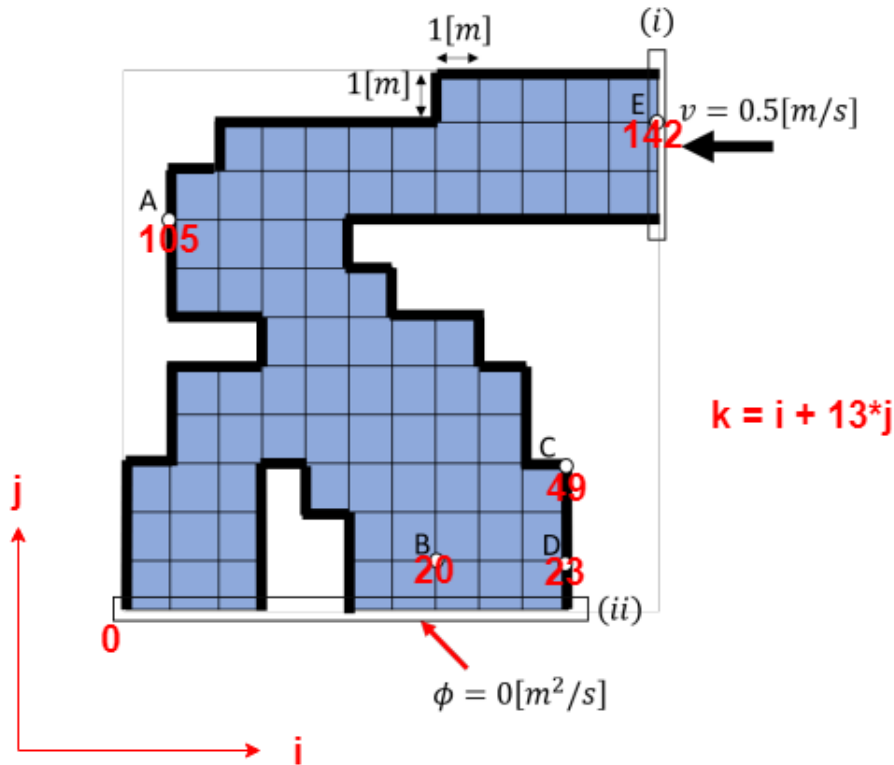


Pauta Control 3 Pregunta 2

1)



Se tienen al menos dos formas de indexar el dominio que son validas (pueden haber utilizado una diferente a las aquí descritas e igual estar correcto). La primera es la que indexa todos los puntos de la grilla, incluyendo aquellos fuera del dominio (esto incluye los puntos con condición Dirichlet). Un ejemplo simple es utilizar la transformación $k = i + 13j$ donde (i, j) corresponde a las coordenadas en el plano (ver primer dibujo). Este método implica generar una matriz que tendrá algunas filas (ecuaciones) innecesarias y por tanto agregan costo que puede ser evitado. Si utilizaron este tipo de indexación, deben haber mencionado este problema para alcanzar todos el puntaje.

Para obtener las ecuaciones de los puntos A, B, C, D y E primero debemos notar donde son aplicables condiciones de borde:

- Condición Neumann horizontal ($\hat{n} = \hat{i}$) en los puntos A, C, D y E. En coordenadas cartesianas, esta condición tiene la forma:

$$\hat{i} \cdot \nabla \phi = \hat{i} \cdot \left[\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial i} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial j} \right] = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h} = V$$

Con $V = 0$ para los puntos A, C, D y $V = 0.5$ para el punto E.

- Condición Neumann vertical igual a 0 en el punto C, la cual es de la forma:

$$\hat{j} \cdot \nabla \phi = \hat{j} \cdot \left[\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial i} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial j} \right] = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2h} = 0$$

- Condición Dirichlet en la coordenada inferior al punto C, es decir $\phi_{i,j-1} = 0$.
- (Opcional) El punto inferior a D (de coordenadas $i = 10, j = 0$) se encuentra en una esquina donde dos condiciones de borde se interactúan, esto significa que uno debe elegir en que situación ponerse, la cual puede o no afectar a la ecuación de D:
 - Si se toma como condición Neumann, no afecta a la ecuación de D.
 - Si se toma como condición Dirichlet, borra un termino de la ecuación de D dado que se iguala el valor de este punto inferior a 0.

En esta pauta se considerara el segundo caso, pero ambos son igualmente validos.

Con esto, utilizando la indexación propuesta al inicio, se obtienen las ecuaciones:

$$\phi_A = \phi_{i=1,j=8} = \phi_{105} = \frac{2\phi_{i=2,j=8} + \phi_{i=1,j=9} + \phi_{i=1,j=7}}{4} = \frac{2\phi_{104} + \phi_{118} + \phi_{92}}{4}$$

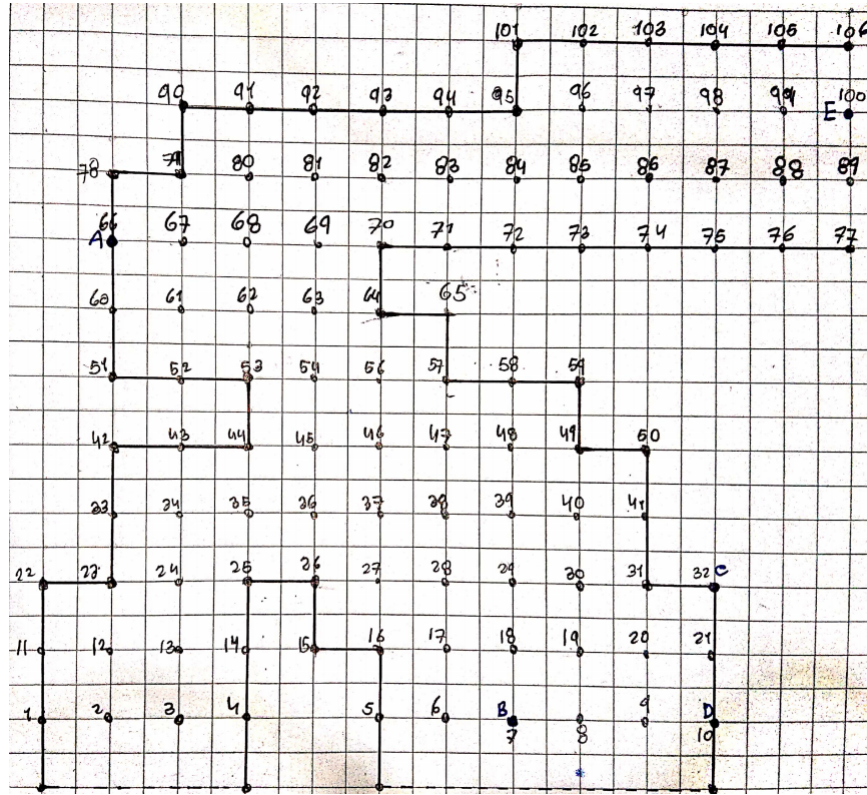
$$\phi_B = \phi_{i=7,j=1} = \phi_{20} = \frac{\phi_{i=6,j=1} + \phi_{i=8,j=1} + \phi_{i=7,j=0} + \phi_{i=7,j=2}}{4} = \frac{\phi_{19} + \phi_{21} + \phi_{33}}{4}$$

$$\phi_C = \phi_{i=10,j=3} = \phi_{49} = \frac{\phi_{i=9,j=3} + \phi_{i=10,j=2}}{2} = \frac{\phi_{48} + \phi_{36}}{2}$$

$$\phi_D = \phi_{i=10,j=1} = \phi_{23} = \frac{2\phi_{i=9,j=1} + \phi_{i=10,j=0} + \phi_{i=10,j=2}}{4} = \frac{2\phi_{22} + \phi_{33}}{4}$$

$$\phi_E = \phi_{i=12,j=10} = \phi_{142} = \frac{2\phi_{i=11,j=10} + \phi_{i=12,j=9} + \phi_{i=12,j=11} + h}{4} = \frac{2\phi_{141} + \phi_{129} + \phi_{155} + h}{4}$$

Una segunda indexación, mas detallada que evita el problema de las ecuaciones innecesarias es el mostrado en la siguiente figura:



en ella se inicia desde el borde inferior izquierdo, sin contar la primera fila dado que tiene condición Dirichlet, y se indexa hacia la derecha, evitando todos los puntos fuera del dominio. Luego se sube a la fila siguiente y se comienza la indexación desde la izquierda a derecha y así sucesivamente hasta tener todo el dominio indexado. Esto no modifica las ecuaciones, solo cambia los índices de cada punto. Las ecuaciones para esta indexación se pueden ver a continuación:

$$\phi_A = \phi_{66} = \frac{2\phi_{67} + \phi_{78} + \phi_{60}}{4}$$

$$\phi_B = \phi_7 = \frac{\phi_7 + \phi_8 + \phi_{18}}{4}$$

$$\phi_C = \phi_{32} = \frac{\phi_{31} + \phi_{21}}{2}$$

$$\phi_D = \phi_{10} = \frac{2\phi_9 + \phi_{21}}{4}$$

$$\phi_E = \phi_{100} = \frac{2\phi_{99} + \phi_{106} + \phi_{89} + h}{4}$$

1/3 de la pregunta implica tener la indexación buena, 1/3 implica tener las condiciones de borde buenas y 1/3 implica tener las ecuaciones bien escritas. Total 1.0 puntos

2)

Primero, sabemos por la definición entregada que el potencial debe ir de menos a mas para que el agua fluya, esto significa que para obtener un potencial 0 en la salida es necesario iniciar con potencial negativo. Si consideraron que se inicio con potencial positivo de forma que su superficie disminuye hacia la salida del agua también se considerara bueno pero con un descuento. Luego, cada gráfico debe cumplir ciertos criterios para ser considerado correcto (no importa si su dibujo es lo mas hermoso del mundo, si no cumplen los criterios no estará correcto):

Gráfico de superficie el dibujo debe mostrar de alguna forma el comportamiento de la superficie, en particular:

- Por donde entra el agua la superficie tendrá el menor potencial (mas negativo) y por tanto el mayor gradiente.
- Todos los bordes Neumann con gradiente nulo actúan como paredes verticales invisibles que evitan que el agua fluya por ellos lo que debe verse reflejado en los dibujos.
- Los bordes Dirichlet (inferior de la grilla) poseen un potencial 0 lo que significa el punto mas alto de la superficie.

A continuación pueden ver un gráfico de altitud generado en matlab para el problema actual utilizando valores arbitrario (la forma no cambia). Todos los bordes que no están indicados como de entrada o salida actúan como paredes verticales en la superficie.

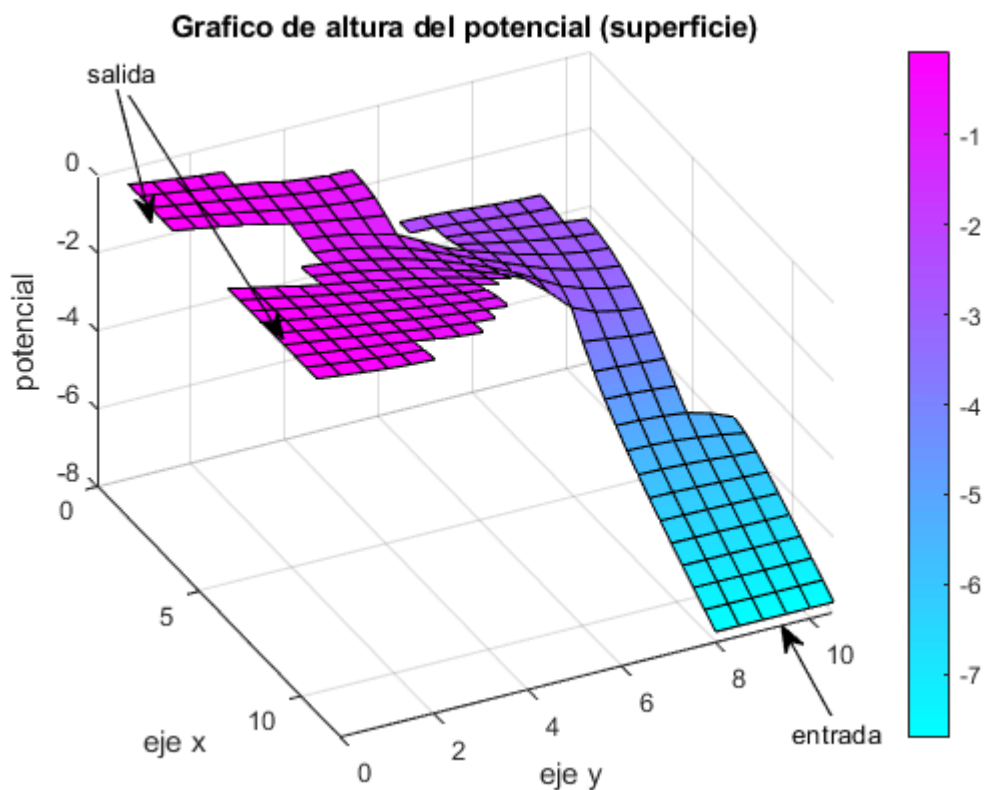


Gráfico de flechas: un gráfico de flechas que muestre las dirección de las velocidades en cada celda. Basta con dibujar flechas cortas que inician desde donde entra el agua y señalen un camino que termine en alguna de las 2 salidas del dominio. Para obtener el puntaje completo deben indicar que las flechas modifican su largo según la intensidad del campo (donde es mas fuerte son levemente mas largas y el campo es mas fuerte en los segmentos donde el camino reduce su ancho, es igual a la noción física de caudal). A continuación pueden ver un gráfico de flechas generado en Matlab (nuevamente, los parámetros son arbitrario):

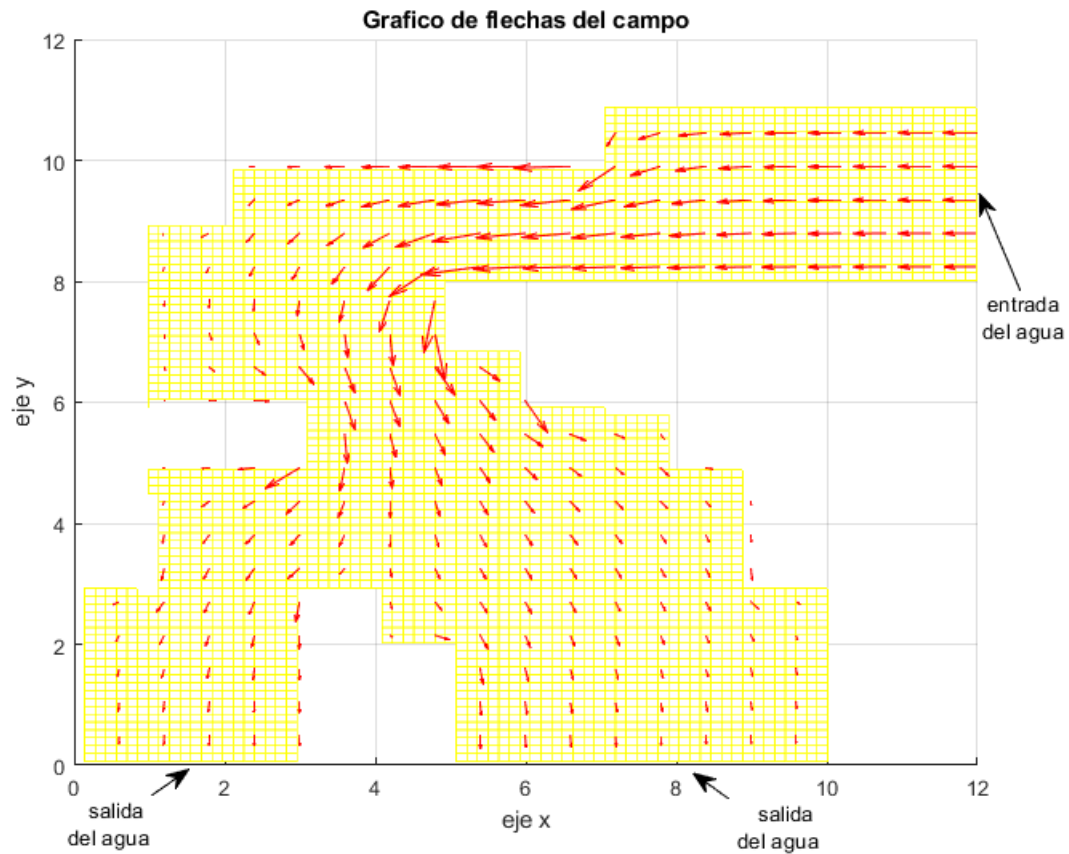
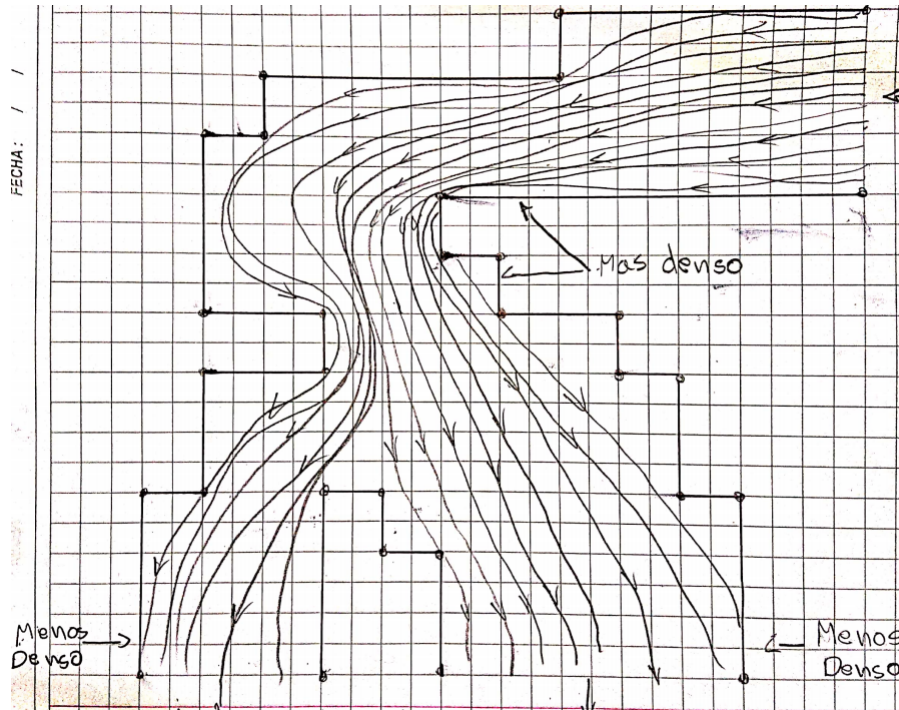


Gráfico de líneas de campo: como el campo es el gradiente del potencia, el dibujo debe mostrar caminos seguidos por el agua desde que entra hasta que sale del dominio. A diferencia del gráfico anterior, este debe ser de líneas continuas. Este tipo de gráficos es mas difícil realizarlo computacionalmente, pero a continuación pueden ver un bosquejo realizado a mano que muestra lo buscado en el dibujo:



Notar que la densidad de las líneas aumenta (se aprietan) cuando el camino reduce su ancho y disminuye (se separan) cuando el camino aumenta su ancho, por ultimo, al salir del dominio las líneas se dispersan en todas direcciones dado que dejan de existir los muros (esto es un extra, puede haber sido omitido). Deben haber señalado este comportamiento (de juntar y separar líneas) para obtener todo el puntaje.

cada dibujo correcto vale 1/3 del puntaje total (0.2). Puntaje máximo: 0.6