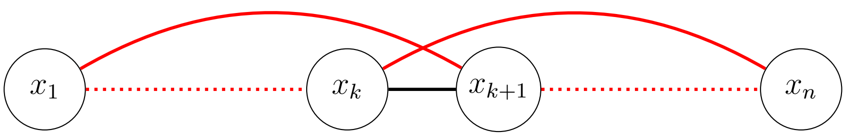
Problema: Sea G una gráfica conexa , demuestre que existe una trayectoria de tamaño $\min(2\delta, n-1)$.

Solución:

Supondremos que $\delta \geq 2$ pues si $\delta = 1$ la gráfica es K_2 y es trivial.

Lo haremos por contradicción, supongamos que no, sea $P = x_1, x_2, \ldots, x_m$ una trayectoria de longitud máxima, con $m \leq \min(2\delta, n-1)$. Es claro que todos los vecinos de x_1 y x_m están en P. Supongamos que para cada vecino x_k de x_m se cumple que x_{k+1} no es vecino de x_1. Entonces x_1 tiene a lo más $(m-1) - \deg(x_n)$ vecinos. Concluimos que $\deg(x_1) + \deg(x_m) \leq m - 1 < 2\delta$, una contradicción. Por lo tanto existe un ciclo C con la misma longitud que P (explicitamente es el ciclo $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}, x_1$).



Por hipótesis tenemos que C no contiene todos los vértices de G, como G es conexa existe un vértice de C conectado a un vértice fuera de C. Esto es una contradicción, pues nos permite construir una trayectoria más grande que P.