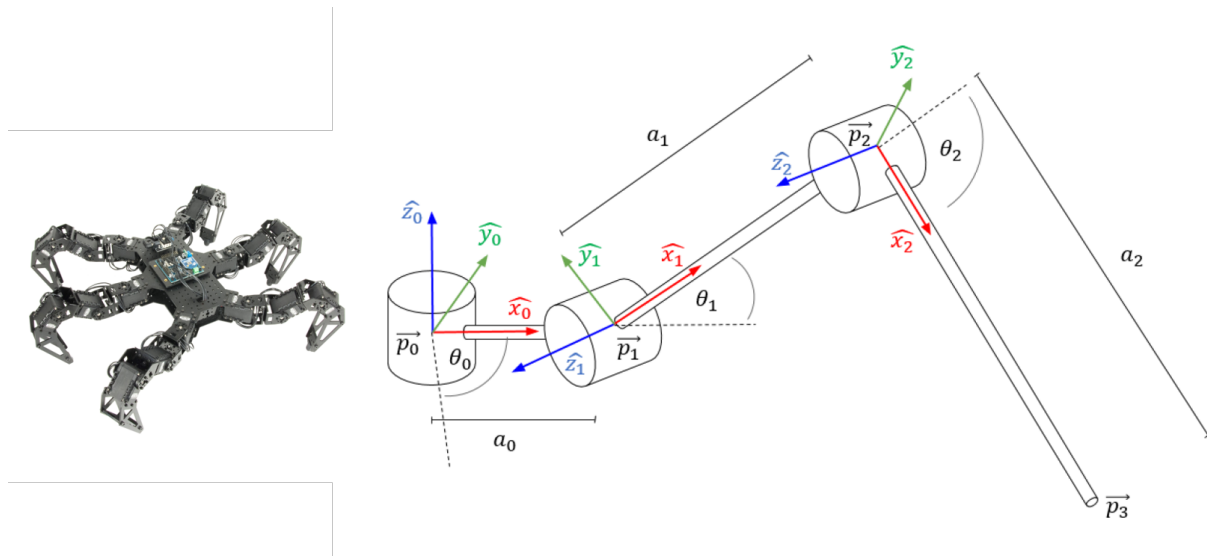


Instrucciones Generales

- Responda cada problema en hojas separadas.
- Escriba claramente su nombre y firma en cada hoja.
- Responda tan breve como sea posible.
- La evaluación termina a las 21 horas, no habrá tiempo adicional.
- No hay preguntas, utilice su mejor juicio para responder.
- En caso de necesitar algún supuesto adicional razonable, anótelo.
- Entre paréntesis se indica la puntuación asignada a cada problema.
- El examen posee 7 puntos en total, se incluye un punto de bonus como problema 4. Su nota se calcula como punto base + puntaje obtenido. Si bien la nota máxima posible es 8, su nota saturará en 7.

Problema 1

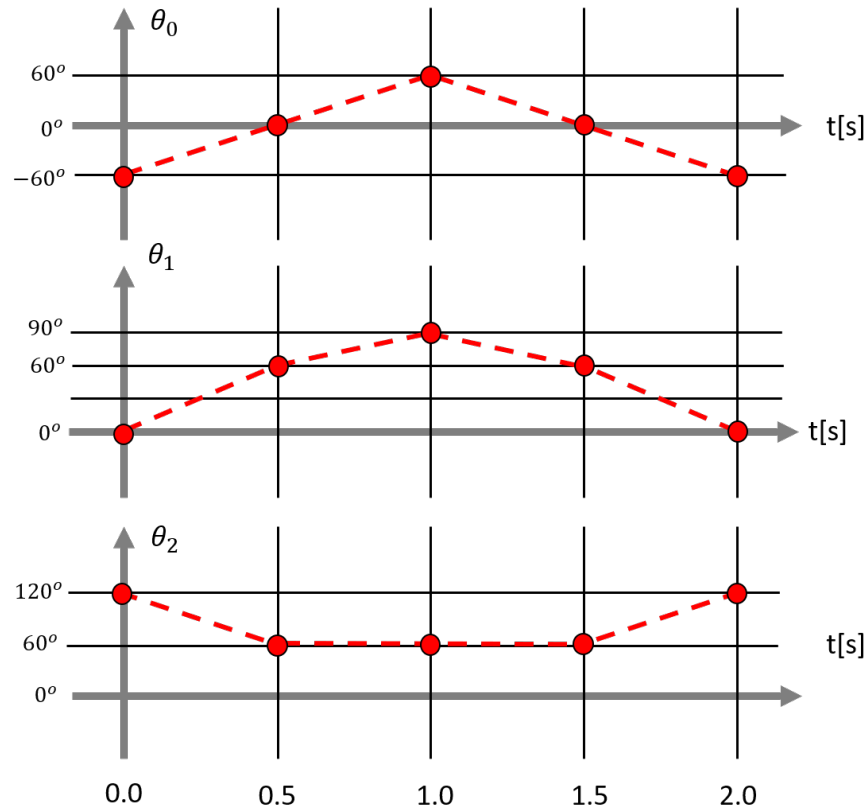
Queremos modelar un robot hexápodo (6 piernas) con 3 movimientos de rotación permitidos por cada pierna, tal como se indica en la figura.



Modelo de robót héxapodo (izquierda) y descripción de una pierna del robot (derecha)

1. (0.5) Dibuje el grafo de escena que modele el robot completo. Considere que tiene complejos modelos OBJ para cada parte del robot, puede usarlos en sus nodos. Cada nodo de su grafo no debe incluir más de una transformación lineal. Asigne nombres apropiados a cada uno de sus nodos para poder referenciarlos más tarde.

Para el movimiento del robot completo se tiene que configurar un total de 18 ángulos en cada instante de tiempo. En este problema nos concentraremos en el movimiento de una sola pierna. Queremos que la punta del pie se levante, luego se traslade, y que luego vuelva a sostenerse en el piso. El ciclo de un paso tarda 2 segundos. De esta forma, queremos conectar la siguiente trayectoria para cada uno de los ángulos θ_0 , θ_1 y θ_2 :



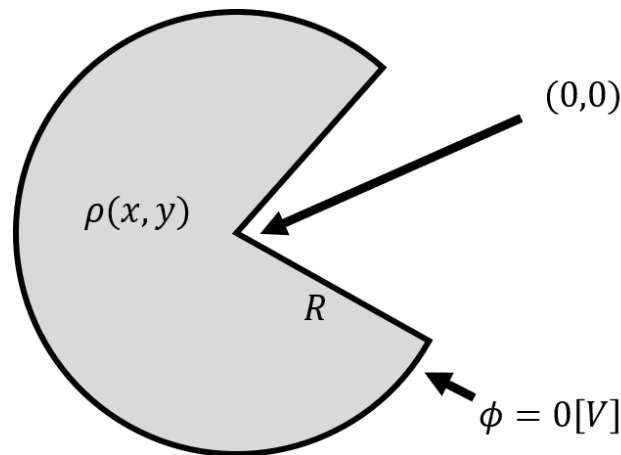
Para conseguir un movimiento más suave, interpolaremos los puntos anteriores con curvas de Hermite para el primer y último tramo y Catmull-Rom para los dos tramos intermedios.

2. (0.5) Escriba una ecuación explícita para cada tramo de la curva θ_0 . Usted debe darse parámetros adicionales que pueda necesitar. Mencíónelos.
3. (0.5) Suponga que `nodo[nombre_nodo].transf = T` permite asignar una transformación T a dicho nodo del grafo de escena. Escriba un pseudo código que utilice las curvas θ_0 , θ_1 , θ_2 para animar continua y suavemente el movimiento de una pierna del robot utilizando su grafo de escena del punto 1. En este ítem asuma que ya conoce todas funciones $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ para $t \in [0, 2]$.
4. (0.5) Dada la complejidad de las partes del robot descritas en archivos OBJ, discuta la utilidad de los procesos de recorte (clipping) y de eliminación de caras ocultas (face culling) al momento de renderizar escenas con el robot.

Problema 2

1. (0.4) Explique la diferencia entre los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos para resolver una ecuación en derivadas parciales.

Queremos estudiar el potencial eléctrico al interior del siguiente dominio:



Considere además que:

- Como se ha dispuesto una densidad de carga en el interior del dominio. Sabemos que en este caso el potencial eléctrico ϕ obedece a la siguiente ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Donde x e y se miden desde el centro del dominio (i.e. $(0,0)$ indicado en la figura).

- Como los bordes del dominio corresponden a un conductor perfecto, consideraremos que posee un potencial nulo. Es decir, tenemos condiciones de borde tipo Dirichlet nulas.

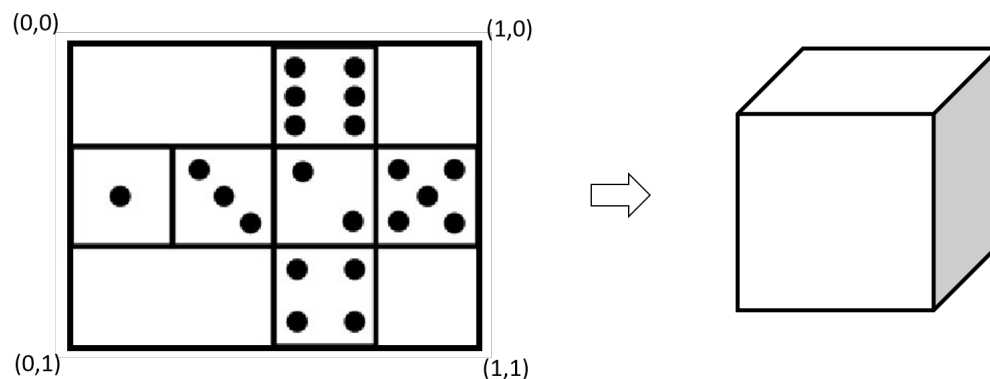
Nota: La última página incluye 6 dibujos del dominio, puede usarlos a su conveniencia y entregar dicha hoja junto al resto de su solución.

2. (0.3) Aproxime el dominio discretizando convenientemente de dos formas: una para aplicar el método de diferencias finitas, y otra para aplicar el método de elementos finitos. Cada discretización debe poseer al menos 10 puntos incógnitos y debe estar correctamente indexada.
3. (0.3) Seleccione un punto que toque el borde para cada una de las dos discretizaciones del punto anterior. Escriba las ecuaciones asociadas a dichos puntos considerando los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos según corresponda.

4. (0.5) Considerando la información dada, bosqueje en el interior del dominio:
- Un gráfico con 3 curvas de nivel para el potencial eléctrico.
 - Un gráfico de líneas de campo (*field line representation*) para el campo eléctrico $E = -\nabla\phi$. Notar que el campo eléctrico se define en sentido contrario de la dirección de máximo crecimiento del potencial eléctrico.
- Nota:* Se está evaluando la forma esperada de la solución, no valores numéricos específicos. *Hint:* Recuerde que el campo eléctrico nace de las cargas positivas y termina en las cargas negativas o de menor potencial.
5. (0.5) Queremos visualizar la solución para el potencial eléctrico ϕ como una superficie 3D. Con este propósito, discuta la utilidad de los siguientes estilos de dibujo: malla de alambre, color único, sombreado Flat y sombreado Gouraud.

Problema 3

1. (0.5) Queremos escribir un archivo OBJ que modele un dado. Para esto, utilizaremos un cubo al cual se le aplicará una única textura que incluye las 6 caras tal como se indica en la figura. Se deben especificar también las normales, pues aplicaremos efectos de iluminación. Considere que el dado cúbico está centrado y su arista mide 1. Escriba dicho archivo OBJ.



2. (0.5) Queremos iluminar el dado con el modelo de iluminación de Phong. Nuestra escena será renderizada en distintos momentos del día:
- En la mañana los colores se verán en sus colores naturales.
 - Al atardecer, la tonalidad de los colores se volverá anaranjada.
 - En la noche, los colores irán adoptando una tonalidad de azul oscuro.

Asigne valores numéricos a cada uno de los parámetros del modelo de iluminación de Phong relativos a la fuente de luz para cada uno de los 3 periodos del día descritos. Parámetros relativos al color del dado mismo serán modelados por las texturas del archivo OBJ, por lo que no nos preocuparemos de ellos.

3. (0.5) Si el dado se encuentra en el origen, configure una cámara que permita observar 3 de sus caras en perspectiva especificando apropiadamente una transformación de vista y otra de proyección. El dado debe cubrir aproximadamente la mitad de los píxeles de la escena final.
4. (0.5) Explique la diferencia entre modelos de iluminación local y global. Adicionalmente, contraste el modelo de iluminación de Phong con Ray Tracing, describiendo 2 ventajas y 2 desventajas de cada uno de estos métodos.

Problema 4 [Bonus Track]

1. (0.5) Describa las etapas de Vertex Shading y Pixel Procesing del Pipeline de Rendering Gráfico.
2. (0.5) Describa el concepto de sólido. Explique una de las técnicas de modelación de sólidos vistos en clases. Considerando la técnica escogida, describa un método para calcular fácilmente el volumen del sólido.

Formulario Control 3

$$u(\bar{x} \pm h) = u(\bar{x}) \pm hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) \pm \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$\frac{1}{h_x^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) = f_{i,j}$$

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \quad D_-u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} \quad D_0u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h}$$

$$D^2u(\bar{x}) = \frac{1}{h^2}[u(\bar{x} - h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} + h)] \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx$$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$V \approx \sum A_{ij} \Delta z_{ij}$$

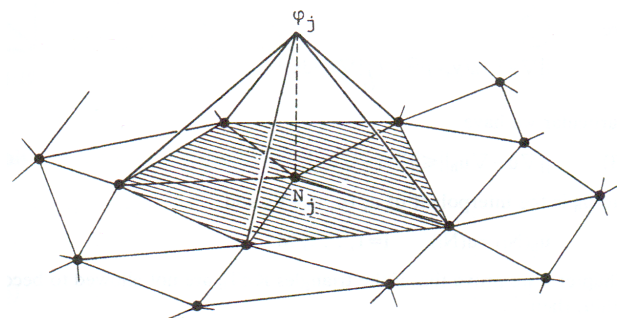
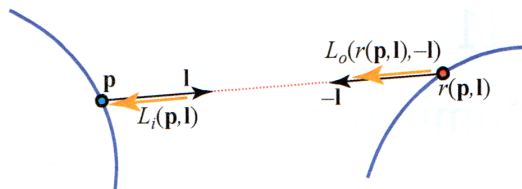
$$\text{Dirichlet: } u(x) = \alpha(x) \quad \text{Neumann: } \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \beta(x) \quad V - E + F - H = 2(C - G)$$

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$L_o(p, v) = L_e(p, v) + \int_{l \in \Omega} f(l, v) L_o(r(p, l), -l) (n \cdot l)^+ \, dl$$

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \varphi_i(x) \quad \varepsilon_i = u_h(x_i)$$

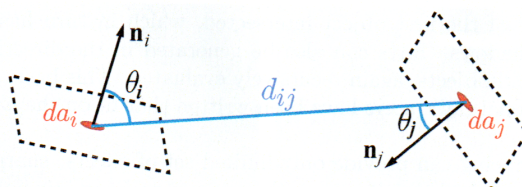
$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j) \quad j = 1, \dots, m$$



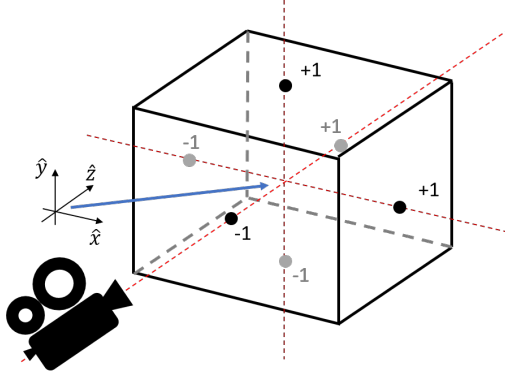
$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

$$B_i = B_i^e + \rho_{ss} \sum_j F_{ij} B_j$$

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} V(i, j) \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi d_{ij}^2} da_j da_i$$



Formulario Control 2



Vertex	
Point	position
FaceRef	face

Face	
VertexRef	vertex[3]
FaceRef	neighbor[3]

Vertex		Edge	
Point	position	VertexRef	vertex[2]
EdgeRef	edge	FaceRef	face[2]
		EdgeRef	next[2]
		EdgeRef	prev[2]

Face	
EdgeRef	edge

Vertex		Halfedge	
Point	position	VertexRef	vertex
HalfedgeRef	halfedge	FaceRef	face
		HalfedgeRef	next
		HalfedgeRef	prev
		HalfedgeRef	opposite

Face	
HalfedgeRef	halfedge

$$M_{Ortografica}(l, r, b, t, n, f) = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{Frustum}(l, r, b, t, n, f) = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{Perspective}(\theta, A, n, f) = M_{Frustum}(-h_w, h_w, -h_h, h_h, n, f)$$

$$h_h = n \tan \pi \frac{\theta}{360}$$

$$h_w = h_h A$$

$$V = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & -e \cdot s \\ u'_x & u'_y & u'_z & -e \cdot u' \\ -f_x & -f_y & -f_z & e \cdot f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \frac{a - e}{\|a - e\|}$$

$$s = f \times u$$

$$u' = s \times f$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{K}_a \mathcal{L}_a + \frac{1}{k_c + k_l d + k_q d^2} (\mathcal{K}_d \mathcal{L}_d (l \cdot n) + \mathcal{K}_s \mathcal{L}_s (v \cdot r)^\alpha)$$

$$d = \|Q - P\|$$

$$\mathbf{f} \quad \mathbf{v}/\mathbf{vt}/\mathbf{vn} \quad \mathbf{v}/\mathbf{vt}/\mathbf{vn} \quad \mathbf{v}/\mathbf{vt}/\mathbf{vn}$$

$$n_v = \frac{\sum_{\text{caras vecinas } c} n_c}{\|\sum_{\text{caras vecinas } c} n_c\|}$$

Formulario Control 1

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \theta \text{ anti-horario}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$H_{xz}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(T_x, T_y, T_z) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}}_{T(t)}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i = \frac{1}{2}(P_{i+1} - P_{i-1})$$

$$C_i(t) = \begin{bmatrix} P_{i-1} & P_i & P_{i+1} & P_{i+2} \end{bmatrix} M_{CR} T(t)$$

$$M_{CR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{T_0}{3}$$

$$P_2 = P_3 - \frac{T_3}{3}$$

$$t' = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad t' \in [0, 1]$$

