Tarea 2
Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
FI3104

Jorge Gacitúa Gutiérrez
17.471.560-2

01 de Octubre 2015

1 Introducción

Una Partícula de masa m rebota contra una superficie de que oscila sinusoidalmente con amplitud A y frecuencia ω de manera inelastica. Se desea encontrar las soluciones del sistema, es decir, determinar la velocidad y la posición de la partícula luego de cada rebote.

2 Metodología

Se crearon las funciones que determinan la posición y la velocidad tanto del piso como de la partícula.

- Posición de la partícula:

$$Y_p(t) = H_n + V_n \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

- Velocidad de la partícula:

$$V_p(t) = V_n - g \cdot t$$

- Posición de la superficie:

$$P_s(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t)$$

- Velocidad de la superficie:

$$V_s(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t)$$

Se tiene además que la velocidad de la partícula un instante luego del choque (t^*) será:

$$v'_p(t^*) = (1+\eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*)$$

Para determinar el tiempo de choque definimos una nueva función llamada distancia, la cual determina la distancia vertical a la que se encuentra la partícula de la superficie:

$$distancia(t) = Y_p(t) - P_s(t)$$

Para una mayor sencillez se adimencionaliza el problema haciendo $g = 1$, $m = 1$ y $A = 1$ además se ubicara el eje de cordenadas de tal forma que $P_s(t) \in [0, 2]$, con esto el sistema de equaciones que utilizaremos para este problema será:

$$Y_p(t) = H_n + V_n \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2 \tag{1}$$

$$V_p(t) = V_n - t \tag{2}$$

$$P_s(t) = sin(\omega \cdot t) + 1 \tag{3}$$

$$V_s(t) = \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \tag{4}$$

$$v'_p(t^*) = (1+\eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*) \tag{5}$$

$$distancia(t) = Y_p(t) - P_s(t) \tag{6}$$

Luego se requirió determinar el tiempo de choque (t^*), para esto se decidió usar la función "brentq" de la librería numpy.optimize para encontrar el tiempo donde la función "distancia" se volvía cero. Se escogió este método ya que es rápido y nos asegura la convergencia si estamos en el intervalo correcto de evaluación.

Para utilizar este método es necesario darle dos valores cercanos a la raíz tal que la función evaluada en estos puntos tenga signo distinto, esto se puede realizar con un while buscando hasta encontrar un cambio de signo, sin embargo, esta puede ser una opción muy lenta.

Pera tener una estimación del tiempo de choque se buscó un relación a partir de la ecuación 1

$$Y_p(t_e) = 0 = H_n + V_n \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow t_a^2 - 2V_n \cdot t_a - 2H_n = 0$$

$$\Rightarrow t_a = \frac{2V_n \pm \sqrt{4V_n^2 + 8H_n}}{2} = V_n \pm \sqrt{V_n^2 + 2H_n}$$

La cantidad dentro de la raíz es mayor que V_n, luego solamente tiene sentido físico la solución $t_a = V_n + \sqrt{V_n^2 + 2H_n}$. t_m corresponde a tiempo que le toma a la partícula subir desde H_n y bajar hasta 0, Claramente este tiempo no será necesariamente el tiempo de choque ya que podría suceder un poco antes pero nunca antes de alcanzar una altura 2, luego de similar forma:

$$Y_p(t_e) = 2 = H_n + V_n \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow t_a^2 - 2V_n \cdot t_a - 2H_n + 4 = 0$$

$$\Rightarrow t_a = \frac{2V_n \pm \sqrt{4V_n^2 + 8H_n - 16}}{2} = V_n \pm \sqrt{V_n^2 + 2H_n - 4}$$

Estos tiempos nos entregan el rango máximo donde puede ocurrir un choque, de ahora en adelante los llamaremos t_1 y t_2

$$t_1 = V_n + \sqrt{V_n^2 + 2H_n - 4} \tag{7}$$

$$t_2 = V_n + \sqrt{V_n^2 + 2H_n} \tag{8}$$

Pese a que el rango de tiempos es aparentemente valido para cualquier caso existen revotes que no estan siendo considerados, y estos son cuando la velocidad de la partícula no es lo suficientemente alta como para alcanzar la altura de 2 antes que la superfie, es decir cuando $V_n < \omega$

por lo tanto se cumple que el tiempo que se demora la particula en alcanzar una altura máxima de 2 es:

$$t = \frac{D}{V_n(t)} = \frac{2 - Y_n}{V_n - t} \Rightarrow t^2 - V_n \cdot t - Y_n + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{V_n \mp \sqrt{V_n^2 + 4Y_n - 8}}{2}$$

Luego el tiempo maximo donde se producira este choque es:

$$t_2 = \frac{V_n + \sqrt{V_n^2 + 4Y_n - 8}}{2} \tag{9}$$

Con esto hemos definido dos tipos de rebotes, los de largo y corto periodo, por consiguiente durante la rutina que nos permite determinar la posicion la la velocidad de la particula luego del segudo rebote primero comprobaremos si se cumplen la condiciones para que se produzca un rebote de corto periodo ($V_p < V_s$) de lo contrario el rebote será de periodo largo.

Para comprobar que el método funcionaba se graficaron las posiciones del suelo y de la partícula versus el tiempo durante 5 rebotes además de crear una linea vertical para cada tiempo de choque.

Usando las condiciones iniciales:

- $t = 0$
- $P_s = 1$
- $V_s = \omega$
- $Y_p = 1$
- $V_p = 2 \cdot V_s = 2\omega$
- $\eta = 0.15$

Se graficó la velocidad de la partícula luego del choque vs el número de choques durante 100 iteraciones para las frecuencias $\omega_1 = 1.66$, $\omega_2 = 1.68$ y $\omega_3 = 1.70$. Con esto se determinó el número de choques necesarios (N_{relax})para que el sistema llegue a un equilibrio, es decir, hasta que la velocidad de la partícula se estabilice en un determinado rango.

Finalmente usando $\nu = 0.15$ se graficó la velocidad de la partícula luego estabilizarce entre $2 \cdot N_{relax}$ y $2 \cdot N_{relax} + 49$ para valores de ω entre 1.66 y 1.79 con un espaciado de 0.01. En torno a $\omega = blabla$ se encontró un punto interezante, por lo que se decidió hacer una grilla mas fina entre $blabla - epsilo$ y $blabla + epsilon$ donde el espaciado se cambió a 0.001

3 Resultados

Lamentablemente el programa no funcionó como se esperaba, solo calcula durante el primer rebote, luego de eso no es capaz de encontrar el cero. En la imagen 1 podemos apreciar que se logra determinar muy bien la raíz, pero cuando se itera el algoritmo no converge.

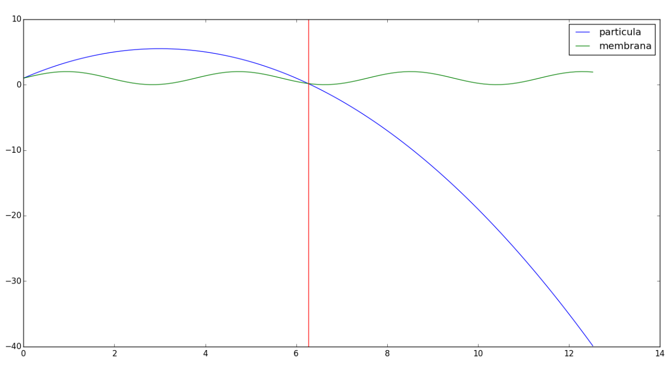

Figure 1: Velocidad vs Tiempo

4 Conclusiones

Se pensaba que el algoritmo era solido y más eficaz que hacerlo con un while ya esta se basaba en suposiciones físicas, sin embargo no se lograron los objetivos deseados.