. Composición de las matrices de transformación homogénea		31
	3.3.3. Traslación		33
	3.3.4. Rotación		33
	3.3.5. Rotación y traslación		34
	3.4. Problemas		39
	3.5. Problemas de computadora		49
4.	Cinemática directa		51
	4.1. Introducción		51
	4.2. Sobre cadenas cinemáticas y transformaciones		52
	4.3. La metodología de Denavit-Hartenberg		53
	4.4. Ejemplos		55
	4.4.1. Manipulador planar RR		55
	4.4.2. Manipulador RR		56
	4.4.3. Manipulador RRP		57
	4.4.4. Robot industrial FANUC LR MATE 200iC		57
	4.5. Problemas		58
	T.J. 110Dicilias	• • •	
5.	Cinemática inversa		66
5.		1	
5.	Cinemática inversa		66
5.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		<b>66</b> 66
5.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		<b>66</b> 66 67
5.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		<b>66</b> 66 67 69
5.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		<b>66</b> 66 67 69
5.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		<b>66</b> 67 69 69 70
	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		66 67 69 69 70 73
	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		66 67 69 70 73
	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		66 67 69 70 73 74
	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		66 67 69 70 73 74 74
6.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa		66 67 69 73 73 <b>74</b> 74
6.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa  5.2. Cinemática inversa: método analítico  5.3. Cinemática inversa de posición: método geométrico  5.3.1. Manipulador planar RR  5.3.2. Manipulador antropomórfico RRR  5.3.3. Manipulador RRP  5.4. Desacoplo cinemático  Cinemática diferencial  6.1. Velocidades en un manipulador serial  6.2. Algoritmo para calcular la matriz jacobiana directa  6.3. Ejemplos resueltos		66 67 69 70 73 74 74 75
6.	Cinemática inversa  5.1. El problema general de la cinemática inversa  5.2. Cinemática inversa: método analítico  5.3. Cinemática inversa de posición: método geométrico  5.3.1. Manipulador planar RR  5.3.2. Manipulador antropomórfico RRR  5.3.3. Manipulador RRP  5.4. Desacoplo cinemático  Cinemática diferencial  6.1. Velocidades en un manipulador serial  6.2. Algoritmo para calcular la matriz jacobiana directa  6.3. Ejemplos resueltos  Dinámica de manipuladores seriales		66 67 69 70 73 74 74 75 76

La versión actual de este documento es un borrador incompleto e inconexo en algunas secciones, sin una revisión exhaustiva del contenido. Tome sus precauciones al respecto.

La última versión de estos apuntes puede descargarlos desde el siguiente enlace:

https://jorgedelossantos.github.io/files/pdf/apuntes\_cir\_dir.pdf

## Introducción

Estos apuntes se han elaborado con la intención de servir como una referencia rápida para los alumnos de los cursos de Cinemática de Robots y Dinámica de Robots de la Universidad Politécnica de Guanajuato, con la finalidad de sumar a su formación conocimientos sólidos en materia del análisis de manipuladores seriales.

La idea de este texto es proporcionar contenido que sea *digerible* para el alumno, incluyendo ejemplos resueltos, ejercicios, casos prácticos, entre otros recursos, que le ayuden a asimilar los temas correspondientes de una mejor manera.

#### Sobre la notación

A continuación se listan y describen una serie de convenciones y notación a utilizar en el desarrollo del texto:

Las cantidades vectoriales serán representadas mediante una tipografía cuyo énfasis se asemeja a u, v y r.

- {*i*} representa el i-ésimo sistema de referencia.
- $R_n^m$  denota una matriz de rotación que describe la orientación del sistema  $\{n\}$  con respecto a  $\{m\}$ .
- $T_n^m$  denota una matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema  $\{n\}$  con respecto a  $\{m\}$ .
- $\mathbf{p}^i$  representa el vector  $\mathbf{p}$  descrito en el sistema de referencia  $\{i\}$ .
- *J* denota el jacobiano geométrico de un manipulador.
- $J_a$  denota el jacobiano analítico de un manipulador.
- $\omega_{m,n}^l$  denota la velocidad angular del sistema  $\{n\}$  con respecto al sistema  $\{m\}$  medida desde el sistema  $\{l\}$ .

La siguiente lista describe algunas abreviaturas y notaciones reducidas, sobre todo para funciones trigonométricas que aparecerán de forma muy frecuente en los análisis de cinemática de manipuladores:

- $c_m = \cos \theta_m = \cos q_m$ , sí m es un valor numérico, en caso contrario:  $c_m = \cos m$
- $s_m = \sin \theta_m = \sin q_m$ , sí m es un valor numérico, en caso contrario:  $s_m = \sin m$
- $c\theta_m = \cos \theta_m$
- $cq_m = \cos q_m$
- $c(\theta_m + \theta_n) = \cos(\theta_m + \theta_n)$
- $c(q_m + q_n) = \cos(q_m + q_n)$
- $c_{mn} = \cos(\theta_m + \theta_n) = \cos(q_m + q_n)$ , sí m y n son valores numéricos, en caso contrario:  $c_{mn} = \cos(m + n)$
- $s\theta_m = \sin \theta_m$
- $sq_m = \sin q_m$
- $s(\theta_m + \theta_n) = \sin(\theta_m + \theta_n)$
- $s(q_m + q_n) = \sin(q_m + q_n)$
- $s_{mn} = \sin(\theta_m + \theta_n) = \sin(q_m + q_n)$ , sí m y n son valores numéricos, en caso contrario:  $c_{mn} = \sin(m + n)$

1

# Una introducción a los manipuladores seriales

- 1.1 **Un poco de historia**
- 1.2 Clasificación de robots

# Preeliminares matemáticos

Antes de comenzar con los tópicos específicos de localización espacial se hará un breve repaso de algunos tópicos de matemáticas universitarias de importancia para el seguimiento del curso. Evidentemente lo aquí descrito es una revisión muy rápida de dichos conceptos, si requiere información más detallada o específica al respecto, puede consultar en las referencias colocadas al pie de página. <sup>1</sup>

## 2.1 Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular bidimensional de números (o elementos) escritos entre corchetes. Cada número de la matriz se conoce como *elemento* o *entrada* de la matriz. Los elementos de una matriz están dispuestos en filas y columnas, se denota como una matriz de  $m \times n$  (léase m por n) a aquella que se compone de m filas y n columnas. Usualmente para nombrar las matrices se utilizarán letras mayúsculas, por ejemplo sea A una matriz de  $m \times n$ , de manera general puede escribirse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(2.1)$$

# 2.1.1 Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz A de  $m \times n$  se denota como  $A^T$  y es una matriz de  $n \times m$  que tiene la primera fila de A como su primera columna, la segunda fila de A como su segunda columna y así de manera sucesiva. Por tanto la transpuesta de la matriz A dada en la ecuación 2.2 será:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Strang, G., Villagomez, H. (2007). Algebra lineal y sus aplicaciones. Mexico: Thomson.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Grossman, S. I. (1996). Algebra lineal. Mexico: McGraw-Hill.

2.1. MATRICES 9

$$A^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
 (2.2)

#### 2.1.2 Suma de matrices

La suma matricial está definida para matrices del mismo tamaño y se obtiene sumando los elementos correspondientes. Por ejemplo, sean A y B dos matrices de  $2 \times 2$  dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

**Entonces:** 

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

## 2.1.3 Multiplicación por un escalar

Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada elemento de la matriz se múltiplica por dicho escalar. Sea A la matriz de  $2 \times 2$  descrita con anterioridad y k un escalar, entonces:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

# 2.1.4 Multiplicación de matrices

Para que la multiplicación de matrices pueda efectuarse se debe cumplir que la matriz que premultiplica debe tener tantas columnas como filas tenga la que postmultiplica. En terminos más *amables*, sea A una matriz de dimensiones  $m \times n$  y B una matriz de  $p \times q$ , para poder multiplicarlas necesariamente se debe cumplir que n = p, además, la matriz resultante tendrá un tamaño dado por  $m \times q$ .

Sean A y B dos matrices tal que puede efectuarse el producto AB y sea C la matriz que resulta de efectuar dicho producto, es decir:

Cada elemento de la matriz *C* se calcula de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{pj}$$

Por ejemplo, sean A y B dos matrices de  $2 \times 2$  definidas como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

El producto *AB* estará dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que el producto de matrices satisface las siguientes propiedades:

- $(AB)^T = B^T A^T$ , para toda  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$  y  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$
- En general,  $AB \neq BA$
- A(B+C) = AB + AC, para toda  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .
- ABC = A(BC) = (AB)C, para toda  $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .

## 2.2 Vectores

Un vector es una matriz que tiene una sola fila (vector fila) o columna (vector columna), en ambos casos a sus elementos se les conoce como componentes. En este texto usualmente se hará referencia a vectores columnas y de manera indistinta se denotarán como:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$$

# 2.2.1 Producto punto

El producto punto o producto escalar está definido para dos vectores del mismo tamaño y da como resultado un escalar. Sean  $\mathbf{u} = [u_1 \, u_2 \, u_3]^T$  y  $\mathbf{v} = [v_1 \, v_2 \, v_3]^T$  dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ , el producto escalar se calcula como:

2.2. VECTORES 11

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

## 2.2.2 Producto vectorial

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores es una operación definida para vectores en un espacio tridimensional y del cual resulta un vector perpendicular a ambos involucrados. Sean  $\mathbf{u} = [u_1 u_2 u_3]^T$  y  $\mathbf{v} = [v_1 v_2 v_3]^T$  dos vectores en  $\mathbb{R}^3$ , entonces el producto vectorial está dado por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

# 2.2.3 Ángulo entre dos vectores

El ángulo entre dos vectores se puede calcular a partir de la definición del producto escalar. Se sabe que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \theta$$

**Entonces:** 

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv}\right)$$

# 2.2.4 Proyección escalar y vectorial

La proyección escalar de un vector **u** sobre un vector **v** está dada por:

$$u_{\nu} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

Donde:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

La proyección vectorial de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  se obtiene multiplicando el resultado anterior por un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{v}$ , es decir:

$$\mathbf{u}_{v} = u_{v}\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}$$

En el caso particular de que los dos vectores involucrados sean unitarios, la proyección escalar de un vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$  sobre un vector unitario  $\hat{\mathbf{v}}$  está dada por:

$$u_{\nu} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$

De la definición del producto escalar se sabe que:

$$u_{y} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = uv \cos \theta$$

Pero dado que  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  son vectores unitarios, entonces u = v = 1, por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \cos \theta$$

Este resultado nos será útil posteriormente cuando estemos realizando descripción de orientaciones.

# 2.3 Trigonometría

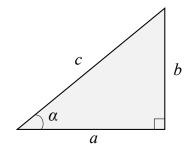
## 2.3.1 Relaciones en un triángulo rectángulo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

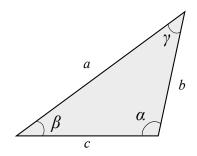
$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$
$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

2.3. TRIGONOMETRÍA



# 2.3.2 Ley de senos y cosenos



$$a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc \cos \alpha$$

$$b^{2} = a^{2} + c^{2} - 2ac \cos \beta$$

$$c^{2} = a^{2} + b^{2} - 2ab \cos \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

# 2.3.3 Algunas identidades trigonométricas

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$$

$$\tan(\theta - \pi) = \tan \theta$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

# 2.4 La función arcotangente de dos argumentos arctan2

La función arcotangente habitual (arctan) nos permite calcular de forma adecuada un ángulo en el rango (-90°, 90°), es decir, aquellos que corresponden al primer y cuarto cuadrante del plano cartesiano. Sin embargo, cuando el ángulo que queremos calcular corresponde al segundo o tercer cuadrante, la función arctan no puede manejarlo de forma apropiada. Por ejemplo, vamos a suponer que queremos calcular la dirección  $\theta$  del vector  $\mathbf{r}$  mostrado en la Figura 2.1, utilizando la función arctangente tendríamos que:

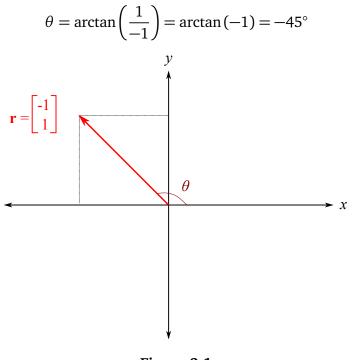


Figura 2.1

Es evidente que el resultado anterior nos da un ángulo ubicado en el cuarto cuadrante, lo cual no corresponde con lo observado en la figura. Como se había mencionado, la función arcotangente ordinaria no puede manejar adecuadamente resultados cuando x < 0, puesto que al recibir un argumento único no tiene manera de saber si el signo negativo corresponde a la componente y o a la de x.

La función arcotangente de dos argumentos (arctan2) permite calcular correctamente ángulos en todos los cuadrantes, dado que preserva la información correspondiente a los signos de cada una de las componentes. De forma simple podemos definir esta función como:

$$\arctan(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{para } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 180^{\circ} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Con ayuda de esta función podríamos ahora recalcular el ángulo  $\theta$ , de lo cual tendríamos que:

$$\theta = \arctan 2(1, -1)$$

Dado que el segundo argumento es negativo (x < 0), entonces:

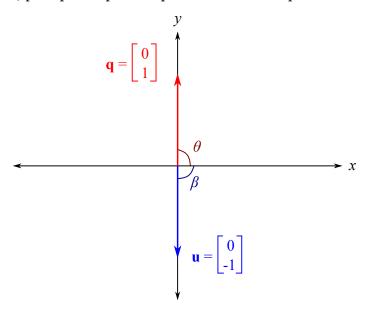
$$\theta = \arctan(1, -1) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + 180^{\circ} = \arctan(-1) + 180^{\circ} = -45^{\circ} + 180^{\circ} = 135^{\circ}$$

Este resultado si que es correcto. En términos descriptivos podríamos considerar que la función arcotangente de dos argumentos hace una *corrección* a la función arcotangente en el caso de que la componente en x sea negativa. Esta corrección consiste en sumar  $180^{\circ}$  al resultado obtenido.

Hay un par de situaciones en las que hay que tener cuidado con la función arcotangente, puesto que si procedemos de forma usual nos conducirá a un error de cálculo (al menos en una calculadora de bolsillo), observa lo que ocurre si quisiéramos calcular la dirección del vector **q** mostrado en la Figura 2.2, tendríamos que:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{0}\right)$$

Dado que la componente x=0, nuestra operación implica una división por cero, lo cual nos conduce a una indefinición. Algo similar ocurre en el caso de la dirección  $\beta$  del vector  $\mathbf{u}$ . No podemos calcular numéricamente los ángulos, pero por inspección podemos verificar que  $\theta=90^\circ$  y  $\beta=-90^\circ$ .



#### Figura 2.2

Tomando en cuenta lo anterior, una definición un poco más completa para la función arcotangente de dos argumentos incluye estos dos casos particulares:

$$\arctan 2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{para } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^{\circ} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$
$$90^{\circ} & \text{para } x = 0; \ y > 0.$$
$$-90^{\circ} & \text{para } x = 0; \ y < 0.$$

## **6** Calculando la función arctan2

Normalmente las calculadoras de bolsillo no nos dan la posibilidad de calcular de manera directa mediante la función arctan2, así que usualmente tenemos que hacer uso de arctan y hacer la corrección manualmente en el caso que corresponda. Por otro lado, los lenguajes de programación y los programas de cálculo numérico, suelen incluir una función arcotangente de dos argumentos. Por ejemplo, en Python se puede utilizar la librería math, tal como se muestra en el siguiente bloque de código:

```
>>> from math import atan2,degrees
>>> degrees(atan2(1,-1))
135.0
```

# Posición, orientación y transformaciones

Se puede considerar que un manipulador serial es un conjunto de eslabones rígidos unidos mediante pares cinemáticos. En el estudio de la cinemática usualmente lo que haremos es colocar sistemas de referencias adheridos a cada uno de los eslabones y posteriormente encontrar las relaciones entre estos sistemas para poder realizar una descripción cinemática completa. Para lograr lo anterior necesitamos conocer los conceptos y herramientas matemáticas fundamentales para la descripción de la posición y orientación de un cuerpo rígido, y eso es justamente el objetivo de este capítulo.

# 3.1 Representación de la posición

Usualmente la ubicación de un punto en un sistema coordenado se describe mediante vectores de posición. En la Figura 3.1 se muestran dos puntos P y Q, cuyas posiciones están dadas por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Naturalmente ambos vectores están descritos en el sistema de referencia *XY* que se muestra, y dado que únicamente se tiene dicho sistema de referencia, no hay necesidad de especificar con respecto a qué sistema se están midiendo las coordenadas de posición representadas.

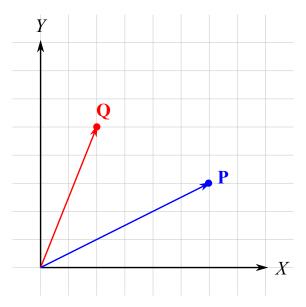


Figura 3.1 Posición de dos puntos P y Q

En la Figura 3.2 se muestra un punto P y dos sistemas de referencia  $O_0X_0Y_0$  y  $O_1X_1Y_1$ . Donde el sistema  $\{1\}$  se obtiene mediante operaciones de traslación a partir de  $\{1\}$ . La descripción de P en cada uno de los sistemas de referencia está dada por:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Es más, notará que tal como se muestra en la figura 3.3 las posiciones descritas en ambos sistemas están relacionadas mediante:

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{r}^0 + \mathbf{P}^1$$

Donde  $\mathbf{r}^0$  describe la posición del origen de coordenadas del sistema  $\{1\}$  con respecto al sistema  $\{0\}$ .

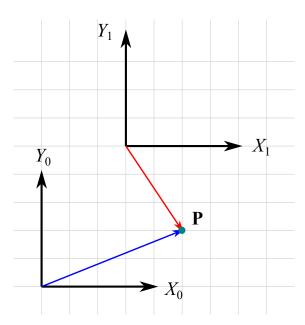


Figura 3.2 Posición de un punto P en dos sistemas de referencia

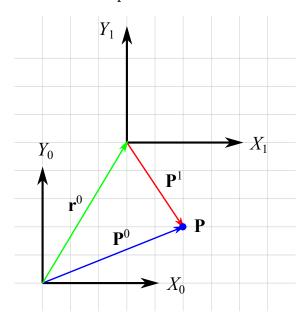


Figura 3.3 Posición de un punto P en dos sistemas de referencia

# 3.2 Representación de la orientación

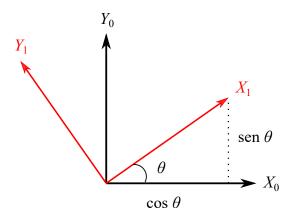
La orientación de un cuerpo rigido en el espacio puede definirse mediante al menos mediante tres parámetros, de la mecánica elemental recordará que habitualmente en aquella se hace uso de los cosenos directores para dicha tarea. En cinemática de robots además de los cosenos directores (agrupados en las matrices de rotación) se hace uso de otros métodos de representación como los ángulos de Euler, los cuaterniones y los pares de rotación.

Para hacer la descripción de la orientación de un sólido rígido, como de la posición, se hace necesario

adherir un sistema de referencia solidario al mismo, y posteriormente trabajar con las transformaciones necesarias de descripción entre sistemas de referencia.

### 3.2.1 Matrices de rotación

En la figura 3.4 se muestra un sistema  $\{1\}$  que ha sido obtenido a partir de  $\{0\}$  mediante una rotación  $\theta$  alrededor del eje z. Una manera de representar dicha rotación sería simplemente con el parámetro de rotación  $\theta$ , pero evidentemente esto no escalaría de manera adecuada para un caso de representación tridimensional.



**Figura 3.4** Un sistema {1} obtenido por rotación a partir de {0}

Otra opción es decribir las componentes de los ejes del sistema de referencia  $\{1\}$  en el sistema  $\{0\}$ , es decir,  $X_1^0$  y  $Y_1^0$ . En el caso particular del ejemplo de la figura 3.4 se puede observar que dichos vectores estarán dados por:

$$\mathbf{X}_{1}^{0} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$
 ;  $\mathbf{Y}_{1}^{0} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ 

Si estos vectores se acomodan de tal manera que:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^0 & \mathbf{Y}_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Se obtiene un arreglo conocido como **matriz de rotación**, la cual presenta algunas propiedades características que se describirán posteriormente. La matriz  $R_1^0$  contiene la información necesaria para describir la orientación del sistema  $\{1\}$  con respecto a  $\{0\}$ .

#### Propiedades de la matrices de rotación

Se puede verificar que cada columna de las matrices de rotación son unitarias y mutuamente ortogonales, una matriz de este tipo se dice que es una **matriz ortogonal**. Usualmente se suele referir que las matrices de rotación pertenecen al conjunto de las matrices de nxn representadas por el símbolo SO(n) que denota el grupo ortogonal especial de orden n. Algunas propiedades de las matrices de rotación se listan enseguida. Sea R una matriz de rotación, entonces:

- $R \in SO(n)$
- $R^{-1} \in SO(n)$
- $R^{-1} = R^T$
- Las columnas de *R* son mutuamente ortogonales.
- Cada columna de *R* es un vector unitario.
- det(R) = 1, siempre y cuando los sistemas involucrados sean *derechos*.

#### Transformaciones de rotación

En la figura 3.5 se observa un sólido rígido de forma rectangular al cual se le ha adherido un sistema de referencia  $\{1\}$ , además,  $\{1\}$  está rotado un ángulo  $\theta$  con respecto a un sistema base  $\{0\}$ . Asumiendo que las dimensiones del rectángulo son a y b de largo y ancho respectivamente, entonces las coordenadas de la esquina P descritas en el sistema local  $\{1\}$  están dadas por:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{Y}_1$$

Las coordenadas de P en el sistema  $\{0\}$  se pueden obtener mediante la proyección de dicho vector en este sistema, es decir:

$$\mathbf{P}^{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_{0} \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{Y}_{0} \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\mathbf{X}_{1} + b\mathbf{Y}_{1}) \cdot \mathbf{X}_{0} \\ (a\mathbf{X}_{1} + b\mathbf{Y}_{1}) \cdot \mathbf{Y}_{0} \\ (a\mathbf{X}_{1} + b\mathbf{Y}_{1}) \cdot \mathbf{Z}_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathbf{X}_{1} \cdot \mathbf{X}_{0} + b\mathbf{Y}_{1} \cdot \mathbf{X}_{0} \\ a\mathbf{X}_{1} \cdot \mathbf{Y}_{0} + b\mathbf{Y}_{1} \cdot \mathbf{Y}_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1} \cdot \mathbf{X}_{0} & \mathbf{Y}_{1} \cdot \mathbf{X}_{0} \\ \mathbf{X}_{1} \cdot \mathbf{Y}_{0} & \mathbf{Y}_{1} \cdot \mathbf{Y}_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Note que la matriz que multiplica al vector  $[a, b]^T$  es justamente  $R_1^0$ , entonces:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1$$

Lo cual implica que la matriz de rotación  $R_1^0$  además de describir la orientación del sistema  $\{1\}$  con respecto al sistema  $\{0\}$ , sirve para realizar transformaciones de coordenadas de un punto descrito en un sistema a otro.

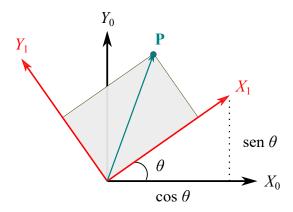
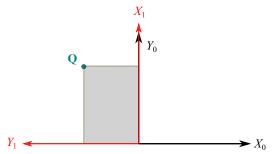


Figura 3.5 Transformaciones de rotación

## **Ejemplo 3.2.1** Transformación de coordenadas

El sistema  $\{1\}$  está rotado 90° alrededor del eje z con respecto a  $\{0\}$ , se sabe que las coordenadas del punto Q dadas en el sistema  $\{1\}$  son  $\mathbf{Q}^1 = [10,5]^T$ , calcule las coordenadas del punto Q en el sistema  $\{0\}$ .



#### Solución:

La matriz de rotación  $R_1^0$  que describe la orientación del sistema  $\{1\}$  respecto a  $\{0\}$  está dada por:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Entonces:** 

$$\mathbf{Q}^0 = R_1^0 \mathbf{Q}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

En este caso en particular se puede determinar la validez de lo anterior mediante inspección.

### 3.2.2 Parametrización de las rotaciones

Los nueve elementos  $r_{ij}$  de la matriz de rotación R no son cantidades independientes, dadas las propiedades particulares de la matrices en SO(3). Es más, se sabe que para representar la orientación de un sólido rigido en el espacio se requieren al menos tres cantidades independientes. Esto se puede deducir facilmente si se tiene en cuenta que:

$$\sum r_{ij}^2 = 1 \qquad ; \qquad j \in \{1, 2, 3\} \tag{3.1}$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0$$
 ;  $i \neq j$  (3.2)

Donde la ecuación 3.1 implica que todos los vectores columnas de *R* son unitarios y la ecuación 3.2 refiere al hecho que todas las columnas de *R* son mutuamente ortogonales. De estas condiciones se desprende el hecho que existen seis ecuaciones independientes con nueve incógnitas, que implica tres variables libres.

# 3.2.3 Ángulos de Euler

Un método común para especificar una matriz de rotación en términos de tres cantidades independientes son los llamados **ángulos de Euler**, que básicamente consiste en realizar tres rotaciones sucesivas alrededor de ciertos ejes determinados. Evidentemente existen varias combinaciones de ejes respecto a los cuales girar que darían una representación conveniente de la orientación, pero aquí se revisarán algunos casos particulares y de uso común dentro de la robótica.

## Ángulos ZXZ

En este caso, a partir de un sistema original se puede obtener cualesquiera otro en cualesquiera orientación mediante tres rotaciones sucesivas alrededor del sistema local (móvil), a saber:

- 1. Una rotación  $\phi$  alrededor del eje z
- 2. Una rotación  $\theta$  alrededor del eje x
- 3. Una rotación  $\psi$  alrededor del eje z

Lo cual conduce a:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} -s\phi s\psi c\theta + c\phi c\psi & -s\phi c\psi c\theta - s\psi c\phi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + s\psi c\phi c\theta & -s\phi s\psi + c\phi c\psi c\theta & -s\theta c\phi \\ s\psi s\theta & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$
(3.3)

Evidentemente calcular la matriz de rotación correspondiente a un conjunto de ángulos de Euler es una tarea realizable sin problemas puesto que implica únicamente multiplicaciones matriciales en el orden indicado. Un problema de corte menos trivial es que a partir de una matriz de rotación cualesquiera R se obtenga el conjunto de ángulos de Euler equivalentes de tal forma que:

$$R = R_{ZXZ} \tag{3.4}$$

donde:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Siendo *R*, naturalmente, una matriz cuyos valores son todos conocidos. Para resolver este problema se considerarán tres casos.

### Caso I

Si  $r_{13}$  y  $r_{23}$  no son ambas cero, de acuerdo a 3.4 implica necesariamente que  $s\theta \neq 0$ , y consecuentemente que  $r_{13}$  y  $r_{23}$  no son ambas cero. Lo anterior conduce a que  $r_{33} \neq \pm 1$ , entonces  $c\theta = r_{33}$  y  $s\theta = \pm \sqrt{1 - r_{33}^2}$ , lo cual implica dos posibles soluciones para  $\theta$ :

$$\theta = \arctan 2\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \tag{3.5}$$

$$\theta = \arctan 2\left(-\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \tag{3.6}$$

Si se toma la solución para  $\theta$  dada por 3.5, entonces:

$$\phi = \arctan 2(r_{13}, -r_{23})$$
 $\psi = \arctan 2(r_{31}, r_{32})$ 

Si se toma la solución para  $\theta$  dada por 3.6, entonces:

$$\phi = \arctan 2 \left( -r_{13}, r_{23} \right)$$

$$\psi = \arctan 2\left(-r_{31}, -r_{32}\right)$$

#### Caso II

Si  $r_{13}=r_{23}=0$ , dado que R es ortogonal implica que  $r_{33}=\pm 1$  y  $r_{31}=r_{32}=0$ , entonces R tendrá la forma:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Si  $r_{33}=1$  entonces,  $\cos\theta=1$  y  $\sin\theta=0$ , lo cual implica necesariamente que  $\theta=0^\circ$ . De lo anterior se tiene:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) & 0\\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi + \psi = \arctan2(r_{21}, r_{11})$$

Lo anterior implica una cantidad infinita de soluciones. Por convención se asume  $\phi = 0^{\circ}$  y entonces:

$$\psi = \arctan 2(r_{21}, r_{11})$$

#### Caso III

De manera similar al caso anterior, si  $r_{33} = -1$  entonces,  $\cos \theta = -1$  y  $\sin \theta = 0$ , lo cual implica necesariamente que  $\theta = 180^\circ$ . De lo anterior se tiene:

$$R_{ZXZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi - \psi) & \sin(\phi - \psi) & 0\\ \sin(\phi - \psi) & -\cos(\phi - \psi) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi - \psi = \arctan 2(r_{21}, r_{11})$$

Lo anterior implica una cantidad infinita de soluciones. Por convención se asume  $\phi=0^\circ$  y entonces:

$$\psi = -\arctan2(r_{21}, r_{11})$$

## **☞** Ejemplo 3.2.2 Ángulos de Euler

Para la siguiente matriz de rotación, calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalente.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

## Solución:

Dado que  $r_{33} \neq \pm 1$  podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el primer caso, es decir:

$$\theta = \arctan 2\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) = \arctan 2\left(\sqrt{1 - 0^2}, 0\right) = 90^{\circ}$$

$$\phi = \arctan2(r_{13}, -r_{23}) = \arctan2(1, 0) = 90^{\circ}$$

$$\psi = \arctan 2(r_{31}, r_{32}) = \arctan 2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -30^{\circ}$$

## **E** Ejemplo 3.2.3 Ángulos de Euler

Para la siguiente matriz de rotación, calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalente.

$$R = \begin{bmatrix} 0.9397 & -0.342 & 0 \\ 0.342 & 0.9397 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

#### Solución:

Dado que  $r_{33}=1$  podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el segundo caso, es decir:

$$\phi = 0^{\circ}$$

$$\theta = 0^{\circ}$$

$$\psi = \arctan 2(0.342, 0.9397) = 20^{\circ}$$

Entonces, el conjunto de ángulos de Euler ZXZ equivalentes es

## **E** Ejemplo 3.2.4 Ángulos de Euler

Calcule los ángulos de Euler ZXZ que son equivalentes a la matriz de rotación que resulta de la siguiente secuencia de rotaciones alrededor de los ejes móviles: una rotación de 60° alrededor del eje z seguida de una rotación de 135° alrededor del eje y.

#### Solución:

Para resolver este problema lo primero que debemos hacer es calcular la matriz de rotación que

resulta de efectuar las dos operaciones indicadas, para ello multiplicamos las matrices de rotación en el orden correspondiente, es decir:

$$R = R_{z,60^{\circ}} R_{y,135^{\circ}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4}\\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Dado que  $r_{33} \neq \pm 1$  podemos utilizar el conjunto de ecuaciones para el primer caso, es decir:

$$\theta = \arctan 2\left(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) = \arctan 2\left(\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^{\circ}$$

$$\phi = \arctan 2\left(r_{13}, -r_{23}\right) = \arctan 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 150^{\circ}$$

$$\psi = \arctan 2\left(r_{31}, r_{32}\right) = \arctan 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 270^{\circ}$$

# 3.3 Matrices de transformación homogénea

En las secciones anteriores se ha visto cómo representar la posición y orientación, de forma separada; en esta sección se combinarán ambos conceptos para definir el movimiento de sólido rígido. Un movimiento de sólido rígido es un par ordenado (d,R) donde  $d \in \mathbb{R}^3$  y  $R \in SO(3)$ . El grupo de todos los movimientos de sólido rígido se conocen como el Grupo Euclidiano Especial, denotado por SE(3). Recordar que un movimiento de sólido rígido puede interpretarse como una traslación pura combinada con una rotación pura.

En la figura 3.6 podemos observar un sistema de referencia móvil  $\{1\}$  adherido a un sólido rígido y un sistema de referencia  $\{0\}$  fijo, es sencillo identificar que además de la orientación hay también una variación en la posición de los sistemas de referencia. Un punto P adherido al sólido rígido se puede describir en el sistema de referencia  $\{1\}$  mediante el vector de posición  $\mathbf{P}^1$  mostrado, además, la posición del origen del sistema de referencia  $\{1\}$  se puede describir en  $\{0\}$  mediante el vector  $\mathbf{d}_1^0$ , si quisiéramos determinar la posición de P en  $\{0\}$  entonces podríamos hacerlo de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}^0 = R_1^0 \mathbf{P}^1 + \mathbf{d}_1^0 \tag{3.7}$$

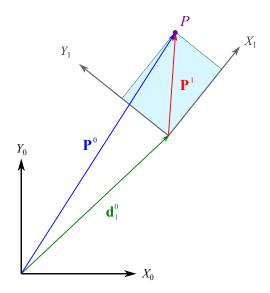


Figura 3.6 Movimiento de sólido rígido

Lo cual podríamos verlo como una suma de vectores (ley del triángulo), sin embargo, es importante recordar que no es posible sumar *directamente* dos vectores que están definidos con respecto a sistemas de referencia con diferente orientación. De tal modo que se debe expresar primeramente a  $\mathbf{P}^1$  en un sistema paralelo a  $\{0\}$ , lo cual se logra con la multiplicación correspondiente por la matriz de rotación:  $R_1^0\mathbf{P}^1$ , para poder sumarlo a  $\mathbf{d}_1^0$ . Aquí,  $R_1^0$  corresponde a la matriz de rotación que describe la orientación del sistema  $\{1\}$  con respecto a  $\{0\}$ .

Supongamos ahora que tenemos tres sistemas de referencia:  $\{0\}$ ,  $\{1\}$  y  $\{2\}$ , donde ahora el punto P pertenece al sólido que tiene adherido el sistema  $\{2\}$  tal como se muestra en la Figura 3.7. De forma análoga al caso anterior podemos establecer que las coordenadas de P descritas en el sistema  $\{1\}$  están dadas por:

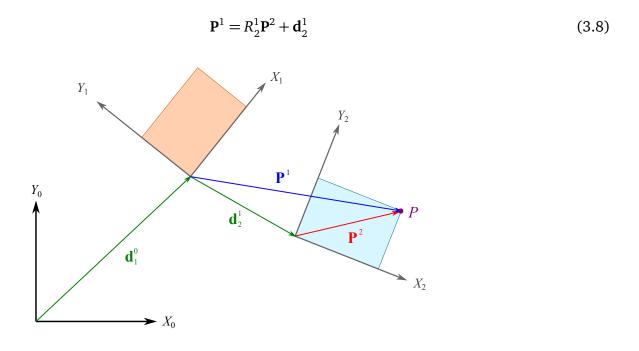


Figura 3.7 Movimiento de sólido rígido

De la Figura 3.8 podemos observar que la descripción de las coordenadas de P en el sistema  $\{0\}$  está dada por:

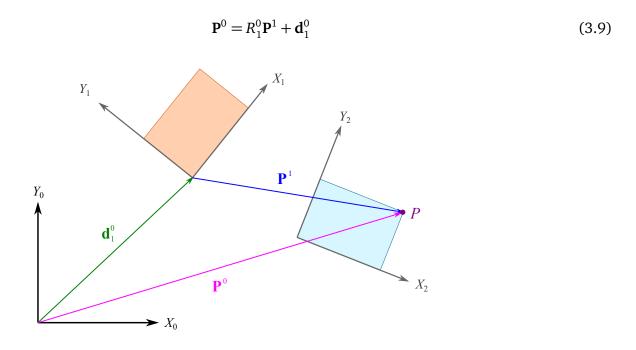


Figura 3.8 Movimiento de sólido rígido

Si sustituimos la ecuación 3.8 en la 3.9 se tiene que:

$$\mathbf{P}^{0} = R_{1}^{0} \left( R_{2}^{1} \mathbf{P}^{2} + \mathbf{d}_{2}^{1} \right) + \mathbf{d}_{1}^{0}$$
$$\mathbf{P}^{0} = R_{1}^{0} R_{2}^{1} \mathbf{P}^{2} + R_{1}^{0} \mathbf{d}_{2}^{1} + \mathbf{d}_{1}^{0}$$

De acuerdo a lo que sabemos acerca de la composición de matrices de rotación:

$$R_1^0 R_2^1 = R_2^0$$

Además, tal como se observa en la Figura 3.9:

$$R_1^0 \mathbf{d}_2^1 + \mathbf{d}_1^0 = \mathbf{d}_2^0$$

Donde  $\mathbf{d}_2^0$  denota al vector de posición que describe el origen de coordenadas del sistema  $\{2\}$  en el sistema  $\{0\}$ .

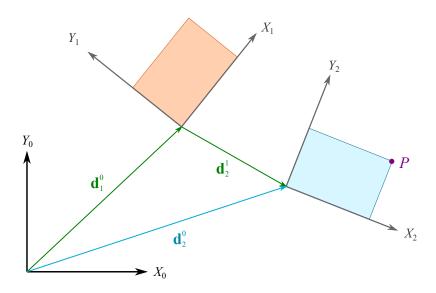


Figura 3.9 Movimiento de sólido rígido

Así, la descripción de las coordenadas de P en  $\{0\}$  se pueden escribir como:

$$\mathbf{P}^0 = R_2^0 \mathbf{P}^2 + \mathbf{d}_2^0 \tag{3.10}$$

De esto podemos inferir que las transformaciones de orientación implicadas se pueden calcular simplemente multiplicando las matrices de rotación que describen las relaciones entre los sistemas de referencia, y que las transformaciones de posición se pueden obtener sumando los vectores de posición del origen de coordenadas de cada sistema de referencia involucrado con respecto al inmediatamente anterior, claramente siendo estos vectores siempre expresados en la misma orientación del sistema  $\{0\}$ , para que la suma vectorial pueda efectuarse adecuadamente.

En este punto es notorio que si procedemos de la forma previamente descrita, en cuanto comencemos a involucrar un conjunto de sistemas de referencia un poco más amplio la cantidad de operaciones y expresiones a manejar se volverá cuando menos lo suficientemente tediosa. Por fortuna, los movimientos de sólido rígido pueden ser representados en forma matricial de tal manera que una secuencia de movimientos se reduzca a una multiplicación de matrices como en el caso de las rotaciones, así, la última transformación abordada podría expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Donde  $\mathbf{0} = [0,0,0]$ . Luego entonces, un movimiento de sólido rígido puede ser representado por un conjunto de matrices de  $4 \times 4$  de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad R \in SO(3) \quad d \in \mathbb{R}^3$$

Las matrices de transformación que tienen esta forma son llamadas **matrices de transformación homogénea**, y nos permiten conjuntar la información de posición y orientación en una misma entidad.

Con la finalidad de poder expresar y realizar las operaciones de transformación, a cada vector que representa una posición en el espacio se le debe adicionar una componente unitaria como sigue:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde u, v y w son las componentes espaciales del vector  $\mathbf{P}^0$ . La forma anterior del vector es una representación en coordenadas homogéneas del mismo.

Las transformación dada por las ecuación 3.7 se puede escribir utilizando matrices de transformación homogénea de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}^0 = H_1^0 \mathbf{P}^1$$

## 3.3.1 Matrices de transformación homogéneas básicas

Un conjunto básico de matrices de transformación homogénea que representan movimientos básicos de traslación y rotación alrededor de los ejes x, y, z está dado por:

$$D_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 3.3.2 Composición de las matrices de transformación homogénea

Las reglas para la composición de las matrices de transformación homogénea son similares al caso de las rotaciones. A continuación, se describen algunos casos particulares.

#### Secuencia de traslaciones

Cuando las transformaciones son sólo traslaciones en realidad en el resultado final no influye el orden de las mismas, y consecuentemente el orden de acomodo de las matrices no es restrictivo, naturalmente se prefiere escribirlas en el orden que son dadas de acuerdo a si son realizadas con respecto a un sistema fijo o móvil. Por ejemplo suponga que un sistema  $\{B\}$  se obtiene del sistema  $\{A\}$  mediante una traslación a en a0, seguida de una traslación a2 en a3, la matriz de transformación homogénea que representa dichas operaciones está dada por:

$$T_{B}^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtendría el mismo resultado si cualquiera de las matrices se coloca en otra posición.

#### Secuencia de rotaciones

La composición de matrices de transformación homogénea que representan rotaciones siguen exactamente la misma regla dada para las matrices de rotación, se colocan de izquierda a derecha (postmultplicando) en el orden que son efectuadas cuando se realizan con respecto al sistema móvil y se premultiplican cuando son realizadas con respecto a un sistema fijo.

## Secuencia de traslaciones y rotaciones

Cuando se tiene un conjunto tanto de traslaciones como rotaciones la composición suele ser el mismo caso que con las matrices de rotación, es decir:

- 1. Si las transformaciones son realizadas con respecto a un sistema móvil, entonces hay que escribir las matrices implicadas de izquierda a derecha.
- 2. Si las transformaciones son realizadas con respecto a un sistema fijo, entonces hay que escribir las matrices implicadas de derecha a izquierda.

Por ejemplo suponga que debe realizar la siguiente secuencia de transformaciones alrededor de los ejes móviles:

- 1. Rotación  $\alpha$  alrededor del eje x
- 2. Traslación a en z
- 3. Traslación b en x
- 4. Rotación  $\beta$  alrededor del eje y
- 5. Traslación c en y

Entonces el producto matricial que describe la transformación total está dado por:

$$T = R_{\alpha,x} D_{z,a} D_{x,b} R_{y,\beta} D_{y,c}$$

Si esa misma secuencia de transformaciones se realizara con respecto a los ejes de un sistema fijo, entonces la matriz de transformación homogénea resultante estaría dada por:

$$T = D_{y,c} R_{y,\beta} D_{x,b} D_{z,a} R_{x,\alpha}$$

## 3.3.3 Traslación

En la figura 3.10 se observa un sistema  $\{1\}$  que ha sido obtenido mediante una traslación de 3 unidades en x y 5 unidades en y. Así, la matriz de transformación homogénea que representa la descripción de dicho sistema está dada por:

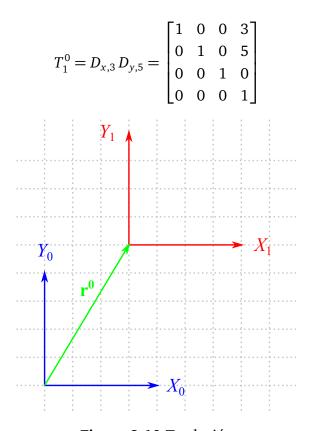


Figura 3.10 Traslación

#### 3.3.4 Rotación

El esquema de la figura 3.11 muestra un sistema  $\{1\}$  obtenido de  $\{0\}$  mediante una rotación alrededor de z de 30°. La matriz de transformación homogénea que describe dicha transformación es la básica de rotación alrededor de z, sustituyendo, claro está, el valor correspondiente del ángulo, de esa manera:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

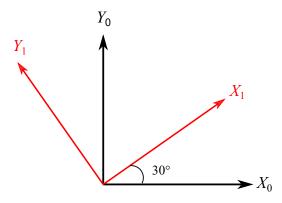


Figura 3.11 Rotación

## 3.3.5 Rotación y traslación

En la figura 3.12 se observa un sistema  $\{1\}$  que puede obtenerse de  $\{0\}$  mediante una serie de traslaciones y rotaciones. De manera específica, utilizando los ejes locales, se pueden trasladar 4 unidades en x y en y, y posteriormente una rotación alrededor de z de  $45^\circ$ , estas transformaciones se pueden expresar en forma de un producto matricial como sigue:

$$T_1^0 = D_{x,4} D_{y,4} R_{z,45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 4.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

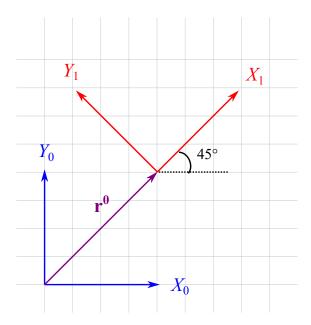


Figura 3.12 Traslación y rotación

## **☑** Ejemplo 3.3.1 Una barra en rotación pura

En la figura 3.13 se observa una barra en rotación pura, la cual tiene adherido en su extremo un sistema local  $\{1\}$  y un sistema fijo  $\{0\}$  en su base. El sistema  $\{1\}$  está definido de tal manera que el eje  $X_1$  apunta en la dirección de la línea que va desde el centro de rotación hasta su extremo.

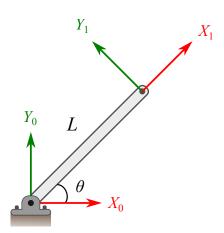


Figura 3.13 Una barra en rotación pura

Se observa que el sistema {1} se puede obtener de {0} mediante una serie de traslaciones y rotaciones. Por ejemplo, si las transformaciones se hacen respecto a un sistema móvil, entonces una secuencia posible sería la siguiente:

- 1. Traslación en x de  $L \cos \theta$
- 2. Traslación en y de  $L\sin\theta$
- 3. Rotación alrededor de z un ángulo  $\theta$

Lo cual conduce a:

$$T_{1}^{0} = D_{x,L\cos\theta} D_{y,L\sin\theta} R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L\cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & L\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero claro está que no es la única manera, si se ejecuta la siguiente secuencia alrededor de los ejes locales:

- 1. Rotación alrededor de z un ángulo  $\theta$ .
- 2. Traslación en x de L.

Se tiene:

$$T_1^0 = R_{z,\theta} D_{x,L} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & L\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & L\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual conduce en efecto a la misma descripción obtenida con anterioridad. De igual manera se pueden establecer transformaciones con respecto a los ejes fijos que produzcan el mismo resultado.

## **E**jemplo 3.3.2 Múltiples sistemas de referencia

En la figura 3.14 se observa una placa plana rectangular de las dimensiones indicadas en cuyas esquinas se adjuntan sistemas de referencia. A continuación se describen diversas relaciones entre los diversos sistemas y la forma de proceder para calcularlas. Todas las transformaciones se realizarán con respecto a los ejes móviles.

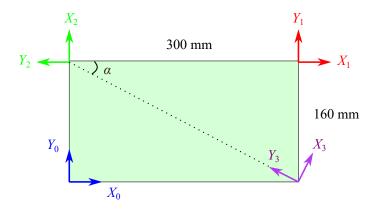


Figura 3.14 Una placa plana con múltiples sistemas de referencia

#### Descripción de {1} con respecto a {0}

Como se observa en la figura 3.14 el sistema  $\{1\}$  está trasladado 30 mm en x y 160 mm en la dirección de y, luego el producto matricial que proporciona la matriz de transformación total está dado por:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz resultante concuerda con lo esquematizado,  $T_1^0$  indica que el sistema {1} está en las coordenadas (300,160) y en la misma orientación con respecto a {0}.

#### Descripción de {2} con respecto a {1}

De acuerdo a lo mostrado en la figura 3.14 el sistema  $\{2\}$  puede obtenerse a partir de  $\{1\}$  mediante una traslación de 300 mm en la dirección negativa de x y enseguida una rotación de 90° alrededor de z. Con lo anterior se tiene:

$$T_2^1 = D_{x,-300} R_{z,90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que de acuerdo a  $T_2^1$  el eje  $X_2$  apunta en la dirección positiva del eje  $Y_1$ , y que el eje  $Y_2$  apunta en la dirección negativa del eje  $X_1$ , lo cual concuerda con el esquema de referencia. Es más, la posición del origen de  $\{2\}$  respecto a  $\{1\}$  es (-300,0), misma que puede corroborarse en la figura 3.14.

### Descripción de {2} con respecto a {0}

Como se observa en la figura 3.14 el sistema  $\{2\}$  puede obtenerse de  $\{0\}$  mediante una traslación de 160 mm en la dirección de y, y una posterior rotación de 90° alrededor de z.

$$T_2^0 = D_{y,160} R_{z,90} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz  $T_2^0$  también puede obtenerse mediante la composición de matrices de transformación, bajo la consideración de que previamente se han calculado  $T_1^0$  y  $T_2^1$ , así:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Descripción de {3} con respecto a {2}

De la figura 3.14 se puede identificar que  $\{3\}$  se puede obtener de  $\{2\}$  mediante una rotación horaria de un ángulo  $\alpha$  en la dirección de z, seguida de una traslación de  $d_r$  en la dirección negativa de y, siendo  $d_r$  la longitud de la diagonal del rectángulo, entonces se tiene:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{160}{300}\right) = 28.07^{\circ}$$
;  $d_r = \sqrt{160^2 + 300^2} = 340 \text{ mm}$ 

$$T_3^2 = R_{z,-\alpha} D_{y,-d_r} = \begin{bmatrix} 0.8824 & 0.4706 & 0 & 0 \\ -0.4706 & 0.8824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -340 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 0.8824 & 0.4706 & 0 & -160.0 \\ -0.4706 & 0.8824 & 0 & -300.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Como es de suponer, además de las series de transformaciones descritas en los puntos anteriores, existen una cantidad considerable de posibles secuencias de transformaciones. Por lo anterior, usualmente en cinemática de manipuladores se establecen ciertos criterios para el establecimiento de los sistemas de referencia así como de las transformaciones a realizar, esto es algo que se verá en el siguiente capítulo.

3.4. PROBLEMAS 39

### 3.4 Problemas

1. El sistema de referencia {B} está trasladado 5 unidades en X, 4 unidades en Y y -10 unidades en Z con respecto al sistema {A}. Se sabe que las coordenadas de un punto P descritas en el sistema {B} son  $\mathbf{P}^B = [2, 3, -5]^T$ , calcule  $\mathbf{P}^A$ .

- 2. Muestre que la distancia entre dos puntos no cambia con la rotación, es decir, que  $\|\mathbf{p_1} \mathbf{p_2}\| = \|R\mathbf{p_1} R\mathbf{p_2}\|$ . Donde R es una matriz de rotación y  $\mathbf{p_1}$  y  $\mathbf{p_2}$  dos vectores de posición.
- 3. Un vector  $\mathbf{P} = [0, 10, 0]^T$  se rota alrededor del eje x un ángulo de 90° y enseguida se rota alrededor del eje y un ángulo de 180°, determine las componentes del vector transformado. Esquematice el vector inicial y el transformado.
- 4. Muestre que la rotación efectuada a un vector no altera su magnitud, es decir que  $\|\mathbf{p}\| = \|R\mathbf{p}\|$ , donde R es una matriz de rotación cualesquiera.
- 5. En la figura se muestra un cuerpo rígido en forma cúbica, con algunos sistemas de referencia adheridos tal como se esquematiza. Calcule las matrices de transformación homogénea  $T_1^0$ ,  $T_2^1$ ,  $T_2^0$  y  $T_0^2$ . Considere que las aristas del cubo miden 100 mm.

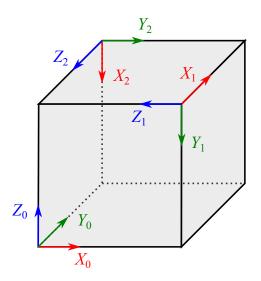


Figura 3.15

- 6. En la figura se muestra un cuerpo rígido con forma de cubo y cuyas aristas miden 200 mm. Al sólido se le adhiere un sistema móvil {1} que inicialmente coincide con el sistema fijo {0} . Calcule lo siguiente:
  - *a*) Las coordenadas del punto Q después de una rotación de 30° alrededor del eje  $X_0$ , seguida por una rotación de 225° alrededor del eje  $Y_1$ .
  - b) Las coordenadas del punto Q después de una rotación de 45° alrededor del eje  $Y_1$ , seguida por una rotación de 60° alrededor del eje  $Z_0$ .
  - c) Las coordenadas del punto Q después de la rotación de 135° alrededor del eje  $Z_0$ , seguida por

una rotación de 90° alrededor del eje  $X_1$  y posteriormente una rotación de 60° alrededor del eje  $X_0$ .

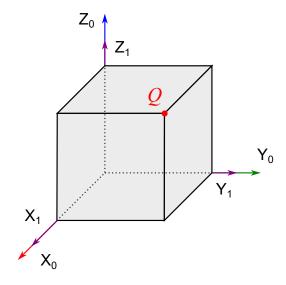


Figura 3.16

7. Suponga que tres sistemas de referencia {A}, {B} y {C} están dados y que además:

$$R_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad R_C^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule  $R_{\scriptscriptstyle B}^{\scriptscriptstyle C}$ .

- 8. La siguiente matriz de rotación corresponde a una secuencia de rotaciones alrededor de un sistema móvil:
  - a) Un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje x
  - b) Un ángulo  $\beta$ alrededor del eje y
  - c) Un ángulo  $\gamma$  alrededor del eje z

Calcule  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{6}}{8} & \frac{\sqrt{6}}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{5\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

9. Muestre que para una matriz de rotación se cumple la propiedad  $R^{-1} = R^T$ . Utilice la matriz de rotación alrededor de x para comprobarlo. Suponga un ángulo  $\theta$  de rotación y proceda mediante un método convencional para el cálculo de la matriz inversa y compare con lo obtenido transponiendo la matriz de rotación.

3.4. PROBLEMAS 41

- 10. Calcule la matriz de rotación correspondiente al conjunto de ángulos de Euler ZXZ  $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{9}\}$ .
- 11. Calcule la matriz de rotación correspondiente al conjunto de ángulos de Euler ZYZ.
- 12. El sistema de referencia  $\{B\}$  se obtiene a partir del  $\{A\}$  mediante una secuencia de rotaciones, a saber:
  - a) 45° alrededor del eje z móvil
  - b)  $30^{\circ}$  alrededor del eje x fijo
  - c) 135° alrededor del eje y móvil
  - d) 60° alrededor del eje z fijo

Calcule el conjunto de ángulos de Euler ZXZ que describe la orientación de  $\{B\}$  con respecto de  $\{A\}$ .

- 13. El sistema {C} se obtiene a partir de un sistema {B} mediante las siguientes transformaciones: una traslación de 3 unidades a lo largo del eje *x* seguida por una rotación de 90° alrededor del eje *z* actual seguida por una traslación de 1 unidad a lo largo del eje *y* fijo. Calcule la matriz de transformación que describe la posición y orientación de {C} con respecto de {B}.
- 14. La siguiente matriz de transformación homogénea se obtiene de realizar las siguientes transformaciones respecto a un sistema móvil: una rotación alrededor de *z* seguida por una traslación en el plano *x y*.

$$T = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 3.536 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 10.61 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Determine el ángulo que se ha rotado, así como las componentes de traslación correspondientes.

- 15. Se tiene un triángulo rectángulo definido por los puntos *A*, *B* y *C*, al cual se adhiere un sistema de referencia móvil {1} que inicialmente coincide con el sistema fijo {0} (ver figura 3.17). Considerando que se aplican las siguientes transformaciones alrededor de los ejes locales:
  - a) Una traslación de 10 unidades en la dirección x
  - b) Una rotación de 180° alrededor de z
  - c) Una traslación de -5 unidades en la dirección de y
  - d) Una rotación de 90° alrededor z.

Calcule la matriz de transformación homogénea correspondiente y las coordenadas de los puntos que definen el triángulo con respecto al sistema fijo, esquematizando también las posiciones inicial y transformada. Las coordenadas *A*, *B* y *C* en el sistema {1} son:

$$\mathbf{A}^{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

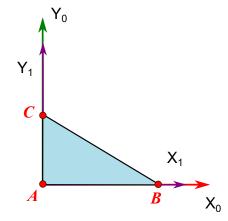


Figura 3.17

16. Sea *H* una matriz de transformación homogénea de la forma:

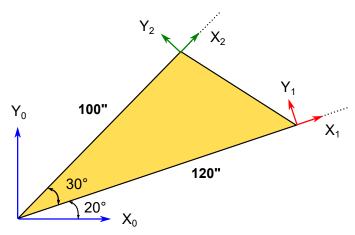
$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces su inversa viene dada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Compruebe lo anterior utilizando un ejemplo demostrativo.

17. Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule:  $T_1^0, T_2^0, T_2^1, T_0^1$ .



3.4. PROBLEMAS 43

Figura 3.18

18. Para el conjunto de sistemas de referencia mostrados en la figura calcule:  $T_1^0, T_2^0, T_2^1, T_3^2$  y  $T_3^0$ .

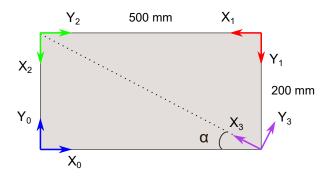


Figura 3.19

19. En la figura 3.20 se muestra un manipulador planar RR con tres sistemas adheridos a cada eslabón que lo conforma, incluyendo la base, alineados de tal forma que el eje x coincide con la dirección axial del eslabón y con el origen ubicado en el extremo. Si se sabe que la matriz de transformación que describe  $\{2\}$  en  $\{0\}$  está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule las coordenadas del extremo del manipulador si  $\theta_1=30^\circ$  y  $\theta_2=-30^\circ$ . Considere que  $L_1=200$  mm y  $L_2=200$  mm.

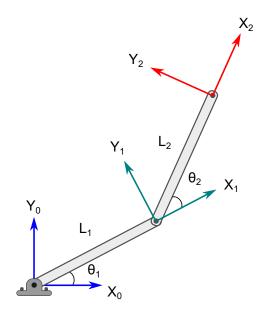


Figura 3.20

20. Un cuerpo rígido está posicionado y orientado de acuerdo a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -300 \\ 250 \\ 90^{\circ} \\ 30^{\circ} \\ 120^{\circ} \end{bmatrix}$$

Calcule matriz de transformación homogénea que describe la ubicación de dicho cuerpo rígido.

21. Para los sistemas de referencia mostrados en la figura 3.21, calcule  $T_A^B$ ,  $T_C^B$ ,  $T_D^C$  y  $T_A^D$ .

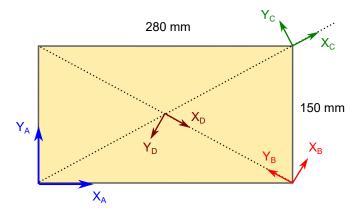


Figura 3.21

22. En la figura 3.22 se muestra el esquema de un manipulador planar RRR que deberá realizar operacio-

3.4. PROBLEMAS 45

nes de soldadura a lo largo de la trayectoria compuesta esquematizada mediante la línea discontinua. Los puntos A y B denotan el inicio y fin de la trayectoria, y el elemento terminal del manipulador deberá alcanzar estos puntos con la orientación dada por los sistemas {A} y {B}. Para un instante determinado se conoce la relación existente entre {A} y los sistemas de la herramienta {T} y la base {W}:

$$T_A^W = \begin{bmatrix} 0.707107 & -0.707107 & 0 & 300.0 \\ 0.707107 & 0.707107 & 0 & 150.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$
 
$$T_A^T = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.866025 & 0 & 250.694 \\ 0.866025 & -0.5 & 0 & -30.4602 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Calcule las matrices de transformación  $T_B^A$ ,  $T_B^W$ ,  $T_B^T$  y  $T_T^W$ .

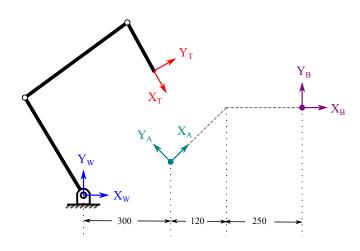


Figura 3.22

23. En la figura 3.23 se muestra un conjunto de objetos {1}, {2} y {3} que deberán ser manipulados por un brazo robótico cuyo sistema base {0} se ubica como se ilustra. Calcule la posición y orientación de cada objeto con respecto a la base, considere que los objetos son de dimensiones (20x20x20) mm.

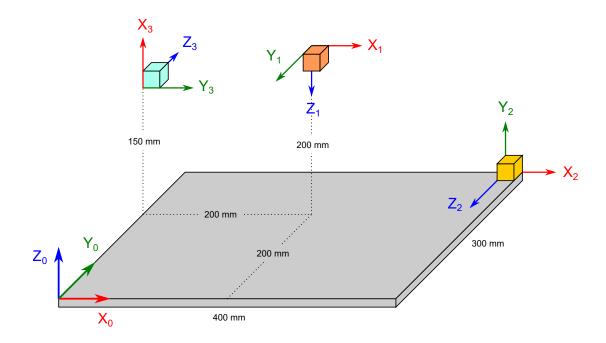


Figura 3.23

- 24. En la figura 3.24 se muestran dos cuerpos rígidos móviles en forma cúbica, de dimensiones (20x20x20) mm, a los cuales se adhieren los sistemas de referencia {B} y {C}. Realice lo siguiente:
  - a) Calcule las matrices de transformación  $T_B^A$ ,  $T_C^A$  y  $T_C^B$ . 15
  - b) Calcule los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {B} con respecto de {A} y de {C} con respecto de {A}.

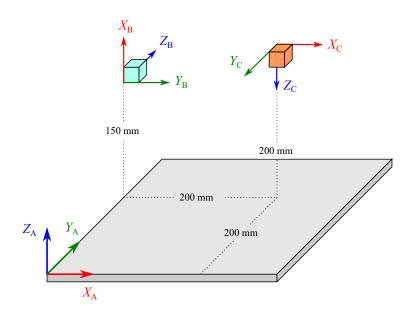


Figura 3.24

25. En la figura 3.25 se muestra el esquema de un pequeño manipulador planar PPR que deberá manipular algunos objetos cuya posición y orientación está indicada mediantes los sistemas de referencia

3.4. PROBLEMAS 47

{A} y {B}. Para un instante determinado en que  $\theta_3=130^\circ$  se conoce la siguiente información:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 140.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 125.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^3 = \begin{bmatrix} 0.965926 & 0.258819 & 0 & -69.2651 \\ -0.258819 & 0.965926 & 0 & -115.304 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

#### Calcule lo siguiente:

- a) Las matriz de transformación  $T_3^0$  que describe la posición y orientación del extremo con respecto a la base.
- b) Las matrices de transformación  $T_A^0$ ,  $T_B^A$  y  $T_B^0$ .
- c) Los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {3} con respecto al {0}.

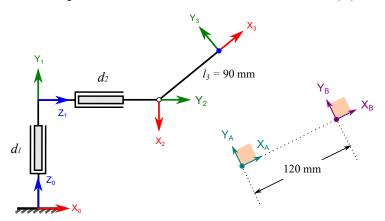


Figura 3.25

26. En la figura 3.26 se muestra el esquema de un pequeño manipulador planar PRR que deberá manipular algunos objetos cuya posición y orientación está indicada mediantes los sistemas de referencia  $\{A\}$  y  $\{B\}$ . Para un instante determinado en que  $\theta_3 = 47^\circ$  se conoce la siguiente información:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} 0.956305 & -0.292372 & 0 & 143.446 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0.292372 & 0.956305 & 0 & 143.856 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T_A^3 = \begin{bmatrix} -0.62932 & 0.777146 & 0 & -226.414 \\ -0.777146 & -0.62932 & 0 & -118.938 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

### Calcule lo siguiente:

- a) Las matriz de transformación  $T_3^{\,0}$  que describe la posición y orientación del extremo con respecto a la base.
- b) Las matrices de transformación  $T_A^0$ ,  $T_B^A$  y  $T_B^0$ . c) Los ángulos de Euler ZXZ que describen la orientación del sistema {B} con respecto al {0}.

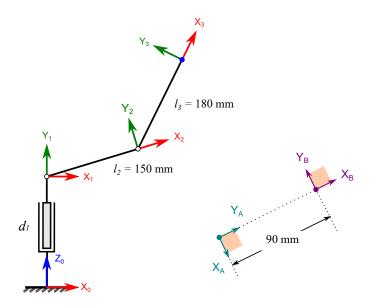


Figura 3.26

## 3.5 Problemas de computadora

Los siguientes problemas de computadora deberán resolverse utilizando Python o MATLAB como lenguajes de programación. Para cada problema se debe describir de manera adecuada la metodología seguida para resolverlo.

- 1. Programe una sub-rutina/función que le devuelva las matrices de transformación homogénea para rotación. Los argumentos de entrada deberán ser el eje de rotación y el ángulo a rotar. La función debe calcular matrices en tanto en forma numérica como simbólica.
- 2. Programe una función que calcule los ángulos de Euler ZYZ dado como argumento de entrada una matriz de rotación.
- 3. En la figura 3.20 se muestra un manipulador planar de 2 GDL con sistemas de referencia adheridos a sus eslabones. Se sabe que la matriz de transformación que describe el sistema de referencia del extremo con respecto a la base está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrolle un programa de computadora que calcule la posición del extremo del manipulador para cualesquiera combinación de valores articulares ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) proporcionados. Asuma que  $L_1 = L_2 = 120$  mm.

- 4. Considere un triángulo equilátero de lados unitarios, al cual se le adhiere un sistema de referencia móvil *uvw*. El origen del sistema móvil se encuentra en el centroide del triángulo e inicialmente coincide con el origen del sistema global *XYZ*, además el eje *v* apunta en la dirección de uno de sus vértices. Desarrolle un programa que le permita calcular las coordenadas globales de los vértices cuando se efectua una rotación alrededor del eje *w*. También deberá mostrarse de forma gráfica la posición inicial y la transformada.
- 5. Se tiene un sólido con forma de pirámide triangular cuyos vértices se ubican en los puntos (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) respecto a un sistema local *uvw* adherido al sólido, mismo que inicialmente coincide con el marco de referencia global *XYZ*. Desarrolle un programa de computadora que calcule las coordenadas de los vértices respecto al sistema global cuando se han efectuado las siguientes transformaciones: rotación de 45° respecto al eje *u*, 30° respecto al eje *Y*, 60° respecto a *w*, traslación de 5 unidades en la dirección de *u* y 4 unidades en dirección de *w*, y que además represente de manera gráfica las posiciones inicial y transformada del sólido.
- 6. La representación **eje y ángulo** es un método para indicar la orientación de un sólido mediante un eje de rotación que no necesariamente corresponde con los principales y un ángulo determinado.

Desarrolle una función que calcule la representación eje y ángulo correspondiente a una matriz de rotación proporcionada.

# Cinemática directa

### 4.1 Introducción

La cinemática directa de manipuladores consiste en determinar la posición y orientación del extremo de un manipulador conocidos sus valores articulares. En general suele ser un problema bastante *abordable* dado que se sigue una cierta metodología para establecer sistemas de referencia y con base a esto formar matrices de transformación que proporcionan las relaciones entre los mismos.

En la Figura 4.1 se muestra un esquema que representa el papel de la cinemática directa e inversa como herramientas para relacionar el espacio cartesiano (asociado con posiciones y orientaciones del elemento terminal) con el espacio de articulaciones (asociado a la naturaleza del manipulador).

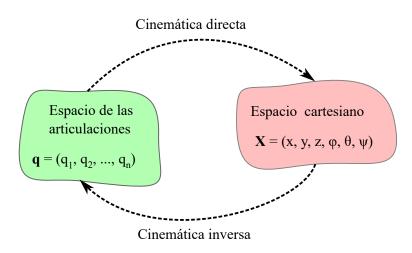


Figura 4.1 Cinemática directa e inversa

## 4.2 Sobre cadenas cinemáticas y transformaciones

Un robot manipulador está compuesto de un conjunto de eslabones interconectados mediante juntas (o pares cinemáticos). En general, un manipulador serial con n juntas tendrá n+1 eslabones, dado que cada junta (asumiendo que sean de 1 GDL) conecta dos eslabones.

Para identificar los componentes de un manipulador se numeran las juntas de 1 a n y los eslabones de 0 a n, comenzando desde el eslabón base (o referencia fija). Con esta convención, la articulación i conecta al eslabón i-1 con el eslabón i (ver Figura 4.2).

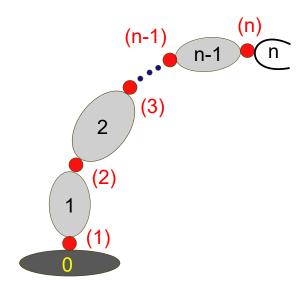


Figura 4.2 Cadena cinemática

Con cada una de las articulaciones se asocia una variable de articulación denotada mediante  $q_i$ . En el caso de una junta de revoluta  $q_i$  es el ángulo de rotación, y para un par prismático  $q_i$  es el desplazamiento de la junta.

Para realizar el análisis cinemático se adjunta rigidamente un sistema de referencia a cada eslabón. En particular, se adjunta el sistema  $\{i\}$  al eslabón i, esto implica que para cualquier movimiento que el robot realice las coordenadas de cada punto en el eslabón i son constantes cuando se expresan o describen respecto al i-ésimo sistema de referencia.

La descripción de posición y orientación de  $\{i\}$  en  $\{i-1\}$  se hace mediante una matriz de transformación  $A_i$ . Evidentemente la matriz  $A_i$  no es constante puesto que varía cuando lo hace la configuración del manipulador. Sin embargo, dado que cada articulación de los manipuladores a considerar, en este curso, serán a lo sumo de un grado de libertad entonces  $A_i$  es función de una sola variable de articulación  $q_i$ :

$$A_i = A_i(q_i)$$

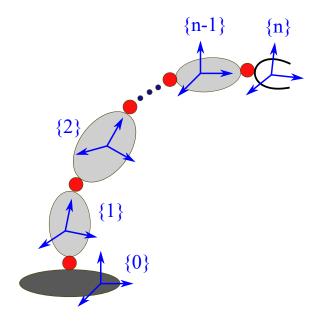


Figura 4.3 Cadena cinemática

Para un manipulador de *n* eslabones y bajo la consideración de que a cada eslabón de la cadena cinemática se le adjunta un sistema de referencia, la posición y orientación del elemento terminal se puede expresar como el producto matricial de todas las matrices de transformación individual que describen la totalidad del manipulador:

$$T_n^0 = A_1(q_1)A_2(q_2)...A_n(q_n)$$

De manera general, la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación del sistema  $\{j\}$  con respecto a  $\{i\}$  se denomina matriz de transformación y se denota mediante  $T_j^i$ . Una matriz de transformación  $T_j^i$  tiene la forma:

$$T_j^i = \begin{bmatrix} R_j^i & \mathbf{d}_j^i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.3 La metodología de Denavit-Hartenberg

En esta sección se establecerán una serie de convenciones que proporcionan un procedimiento sistemático para el desarrollo del análisis cinemático. La metodología de Denavit-Hartenberg (DH) es un procedimiento que permite establecer sistemas de referencia siguiendo algunas reglas básicas que permiten describir las matrices  $A_i$  mediante cuatro transformaciones básicas realizadas en un cierto orden a las cuales se asocian cuatro parámetros.

Está claro que existen multitud de posibilidades que proporcionarían una descripción de un sistema trans-

4. CINEMÁTICA DIRECTA

formado respecto a otro y sería posible realizar un análisis cinemático sin seguir la metodología a describir, sin embargo el análisis cinemático de un manipulador de n grados de libertad puede llegar a ser extremadamente complejo y sería inconveniente utilizar un procedimiento sin seguir ciertas convenciones.

En la metodología de Denavit-Hartenberg cada transformación  $A_i$  se representa como el producto de cuatro transformaciones básicas:

$$A_{i} = R_{z,\theta_{i}} D_{z,d_{i}} D_{x,a_{i}} R_{x,\alpha_{i}} = \begin{bmatrix} c\theta_{i} & -s\theta_{i} & 0 & 0 \\ s\theta_{i} & c\theta_{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i} & -s\alpha_{i} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i} & c\alpha_{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{i} & -s\theta_{i}c\alpha_{i} & s\theta_{i}s\alpha_{i} & a_{i}c\theta_{i} \\ s\theta_{i} & c\theta_{i}c\alpha_{i} & -c\theta_{i}s\alpha_{i} & a_{i}s\theta_{i} \\ 0 & s\alpha_{i} & c\alpha_{i} & d_{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.1)$$

Donde las cuatro cantidades  $\theta_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$  y  $\alpha_i$  son parámetros asociados con el eslabón y junta i.

Las cuatro transformaciones anteriores están asociadas a conjunto de reglas para establecer los sistemas de referencia, mismas que se describirán a continuación.

#### Establecer $z_i$

El eje  $z_i$  de cada sistema de referencia se debe colocar de tal manera que apunte en la dirección del eje de accionamiento de la junta i+1. Considerar que en el caso de una articulación de revoluta el eje de accionamiento será el eje sobre el cual se realiza la rotación y que en el caso de una articulación prismática el eje de accionamiento será la dirección de deslizamiento de la misma. De manera particular, el eje  $z_n$  (extremo del manipulador) deberá colocarse en la misma dirección que  $z_{n-1}$ .

#### El sistema {0}

Una vez se han establecido los ejes z para toda la cadena cinemática, se procede a establecer el sistema base 0. El origen  $o_0$  se coloca sobre cualquier punto en  $z_0$ . La dirección de  $x_0$  y  $y_0$  son arbitrarias y únicamente deben cumplir el hecho de formar un sistema coordenado derecho.

### Sistemas de referencia: de $\{i\}$ a $\{n-1\}$

Una vez se establecieron los ejes z y el sistema de referencia base se comienza un proceso iterativo para definir el sistema  $\{i\}$  a partir de  $\{i-1\}$ .

Con la finalidad de establecer el sistema de referencia  $\{i\}$  es necesario considerar tres casos:

- I)  $z_i$  y  $z_{i-1}$  no son coplanares.
- II)  $z_i$  y  $z_{i-1}$  son paralelos.
- III)  $z_i$  y  $z_{i-1}$  se intersecan.

4.4. EJEMPLOS 55

i.  $z_i$  y  $z_{i-1}$  no son coplanares. Si  $z_i$  y  $z_{i-1}$  no son coplanares entonces existe un único segmento de línea perpendicular a ambos ejes que los conecta y tiene longitud mínima. La línea que contiene a esta normal común a  $z_i$  y  $z_{i-1}$  define la dirección de  $x_i$  y el punto en donde esta linea interseca  $z_i$  es el origen  $o_i$ .

 $ii.\ z_i\ y\ z_{i-1}\ son\ paralelos$ . Si  $z_i\ y\ z_{i-1}$  son paralelos entonces existen una cantidad infinita de normales comunes. En general se suele tomar la normal que pasa por  $o_{i-1}$  como la dirección para  $x_i\ y$  la intersección de dicha normal con  $z_i$  como el origen  $o_i$ .

iii.  $z_i$  y  $z_{i-1}$  se intersecan. En este caso  $x_i$  se escoge en la dirección normal al plano formado por  $z_i$  y  $z_{i-1}$ , y preferentemente en la dirección de  $z_{i-1} \times z_i$ . El origen  $o_i$  se coloca en la intersección de  $z_i$  y  $z_{i-1}$ .

Para todos los casos anteriores la dirección de  $y_i$  se establece de tal manera que complete un sistema coordenado derecho.

# 4.4 Ejemplos

### 4.4.1 Manipulador planar RR

El manipulador planar RR de la Figura 4.4 tiene 2 GDL con los dos ejes de articulación paralelos. Los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg quedarían establecidos como se muestra.

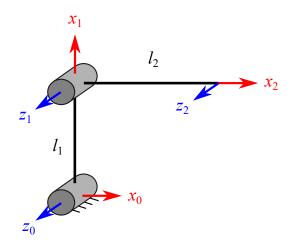


Figura 4.4 Manipulador planar RR

Los parámetros de Denavit-Hartenberg para cada eslabón vienen dados por:

i	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\overline{q}_1$
2	$l_2$	0	0	$q_2$

Luego, cada matriz de transformación  $A_i$  se obtiene de sustituir los parámetros correspondientes en la matriz DH (ecuación 4.1):

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz de transformación que relaciona el extremo del manipulador con la base está dada por:

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.4.2 Manipulador RR

El manipulador RRR mostrado en la Figura 4.5 tiene tres grados de libertad (posicionamiento). Las direcciones de la primera y segunda articulación son mutuamente perpendiculares, además, las direcciones de la segunda y tercera articulación son paralelas. Los sistemas de referencia quedan establecidos como se muestra en la Figura 4.5.

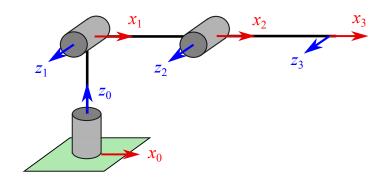


Figura 4.5 Manipulador RRR

Con los sistemas establecidos de tal forma, se obtiene la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg:

4.4. EJEMPLOS 57

i	$a_i$	$lpha_i$	$d_i$	$\overline{q_i}$
1	0	90°	$d_1$	$\overline{q_1}$
2	$l_2$	0	0	$q_2$
3	$l_3$	0	0	$q_3$

Entonces, las matrices de transformación  $A_i$  estarán dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz de transformación que describe el sistema del extremo con respecto a la base será:

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & d_1 + l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.4.3 Manipulador RRP

#### 4.4.4 Robot industrial FANUC LR MATE 200iC

### 4.5 **Problemas**

1. En la figura 4.6 se muestra un manipulador de 3 GDL (RRP). Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de Denavit-Hartenberg, obtenga la tabla de parámetros DH, forme las matrices  $A_i$  y calcule la matriz  $T_3^0$  que describe la posición y orientación del extremo del manipulador con respecto a la base.

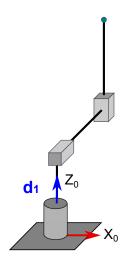


Figura 4.6 Manipulador RPP

2. Dado el manipulador mostrado en la figura 4.7 y los sistemas de referencia esquematizados, determine la posición (x, y, z) del extremo manipulador si  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 45^\circ$  y d = 75 mm.

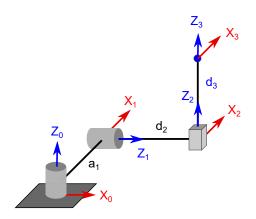


Figura 4.7 Manipulador RRP

- 3. En la figura 4.8 se muestra un manipulador de 4 GDL cuyas dimensiones son las indicadas. Realice lo siguiente:
  - a) Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de DH.
  - b) Obtenga la tabla de parámetros  $(a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i)$ .

4.5. PROBLEMAS 59

- c) Forme las matrices de transformación  $T_i^{i-1}$
- d) Calcule la matriz de transformación  $T_4^0$ .

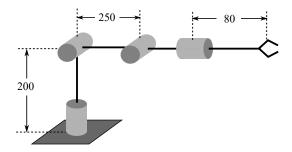


Figura 4.8 Manipulador RRRR

4. Para el manipulador mostrado en la figura 4.9 calcule la cinemática directa.

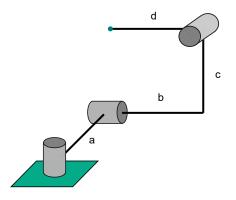


Figura 4.9 Manipulador RRR

5. Para el manipulador mostrado en la figura 4.10 calcule la cinemática directa.

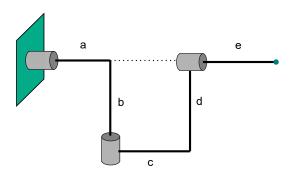


Figura 4.10 Manipulador RRR

6. Para el manipulador mostrado en la figura 4.11 calcule la cinemática directa.

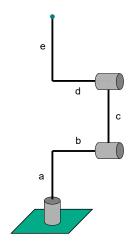


Figura 4.11 Manipulador RRR

7. Para el manipulador mostrado en la figura 4.12 calcule la cinemática directa.

60

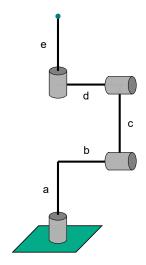


Figura 4.12 Manipulador RRR

8. Para el manipulador mostrado en la figura 4.13 calcule la cinemática directa.

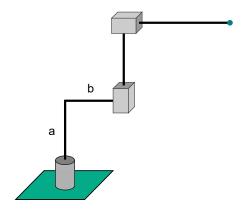


Figura 4.13 Manipulador RRR

4.5. PROBLEMAS 61

9. Calcule la cinemática directa para el manipulador SCARA mostrado en la figura 4.14.

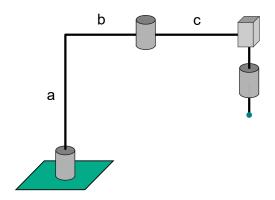


Figura 4.14 Robot SCARA

10. En la figura 4.15 se muestran tres sistemas de referencia  $\{0\}$ ,  $\{1\}$  y  $\{2\}$ . De las transformaciones  $T_1^0$ ,  $T_2^0$  y  $T_2^1$ , ¿cuáles se pueden expresar mediante los parámetros de Denavit-Hartenberg?

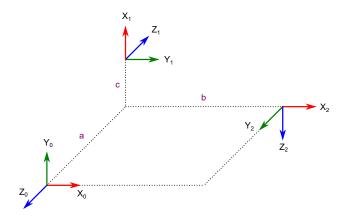


Figura 4.15

- 11. En la figura se muestra el diagrama esquemático de un robot industrial de 6 GDL cuyas dimensiones son las indicadas. Realice lo siguiente:
  - a) Establezca los sistemas de referencia siguiendo la metodología de DH.
  - b) Obtenga la tabla de parámetros  $(a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i)$ .
  - c) Forme las matrices de transformación  $T_i^{i-1}$
  - d) Calcule las coordenadas de posición del punto Q en función de las variables articulares.

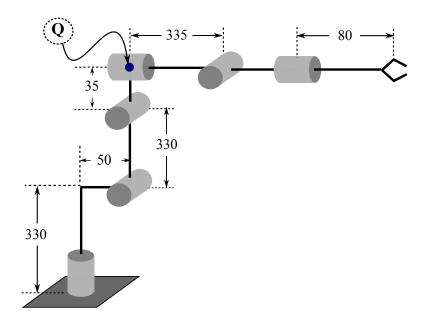


Figura 4.16 Manipulador industrial de 6 GDL

#### 12. Para el robot industrial Adept Viper s650 realice lo siguiente:

- a) Trace el diagrama cinemático.
- b) Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- c) Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- d) Cálcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

#### 13. Para el robot Fanuc M710iC realice lo siguiente:

- a) Trace el diagrama cinemático.
- b) Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- c) Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- *d*) Cálcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

#### 14. Para el robot KUKA KR 160 R1570 nano realice lo siguiente:

- a) Trace el diagrama cinemático.
- b) Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- c) Obtenga la tabla de parámetros de DH.
- d) Cálcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

#### 15. Para el robot industrial ABB IRB 910SC (SCARA) realice lo siguiente:

4.5. PROBLEMAS 63

- *a*) Trace el diagrama cinemático.
- b) Establezca los sistema de referencia siguiendo la metodología de DH.
- c) Obtenga la tabla de parámetros de DH.

*d*) Cálcule la matriz de transformación homogénea que describe el sistema del extremo respecto a la base.

## Problemas para resolver utilizando computadora

Los siguientes problemas han sido diseñados para trabajarlos con el auxilio de la computadora y un software de manipulación algebraica, preferentemente Python y su ecosistema científico.

- 1. Desarrolle un programa de computadora que dados como entrada el conjunto de parámetros de Denavit-Hartenberg para una cadena cinemática abierta calcule la posición de su extremo.
- 2. Se tiene un manipulador RR como el mostrado en la figura 4.18. Si se sabe que los valores de las coordenadas articulares están dados por:  $\theta_1 = cos(t)$  y  $\theta_2 = sin(t)$ , y que sus dimensiones son  $L_1 = L_2 = 500$  mm. Desarrolle un programe que calcule y trace la trayectoria descrita por el extremo del manipulador para  $0 \le t \le 2\pi$ .
- 3. Desarrolle un programa de computadora que permita calcular la posición y orientación del extremo del robot industrial ABB IRB 140 dados como datos de entrada los valores articulares.
- 4. Desarrolle un programa de computadora que dados como entrada los valores articulares  $d_1$  y  $d_2$ , del manipulador PP mostrado en la figura 4.17, calcule la posición del extremo del manipulador. El programa deberá también esquematizar la posición del manipulador.

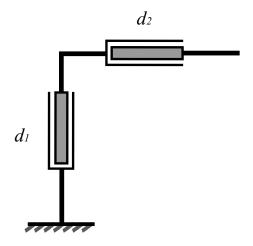


Figura 4.17 Manipulador PP

4.5. PROBLEMAS 65

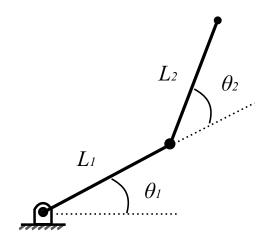


Figura 4.18 Manipulador RR

## Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa de manipuladores consiste en determinar los valores articulares requeridos para posicionar y orientar el elemento terminal de una manera predefinida. Usualmente el procedimiento es más complejo que el correspondiente para la cinemática directa, ya que el problema de la cinemática inversa está fuertemente ligado a la morfología del robot y en consecuencia no existe una metodología específica que garantice la obtención de una solución.

# 5.1 El problema general de la cinemática inversa

El problema general de la cinemática inversa se puede establecer como sigue: dada una matriz de transformación homogénea de 4x4:

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{o} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

con  $R \in SO(3)$ , calcular las soluciones de la ecuación:

$$T_n^0(q_1, q_2, ..., q_n) = H$$
 (5.2)

donde:

$$T_n^0 = A_1(q_1)A_2(q_2)...A_n(q_n)$$
(5.3)

En lo anterior H representa la posición y orientación deseada para el elemento terminal y la tarea de la cinemática inversa se centra en calcular los valores de  $q_1, q_2, ..., q_n$  que verifican la ecuación 5.2.

La ecuación matricial 5.2 conduce a un conjunto de 12 ecuaciones con n incógnitas.

### 5.2 Cinemática inversa: método analítico

De la cinemática directa se obtiene una matriz de transformación homogénea  $T_n^0$  en términos de las variables articulares y que al igualarse con la posición y orientación deseada H genera un sistema de ecuaciones, usualmente no lineales y en la mayoría de los casos en términos de funciones trigonométricas. Resolver este tipo de sistemas de ecuaciones implica adoptar una metodología específica y que en manipuladores de varios grados de libertad implicará mayor complejidad.

En general, un sistema de ecuaciones como el descrito anteriormente será complicado de resolver de forma cerrada, sin embargo es posible resolverlos utilizando algún método numérico y obtener una aproximación en un tiempo de cómputo razonable.

#### Manipulador planar RR

A continuación se describe el proceso de solución de la forma analítica para un manipulador RR, los valores conocidos serán las coordenadas ( $P_x$ ,  $P_y$ ) del extremo del manipulador y los parámetros dimensionales del robot.

La MTH que describe el sistema del extremo respecto a la base  $\mathbb{T}_2^0$  está dada por:

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De lo cual resulta un sistema de dos ecuaciones:

$$l_1c_1 + l_2c_{12} = P_x$$

$$l_1 s_1 + l_2 s_{12} = P_{\gamma}$$

Si se eleva al cuadrado cada miembro de las ecuaciones anteriores y se suman:

$$P_{r}^{2} + P_{v}^{2} = l_{1}^{2}c_{1}^{2} + 2l_{1}l_{2}c_{1}c_{12} + l_{2}^{2}c_{12}^{2} + l_{1}^{2}s_{1}^{2} + 2l_{1}l_{2}s_{1}s_{12} + l_{2}^{2}s_{12}^{2}$$

Simplificando:

$$P_{\rm v}^2 + P_{\rm v}^2 = l_1^2 + 2l_1l_2c_2 + l_2^2$$

De la expresión anterior el único valor desconocido es  $\theta_2$ , entonces:

5. CINEMÁTICA INVERSA

$$\cos \theta_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} = K$$

Por trigonometría se sabe que:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{y } \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Entonces podemos escribir la solución para  $\theta_2$  en términos de la función arcotangente:

$$\theta_2 = \arctan 2\left(\pm\sqrt{1-K^2}, K\right)$$

Para calcular  $\theta_1$ , de las ecuaciones para x e y podemos expresar el cociente y/x y trabajar con la expresión resultante:

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin \theta_1}{l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1}$$

Factorizando y simplificando los términos para  $\cos \theta_1$  y  $\sin \theta_1$ , podemos escribir:

$$\theta_1 = \arctan 2 \left( l_2 P_y \cos \theta_2 + l_1 P_y - l_2 P_x \sin \theta_2, l_2 P_x \cos \theta_2 + l_1 P_x + l_2 P_y \sin \theta_2 \right)$$

#### Manipulador planar PPR

La MTH  $T_3^0$  está dada por:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} s_3 & c_3 & 0 & d_2 + l_3 s_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -c_3 & s_3 & 0 & d_1 - l_3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De lo cual resultan tres ecuaciones:

$$d_2 + l_3 s_3 = P_x (5.4)$$

$$d_1 - l_3 c_3 = P_y (5.5)$$

$$s_3 = c_{\phi} \tag{5.6}$$

Resolviendo primeramente la ecuación 5.6, por relaciones trigonométricas se sabe que  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ , entonces:

$$\sin(\theta_3) = \sin(\phi + \pi/2) \leftarrow \theta_3 = \phi + \pi/2$$

Una vez conocido  $\theta_3$  los valores de  $d_1$  y  $d_2$  pueden determinarse de las ecuaciones 5.4 y 5.5:

$$d_2 = P_r - l_3 \sin \theta_3 = P_r - l_3 \cos \phi$$

$$d_1 = P_v + l_3 \cos \theta_3 = P_v - l_3 \sin \phi$$

# 5.3 Cinemática inversa de posición: método geométrico

Para manipuladores de a lo sumo tres grados de libertad (posicionamiento) se pueden emplear métodos geométricos para calcular los valores articulares, mediante una combinación de técnicas geométricas y manipulación trigonométrica.

La principal limitación del método geométrico es evidentemente que sólo será utilizable en problemas de cinemática inversa de posición. No obstante, la mayoría de los manipuladores industriales se forman mediante una morfología base (usualmente de tipo antropomórfico - RRR) a la cual se le adiciona una muñeca esférica, esto posibilita el uso conjunto del método geométrico con otras técnicas para el análisis de manipuladores industriales que involucran cinemática de orientación, esto se describirá en la sección subsiguiente.

La idea general del método geométrico es resolver para la variable articular  $q_i$  mediante la proyección del manipulador en el plano  $x_{i-1}-y_{i-1}$  y trabajar el problema trigonométrico resultante. En todos los casos implicará calcular ángulos y distancias en función de los parámetros del robot y de los valores conocidos de posición.

### 5.3.1 Manipulador planar RR

Como se observa en la figura 5.1 el manipulador RR se proyecta en el plano  $x_0-y_0$  y se trazan los triángulos mostrados. De este diagrama se observa que el ángulo  $\theta_1$  puede calcularse una vez conocidos los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  mediante una simple diferencia:

$$\theta_1 = \alpha - \beta$$

El ángulo  $\alpha$  se determina a partir del triángulo rectángulo formado por los catetos  $P_x$  y  $P_y$ , y la hipotenusa r:

$$\alpha = \arctan 2(P_y, P_x)$$

La longitud *r* puede calcularse como:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

El ángulo  $\beta$  se determina aplicando ley de cosenos:

$$L_{2}^{2} = L_{1}^{2} + r^{2} - 2L_{1}r\cos\beta \qquad \rightarrow \qquad \beta = \arccos\left(\frac{L_{1}^{2} + r^{2} - L_{2}^{2}}{2L_{1}r}\right)$$

De forma similar a  $\beta$  y utilizando el mismo triángulo se puede determinar  $\theta_2$  aplicando ley de cosenos:

$$r^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\cos\theta_2 \qquad \rightarrow \qquad \cos\theta_2 = \frac{r^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} = K$$

Escribiendo la solución utilizando la función arctan 2:

$$\theta_2 = \arctan 2 \left( \pm \sqrt{1 - K^2}, K \right)$$

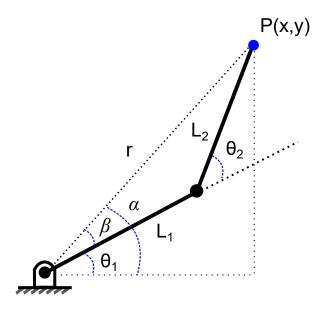


Figura 5.1 Manipulador RR

### 5.3.2 Manipulador antropomórfico RRR

Como se observa en la figura 5.1 el manipulador RR se proyecta en el plano  $x_0 - y_0$  y se trazan los triángulos mostrados. De este diagrama se observa que el ángulo  $\theta_1$  puede calcularse una vez conocidos los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  mediante una simple diferencia:

$$\theta_2 = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \arctan 2(P_z - d_1, r_{xy})$$

La longitud  $r_{xy}$  puede calcularse como:

$$r_{xy} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - d_1)^2}$$

El ángulo  $\beta$  se determina aplicando ley de cosenos:

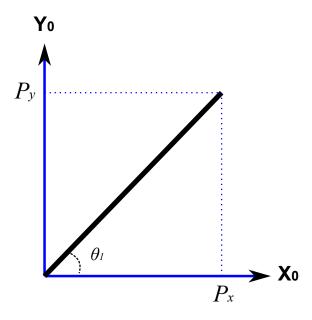
$$a_3^2 = a_2^2 + r^2 - 2a_2r\cos\beta$$
  $\rightarrow$   $\beta = \arccos\left(\frac{a_2^2 + r^2 - a_3^2}{2a_2r}\right)$ 

De forma similar a  $\beta$  y utilizando el mismo triángulo se puede determinar  $\theta_2$  aplicando ley de cosenos:

$$r^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3\cos\theta_3 \qquad \to \qquad \cos\theta_3 = \frac{r^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} = K$$

Escribiendo la solución utilizando la función arctan 2:

$$\theta_3 = \arctan 2 \left( \pm \sqrt{1 - K^2}, K \right)$$



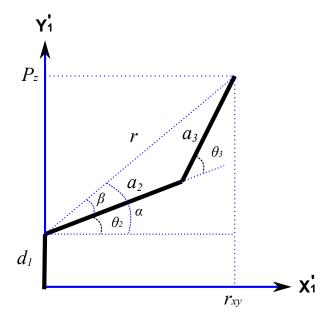
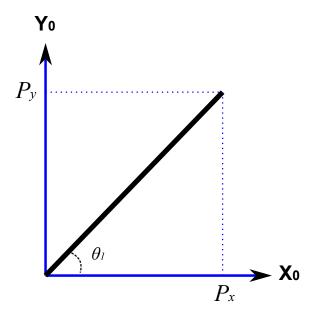


Figura 5.3 Manipulador RRR, proyección en  $X_1'Y_1'$ 

# 5.3.3 Manipulador RRP



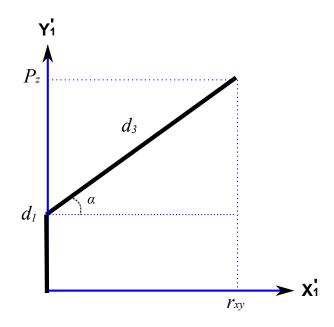


Figura 5.5 Manipulador RRP, proyección en  $X_1'Y_1'$ 

# 5.4 **Desacoplo cinemático**

## Cinemática diferencial

En lo subsiguiente se resumen algunas cuestiones relacionadas con la cinemática diferencial de manipuladores. Se exhorta y recomienda consultar las referencias [1] y [4] para una mejor comprensión de los conceptos y ejemplos aquí presentados.

# 6.1 Velocidades en un manipulador serial

En muchas situaciones es necesario conocer las relaciones entre **velocidades articulares** y las **velocidades en el espacio cartesiano** de una manipulador serial, esta relación la proporciona un matriz habitualmente llamada **matriz jacobiana** o simplemente **jacobiano**. La matriz jacobiana asociada a un manipulador de n grados de libertad, es una matriz de  $6 \times n$ , y relaciona las velocidades de un manipulador mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v} = J\dot{\mathbf{q}}$$

Donde  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidades, tanto lineales como angulares, de alguna ubicación específica en el manipulador (usualmente el extremo):

$$\mathbf{v} = egin{bmatrix} v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \end{bmatrix}$$

q es el vector de velocidades articulares:

$$\dot{\mathbf{q}} = egin{bmatrix} \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \vdots \ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Y J la matriz jacobiana. En la siguiente sección se describe cómo calcular esta matriz jacobiana.

### 6.2 Algoritmo para calcular la matriz jacobiana directa

Recordar que la matriz jacobiana es una matriz de  $6 \times n$ , donde n corresponde al número de grados de libertad del manipulador. Así, una matriz jacobiana asociada a un manipulador serial, tiene tantas columnas como grados de libertad tenga dicho manipulador.

La i-ésima columa de la matriz jacobiana directa se forma de la siguiente manera:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{
u_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

Donde  $J_{\nu_i}$  es el jacobiano de velocidad lineal y  $J_{\omega_i}$  el jacobiano de velocidad angular.

Si la i-ésima articulación es una revoluta, entonces,  $J_{\nu_i}$  y  $J_{\omega_i}$ , están dados por:

$$J_{\nu_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{i-1})$$

$$J_{\omega_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

Si la i-ésima articulación es prismática, entonces,  $J_{\nu_i}$  y  $J_{\omega_i}$ , están dados por:

$$J_{\nu_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

$$J_{\omega_i} = \mathbf{0}$$

En las ecuaciones anteriores, las cantidades implicadas son:

- $\mathbf{d}_n$ , es el vector que define la posición del extremo del manipulador. Naturalmente, lo calculamos u obtenemos de la matriz  $T_n^0$ , cuarta columna, primeras tres filas.
- $\mathbf{d}_{i-1}$ , es el vector que define la posición del sistema de referencia  $\{i-1\}$ . Lo obtenemos de la matriz  $T_{i-1}^0$ , cuarta columna, primeras tres filas.

- $\mathbf{z}_{i-1}$ , es el vector que define la dirección del (i-1)-ésimo eje z, con respecto a la base. Lo obtenemos de la matriz  $T_{i-1}^0$ , tercera columna, primeras tres filas.
- **0** es un vector de ceros, **0** =  $[0,0,0]^T$ .

# 6.3 Ejemplos resueltos

#### ☑ Ejemplo 6.3.1 Manipulador RR

En la figura 6.1 se muestra un manipulador RR, con los sistemas de referencia ya establecidos. Calcule la matriz jacobiana.

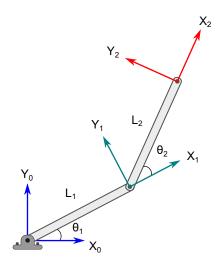


Figura 6.1 Manipulador RR

De la cinemática directa se sabe que:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad T_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que ambas articulaciones son revolutas la matriz jacobiana quedará de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando los productos vectoriales correspondientes se tiene:

$$\begin{split} J_{v_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ J_{v_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2c_{12} \\ l_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2s_{12} \\ l_2c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{split}$$

Dado que ambas articulaciones son revolutas, tanto  $J_{\omega_1}$  como  $J_{\omega_2}$  están dadas por:

$$J_{\omega_1} = egin{bmatrix} 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad J_{\omega_1} = egin{bmatrix} 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, acomodando los términos calculados, se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### **☑** Ejemplo 6.3.2 Velocidad del extremo del manipulador RR

Para el manipulador del ejemplo anterior, calcule la velocidad de su extremo para un instante en el cual  $\theta_1=45^\circ$  y  $\theta_2=30^\circ$ , siendo  $\dot{\theta}_1=5$  rad/s y  $\dot{\theta}_2=3$  rad/s. Considere que  $l_1=l_2=280$  mm.

#### Solución:

Tomamos como punto de partida la matriz jacobiana calculada en el ejemplo anterior, sustituimos los valores correspondientes, de lo cual se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -468.449 & -270.459 \\ 270.459 & 72.4693 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector de velocidades del extremo del manipulador, debemos multiplicar la matriz jacobiana por el vector de velocidades articulares, mismo que está dado por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación, tenemos:

$$\mathbf{v} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -468.449 & -270.459 \\ 270.459 & 72.4693 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3153.62 \\ 1569.7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.0 \end{bmatrix}$$

Lo cual resulta en el vector de velocidades del extremo del manipulador.

### **☑** Ejemplo 6.3.3 Manipulador RPP

Para el manipulador RPP mostrado en la figura 6.2 calcule las velocidades del extremo, para un instante en el cual  $\theta_1=90^\circ$ ,  $d_2=200$  mm y  $d_3=100$  mm, además, se sabe que las velocidades articulares son  $\dot{\theta}_1=-8$  rad/s,  $\dot{d}_2=30$  mm/s,  $\dot{d}_3=15$  mm/s. Considere que a=120 mm y b=50 mm.

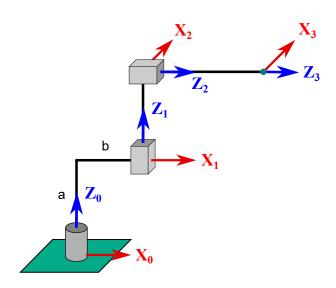


Figura 6.2 Manipulador RPP

#### Solución:

Calculando la cinemática directa, se tiene:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & b\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & b\sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & b\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & b\sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 & a+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & (b+d_3)\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & (b+d_3)\sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 & a+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a lo que sabemos, la matriz jacobiana tendrá la forma:

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_0) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Recuerde que tanto la segunda como tercera articulación son prismáticas, lo cual facilita en gran medida el cálculo de la matriz jacobiana. Identificando cada término implicado:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} (b+d_3)\cos(\theta_1) \\ (b+d_3)\sin(\theta_1) \\ a+d_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto vectorial para calcular  $J_{\nu_1}$ :

$$J_{\nu_1} = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_0) = \begin{bmatrix} -(b+d_3)\sin(\theta_1) \\ (b+d_3)\cos(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acomodando los términos como corresponde, formamos la matriz jacobiana:

$$J = egin{bmatrix} -(b+d_3)\sin( heta_1) & 0 & \cos( heta_1) \ (b+d_3)\cos( heta_1) & 0 & \sin( heta_1) \ 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numéricos, se tiene:

$$J = \begin{bmatrix} -150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el vector de velocidades articulares podemos definirlo como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -8\\30\\15 \end{bmatrix}$$

Para calcular la velocidad del extremo, efectuamos el producto de J y  $\dot{q}$ :

$$\mathbf{v} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 15 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

# Dinámica de manipuladores seriales

- 7.1 **Dinámica de cuerpo rígido**
- 7.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange



# Análisis cinemático y dinámico de manipuladores utilizando Python

Este capítulo lo puedes encontrar en el siguiente enlace: https://jorgedelossantos.github.io/apuntes-pytho

# Bibliografía

- [1] Spong, M. W. (2006). Robot modeling and control. Hoboken. New Jersey: John Wiley Sons.
- [2] Barrientos, A. (2012). Fundamentos de Robótica. Espana: McGraw-Hill España.
- [3] Reza, N. J. (2010). Theory of Applied Robotics. New York: Springer.
- [4] Oriolo, G., Sciavicco, L., Siciliano, B., Villani, L. (2010). Robotics: Modelling, planning and control. London: Springer.