Funciones de Green y Método de Perron

Jorge Novoa C.

15 de Agosto, 2025

Nota: Este documento lo preparé para el curso *MA5603 - Análisis no Lineal* (Primavera 2025) para que los estudiantes puedan repasar las ideas principales tanto de las funciones de Green como del Método de Perron.

1. Introducción

Dentro de las EDP, el problema introductorio clásico por excelencia es el del laplaciano, ya que es un operador que tiene bastantes buenas propiedades. Con respecto a este operador diferencial, un problema que resulta interesante es saber cuándo existe solución del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

y en particular conocer bajo qué condiciones sobre f, g y Ω podemos asegurar la existencia de soluciones para este problema, y que en particular cumplan con cierta suavidad.

En lo que sigue, estudiaremos los métodos modernos para asegurar la existencia de soluciones para el problema anterior.

2. Preliminares

Primero partiremos desde lo básico: al plantear el problema de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, es decir:

$$\Delta u = 0, \quad \mathbb{R}^n,$$

podemos asumir a priori que esta solución es radial con respecto a algún punto, digamos $y \in \mathbb{R}^n$, de lo cual podemos despejar como se vería tal solución (dependiendo de si $n = 2$ o $n \geq 3$), lo cual nos permite definir a la siguiente función:

Definición 2.1 (Solución fundamental normalizada)**.** Sea $y \in \mathbb{R}^n$, y:

$$\Gamma(x-y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2 \\ -\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

[1] entonces Γ es solución de $\Delta u(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, y la llamaremos como la *Solución fundamental normalizada en* y *al problema de Laplace.*

Proposición 2.2 (Cotas de la solución fundamental)**.** *La solución fundamental normalizada en* y *al problema de Laplace cumple con las siguientes cotas:*

1. $$|D_i\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{n\alpha(n)}|x-y|^{1-n}$$

2. $$|D_{ij}\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{\alpha(n)}|x-y|^{-n}$$

3. $$|D^\beta\Gamma(x-y)| \leq C|x-y|^{2-n-|\beta|}, \quad C = C(n,|\beta|).$$

Demostración. Basta con notar que:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\alpha(n)}(x_i - y_i)|x-y|^{-n},$$

$$D_{ij}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\alpha(n)}\left[|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right]|x-y|^{-n-2}$$

□

Por último, necesitaremos dar un pequeño recordatorio de las identidades de Green vistas en cursos previos:

Proposición 2.3. *(Identidades de Green) Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio con borde* $\mathcal{C}^1$*;* $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$*, entonces tenemos las siguientes identidades:*

$$\int_\Omega v\Delta u + \int_\Omega Du \cdot Dv = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu} \tag{2}$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right) \tag{3}$$

donde ν *es el vector exterior unitario respecto a* $\partial\Omega$*.*

[1] $\alpha(n) :=$ el volumen de la bola unitaria $B_1(0)$ en $\mathbb{R}^n$.

3. Función de Green

La idea de ocupar las identidades de Green es que estas ocupan información del laplaciano de u en el dominio Ω para dar con información respecto al borde, lo cual resulta conveniente con respecto al problema (1), ya que justamente sabemos como debe ser Δu en Ω, y como debe ser u en $\partial\Omega$.

Ahora bien, ¿Porque necesitamos la solución fundamental? Para deducir esto nos basta con notar que las identidades de Green mostradas requieren dos funciones que sean de clase $\mathcal{C}^2$, además, en la identidad (3) sale el laplaciano de ambas funciones, por lo que si tenemos alguna funcion (ya sea u o v) tal que su laplaciano se anule en Ω, estariamos simplificando la ecuación.

En lo que sigue, tomaremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con borde $\mathcal{C}^1$, $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $v = \Gamma(x-y)$ con $y \in \Omega$. Si bien no podemos aplicar (3) para $\Gamma(x-y)$ puesto que para $x = y$ hay una singularidad, nos bastará con considerar $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, ya que de esta manera seguimos teniendo un dominio con borde $\mathcal{C}^1$ y además evitamos cualquier singularidad.

Aplicando la identidad (3) para lo antes mencionado, tendremos que:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)} \Gamma\Delta u &= \int_{\partial\Omega\cup\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right) + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right) \qquad (4)\end{aligned}$$

pero si vamos evaluando los términos, notaremos que[2]:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} &= \Gamma(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial\nu}\\ &= \Gamma(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} |Du\cdot\nu|\\ &\leq \Gamma(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \sup_{\overline{B}_\varepsilon(y)} |Du|\\ &= \Gamma(\varepsilon)(n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}) \sup_{\overline{B}_\varepsilon(y)} |Du|\\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\varepsilon(n\alpha(n)\varepsilon)\sup_{\overline{B}_\varepsilon(y)}|Du|, & n=2\\ -\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}(n\alpha(n)\varepsilon)\sup_{\overline{B}_\varepsilon(y)}|Du|, & n\geq 3\end{cases} \qquad (5)\end{aligned}$$

como se puede observar, (5) en cualquiera de los dos casos tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0$, ya que $\sup_{\overline{B}_\varepsilon(y)} |Du|$ está acotado (recordar que u es de clase $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$), por lo que:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \qquad (6)$$

[2] Acá usamos la identidad conocida de que $|B_R| = \alpha(n)R^n$ (el volumen de la bola de radio R), y que $|\partial B_R| = \alpha(n)nR^{n-1}$.

Por otro lado, notar que en las integrales $\int_{\partial B_\varepsilon(y)}$ se tiene que $\nu = -\frac{x-y}{\varepsilon}$ [3], de forma que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} &= \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\left(D\Gamma \cdot -\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\\ &= \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\left(\frac{|x-y|^{-n}}{n\alpha(n)}(x-y)\cdot -\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\\ &= -\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\end{aligned}$$

pero es conocido que $\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(y)$, de manera que:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -u(y) \tag{7}$$

Con esto, podemos tomar $\varepsilon \to 0$ en (4) y usar (6), (7), obteniendo así la **fórmula de representación de Green**.

Definición 3.1 (Fórmula de representación de Green)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con borde $\mathcal{C}^1$, $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces se tiene que:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) + \int_{\Omega}\Gamma(x-y)\Delta u, \quad y \in \Omega. \tag{8}$$

Con esto ganamos el conocer como es u en Ω (bajo ciertas condiciones) con respecto a su laplaciano en Ω y sus valores en el borde (salvo otros términos).

Ahora bien, si a priori solo quisiéramos saber cómo es u considerando que resuelve (1), podríamos reemplazarlo en la expresión (8) y dar con que u solución de (1) verifica:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(g\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) + \int_{\Omega}\Gamma(x-y)f, \quad y \in \Omega,$$

y acá estaríamos casi listos con el problema de conocer u (al menos bajo ciertas condiciones adecuadas, como las que exigimos previamente), pero acá hay un problema importante, el lado derecho sigue dependiendo de u ya que todavía esta el integrando $\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Por lo tanto, en lo que sigue intentaremos justificar el cómo cancelar ese término de la expresión, para esto daremos la siguiente definición:

[3] ν en este caso es el vector unitario exterior de $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$, no el de $\partial B_\varepsilon(y)$.

Definición 3.2 (Función correctora)**.** Sea $y \in \Omega$, entonces definiremos como *función correctora* en y con respecto a Ω a la función $h_y \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\begin{cases} \Delta h_y(x) = 0, & x \in \Omega, \\ h_y(x) = \Gamma(x-y), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Observación 3.3. La suavidad que le pedimos se puede bajar a $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, ver [4].

Observación 3.4. Es importante notar que nada nos asegura que este problema tenga solución con tal regularidad, el encontrar la funcion correctora es un problema por si mismo.

Considerando a la función correctora h_y en lo que estábamos haciendo previamente, apliquemos la identidad (3) junto a u, de lo cual obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega h_y \Delta u &= \int_{\partial\Omega} h_y \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial h_y}{\partial \nu} \\ &= \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial h_y}{\partial \nu} \end{aligned}$$

es decir:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \left(-\frac{\partial h_y}{\partial \nu} \right) - \int_\Omega h_y \Delta u \tag{10}$$

Con esto ultimo, si definimos a $G(x,y) = \Gamma(x-y) - h_y(x)$ y sumamos (10) a la expresión (8), obtendremos que:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu} + \int_\Omega G \Delta u, \tag{11}$$

de forma que solucionamos el problema que mencionamos antes.

Definición 3.5 (Función de Green)**.** Decimos que:

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - h_y(x),$$

con h_y la función correctora asociada a y, en el dominio Ω, corresponde a la *función de Green asociada al dominio* Ω*.*

Usando (11) podemos dar con una formula para representar a la solución del problema (1), pero todo bajo la condicion de que podamos construir a la funcion de Green asociada a Ω, lo cual como ya vimos previamente depende directamente de poder encontrar las funciones correctoras.

Si la geometría de Ω es sencilla, podemos construir sin tanto problema las funciones de Green, ejemplos de estas construcciones para dominios simples se pueden ver en el Capitulo 2 de [2], como lo es en el caso que Ω es una bola (es importante conocer este caso ya que es fundamental para el método de Perron).

4. Método de Perron

Consideremos el siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

en esta sección, mostraremos una manera de construir soluciones a esta clase de problemas dadas ciertas condiciones sobre g y sobre el dominio Ω.

El problema de determinar la existencia de soluciones de (12) es algo que ha sido importante durante muchos años, y tuvo relación con distintas áreas de las matemáticas (por ejemplo, con el *teorema de mapeos armónicos* de Riemann, ver [3]); a lo largo de todo este periodo en el cual el problema aún no estaba completamente resuelto (o en su mayoría), se pensaba que las restricciones con respecto a los dominios Ω y su frontera que requerían los métodos usados para construir soluciones al problema (12) venían **solamente** de la limitación de estos métodos, más **no** del problema en cuestión.

Esto cambió cuando empezaron a salir ejemplos donde se planteaban problemas donde el dominio era "razonable", pero pese a esto no podía haber existencia de soluciones para el problema (12), como el siguiente:

Ejemplo de Zaremba (1911)

Sea $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < |\}$ el disco unitario, y consideremos a $\Omega = \mathbb{D}\backslash\{0\}$, en este caso tenemos que: $\partial\Omega = \partial\mathbb{D} \cup \{0\}$, y consideremos el problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\mathbb{D}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

entonces si suponemos que existe una solución clásica a este problema ($\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$), esta solución debe ser armónica en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y continua $\mathbb{D}$ con $u(0) = 1$. Como u es acotada en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, por el *teorema de singularidad removible* podemos extender continua y armónicamente a u en $\mathbb{D}$.

Ahora bien, dado que $u \equiv 0$ en $\partial\mathbb{D}$, la extensión debe ser idénticamente 0 en $\mathbb{D}$ (por la unicidad del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$), pero esto contradice que $u(0) = 1$, puesto que u es continua en $\mathbb{D}$ (y por lo tanto coincide con su extensión continua), de manera que no puede existir alguna solución al problema antes mencionado.

4.1. Resultados de funciones armónicas

Teorema 4.1 (1er Teorema de Harnack). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, y sea $(u_j)_j$ una sucesión de funciones armónicas en Ω tales que convergen local-uniformemente en Ω. Entonces la función limite u es armónica en Ω, y además verifica que $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u$ local-uniformemente en Ω para cualquier multiindice α (i.e. $u_j \to u$ en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$).*

Teorema 4.2 (Principio de Harnack). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, y sean $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$ una sucesión no decreciente de funciones armónicas en Ω. Entonces se tiene que:*

- *$u_j(x) \to \infty$ para cada $x \in \Omega$, o bien*
- *$(u_j)_j$ converge local-uniformemente en Ω.*

Para las demostraciones de los teoremas antes mencionados, ver [2], [4], [3], entre otros.

4.2. Funciones Subharmonicas

Definición 4.3. Una función $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ es **subarmonica** en Ω si para cualquier $y \in \Omega$, existe algún $r^* = r^*(y) > 0$ tal que:

$$u(y) \leq \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(y)} u, \quad 0 < r < r^*.$$

algunas de las propiedades esenciales que debemos recordar de las funciones subarmonicas son las siguientes:

Proposición 4.4. *Denotando a $\mathfrak{Sub}(\Omega)$ al conjunto de funciones subarmonicas en Ω, entonces:*

- ***[Principio del Máximo Fuerte]** Si $u \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$ y $u(z) = \sup_\Omega u$ para algún $z \in \Omega$, entonces u es constante.*
- ***[Principio del Máximo Débil]** Si $u \in \mathfrak{Sub}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, y $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω, y $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en Ω.*
- *Si $u_1, u_2 \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$ entonces $\max\{u_1, u_2\} \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$.*
- *Sea $u \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$, $\overline{u} \in \mathcal{C}(\Omega)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{U} \subset \Omega$; entonces si $\Delta\overline{u} = 0$ en U, $\overline{u} = u$ en $\Omega \setminus U$, entonces $\overline{u} \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$.*

Por último, introduciremos un concepto que nos servirá más adelante:

Definición 4.5 (Lift armónico). Sea $u \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$, y sea $U \subset\subset \Omega$. Entonces el lift armónico de u en U es la función $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $u = v$ en $\Omega \setminus U$ y en U resuelve el problema:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & U \\ v = u, & \partial U. \end{cases}$$

Observación 4.6. Notar que por la Proposición (4.4), tenemos que el lift armónico resulta ser subarmonica, y por el principio del máximo se tiene que $u \leq v$ en Ω.

Observación 4.7. Dado que conocemos como son las funciones de Green para una bola (ver [2]), podemos asegurar que existe el lift armónico cuando consideramos a $U = B_r(y)$ con $r > 0$, ya que podemos encontrar v tal que $\Delta v = 0$ en $B_r(y)$ y que $v = u$ en $\partial B_r(y)$, luego es claro que la función:

$$h(x) := \begin{cases} v(x), & x \in B_r(y) \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B_r(y), \end{cases}$$

resulta ser continua en Ω, de manera que si es un lift armónico.

4.3. Solución de Perron

Primero definiremos a la **(sub) Familia de Perron** como la clase:

$$S_g = \{v \in \mathfrak{S}\mathrm{ub}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} \leq g\}$$

y definiremos a la **(sub) Solución de Perron** $P_\Omega g : \Omega \to \mathbb{R}$ por:

$$(P_\Omega g)(x) = \sup_{v \in S_g} v(x), \quad x \in \Omega.$$

Proposición 4.8. *Sea $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada, y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, entonces:*

1. $S_g \neq \emptyset$
2. $u(x) = \sup_{v \in S_g} v(x) < \infty$ *para todo $x \in \Omega$ (es decir, la solucion de Perron esta bien definida).*

Demostración.

1. Cualquier función constante, digamos c, satisface que $c \in \mathfrak{S}\mathrm{ub}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y que $c|_{\partial\Omega} \leq g$ si es que $c \leq \text{mín}_{\partial\Omega}\, g$, pero dado que g es acotada tenemos que existe tal c constante, por lo cual $S_g \neq \emptyset$.
2. Sea $v \in S_g$, entonces dado que $v|_{\partial\Omega} \leq g \leq \sup_{\partial\Omega} g$, por el Principio del Máximo tenemos que $v \leq \sup_{\partial\Omega} g$ en todo Ω, de forma que

$$\sup_{v \in S_g} v(x) \leq \sup_{\partial\Omega} g < \infty, \quad \forall x \in \Omega,$$

concluyendo así que la Solución de Perron esta bien definida.

□

Algo que nos debemos preguntar es si es consistente la solución de Perron, en el sentido de que si tenemos una solución de (12) bajo las condiciones recién mencionadas (g acotada, Ω dominio acotado), entonces esta sea la solución de Perron:

Proposición 4.9. *Sea* $w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *tal que:*

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \Omega, \\ w = g, & \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces $w = P_\Omega$.

Demostración. Es directo que $w \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$, de forma que $w \leq P_\Omega g$ en Ω. Por el otro lado, por el Principio del Máximo Débil tenemos que para cualquier $v \in \mathfrak{Sub}(\Omega)$ se tenga que $v \leq w$ en Ω, y por lo tanto en particular $P_\Omega g \leq w$ en Ω, concluyendo así que $w = P_\Omega g$. □

Teorema 4.10 (Perron (1923))**.** *Sea* Ω *un abierto acotado, y sea* $g \in L^\infty(\partial\Omega)$*, entonces* $u = P_\Omega g$ *verifica que* $\Delta u = 0$ *en* Ω.

Demostración. Sea $x \in \Omega$ arbitrario, y consideremos a $B = B_r(x)$ una bola (abierta) tal que $\overline{B} \subset \Omega$; notar entonces que nos bastara con mostrar que u es armónica en B para concluir que u es armónica en Ω, dada la arbitrariedad de la bola B.[4]

Sea una sucesión supremizante $(u_k)_k$ del problema $\sup_{v \in S_g} v(x)$, es decir, $u_k(x) \to u(x) = \sup_{v \in S_g} v(x)$.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $(u_k)_k$ es no decreciente, ya que en caso contrario nos basta con ir cambiando u_k por $\max\{u_1, \ldots, u_k\} \in S_g$ (acá usamos la Proposición (4.4)), y esta sigue verificando que converge a $u(x)$ (puntualmente), ya que:

$$u_k(x) \leq \max\{u_1, \ldots, u_k\}(x) \leq u(x).$$

Sea entonces $U_k \in \mathcal{C}(\Omega)$ el lift armónico en B de u (el cual sabemos que existe y esta bien definido por la Observación (4.7)), entonces también es claro que $u_k \leq U_k$ y que además $U_k \in S_g$ (ya que $U_k|_{\partial\Omega} = u_k|_{\partial\Omega} \leq g$), de manera que en particular tendremos que $U_k(x) \leq u(x)$, por lo cual $U_k(x) \to u(x)$ (recordar que esto es solo puntualmente para x, el cual esta fijo).

Ahora bien, podemos afirmar que $U_1 \leq U_2 \leq \ldots$ en B; para ver esto notar que por el Principio del Máximo, dado que $U_k|_{\partial B} = u_k|_{\partial B} \leq u_{k+1}|_{\partial B} = U_{k+1}|_{\partial B}$, tendremos que $U_k \leq U_{k+1}$ en B.

Con esto, tenemos que la sucesión $(U_k)_k$ es una sucesión no decreciente de funciones armónicas en B, por lo cual podemos aplicar el Principio de Harnack (Teorema (4.2)), de lo cual concluimos que solo es valida la segunda alternativa, puesto que al ser $U_k \in S_g$, tenemos que $U_k \leq \inf_{\partial\Omega} g < \infty$ en Ω, y por lo tanto en particular para $\overline{B} \subset \Omega$, esto para cualquier k.

[4]Basta con recordar la equivalencia entre ser armónica y verificar la propiedad de la media para argumentar esto.

Por lo tanto podemos concluir que $(U_k)_k$ converge local-uniformemente en B, de forma que por el Teorema (4.1) podemos concluir que $U_k \to U$ local-uniformemente en B con U armónica en B; en particular, tendremos que $U(x) = u(x)$ (puesto que $U_k(x) \to u(x)$).

En lo que queda, mostraremos que $U = u$ en B, para esto primero recordemos que $U_k \in S_g$, por lo tanto, $U_k(z) \leq u(z)$ para cualquier $z \in \Omega$, y en particular: $U_k(z) \leq u(z)$ para $z \in B$, de manera que $U(z) \leq u(z)$ en B.

Sea $y \in B$ arbitrario, por lo recién mencionado tenemos que $U(y) \leq u(y)$, y consideremos a la sucesión supremizante en S_g tal que $v_k(y) \to u(y)$.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $v_k \geq U_k$ en Ω, ya que de lo contrario nos basta con cambiar v_k por $\max\{v_k, U_k\}$ (esta ultima sigue convergiendo a $u(y)$ puesto que $\lim_k U_k(y) = U(y) \leq u(y)$, de manera que si la igualdad se tiene estaríamos listos, y si no se tiene, eventualmente la sucesión de $U_k(y)$ va a ser mayorada por $v_k(y)$, la cual converge a $u(y)$).

Sea entonces V_k el lift armónico asociado a v_k, es claro que nuevamente este verificara que $V_k \in S_g$, $V_k(y) \to u(y)$, $(V_k)_k$ no decreciente y que $v_k \leq V_k$ en Ω, por lo que nuevamente por los Teoremas (4.2) y (4.1) podemos concluir que $V_k \to V$ local-uniformemente en B con V armónica en B, además de que $V(y) = u(y)$.

Pero notar que teníamos $v_k \leq V_k$ en Ω y que $U_k \leq v_k$ en Ω por construcción, por lo que $U_k \leq V_k$ en Ω, por lo que $U \leq V$; además, dado que $V_k \in S_g$, tendremos que $U_k \leq V_k \leq u$ en Ω, de manera que en particular $U(x) = V(x) = u(x)$ (puesto que $U_k(x) \to u(x)$).

Con esto estaríamos listos, ya que si consideramos a la función $U - V$, esta es armónica en B, verifica que $U - V \leq 0$ en Ω (y en particular en ∂B) y además cumple con que $U(x) - V(x) = 0$ con $x \in B$, por lo cual, usando el Principio del Máximo Fuerte obtenemos que $U - V \equiv 0$ en B, lo cual implica que $U(y) = V(y) = u(y)$; dada la arbitrariedad de $y \in B$, se concluye que $U = u$ en B con U armónica en B, y por lo tanto concluyendo así que $u = P_\Omega g$ es armónica en Ω.

□

Solo nos quedaría verificar que $u = P_\Omega g$ cumpla con $u|_{\partial\Omega} = g$, ya que a priori nada nos debería asegurar que para $z \in \partial\Omega$ se tenga que $\lim_{x\to z}(P_\Omega g)(x) = g(z)$, como se mostró en el *Ejemplo de Zaremba* (4).

Definición 4.11 (Barrera)**.** Sea $x_0 \in \partial\Omega$, decimos que w es una barrera local en x_0 si existe una vecindad U de x_0 tal que $w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y:

1. w es superarmónica [5] en Ω
2. $w(x_0) = 0$ y $w(x) > 0$ para todo $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$.

[5] Es similar a la definición de subarmonica, solo que cambiando la desigualdad

Definición 4.12 (Punto regular)**.** Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Decimos que x_0 es un *punto regular* (con respecto al laplaciano), si existe una barrera en x_0.

Teorema 4.13 (Teorema de Wiener)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Si x_0 es un punto regular (c/r al laplaciano) y g es continua en x_0, entonces se tiene que:*

$$\lim_{x \to x_0, x \in \Omega} (P_\Omega g)(x) = g(x_0).$$

Demostración. Sea w la barrera en el punto x_0. Fijemos $\varepsilon > 0$, entonces dada la continuidad de g en x_0 tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $y \in \partial\Omega$ se cumpla que $|y - x_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| \leq \varepsilon$.

En lo que sigue, demostraremos que existe un $K > 0$ constante tal que:

$$g(x_0) - \varepsilon - Kw(x) \leq (P_\Omega g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon + Kw(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{13}$$

Sea $u(x) := g(x_0) - \varepsilon - Kw(x)$, entonces esta función es subarmonica en virtud de que w es superarmonica en Ω, además notar que:

1. Si $y \in \partial\Omega$ tal que $|y - x_0| < \delta$, usando que $w \geq 0$:
$$u(y) = g(x_0) - \varepsilon - Kw(x) \leq g(x_0) - \varepsilon \leq g(y)$$
2. Si $y \in \partial\Omega$ tal que $|y - x_0| \geq \delta$, entonces definiendo $M := \|g\|_\infty$ y tomando K tal que $-Kw(y) \leq -2M$ para todo $y \in \partial\Omega$ con $|y - x_0| \geq \delta$, tendremos que:
$$u(y) \leq g(x_0) - \varepsilon - 2M \leq -M \leq g(y)$$

por lo cual $u|_{\partial\Omega} \leq g$, esto junto con que $u \in \mathfrak{Sub}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ nos permite concluir que $u \in S_g$, y por lo tanto $u(x) \leq (P_\Omega g)(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Consideremos ahora a $v(x) := g(x_0) + \varepsilon + Kw(x)$, recordemos que estamos tomando $K > 0$ tal que $2M \leq Kw(y)$ para todo $y \in \partial\Omega$ tal que $|y - x_0| \geq \delta$, entonces notar nuevamente que:

1. Si $y \in \partial\Omega$ tal que $|y - x_0| < \delta$, entonces usando que $w \geq 0$ en $\overline{\Omega}$:
$$v(y) = g(x_0) + \varepsilon + Kw(x) \geq g(x_0) + \varepsilon \geq g(y),$$
2. Si $y \in \partial\Omega$ tal que $|y - x_0| \geq \delta$, entonces:
$$v(y) \geq g(x_0) + \varepsilon + 2M \geq g(y).$$

de manera que $v(x) \geq g(x)$ en todo $\partial\Omega$, y por lo tanto, aplicando el Principio de Comparación [6], tendremos que $v \geq f$ en $\overline{\Omega}$ para todo $f \in S_g$, por lo que en particular $(P_\Omega g)(x) \leq v(x)$ en todo $x \in \overline{\Omega}$.

Con esto acabamos de probar (13), y por lo tanto, tomando $x \to x_0$, $x \in \Omega$, y usando que $w(x_0) = 0$, concluimos que $g(x_0) - \varepsilon \leq \lim_{x \to x_0, x \in \Omega} (P_\Omega g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon$, y esto para $\varepsilon > 0$ arbitrario, por lo tanto concluimos lo pedido.

□

[6] O principio del máximo, son equivalentes.

Con todo lo anterior podemos, finalmente, dar con el resultado que esperábamos con respecto al problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = g & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

Corolario 4.14. *Para cualquier $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ el problema* (14) *admite una solución $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, la cual existe y es única,* ***si y solamente si*** *todos los puntos en $\partial\Omega$ son regulares.*

Demostración. Si el problema (14) admite una solución para cualquier g continua (en $\partial\Omega$), nos basta con tomar $x_0 \in \partial\Omega$ arbitrario y considerar a solución u de (14) con $g(x) = |x - x_0|$, de manera que la solución u_{x_0} resulta ser una barrera en x_0, puesto que:

1. u_{x_0} es superarmonica en Ω al ser armónica.
2. $u_{x_0}(x_0) = |x_0 - x_0| = 0$
3. Dado que $u_{x_0}|_{\partial\Omega}(x) = |x - x_0| \geq 0$ en todo $\partial\Omega$, por el principio del Máximo fuerte tenemos que $u|_{x_0} > 0$ en Ω, y dado que $u_{x_0}(x) = 0$ con $x \in \partial\Omega \Leftrightarrow x = x_0$, tenemos que $u_{x_0}(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$.

de manera que el punto $x_0 \in \partial\Omega$ es un punto regular, y dado que x_0 era arbitrario, podemos concluir que todos los puntos en $\partial\Omega$ son regulares.

Por el otro lado, si $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ y todos los puntos son regulares, entonces por el Teorema (4.10) se tiene que $u(x) = (P_\Omega g)(x)$ cumple con $\Delta u(x) = 0$ en Ω, de forma que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$[7]; y por el Teorema (4.13) tenemos que:

$$\lim_{x \to x_0, x \in \Omega} (P_\Omega g)(x) = g(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\Omega,$$

de manera que en particular tendremos que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y $u|_{\partial\Omega} = g$, concluyendo así que u es solución de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ de (14), y su unicidad es directa del principio del máximo.

□

[7] Toda función armónica es de esta clase, de hecho son real analíticas.

4.4. Puntos regulares ¿Como identificarlos?

Si bien ya respondimos dudas importantes sobre como identificar cuando hay soluciones para el problema de Dirichlet con ciertas condiciones de suavidad, esto dependía de que el dominio Ω verificase que todos los puntos en su frontera fuesen regulares, pero esto abre una nueva pregunta ¿Cuales son los dominios Ω los cuales todos sus puntos en su frontera son regulares?

En lo que sigue responderemos esta pregunta dando una condición suficiente para satisfacer esta condición, para mas condiciones y ejemplos ver [1],[3].

Definición 4.15 (Propiedad de la bola exterior)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, entonces decimos que Ω satisface la *propiedad de la bola exterior* si para todo punto $x \in \partial\Omega$, existe algún $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ y un $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ y que $\overline{B}_r(y) \cap \overline{\Omega} = \{x\}$.

Proposición 4.16. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $n \geq 2$, y sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que en x_0 se satisface la propiedad de la bola exterior (puntualmente), entonces x_0 es un punto regular (c/r al laplaciano).*

Demostración. Sea $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ y que $\overline{B}_{r_0}(y_0) \cap \overline{\Omega} = \{x\}$, entonces definamos a la función:

$$w(x) = \begin{cases} \log \frac{|x-y_0|}{r_0}, & n = 2 \\ r_0^{-(n-2)} - |x - y_0|^{-(n-2)}, & n \geq 3 \end{cases}$$

es claro que esta función es superarmonica en $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$, por lo que en particular lo es en Ω, y además como $y_0 \notin \overline{\Omega}$ tenemos que $w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Verifica que $w(x_0) = 0$ ya que en x_0 tenemos que $|x_0 - y_0| = r_0$, y cumple con que $w(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ ya que $(\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}) \cap \overline{B}_{r_0}(y_0) = \emptyset$, de manera que para todo $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, $|x - y_0| > r_0$, dando así que:

$$\frac{|x - y_0|}{r_0} > 1, \quad r_0^{-(n-2)} - |x - y_0|^{-(n-2)} > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}.$$

concluyendo así que $w(x)$ es barrera en x_0. □

Ejercicio: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, entonces Ω satisface la propiedad de la bola exterior. ***Hint: usar Hahn-Banach***.

Observación 4.17. Esto ultimo implica que para todo problema (14) con $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ y Ω abierto, acotado y convexo, se verifica que existe una solución $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Referencias

[1] Annalisa Cesaroni. Introduzione alle equazioni alle derivate parziali: Metodo di perron. Lecture notes, Laurea Magistrale in Matematica. Unpublished manuscript.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, second edition edition, 2010.

[3] Tsogtgerel Gantumur. Perron's method. Lecture notes, 2018. Available at McGill University.

[4] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224 of *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, reprint of the 1998 edition edition, 2001.