

Instrucciones Generales

- Responda cada problema en hojas separadas.
- Escriba claramente su nombre y firma en cada hoja.
- Responda tan breve como sea posible.
- La evaluación termina a las 13:45 horas, no habrá tiempo adicional.
- No hay preguntas, utilice su mejor juicio para responder.
- Entre paréntesis se indica la puntuación asignada a cada problema. El control posee 6 puntos en total.

Problema 1

1. (1.0) Dibuje un Quadtree que represente la siguiente figura. Pinte cada nodo negro o blanco dependiendo si tiene o no data en su interior. Defina usted un orden consistente entre los nodos hijos.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

2. (0.5) Describa de que manera la estrategia de *cube culling* permite agilizar el proceso de rendering de un arreglo 3D de voxeles. Calcule la cantidad de voxeles renderizados con y sin *cube culling* para un cuboide (o paralelepípedo ortogonal) macizo de tamaño $10 \times 5 \times 6$ voxeles.
3. (0.5) Especifique 3 aplicaciones de voxeles mencionadas en la lectura.

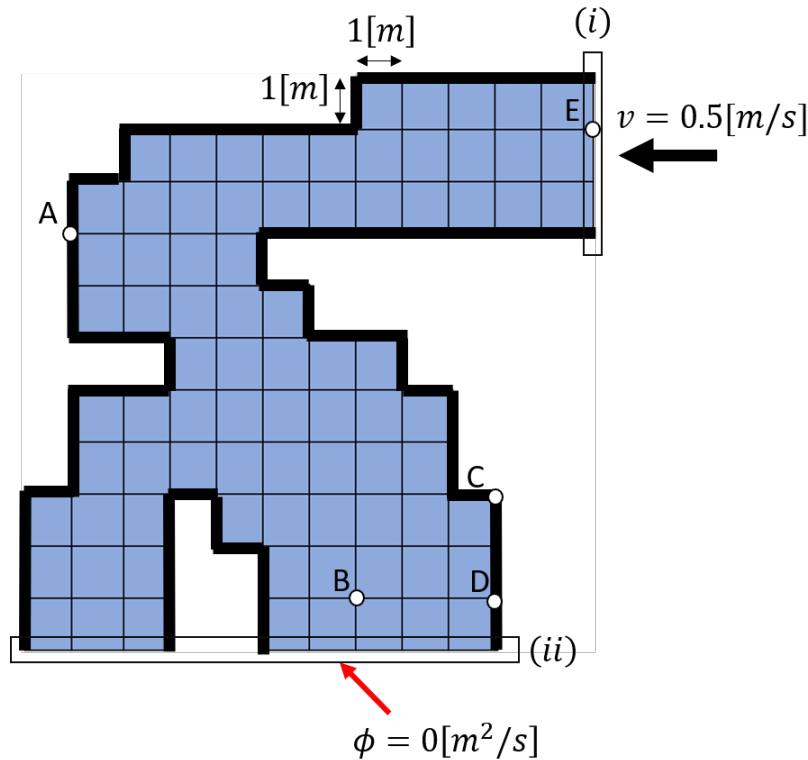
Problema 2

Dado que el agua es un fluido incompresible, irrotacional y no viscoso, sabemos que su movimiento puede ser explicado por la ecuación de Laplace aplicada sobre el llamado potencial de velocidades ϕ .

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad v = \nabla \phi$$

Una vez, calculado dicho potencial de velocidades, es posible calcular el campo vectorial de velocidades del agua, a través del gradiente de dicho potencial. *Hint!*: De la definición para v , usted sabe que el agua se moverá de menor a mayor potencial.

Nos interesa calcular el potencial de velocidades para cada punto al interior del siguiente dominio:



Sabemos que el agua no escapa por los bordes marcados con la línea de mayor grosor, por lo que el valor de la derivada normal en dichos bordes es nulo. El agua ingresa a nuestro dominio por el sector derecho (i) teniendo una rapidez igual a $0,5[m/s]$. Finalmente, el agua abandona nuestro dominio por el sector inferior (ii). Consideraremos el potencial de velocidades nulo en el sector de salida del agua (ii). En otras palabras, tenemos condiciones de borde tipo *Neumann* para todo el dominio con la única excepción del borde inferior, donde la condición es de tipo *Dirichlet*.

1. (1.0) Indexe convenientemente el dominio utilizando un único índice k distinto para cada punto en el interior del dominio. Debe utilizar la discretización indicada en la figura. Luego, utilizando dichos índices, escriba las ecuaciones asociadas a los puntos A, B, C, D y E .
2. (0.6) Considerando la información dada sobre el movimiento del agua, bosqueje:
 - Un gráfico de superficie con la forma esperada para el potencial de velocidades.
 - Un gráfico de flechas mostrando el campo de velocidades esperado en cada celda.
 - Un gráfico de líneas de campo (*field line representation*) para el campo de velocidades.
 - *Nota:* Se está evaluando la forma esperada de la solución, no valores numéricos específicos.

Problema 3

1. (0.6) Dibuje 2 árboles de geometría sólido constructiva que generen la figura siguiente. Considere que usted dispone de las figuras básicas círculo y triángulo. Su árbol debe ignorar las transformaciones lineales básicas.

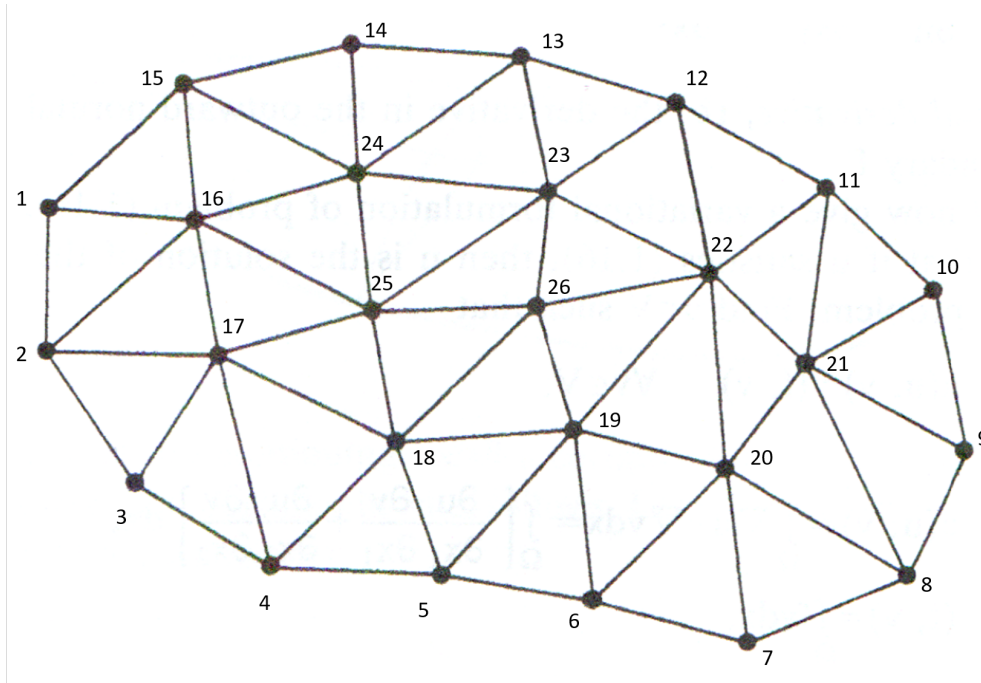


2. (0.8) Describa cada término de la ecuación de Rendering e indique brevemente por qué es una expresión difícil de calcular.

$$L_o(p, v) = L_e(p, v) + \int_{l \in \Omega} f(l, v) L_o(r(p, l), -l) (n \cdot l)^+ dl$$

Problema 4

Considere que se cumple la ecuación de Poisson para la temperatura, i.e. $\nabla^2 T = f$, sobre el siguiente dominio discretizado.



- Los nodos entre el 1 y el 15 se encuentran en el borde del dominio y tienen asociada una condición de borde tipo Dirichlet igual a 0° C .
- En el interior del triángulo formado por los nodos 23, 24 y 25 se encuentra una fuente térmica puntual, su efecto es modelado por la función f (lado derecho de la ecuación de Poisson).
- La temperatura máxima que genera dicha fuente alcanza los 100° C en el punto donde está localizada.

Queremos aplicar el método de elementos finitos para resolver el problema. Al respecto:

1. (0.7) Escriba las ecuaciones asociadas a los nodos 21 y 22. Deje expresado en términos de coeficientes, sin calcular dichas integrales. Ubique estas ecuaciones sobre un sistema lineal $A\epsilon = b$ escribiendo coeficientes e incógnitas donde corresponda. ¿Qué tamaño tienen A y b en este problema?
2. (0.3) Bosqueje sobre el dominio 3 iso-líneas para una posible temperatura solución al problema. *Observaciones:* (i) Puede dibujar sobre esta misma página y entregarla. (ii) Las iso-líneas pedidas son solo aproximaciones de forma, no necesita realizar cálculos.

Formulario Control 3

$$u(\bar{x} \pm h) = u(\bar{x}) \pm hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) \pm \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + O(h^4)$$

$$\frac{1}{h_x^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) = f_{i,j}$$

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \quad D_-u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} \quad D_0u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h}$$

$$D^2u(\bar{x}) = \frac{1}{h^2}[u(\bar{x} - h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} + h)] \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx$$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$V \approx \sum A_{ij} \Delta z_{ij}$$

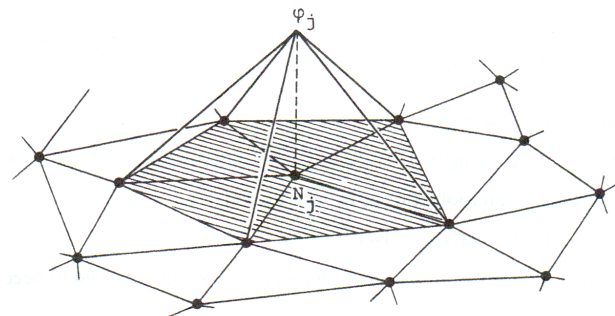
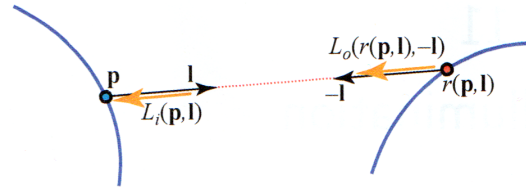
Dirichlet: $u(x) = \alpha(x)$ Neumann: $\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \beta(x)$ $V - E + F - H = 2(C - G)$

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$L_o(p, v) = L_e(p, v) + \int_{l \in \Omega} f(l, v) L_o(r(p, l), -l) (n \cdot l)^+ \, dl$$

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \varphi_i(x) \quad \varepsilon_i = u_h(x_i)$$

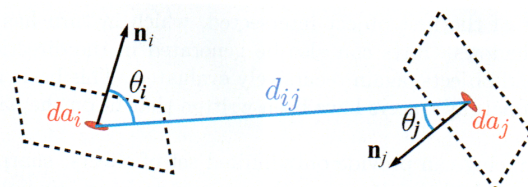
$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j) \quad j = 1, \dots, m$$



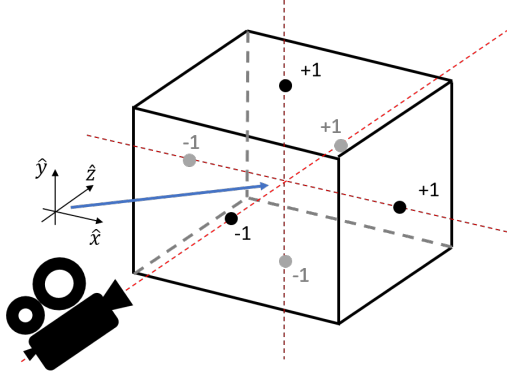
$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

$$B_i = B_i^e + \rho_{ss} \sum_j F_{ij} B_j$$

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} V(i, j) \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi d_{ij}^2} \, da_j \, da_i$$



Formulario Control 2



Vertex	
Point	position
FaceRef	face

Face	
VertexRef	vertex[3]
FaceRef	neighbor[3]

Vertex		Edge	
Point	position	VertexRef	vertex[2]
EdgeRef	edge	FaceRef	face[2]
		EdgeRef	next[2]
		EdgeRef	prev[2]

Face	
EdgeRef	edge

Vertex		Halfedge	
Point	position	VertexRef	vertex
HalfedgeRef	halfedge	FaceRef	face
		HalfedgeRef	next
		HalfedgeRef	prev
		HalfedgeRef	opposite

Face	
HalfedgeRef	halfedge

$$M_{Ortografica}(l, r, b, t, n, f) = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{Frustum}(l, r, b, t, n, f) = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{Perspective}(\theta, A, n, f) = M_{Frustum}(-h_w, h_w, -h_h, h_h, n, f)$$

$$h_h = n \tan \pi \frac{\theta}{360}$$

$$h_w = h_h A$$

$$V = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & -e \cdot s \\ u'_x & u'_y & u'_z & -e \cdot u' \\ -f_x & -f_y & -f_z & e \cdot f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \frac{a - e}{\|a - e\|}$$

$$s = f \times u$$

$$u' = s \times f$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{K}_a \mathcal{L}_a + \frac{1}{k_c + k_l d + k_q d^2} (\mathcal{K}_d \mathcal{L}_d (l \cdot n) + \mathcal{K}_s \mathcal{L}_s (v \cdot r)^\alpha)$$

$$d = \|Q - P\|$$

$$\mathbf{f} \quad \mathbf{v}/\mathbf{v}t/\mathbf{v}n \quad \mathbf{v}/\mathbf{v}t/\mathbf{v}n \quad \mathbf{v}/\mathbf{v}t/\mathbf{v}n$$

$$n_v = \frac{\sum_{\text{caras vecinas } c} n_c}{\|\sum_{\text{caras vecinas } c} n_c\|}$$

Formulario Control 1

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \theta \text{ anti-horario}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$H_{xz}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(T_x, T_y, T_z) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Q(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}}_{T(t)}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & T_1 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i = \frac{1}{2}(P_{i+1} - P_{i-1})$$

$$C_i(t) = \begin{bmatrix} P_{i-1} & P_i & P_{i+1} & P_{i+2} \end{bmatrix} M_{CR} T(t)$$

$$M_{CR} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{T_0}{3}$$

$$P_2 = P_3 - \frac{T_3}{3}$$

$$t' = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad t' \in [0, 1]$$