

# Entrenamiento combinatoria 15 de julio de 2021

- Sea  $M$  el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ . Encuentre el menor entero positivo  $k$  tal que cualquier subconjunto  $A$  de  $M$  con  $k$  elementos tiene tres elementos distintos  $a, b, c$  tal que  $a + b, b + c$  y  $c + a$  están todos en  $A$ .
- Sea  $N \geq 4$  un entero positivo. Dos jugadores, Alicio y Bernarda están construyendo una secuencia, añadiendo elementos de forma alternada. En el primer turno Alicio puede añadir 1 o  $-1$ , en el siguiente turno Bernarda puede añadir 2 o  $-2$ , después Alicio puede añadir 3 o  $-3$  etc. El ganador es el primero en hacer que la suma sea un múltiplo de  $N$ . Encuentre quien es el ganador en términos de  $N$ .

- Determine el mayor entero positivo  $N$  tal que cada arreglo de  $5 \times 5$  con los enteros del 1 al 25 (sin repetir) contiene un subtablero de  $2 \times 2$  con suma el menos  $N$ .
- Alicia y Bernarda juegan un juego. Inicialmente se coloca un montón de  $i$  piedras sobre cada entero  $i$  del 1 al  $n$ . Inicialmente Alicia selecciona un entero y quita una piedra de ese montón. En cada turno un jugador puede elegir un entero adyacente al anterior y retirar una piedra de ese montón. El primer jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Encuentre quien tiene la estrategia ganadora.

- Se colorea las aristas de la gráfica  $p$ -partita completa  $K_{n,n,\dots,n}$  con  $p$  colores distintos. Para cada color  $i$  sea  $c_i$  el tamaño de la componente conexa más grande cuando consideramos las aristas de color  $i$ . Encuentre el menor valor que puede tener  $\max_{i=1}^n c_i$
- Sea  $S$  un conjunto de enteros positivos tal que cada uno tiene exactamente 100 dígitos en base 10. Decimos que un elemento de  $S$  es atómico si no es divisible entre la suma de dos elementos (no necesariamente distintos) de  $S$ . Si  $S$  contiene a lo más 10 átomos, cual es la mayor cantidad de elementos que puede haber en  $S$ ?