Robótica - MCIM

Pedro Jorge De Los Santos Lara

16 de agosto de 2016

1. Probar que: ${}^{j}\vec{\omega}^{m} \times \vec{b_2} = \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt}$.

Con la expresión de la velocidad angular ${}^{j}\vec{\omega}^{m}$ podemos escribir:

$$
{}^{j}\vec{\omega}^{m} \times \vec{b_2} = \left(\vec{b_1} \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3} + \vec{b_2} \frac{{}^{j}d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_1} + \vec{b_3} \frac{{}^{j}d\vec{b_1}}{dt} \cdot \vec{b_2} \right) \times \vec{b_2} \; = \; \vec{b_3} \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3} - \vec{b_1} \frac{{}^{j}d\vec{b_1}}{dt} \cdot \vec{b_2}
$$

Luego, se tiene que:

$$
\vec{b_2} \cdot \vec{b_2} = 1
$$

Entonces:

$$
\frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_2} + \vec{b_2} \cdot \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{b_2} \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_2} = \vec{0}
$$

De manera similar para:

$$
\vec{b_2} \cdot \vec{b_1} = 0
$$

Se tiene que:

$$
\frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_1} + \vec{b_2} \cdot \frac{{}^{j}d\vec{b_1}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_1} = -\frac{{}^{j}d\vec{b_1}}{dt} \cdot \vec{b_2}
$$

Sustituyendo en la expresión obtenida:

$$
{}^{j}\vec{\omega}^{m} \times \vec{b_2} = \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_1}\vec{b_1} + \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_2}\vec{b_2} + \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3}\vec{b_3} = \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt}
$$

---

2. Probar que: ${}^{j}\vec{\omega}^{m} \times \vec{b_3} = \frac{{}^{j}d\vec{b_3}}{dt}$.

Con la expresión de la velocidad angular ${}^{j}\vec{\omega}^{m}$ podemos escribir:

$$
{}^{j}\vec{\omega}^{m} \times \vec{b_3} = \left(\vec{b_1} \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3} + \vec{b_2} \frac{{}^{j}d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_1} + \vec{b_3} \frac{{}^{j}d\vec{b_1}}{dt} \cdot \vec{b_2} \right) \times \vec{b_3} \; = \; -\vec{b_2} \frac{{}^{j}d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3} + \vec{b_1} \frac{{}^{j}d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_1}
$$

Luego, se tiene que:

$$\vec{b_3} \cdot \vec{b_3} = 1$$

Entonces:

$$\frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_3} + \vec{b_3} \cdot \frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_3} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{b_3}\frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_3} = \vec{0}$$

De manera similar para:

$$\vec{b_2} \cdot \vec{b_3} = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{{}^j d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3} + \vec{b_2} \cdot \frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt} \cdot \vec{b_2} = -\frac{{}^j d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3}$$

Sustituyendo en la expresión obtenida:

$${}^j\vec{\omega}^m \times \vec{b_3} = \frac{{}^j d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_1}\vec{b_1} + \frac{{}^j d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_2}\vec{b_2} + \frac{{}^j d\vec{b_2}}{dt} \cdot \vec{b_3}\vec{b_3} = \frac{{}^j d\vec{b_3}}{dt}$$