Revisión del paper *"The proof of the Lane-Emden conjecture in 4 space dimensions"*

Jorge Novoa C.

7 de Junio, 2025

1. Introducción

En el paper [7] se demuestra que la conjetura sobre la no existencia de soluciones positivas para sistemas elípticos tipo Lane-Emden cuando los exponentes están abajo de la hiperbola crítica de Sobolev es cierta en dimension $n = 4$; este resultado solo había sido descubierto, hasta antes de la publicación del resultado de Souplet, para soluciones radiales o para dimensiones con $n \leq 3$, en otros casos se había demostrado que para ciertas subregiones bajo la hipérbola crítica se tenía la no existencia.

Para ilustrar a qué corresponde la conjetura, debemos considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \Delta u + v^p = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \Delta v + u^q = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

entonces la conjetura vendría a ser la siguiente:

Conjetura: Si $p, q > 0$, tales que el par (p, q) sea subcrítico, es decir:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n}, \tag{2}$$

entonces el sistema (1) no tiene soluciones clásicas positivas
Considerando esto, el resultado principal del paper [7] es el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea $n = 3$ o 4, y $p, q > 0$ tal que (p, q) son subcríticos, entonces el sistema (1) no tiene soluciones clásicas positivas.*

En particular, si definimos a los siguientes parámetros:

$$\alpha = \frac{2(p+1)}{pq-1}, \quad \beta = \frac{2(q+1)}{pq-1}, \quad (\text{si } pq > 1)$$

tenemos que cuando $n \geq 3$, (2) es equivalente a

$$\alpha + \beta > n - 2, \tag{3}$$

Con esto aclarado, de demostrara en particular el siguiente Teorema, en el cual la desigualdad se satisface trivialmente para $n = 3$ o $n = 4$.

Teorema 1.2. *Si $n \geq 5$, y $p, q > 0$ son tales que satisfacen* (2) *y además:*

$$\text{máx}(\alpha, \beta) > n - 3 \tag{4}$$

entonces el sistema (1) *no tiene soluciones clásicas.*

Observación 1.3. La región del Teorema 1.2. para $n \geq 5$ no está contenida (ni contiene) a la región bajo la curva crítica mostrada en [1].

Observación 1.4. Fue demostrado por Poláčik, Quittner y Souplet en [5] que para un n dado y $p, q > 0$ tal que $pq > 1$, la existencia de una solución clásica positiva de (1) implica la existencia de una solución clásica positiva y acotada, esto se usara como parte de la demostración.

2. Preliminares

Se denotará a la bola abierta centrada en 0 con radio R por B_R, además de la notación usual:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$$

Durante este paper se usarán coordenadas esféricas (r, θ) con $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ (para $x \neq 0$). Para una función $w(x)$ de $x \in \mathbb{R}^N$ escribiremos:

$$w(x) = w(R, \theta)$$

y además usaremos las siguientes notaciones para las integrales de volumen y superficie:

$$\int_{B_R} w = \int_{B_R} w(x)dx, \quad \int_{S^{n-1}} w(R) = \int_{S^{n-1}} w(R, \theta)d\theta,$$

2.1. Desigualdades funcionales

Lema 2.1 (Desigualdades de Sobolev en S^{n-1})**.** *Sea $n \geq 2$, $j \geq 1$ un entero y $1 < k < \lambda \leq \infty$, $k \neq (n-1)/j$. Para $w = w(\theta) \in W^{j,k}(S^{n-1})$ tenemos:*

$$\|w\|_\lambda \leq C(\|D_\theta^j w\|_k + \|w\|_1),$$

donde $C = C(j, k, n) > 0$ y:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{\lambda} = \frac{j}{n-1}, \quad \text{si } k < (n-1)/j,$$
$$\lambda = \infty, \quad \text{si } k > (n-1)/j.$$

Lema 2.2 (Estimaciones L^p en B_R). *Sea $1 < k < \infty$, $R > 0$. Para $z = z(x) \in W^{2,k}(B_{2R})$ tenemos:*

$$\int_{B_R} |D_x^2 z|^k \leq C \left(\int_{B_{2R}} |\Delta z|^k + R^{-2k} \int_{B_{2R}} |z|^k \right),$$

con $C = C(k, n) > 0$.

Lema 2.3. *Para $R > 0$ y $z = z(x) \in W^{2,1}(B_{2R})$ tenemos que:*

$$\int_{B_R} |D_x z| \leq CR \int_{B_{2R}} |\Delta z| + CR^{-1} \int_{B_{2R}} |z|,$$

con $C = C(n) > 0$.

2.2. Estimaciones básicas, identidades y propiedades de comparación para soluciones de (1)

Lema 2.4. *Sean $p, q > 0$ con $pq > 1$. Entonces para cualquier solución positiva (u, v) de (1) se tiene que:*

$$\int_{B_R} u^q \leq CR^{n-q\alpha} \quad y \quad \int_{B_R} v^p \leq CR^{n-p\beta}, \quad R > 0,$$

y:

$$\int_{B_R} u \leq CR^{n-\alpha} \quad y \quad \int_{B_R} v \leq CR^{n-\beta}, \quad R > 0,$$

Demostración. Ver Corolario 2.1. y Proposición 2.1. de [6] ■

Lema 2.5. *Sean $p, q > 0$ con $pq > 1$, entonces para cualquier par de soluciones positivas (u, v) de (1) se tiene que:*

$$\int_{B_R} |D_x u| \leq CR^{n-1-\alpha}, \quad y \quad \int_{B_R} |D_x v| \leq CR^{n-1-\beta}, \quad R > 0.$$

Demostración. Veamos la desigualdad para $|D_x u|$, la otra será análoga.

Sea $R > 0$, dado que (u, v) son soluciones positivas clásicas de (1), tenemos que $u, v \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$, y en particular en $W^{2,1}(B_{2R})$, con esto, por la desigualdad del Lema 2.3. tenemos que:

$$\int_{B_R} |D_x u| \leq C_1 R \int_{B_{2R}} |\Delta u| + C_1 R^{-1} \int_{B_{2R}} |u|,$$

Ahora bien, como (u, v) son solución de (1), tenemos que $\Delta u = -v^p$ en $\mathbb{R}^N$, por lo que:

$$\int_{B_{2R}} |\Delta u| = \int_{B_{2R}} |v|^p,$$

y por el Lema 2.4., tenemos que:

$$\int_{B_{2R}} |v|^p = \int_{B_{2R}} v^p \leq C_2(2R)^{n-p\beta},$$

además por el mismo lema podemos dar con:

$$\int_{B_{2R}} |u| = \int_{B_{2R}} u \leq C_3(2R)^{n-\alpha},$$

obteniendo así que:

$$\int_{B_R} |D_x u| \leq C_1C_2R(2R)^{n-p\beta} + C_1C_3R^{-1}(2R)^{n-\alpha},$$

tomando $C' = C'(n,p,q,\alpha,\beta) = \text{máx}\{C_1C_2 2^{n-p\beta}, C_1C_3 2^{n-\alpha}\}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D_x u| &\leq C'RR^{n-p\beta} + C'R^{-1}R^{n-\alpha} \\ &= C'R^{n-p\beta+1} + C'R^{n-\alpha-1}\end{aligned}$$

luego, por la definición de α y β tenemos que:

$$p\beta - 1 = \alpha + 1,$$

dando así con:

$$\int_{B_R} |D_x u| \leq C'R^{n-\alpha-1} + C'R^{n-\alpha-1} = CR^{n-\alpha-1}$$

concluyendo así la desigualdad para $|D_x u|$, y análogamente para $|D_x v|$. ■

Lema 2.6 (Rellich-Pohozaev)**.** *Sean $p, q > 0$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 + a_2 = n - 2$, y consideremos a (u, v) soluciones positivas de* (1)*, $R > 0$ arbitrario, entonces se tiene que:*

$$\left(\frac{n}{p+1} - a_1\right)\int_{B_R} v^{p+1} + \left(\frac{n}{q+1} - a_2\right)\int_{B_R} u^{q+1} = R^n \int_{S^{n-1}} \left[\frac{v^{p+1}(R)}{p+1} + \frac{u^{q+1}(R)}{q+1}\right]$$
$$+ R^n \int_{S^{n-1}} [u'v' - R^{-2}\nabla_\theta u \cdot \nabla_\theta v](R) + R^{n-1}\int_{S^{n-1}} [a_1u'v + a_2uv'](R),$$

donde notamos $a\,' = \partial/\partial r$.

Demostración. Ver [6]. ■

Lema 2.7. *Sean $p \geq q > 0$ con $pq > 1$, (u, v) soluciones positivas de* (1) *y asumamos que o bien v es acotada o bien $p \geq 2$, entonces se tiene que:*

$$v^{p+1} \leq \frac{p+1}{q+1}u^{q+1}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Partamos con definir a $\sigma := \frac{q+1}{p+1} \in (0,1]$ (ya que $p \geq q > 0$), y a:

$$l := \sigma^{-1/(p+1)} = \left(\frac{p+1}{q+1}\right)^{1/(p+1)}, \quad w := v - lu^{\sigma},$$

entonces tendremos que:

$$\Delta w = \Delta v - l\Delta(u^{\sigma})$$

donde basta con un simple calculo notar que:

$$\partial_i u^{\sigma} = \sigma u^{\sigma-1}\partial_i u, \quad \partial_{ii} u^{\sigma} = \sigma(\sigma-1)u^{\sigma-2}(\partial_i u)^2 + \sigma u^{\sigma-1}\partial_{ii} u,$$

obteniendo así que:

$$\begin{aligned}\Delta(u^{\sigma}) &= \sigma(\sigma-1)u^{\sigma-2}|\nabla u|^2 + \sigma u^{\sigma-1}\Delta u \\ &= \sigma(\sigma-1)u^{\sigma-2}|\nabla u|^2 - \sigma u^{\sigma-1}v^p,\end{aligned}$$

con esto, al reemplazar y usar que $0 < \sigma < 1$, se puede deducir que:

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta v - l\sigma((\sigma-1)u^{\sigma-2}|\nabla u|^2 - u^{\sigma-1}v^p) \\ &\geq \Delta v + l\sigma u^{\sigma-1}v^p \\ &= -u^q + l\sigma u^{\sigma-1}v^p \\ &= u^{\sigma-1}\left[\left(\frac{v}{l}\right)^p - u^{\sigma p}\right]\end{aligned}$$

donde usamos implícitamente que:

$$\sigma - 1 + \sigma p = \sigma(p+1) - 1 = \frac{q+1}{p+1}(p+1) - 1 = q$$

Ahora bien, si consideramos el conjunto $\{w \geq 0\}$, por la definición de w y usando que u es positiva, tendremos que:

$$v \geq lu^{\sigma} > 0,$$

por lo que:

$$v^p \geq l^p u^{\sigma p},$$

lo cual es:

$$\left(\frac{v}{l}\right)^p - u^{\sigma p} \geq 0.$$

Con esto podemos deducir que:

$$\Delta w \geq u^{\sigma-1}\left[\left(\frac{v}{l}\right)^p - u^{\sigma p}\right] \geq 0, \quad \text{en } \{w \geq 0\}.$$

Ahora bien, usando las fórmulas de Green sobre la bola B_R, aprovechando que w es de clase $\mathcal{C}^2$, usando a $w_+ = \text{máx}\{w, 0\}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \nabla w_+ \cdot \nabla w &= \int_{\partial B_R} w_+ \frac{\partial w}{\partial \nu} - \int_{B_R} w_+ \Delta w \\ &= \int_{S^{n-1}} w_+(R) \frac{\partial w}{\partial \nu} R^{n-1} - \int_{B_R} w_+ \Delta w \\ &= R^{n-1} \int_{S^{n-1}} w_+(R) w_r(R) - \int_{B_R} w_+ \Delta w,\end{aligned}$$

ya que $\frac{\partial w}{\partial \nu} = w_r$. Ahora usando que $\Delta w \geq 0$ en $\{w \geq 0\}$, y que $\nabla w_+ \cdot \nabla w = |\nabla w_+|^2$ (ya que en las regiones donde $w < 0$ este producto se anula), damos con:

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla w_+|^2 &= R^{n-1} \int_{S^{n-1}} w_+(R) w_r(R) - \int_{B_R} w_+ \Delta w \\ &\leq R^{n-1} \int_{S^{n-1}} w_+(R) w_r(R),\end{aligned}$$

Ahora bien, definamos a $f(A) := \int_{S^{n-1}} (w_+)^2(A)$, no es difícil concluir por la suavidad de w y que estamos en S^{n-1}, que:

$$f'(A) = \int_{S^{n-1}} 2w_+(A)(w_+)_r(A) = 2 \int_{S^{n-1}} w_+(A) w_r(A),$$

donde usamos nuevamente que si $w < 0$ para algún $\theta \in S^{n-1}$ entonces el producto $w_+(A)w_r(A) = 0$, con esto damos con esta cota:

$$\int_{B_R} |\nabla w_+|^2 \leq \frac{R^{n-1}}{2} f'(R), \tag{5}$$

Definamos ahora a $g(A) := \int_{S^{n-1}} v^p(A)$, entonces observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}f(R) &= \int_{S^{n-1}} (w_+)^2(R) \\ &= \int_{S^{n-1} \cap \{v \geq lu^\sigma\}} (v - lu^\sigma)^2(R) \\ &= \int_{S^{n-1} \cap \{v \geq lu^\sigma\}} v^2(R) - 2l(vu)^\sigma(R) + (lu^\sigma)^2(R) \\ &\leq \int_{S^{n-1} \cap \{v \geq lu^\sigma\}} v^2(R) + (lu^\sigma)^2(R) \\ &\leq 2 \int_{S^{n-1} \cap \{v \geq lu^\sigma\}} v^2(R) \\ &\leq 2 \int_{S^{n-1}} v^2(R),\end{aligned}$$

pero notar que podemos usar Hölder en la ultima integral, asumiendo que $p > 2$, tomando $a = \frac{p}{2}$ y $a' = \frac{p}{p-2}$

$$\int_{S^{n-1}} v^2(R) \leq \left(\int_{S^{n-1}} v^{2a}\right)^{1/a} \left(\int_{S^{n-1}} 1^{a'}\right)^{a'} = |S^{n-1}|^{p/(p-2)} g^{2/p} = Cg^{2/p},$$

notar que esto también se tiene en el caso que $p = 2$, ya que por la desigualdad $f(R) \leq 2\int_{S^{n-1}} v^2(R)$ se daría con:

$$f(R) \leq 2\int_{S^{n-1}} v^p(R) = 2g(R) = 2g(R)^{2/p},$$

Ahora bien, si $p < 2$ y v fuese acotado, tendríamos que por la misma desigualdad recién mencionada:

$$f(R) \leq \int_{S^{n-1}} v^2(R) = 2\int_{S^{n-1}} v^p(R)v^{2-p}(R) \leq 2||v||_\infty^{2-p} g(R) = Cg(R).$$

con esto tendríamos el siguiente resultado:

1. Si $p \geq 2$, entonces $f \leq Cg^{2/p}$ para $C = C(p) > 0$,
2. Si $p < 2$ y v acotado, entonces $f \leq Cg$ para $C = C(p) > 0$.

Por otro lado, notar que:

$$\int_{B_R} v^p = \int_0^R \left(\int_{\partial B_r} v^p\right) dr = \int_0^R r^{n-1}\left(\int_{S^{n-1}} v^p(r)\right) dr = \int_0^R r^{n-1} g(r) dr,$$

luego por el Lema 2.4. podemos concluir que:

$$\int_0^R r^{n-1} g(r) dr \leq CR^{n-p\beta},$$

de lo cual si tuviésemos que toda sucesión $R_i \to \infty$ verifica que $g(R_i) \not\to 0$, es decir, que existe algún $m > 0$ tal que $g(R_i) \geq m$ para $i \gg 0$ (recordemos que $g > 0$ ya que v es positiva), entonces se tendría que:

$$m\frac{R_i^n}{n} \leq \int_0^{R_i} g(r) r^{n-1} dr \leq CR_i^{n-p\beta}, \quad \text{para } i \gg 0, \tag{6}$$

lo cual es una contradicción ya que $p\beta > 0$, concluyendo así que debe existir alguna sucesión $R_i \to \infty$ tal que $g(R_i) \to 0$, de manera que en el caso que $p \geq 2$ o bien $p < 2$ y v sea acotada, por las desigualdades que mostramos tendríamos que $f(R_i) \to 0$.

Pero como $f > 0$, podemos encontrar una subsucesión de R_i, la cual denotaremos de igual manera, tal que $f'(R_i) \leq 0$, por lo tanto usando la desigualdad (5) con esta sucesión y tomando $i \to \infty$, obtenemos que:

$$0 \leq \int_{R^n} |\nabla w_+|^2 = \lim_{i\to\infty} f'(R_i) \leq 0,$$

concluyendo así que $\nabla w_+ = 0$ en R^n, y por lo tanto existe una constante d tal que $w_+ \equiv d \geq 0$, con esto hay dos opciones: $d = 0$ o $d > 0$; si suponemos que $d > 0$, de la definición de w_+ tendríamos que $w \equiv d > 0$, y por lo tanto $v \geq v - lu^\sigma = w = d > 0$, lo cual por el Lema 2.4. nos daría una contradicción (acá usamos la misma contradicción mostrada en (6)), por lo tanto $w_+ \equiv 0$, lo cual significa que $v - lu^\sigma \leq 0$ en todo R^n, y con esto tenemos que:

$$0 < v \leq lu^\sigma = \left(\frac{p+1}{q+1}\right)^{1/(p+1)} u^{\frac{q+1}{p+1}},$$

lo cual equivale a:

$$v^{p+1} \leq \left(\frac{p+1}{q+1}\right) u^{q+1}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

■

Observación 2.8. Por el Lema 2.7. podemos observar lo siguiente, si $p = q > 1$ y (u, v) son soluciones positivas de (1) tal que o bien $p \geq 2$ o bien v (o u) es acotado, entonces $u \equiv v$.

3. Demostracion del Teorema

[**Paso 1: Preparaciones**] En vista de la Observación 1.4., nos bastará con demostrar que no existen soluciones positivas clásicas acotadas. Además, gracias a los resultados de Serrin y Zou [6], sabemos que no existen supersoluciones clásicas positivas de (1) siempre que:

$$pq \leq 1, \quad \text{o bien} \quad pq > 1, \quad \max\{\alpha, \beta\} \geq n - 2,$$

por lo tanto nos bastará con asumir que:

$$p \geq q, \quad pq > 1, \quad \alpha = \max\{\alpha, \beta\} < n - 2, \quad n \geq 3,$$

De estas condiciones se deduce que:

$$p > n/(n-2) \tag{7}$$

para ver esto, notar que:

$$\frac{2}{n-2} < \frac{2}{\alpha} = \frac{pq-1}{p+1} \leq \frac{p^2-1}{p+1} = p - 1,$$

por lo que:

$$\frac{n}{n-2} = \frac{2}{n-2} + 1 < p - 1 + 1 = p.$$

En lo que queda de demostración, C denotara a una constante positiva cualquiera la cual posiblemente dependa de la solución (u, v), pero sera independiente de R.

Definamos a:

$$F(R) := \int_{B_R} u^{q+1}, \quad R > 0.$$

dado que estamos asumiendo que p, q son subcriticos (ver (2)) y sabemos que $p+1 > p > n/(n-2)$, tendremos que:

$$\frac{n}{p+1} < n-2,$$

y por lo tanto, por la subcriticalidad se obtiene:

$$\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} > n-2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{q+1} > n-2-\frac{n}{p+1},$$

luego existe un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que:

$$n-2-\frac{n}{p+1}+\varepsilon < \frac{n}{q+1},$$

con esto, al definir:

$$a_1 := \frac{n}{p+1} - \varepsilon, \quad a_2 := n-2-\frac{n}{p+1}+\varepsilon,$$

se verifica que $a_1 < n/(p+1)$, $a_2 < n/(q+1)$ y que $a_1 + a_2 = n-2$.

Con esto, para $R > 0$, podemos aplicar la identidad de Rellich-Pohozaev (Lema 2.6), obteniendo así que:

$$\left(\frac{n}{p+1} - a_1\right) \int_{B_R} v^{p+1} + \left(\frac{n}{q+1} - a_2\right) \int_{B_R} u^{q+1} = R^n \int_{S^{n-1}} \left[\frac{v^{p+1}(R)}{p+1} + \frac{u^{q+1}(R)}{q+1}\right]$$
$$+ R^n \int_{S^{n-1}} [u'v' - R^{-2}\nabla_\theta u \cdot \nabla_\theta u](R) + R^{n-1} \int_{S^{n-1}} [a_1 u'v + a_2 uv'](R),$$

y dado que estamos asumiendo que u y v son acotados, podemos usar el Lema 2.7., dando así:

$$v^{p+1} \leq \frac{p+1}{q+1} u^{q+1}, \quad u^{q+1} \leq \frac{q+1}{p+1} v^{p+1},$$

con esto, como $\frac{n}{p+1} - a_1, \frac{n}{q+1} - a_2 > 0$, podemos acotar inferiormente como superiormente las integrales que contengan a v para así dar con la siguiente desigualdad:

$$F(R) \leq CG_1(R) + CG_2(R), \tag{8}$$

donde:

$$G_1(R) = R^n \int_{S^{n-1}} u^{q+1}(R),$$

y:

$$G_2(R) = R^n \int_{S^{n-1}} (|D_x u(R)| + R^{-1} u(R))(|D_x v(R)| + R^{-1} v(R)).$$

Para ver como sale esta cota con respecto a $G_2(R)$, debemos notar que:

$$D_x u = \frac{\partial}{\partial r} u \cdot e_r + \frac{1}{r} \nabla_\theta u \tag{9}$$

de forma que $|u'(R)| \leq |D_x u(R)|$ y $|R^{-1} \nabla_\theta u(R)| \leq |D_x u(R)|$ (análogo para v), dando así con: de

$$\begin{aligned} R^n \int_{S^{n-1}} [u'v' - R^{-2} \nabla_\theta u \cdot \nabla_\theta u](R) &\leq R^n \int_{S^{n-1}} |D_x u(R)||D_x v(R)| + |D_x u(R)||D_x v(R)| \\ &= CR^n \int_{S^{n-1}} |D_x u(R)||D_x v(R)|, \end{aligned}$$

y por el otro lado:

$$\begin{aligned} R^{n-1} \int_{S^{n-1}} [a_1 u'v + a_2 uv'](R) &\leq R^{n-1} \int_{S^{n-1}} [|a_1||D_x u(R)|v(R) + |a_2|u(R)|D_x v(R)|] \\ &\leq CR^n \int_{S^{n-1}} |D_x u(R)|R^{-1} v(R) + |D_x v(R)|R^{-1} u(R), \end{aligned}$$

de esta forma, sumando ambas cotas y además sumando $CR^n \int_{S^{n-1}} R^{-2} u(R)v(R) > 0$, podemos factorizar adecuadamente esta cota, obteniendo asi que:

$$\begin{aligned} &R^n \int_{S^{n-1}} [u'v' - R^{-2} \nabla_\theta u \cdot \nabla_\theta u](R) + R^{n-1} \int_{S^{n-1}} [a_1 u'v + a_2 uv'](R) \\ &\leq CR^n \int_{S^{n-1}} (|D_x u(R)| + R^{-1} u(R))(|D_x v(R)| + R^{-1} v(R)) \\ &= CG_2(R), \end{aligned}$$

mostrando así el acotamiento en (8).

Dado que queremos mostrar que u, v son triviales (idénticamente a 0), nos convendría mostrar que $F \equiv 0$, para lo cual se buscara dar con una *estimación tipo Feedback* de la forma:

$$G_1(R), G_2(R) \leq CR^{-a} F^b(R)$$

para algún $a > 0$ y $b < 1$ a lo largo de una sucesión $R = R_i \to \infty$.

En lo que sigue, dada una función $w = w(r, \theta)$, $1 \leq k \leq \infty$ y $R > 0$, denotaremos a:

$$\|w\|_k = \|w(R, \cdot)\|_{L^k(S^{n-1})}$$

para simplificar la notación, cuando no haya ningún riesgo de confusiones.

[Paso 2: Estimación de $G_1(R)$]

Sean:

$$\lambda = \frac{n-1}{n-3} \quad (:= \infty \text{ si } n = 3), \quad k = \frac{p+1}{p} \quad \text{y} \quad \varepsilon > 0.$$

donde elegiremos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que al menos $1 + \varepsilon < \lambda$ (después se especificara cuan pequeño), además, en lo que sigue asumiremos que las constantes positivas arbitrarias C también podrán depender de ε.

Con esto, por el Lema 2.1 podremos concluir que:

$$\|u\|_\lambda \leq C(\|D_\theta^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|u\|_1),$$

ahora bien, dado que:

$$D_x^2 u = \frac{1}{r^2} D_\theta^2 u + \ldots,$$

podemos acotar $\|D_\theta^2 u\|_{1+\varepsilon} \leq R^2 \|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon}$, concluyendo así que:

$$\|u\|_\lambda \leq C(R^2 \|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|u\|_1),$$

Ahora bien, si $n \geq 4$, definamos a μ dado por:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{p}{p+1} - \frac{2}{n-1},$$

Ahora bien, como $p > n/(n-2)$ y estamos considerando $n \geq 4$, tenemos entonces que:

$$k = \frac{p+1}{p} = 1 + \frac{1}{p} < 1 + \frac{n-2}{n} = \frac{2(n-1)}{n} \leq \frac{n-1}{2},$$

de lo cual se deduce que $1/k > 2/(n-1)$, dando así que:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{p}{p+1} - \frac{2}{n-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{n-1} > 0,$$

pero esto significa que $1/\mu < 1/k$, por lo que $k < \mu < \infty$.

Por lo tanto, podemos aplicar el Lema 2.1., dado que $k < (n-1)/2$, y además μ verifica la igualdad que se plantea en tal Lema en el caso $k < (n-1)/j$ (en este caso $j = 2$), por lo que:

$$\|u\|_\mu \leq C(\|D_\theta^2 u\|_k + \|u\|) \leq C(R^2 \|D_x^2 u\|_k + \|u\|_1),$$

Considerando que estamos en el caso subcrítico (2), tenemos que:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{n} > 1 - \frac{2}{n-1}, \tag{10}$$

y por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{1}{q+1} > 1 - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{n-1} = \frac{p}{p+1} - \frac{2}{n-1} = \frac{1}{\mu},$$

de lo cual se deduce que $q + 1 < \mu$.

Entonces notar lo siguiente, en el caso que estemos con $n \geq 4$ y $q > 2/(n-3)$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
(q+1) - \lambda &= (q+1) - \frac{n-1}{n-3} \\
&> \frac{2}{n-3} + 1 - \frac{n-1}{n-3} \\
&= \frac{n+1+(n-3)}{n-3} \\
&= \frac{2n-2}{n-3} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

de forma que $\lambda < q+1$. Con esto, dado que en este caso tenemos que $\lambda < q+1 < \mu$, entonces:

$$\nu := \frac{\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)} \in (0,1),$$

con esto, como la definición de ν implica que:

$$\frac{1}{q+1} = \frac{\nu}{\lambda} + \frac{1-\nu}{\mu}, \tag{11}$$

y con esto, podemos notar que (bajo una notación más simple):

$$\int u^{q+1} = \int u^{\nu(q+1)} u^{(1-\nu)(q+1)},$$

de lo cual aplicando la desigualdad de Holder con los coeficientes

$$r = \frac{\lambda}{\nu(q+1)}, \quad s = \frac{\mu}{(1-\nu)(q+1)},$$

ya que por (11) tenemos que $1/r + 1/s = 1$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int u^{\nu(q+1)} u^{(1-\nu)(q+1)} &\leq \left(\int (u^{\nu(q+1)})^r\right)^{1/r} \left(\int (u^{(1-\nu)(q+1)})^s\right)^{1/s} \\
&= \left(\int u^\lambda\right)^{1/r} \left(\int u^\mu\right)^{1/s} \\
&= \left(\int u^\lambda\right)^{\nu(q+1)/\lambda} \left(\int u^\mu\right)^{(1-\nu)(q+1)/\mu} \\
&= \|u\|_\lambda^{\nu(q+1)} \|u\|_\mu^{(1-\nu)(q+1)},
\end{aligned}$$

concluyendo así que:

$$\|u\|_{q+1} \leq \|u\|_\lambda^\nu \|u\|_\mu^{(1-\nu)},$$

y aplicando las desigualdades de $\|u\|_\lambda$ y $\|u\|_\mu$ que habiamos encontrado previamente, obtenemos que:

$$\|u\|_{q+1} \leq \|u\|_\lambda^\nu \|u\|_\mu^{(1-\nu)} \leq C(R^2\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|u\|_1)^\nu (R^2\|D_x^2 u\|_k + \|u\|_1)^{1-\nu},$$

y por lo tanto, de la definición de $G_1(R)$ obtenemos la siguiente desigualdad:

$$(R^{-n}G_1(R))^{1/(q+1)} \leq CR^2(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-2}\|u\|_1)^\nu (\|D_x^2 u\|_k + R^{-2}\|u\|_1)^{1-\nu}, \tag{12}$$

En el caso que $n = 3$ se tiene que $\lambda = \infty$, por lo cual:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{q+1} &= \left(\int_{S^{n-1}} u^{q+1}(R,\theta)d\theta\right)^{1/(q+1)} \\
&\leq |S^{n-1}|^{1/(q+1)}\|u\|_\infty \\
&= \|u\|_\lambda \\
&\leq C(R^2\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|u\|_1) \\
&= C(R^2\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|u\|_1)^\nu (R^2\|D_x^2 u\|_k + \|u\|_1)^{1-\nu}, \quad \nu = 1.
\end{aligned}$$

de lo cual se recupera la desigualdad (12).

Ahora bien, en el caso que $n \geq 4$ y $q \leq 2/(n-3)$, si tenemos que:

$$q + 1 \leq \frac{2}{n-3} + 1 = \frac{n-1}{n-3} = \lambda,$$

entonces, en el caso que $q + 1 = \lambda$, obtenemos la desigualdad antes mencionada con $\nu = 1$, así que supongamos que $q + 1 < \lambda$.

Tomando r, s tal que:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1, \quad (q+1)r = \lambda,$$

obtenemos que:

$$r = \frac{\lambda}{q+1}, \quad s = \frac{\lambda}{\lambda - (q+1)},$$

de forma que:

$$\int u^{q+1} \leq \left(\int u^{(q+1)r}\right)^{1/r} \left(\int 1^s\right)^{1/s} = \left(\int u^\lambda\right)^{(q+1)/\lambda},$$

obteniendo así que $\|u\|_{q+1} \leq \|u\|_\lambda$, recuperando de nuevo la desigualdad (11) con $\nu = 1$.

En ambos casos, tenemos que ν esta dado por:

$$\nu = 1 - (p+1)A, \quad \text{con } A := \left(\frac{n-3}{n-1} - \frac{1}{q+1}\right)_+, \tag{13}$$

ya que si $n = 3$ entonces obtenemos que $\nu = 1$, y si $n \geq 4$ con $q \leq 2/(n-3)$ damos con que $q + 1 \leq \lambda$, lo que significa que $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{q+1}$ (i.e. $A = 0$).

[Paso 3: Estimación de $G_2(R)$]

Sean:

$$m = \frac{q+1}{q}, \quad \rho = \frac{n-1}{n-2}.$$

entonces por el Lema 2.1. aplicandolo a $D_x u$, el cual esta en $W^{1,k}(S^{n-1})$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda < 1+\varepsilon$, obtenemos que:

$$\|D_x u\|_\rho \leq C(\|D_\theta D_x u\|_{1+\varepsilon} + \|D_x u\|_1),$$

y luego ocupando (9) podemos acotar superiormente a $\|D_\theta D_x u\|$ (usamos la igualdad antes mencionada, aplicando a ambos lados D_x, y posteriormente intercambiamos ∇_θ con D_x), dando así que $\|D_\theta D_x u\|_{1+\varepsilon} \leq R\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon}$, con lo cual damos con la siguiente desigualdad:

$$\|D_x u\|_\rho \leq C(R\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|D_x u\|_1), \tag{14}$$

Obtenemos la misma desigualdad al reemplazar u por v, así que no la anotaremos pero nos referiremos a esta en los casos que sea necesario.
Ahora consideraremos por separado los siguientes dos casos:

{Caso 1: $q > 1/(n-2)$**}** En este caso vamos a definir a γ_1, γ_2 por:

$$\frac{1}{\gamma_1} = \frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1}, \quad \frac{1}{\gamma_2} = \frac{q}{q+1} - \frac{1}{n-1}.$$

Ahora bien, como $q > 1/(n-2)$ y $p > 1/(n-2)$ (esto último por (7) y usando que $n \geq 3$), tenemos que:

$$\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2} > 0,$$

ya que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_1} &= \frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{p(n-1)-(p+1)}{(p+1)(n-2)} \\ &= \frac{p(n-2)-1}{(p+1)(n-2)} \\ &> 0.\end{aligned}$$

el caso para $1/\gamma_2$ es totalmente análogo. Ahora bien, con las definiciones de m, k, γ_1, γ_2 tenemos que:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{\gamma_1} = \frac{p}{p+1} - \frac{p}{p+1} + \frac{1}{n-1} > 0,$$

por lo que $k < \gamma_1 < \infty$ (ya que $1/\gamma_1 \neq 0$), por otro lado:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{\gamma_2} = \frac{q}{q+1} - \frac{q}{q+1} + \frac{1}{n-1} > 0,$$

por lo que $m < \gamma_2 < \infty$ (al igual que antes, gracias a que $1/\gamma_2 \neq 0$. Por último, notar que de la definición de ρ tenemos que:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\gamma_1} = \frac{n-2}{n-1} - \frac{p}{p+1} + \frac{1}{n-1} = 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1} > 0,$$

dando así que $\rho < \gamma_1$.

Ahora vamos a *asumir* que podemos encontrar algún $z \in (1, \infty)$ tal que $\rho < z < \gamma_1$ y $\rho < z' = z/(z-1) < \gamma_2$,i.e.:

$$\frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{z} \leq 1 - \frac{1}{n-1}, \tag{15}$$

y:

$$\frac{q}{q+1} - \frac{1}{n-1} \leq 1 - \frac{1}{z} \leq 1 - \frac{1}{n-1}, \tag{16}$$

la existencia de tal z no se verifica ahora, sino que se mostrará (junto con otros detalles técnicos) en el **Paso 6** de la demostración.

Dado que $k < \gamma_1 < \infty$ con $k < (n-1)/2$, por el Lema 2.1. aplicado a $D_x u \in W^{1,k}(S^{n-1})$ (a igual que al comienzo), tenemos que:

$$\|D_x u\|_{\gamma_1} \leq C(\|D_\theta D_x u\|_k + \|D_x u\|_1) \leq C(R\|D_x^2 u\|_k + \|D_x u\|_1),$$

y de la misma manera, dado que $m < \gamma_2 < \infty$, podemos dar con:

$$\|D_x v\|_{\gamma_2} \leq C(\|D_\theta D_x v\|_m + \|D_x v\|_1) \leq C(R\|D_x^2 v\|_m + \|D_x v\|_1),$$

con lo cual, al definir:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\gamma_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\gamma_1}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\gamma_1}\right)^{-1} + 1 \\
&= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{-1} + 1 \\
&= 1 + (p+1)\left(\frac{1}{z} - \frac{n-2}{n-1}\right) \\
&= 1 - (p+1)\left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{z}\right),
\end{aligned}$$

donde definimos a $A_1 := \frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{z} \geq 0$ (por las hipotesis de z), y en particular, tendremos que $\tau_1 \in [0,1]$, y por como esta definido, es claro que:

$$\frac{1}{z} = \frac{\tau_1}{\rho} + \frac{1-\tau_1}{\gamma_1},$$

por lo tanto, podemos aplicar una desigualdad de interpolación similar a la mostrada en el Paso 2, obteniendo asi que:

$$\begin{aligned}\|D_x u\|_z &\leq \|D_x u\|_\rho^{\tau_1} \|D_x u\|_{\gamma_1}^{1-\tau_1} \\ &\leq C(R\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \|D_x u\|_1)^{\tau_1} (R\|D_x^2 u\|_k + \|D_x u\|_1)^{1-\tau_1} \\ &= CR(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x u\|_1)^{\tau_1} (\|D_x^2 u\|_k + R^{-1}\|D_x u\|_1)^{1-\tau_1},\end{aligned} \tag{17}$$

Análogamente, si definimos a τ_2 como:

$$\tau_2 := \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\gamma_2}\right)^{-1},$$

tendremos por los mismos argumentos que $\tau_2 \in (0,1)$, $\tau_2 = 1 - (q+1)A_2$ con

$$A_2 = \frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{z'} = \frac{1}{z} - \frac{1}{n-1} \geq 0.$$

y además de verificar que:

$$\frac{1}{z'} = \frac{\tau_2}{\rho} + \frac{1-\tau_2}{\gamma_2},$$

con esto podemos aplicar de nuevo una interpolación, obteniendo así que:

$$\begin{aligned}\|D_x v\|_{z'} &\leq \|D_x v\|_\rho^{\tau_2} \|D_x v\|_{\gamma_2}^{1-\tau_2} \\ &\leq CR(\|D_x^2 v\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x v\|_1)^{\tau_2} (\|D_x^2 v\|_m + R^{-1}\|D_x v\|_1)^{1-\tau_2}.\end{aligned} \tag{18}$$

Por el otro lado, aplicando el Lema 2.1. para $\rho < z$, y luego usar una inclusion para acotar $\|D_\theta u\|_\rho$ por $\|D_\theta u\|_z$ (con una constante que dependa de ρ), tenemos que

$$\|u\|_z \leq C(\|D_\theta u\|_\rho + \|u\|_1) \leq C(\|D_\theta u\|_z + \|u\|_1)$$

con esto podemos deducir que:

$$R^{-1}\|u\|_z \leq CR^{-1}(\|D_\theta u\|_z + \|u\|_1) \leq C(\|D_x u\|_z + R^{-1}\|u\|_1), \tag{19}$$

y como el mismo resultado se tiene para v, podemos aplicarlo para obtener una desigualdad sobre $G_2(R)$, donde usamos que z y z' son Holder conjugados:

$$\begin{aligned}G_2(R) &= R^n \int_{S^{n-1}} (|D_x u(R)| + R^{-1}u(R))(|D_x v(R)| + R^{-1}v(R)) \\ &\leq R^n \||D_x u| + R^{-1}u\|_z \||D_x v| + R^{-1}v\|_{z'} \\ &\leq R^n(\|D_x u\|_z + R^{-1}\|u\|_z)(\|D_x v\|_{z'} + R^{-1}\|v\|_{z'}) \\ &\leq R^n C(\|D_x u\|_z + R^{-1}\|u\|_1)(\|D_x v\|_{z'} + R^{-1}\|v\|_1).\end{aligned} \tag{20}$$

Entonces usando la cota mostrada en (17), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\|D_x u\|_z + R^{-1}\|u\|_1 \\
&\leq CR(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x u\|_1)^{\tau_1}(\|D_x^2 u\|_k + R^{-1}\|D_x u\|_1)^{1-\tau_1} + R(R^{-2}\|u\|_1) \\
&\leq CR\left[(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x u\|_1)^{\tau_1}(\|D_x^2 u\|_k + R^{-1}\|D_x u\|_1)^{1-\tau_1} + (R^{-2}\|u\|_1)^{\tau_1+(1-\tau_1)}\right] \\
&\leq CR(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x u\|_1 + R^{-2}\|u\|_1)^{\tau_1}(\|D_x^2 u\|_k + R^{-1}\|D_x u\|_1 + R^{-2}\|u\|_1)^{1-\tau_1}.
\end{aligned}$$

podemos hacer lo mismo para acotar al término $\|D_x v\|_{z'} + R^{-1}\|v\|_1$ (usando (18)), por lo tanto, haciendo uso de estas desigualdades en (20) obtenemos:

$$\begin{aligned}
G_2(R) \leq CR^{n+2}&(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x u\|_1 + R^{-2}\|u\|_1)^{\tau_1} \\
&\cdot (\|D_x^2 u\|_k + R^{-1}\|D_x u\|_1 + R^{-2}\|u\|_1)^{1-\tau_1} \\
&\cdot (\|D_x^2 v\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x v\|_1 + R^{-2}\|v\|_1)^{\tau_2} \\
&\cdot (\|D_x^2 v\|_m + R^{-1}\|D_x v\|_1 + R^{-2}\|v\|_1)^{1-\tau_2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

{Caso 2: $q \leq 1/(n-2)$**}** En este caso tenemos que:

$$m - (n-1) \geq m - \frac{1}{q} = \frac{q+1}{q} - \frac{1}{q} = 1 > 0,$$

por lo tanto, usando el Lema 2.1. tenemos que la siguiente desigualdad es válida:

$$\|D_x v\|_\infty \leq C(\|D_\theta D_x v\|_m + \|D_x v\|_1) \leq C(R\|D_x^2 v\| + \|D_x v\|_1),$$

y por lo tanto, acotando $\|D_x v\|_\gamma \leq C\|D_x v\|_\infty$ (esta constante C dependerá de γ), aprovechando que estamos trabajando sobre S^{n-1} el cual tiene medida finita), damos con que para $\gamma = n-1 = \rho'$ (acá estamos refiriéndonos a la Hölder-conjugada de ρ), tenemos:

$$\|D_x v\|_{\rho'} \leq C(R\|D_x^2 v\|_m + \|D_x v\|_1),$$

Por otro lado, podemos dar con la siguiente cota al igual que en el caso $q > 1/(n-2)$ con un argumento similar:

$$R^{-1}\|u\|_\rho \leq C(\|D_x u\|_\rho + \|u\|_1),$$

(y esto mismo para v), por lo tanto, tendremos que:

$$\begin{aligned}
G_2(R) &\leq R^n \||D_x u| + R^{-1}u\|_\rho \||D_x v| + R^{-1}v\|_{\rho'} \\
&\leq R^n(\|D_x u\|_\rho + R^{-1}\|u\|_\rho)(\|D_x v\|_{\rho'} + R^{-1}\|v\|_{\rho'}) \\
&\leq CR^n(\|D_x u\|_\rho + R^{-1}\|u\|_1)(\|D_x v\|_{\rho'} + R^{-1}\|v\|_1)
\end{aligned}$$

y por último, las cotas de $\|D_x u\|_\rho$ y $\|D_x v\|_{\rho'}$ y las aplicamos a esta desigualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
G_2(R) \leq CR^{n+2}&(\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_x u\|_1 + R^{-2}\|u\|_1) \\
&\cdot (\|D_x^2 v\|_m + R^{-1}\|D_x v\|_1 + R^{-2}\|v\|_1),
\end{aligned}$$

la cual es la misma cota que (21) pero tomando $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0$.

[Paso 4: Acotar las normas con respecto a R y a $F(2R)$.]

Daremos una serie de acotamientos para las normas que salieron previamente, para esto, primero notar que al ser (u,v) soluciones positivas de (1), por lo tanto, usando el Lema 2.4. obtenemos que:

$$\int_{B_R} |u| = \int_{B_R} u \leq CR^{n-\alpha}, \quad \int_{B_R} |v| = \int_{B_R} v \leq CR^{n-\beta},$$

y por lo tanto, como:

$$\int_{B_R} |u| = \int_0^R \int_{S^{n-1}} r^{n-1}|u(r,\theta)|d\theta dr = \int_0^R \|u(r)\|_1 r^{n-1} dr,$$

análogo para v, de esta forma, damos con las siguientes desigualdades:

$$\int_0^R \|u(r)\|_1 r^{n-1} dr \leq CR^{n-\alpha}, \quad \int_0^R \|v(r)\|_1 r^{n-1} dr \leq CR^{n-\beta}, \quad R>0, \tag{22}$$

Por otro lado, aplicando el Lema 2.5. tenemos que:

$$\int_{B_R} |D_x u| \leq CR^{n-1-\alpha}, \quad \int_{B_R} |D_x v| \leq CR^{n-1-\beta},$$

y por el mismo razonamiento para descomponer la integral de B_R, obtenemos que:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^R \|D_x u(r)\|_1 \, r^{n-1} \, dr \leq CR^{n-1-\alpha}, & R>0, \\ \displaystyle\int_0^R \|D_x v(r)\|_1 \, r^{n-1} \, dr \leq CR^{n-1-\beta}, & R>0, \end{cases} \tag{23}$$

Notar que solo queremos acotar las normas que salgan en los acotamientos de G_1 y G_2, por lo tanto nos faltaría acotar las normas de $D_x^2 u, D_x^2 v$ con respecto a $k, m, 1+\varepsilon$. Primero acotemos las normas con k, para esto, usando el Lema 2.2. (recordar que u,v estamos asumiendo que son acotados), tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_k^k r^{n-1} dr &= \int_{B_R} |D_x^2 u|^k \\ &= \int_{B_R} |D_x^2 u|^{(p+1)/p} \\ &\leq C\left(\int_{B_{2R}} |\Delta u|^{(p+1)/p} + R^{-2\frac{p+1}{p}} \int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p}\right) \\ &= C\left(\int_{B_{2R}} (v^p)^{(p+1)/p} + R^{-2\frac{p+1}{p}} \int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p}\right) \\ &= C\left(\int_{B_{2R}} v^{p+1} + R^{-2\frac{p+1}{p}} \int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p}\right). \end{aligned}$$

Entonces usando el Lema 2.7. para acotar v^{p+1}, obtenemos que:

$$\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_k^k r^{n-1} dr \leq C \left(F(2R) + R^{-2\frac{p+1}{p}} \int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p} \right).$$

Ahora bien, para hacer aparecer el $F(2R)$ en el otro término, ocuparemos la desigualdad de Hölder para hacer aparecer el u^{q+1}, para esto nos basta con tomar $a = p(q+1)/(p+1)$ y $b = p(q+1)/(pq-1)$, obteniendo así que:

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p} &\leq \|u^{(p+1)/p}\|_a \|1\|_b \\
&= \left(\int_{B_{2R}} u^{a(p+1)/p} \right)^{1/a} |B_{2R}|^{1/b} \\
&= |B_{2R}|^{(pq-1)/(p(q+1))} \left(\int_{B_{2R}} u^{q+1} \right)^{(p+1)/(p(q+1))} \\
&= |B_{2R}|^{(pq-1)/(p(q+1))} F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))} \\
&= [C(2R)^n]^{(pq-1)/(p(q+1))} F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))} \\
&= CR^{n(pq-1)/(p(q+1))} F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))},
\end{aligned}$$

entonces, es claro que:

$$\begin{aligned}
R^{-2\frac{p+1}{p}} \int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p} &\leq CR^{-2\frac{p+1}{p}} R^{n(pq-1)/(p(q+1))} F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))} \\
&= CR^{-\eta_1/p} F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))},
\end{aligned}$$

donde usamos $\eta_1 = 2(p+1) - n\frac{pq-1}{q+1}$, pero dado que tenemos que (p,q) son subcriticos (2), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 2(p+1) + n\frac{p+1-pq-p}{q+1} \\
&= 2(p+1) + n\frac{p+1}{q+1} - np \\
&= 2(p+1) + n\frac{p+1}{q+1} - n(p+1) + n \\
&= n\left[1 + \frac{p+1}{q+1}\right] - (n-2)(p+1) \\
&= (p+1)\left[\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} - (n-2)\right] \\
&= \frac{p+1}{n}\left[\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{n-2}{n}\right] \\
&= \frac{p+1}{n}\left[\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\right] > 0.
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que $\eta_1 > 0$, y por lo tanto, como tomamos $R \geq 1$, tendremos que $R^{-\eta_1/p} \leq 1$, obteniendo así que:

$$R^{-2\frac{p+1}{p}} \int_{B_{2R}} u^{(p+1)/p} \leq CF(2R)^{(p+1)/(p(q+1))},$$

y asi, tendremos que:

$$\begin{aligned}\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_k^k r^{n-1} dr &\leq C(F(2R) + F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))-1}) \\ &= CF(2R)\left[1 + F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))-1}\right]\end{aligned}$$

Ahora notar lo siguiente, dado que $pq > 1$, tenemos que:

$$\frac{p+1}{p(q+1)} - 1 = \frac{p+1-pq-p}{p(q+1)} = \frac{1-pq}{p(q+1)} < 0,$$

por lo tanto, dado que el exponente del $F(2R)$ en el 2do factor es negativo, nos pondremos en casos según si $F(2R)$ es mayor o igual a 1, o bien menor estricto que 1.

Si $F(2R) < 1$, entonces dado que $F(2R) \geq F(1) > 0$ (ya que $R > 0$ y además $u > 0$), tendremos que:

$$F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))-1} \leq F(1)^{(p+1)/(p(q+1))-1},$$

y por lo tanto tendríamos que:

$$\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_k^k r^{n-1} dr \leq CF(2R),$$

por el otro lado, si $F(2R) \geq 1$, entonces tenemos directamente que $F(2R)^{(p+1)/(p(q+1))-1} \leq 1$, por lo que nuevamente obtenemos la desigualdad:

$$\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_k^k r^{n-1} dr \leq CF(2R).$$

Nos queda acotar $\|D_x v\|_m$, para esto notar que analogamente tenemos por el Lema 2.2.:

$$\begin{aligned}\int_0^R \|D_x^2 v(r)\|_m^m r^{n-1} dt &= \int_{B_R} |D_x^2 v|^m \\ &= \int_{B_R} |D_x^2 v|^{(q+1)/q} \\ &\leq C\left(\int_{B_{2R}} |\Delta v|^{(q+1)/q} + R^{-2\frac{q+1}{q}} \int_{B_{2R}} v^{(q+1)/q}\right) \\ &= C\left(\int_{B_{2R}} u^{q+1} + R^{-2\frac{q+1}{q}} \int_{B_{2R}} v^{(q+1)/q}\right), \\ &= C\left(F(2R) + R^{-2\frac{q+1}{q}} \int_{B_{2R}} v^{(q+1)/q}\right)\end{aligned}$$

además, usando el Lema 2.7. para acotar v^{q+1} tendriamos que:

$$v^{q+1} = (v^{p+1})^{(q+1)/(p+1)} \leq Cu^{(q+1)^2/(p+1)},$$

por lo que:

$$\int_0^R \|D_x^2 v(r)\|_m^m r^{n-1} dt \leq C\left(F(2R) + R^{-2\frac{q+1}{q}} \int_{B_{2R}} u^{(q+1)^2/(p+1)}\right),$$

y usando Hölder de manera totalmente análoga al caso anterior, tendremos que:

$$\begin{aligned} R^{-2\frac{q+1}{q}} \int_{B_{2R}} u^{(q+1)^2/(p+1)} &\leq CR^{-2\frac{q+1}{q}} |B_{2R}|^{(pq-1)/(q(p+1))} \left(\int_{B_{2R}} u^{q+1}\right)^{(q+1)/(q(p+1))} \\ &\leq CR^{-\eta_2/q} F(2R)^{(q+1)/(q(p+1))}, \end{aligned}$$

con $\eta_2 = 2(q+1) - n\frac{pq-1}{p+1}$, en este caso, el argumento de porque $\eta_2 > 0$ es totalmente al mostrado para η_1 (por lo tanto no lo hare), de lo cual se desprende, dado que $R \geq 1$, que $R^{-\eta_2/q} \leq 1$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_0^R \|D_x^2 v(r)\|_m^m r^{n-1} dt &\leq C\left(F(2R) + R^{-2\frac{q+1}{q}} \int_{B_{2R}} u^{(q+1)^2/(p+1)}\right) \\ &\leq C(F(2R) + R^{-\eta_2/q} F(2R)^{(q+1)/(q(p+1))}) \\ &\leq C(F(2R) + F(2R)^{(q+1)/(q(p+1))}) \\ &= CF(2R)(1 + F(2R)^{(q+1)/(q(p+1))-1}), \end{aligned}$$

Pero dado que $pq > 1$, nuevamente (mismo desarrollo), podemos concluir que $(q+1)/(q(p+1)) - 1$, así que poniéndonos en los casos $F(2R) \geq 1$ o bien $F(2R) < 1$, y usando $F(2R) \geq F(1)$ (ya que $R \geq 1$), podemos nuevamente (bajo los mismos argumentos que el caso anterior), deducir la desigualdad:

$$CF(2R)(1 + F(2R)^{(q+1)/(q(p+1))-1}) \leq CF(2R),$$

Con esto concluimos que se verifican las siguientes desigualdades con respecto a la norma con el parámetro m:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_m^m \, r^{n-1} \, dr \leq CF(2R), & R \geq 1, \\ \displaystyle\int_0^R \|D_x v(r)\|_m^m \, r^{n-1} \, dr \leq CF(2R), & R \geq 1, \end{cases} \tag{24}$$

Nos queda sacar desigualdades para las normas de $D_x^2 u, D_x^2 v$ con respecto a $1+\varepsilon$, para esto, ocupando el Lema 2.2.:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr &= \int_{B_R} |D_x^2 u|^{1+\varepsilon}, \\
&= C\left(\int_{B_{2R}} |\Delta u|^{1+\varepsilon} + R^{-2(1+\varepsilon)} \int_{B_{2R}} u^{1+\varepsilon}\right) \\
&= C\left(\int_{B_{2R}} v^{p(1+\varepsilon)} + R^{-2(1+\varepsilon)} \int_{B_{2R}} u^{1+\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

dado que u y v son acotadas y positivas, tenemos que:

$$\int_{B_{2R}} v^{p(1+\varepsilon)} = \int_{B_{2R}} v^p v^{p\varepsilon} \leq C \int_{B_{2R}} v^p,$$

esto es análogo para el término integral con $u^{1+\varepsilon}$, haciendo esto obtenemos que:

$$\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \leq C\left(\int_{B_{2R}} v^p + R^{-2(1+\varepsilon)} \int_{B_{2R}} u\right),$$

además, si asumimos que $R \geq 1$, tendremos que $R^{-2(1+\varepsilon)} \leq R^{-2}$, por lo cual:

$$\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \leq C\left(\int_{B_{2R}} v^p + R^{-2} \int_{B_{2R}} u\right).$$

Con esto ya salen los terminos integrales del Lema 2.4, de forma que podemos acotar usando este Lema, dando asi que:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr &\leq C\left[(2R)^{n-p\beta} + R^{-2}(2R)^{n-\alpha}\right] \\
&\leq C\left(R^{n-p\beta} + R^{n-(2+\alpha)}\right)
\end{aligned}$$

pero dadas las definiciones de αy β, las cuales anotare como recordatorio:

$$\alpha = \frac{2(p+1)}{pq-1}, \quad \beta = \frac{2(q+1)}{pq-1}$$

tenemos que:

$$2+\alpha = \frac{2pq-2+2(p+1)}{pq-1} = \frac{2pq+2p}{pq-1} = p\beta,$$

concluyendo asi que:

$$\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \leq C R^{n-p\beta}.$$

En el caso de $\|D_x v\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}$, el procedimiento del comienzo es el mismo, de manera que al final llegamos a:

$$\int_0^R \|D_x^2 v(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \leq C \left(\int_{B_{2R}} u^q + R^{-2} \int_{B_{2R}} v \right),$$

de lo cual por el Lema 2.4. obtenemos que:

$$\int_0^R \|D_x^2 v(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \leq C \left(R^{n-q\alpha} + R^{n-(\beta+2)} \right),$$

y nuevamente, dado que:

$$2 + \beta = \frac{2pq - 2 + 2(q+1)}{pq-1} = \frac{2pq + 2q}{pq-1} = q\alpha,$$

damos con:

$$\int_0^R \|D_x^2 v(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \leq C R^{n-q\alpha},$$

por lo tanto obtuvimos las siguientes desigualdades para este parámetro $1+\varepsilon$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^R \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} \, r^{n-1} \, dr \leq C R^{n-p\beta}, & R \geq 1, \\ \displaystyle\int_0^R \|D_x v(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} \, r^{n-1} \, dr \leq C R^{n-q\alpha}, & R \geq 1, \end{cases} \tag{25}$$

[Paso 5: Argumento feedback y conclusión.]

Dada una constante $K > 0$, definamos a los conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|D_x^2 u(r)\|_k^k > K R^{-n} F(4R) \}, \\
\Gamma_2(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|D_x^2 v(r)\|_m^m > K R^{-n} F(4R) \}, \\
\Gamma_3(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|D_x^2 u(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} > K R^{-p\beta} \}, \\
\Gamma_4(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|D_x^2 v(r)\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} > K R^{-q\alpha} \}, \\
\Gamma_5(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|u(r)\|_1 > K R^{-\alpha} \}, \\
\Gamma_6(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|v(r)\|_1 > K R^{-\beta} \}, \\
\Gamma_7(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|D_x u(r)\|_1 > K R^{-\alpha-1} \}, \\
\Gamma_8(R) &:= \{ r \in (R, 2R) : \|D_x v(r)\|_1 > K R^{-\beta-1} \}.
\end{aligned}$$

Entonces, por la desigualdad (22) tenemos que:

$$\begin{aligned}
C &\geq R^{\alpha-n}\int_0^{2R}\|u(r)\|_1 r^{n-1}dr\\
&\geq R^{\alpha-n}\int_R^{2R}\|u(r)\|_1 r^{n-1}dr\\
&\geq R^{\alpha-n}\int_{\Gamma_5(R)}\|u(r)\|_1 r^{n-1}dr\\
&> R^{\alpha-n}KR^{-\alpha}\int_{\Gamma_5(R)} r^{n-1}dr\\
&\geq KR^{-n}R^{n-1}\int_{\Gamma_5(R)} dr\\
&= K|\Gamma_5(R)|R^{-1},
\end{aligned}$$

de forma que si tomamos $K \geq 10C$, tendremos que:

$$|\Gamma_5(R)| \leq \frac{C}{K}R \leq \frac{R}{10},$$

y de manera análoga:

$$|\Gamma_6(R)| \leq \frac{R}{10}.$$

Por otro lado, por la desigualdad (24) tendremos que:

$$\begin{aligned}
CF(4R) &\geq \int_0^{2R}\|D_x^2 u\|_k^k r^{n-1}dr\\
&\geq \int_{|\Gamma_1(R)|}\|D_x^2 u\|_k^k r^{n-1}dr\\
&\geq KR^{-n}F(4R)R^{n-1}|\Gamma_1(R)|\\
&= KR^{-1}F(4R)|\Gamma_1(R)|,
\end{aligned}$$

como $F(4R) > 0$ (ya que estamos suponiendo que $u > 0$), podemos dar con:

$$|\Gamma_1(R)| \leq \frac{C}{K}R \leq \frac{R}{10},$$

y de manera análoga:

$$|\Gamma_2(R)| \leq \frac{R}{10}.$$

Por la desigualdad (23) tenemos que:

$$\begin{aligned}
C &\geq R^{1+\alpha-n}\int_0^{2R}\|D_x u(r)\|_1 r^{n-1}dr\\
&\geq R^{1+\alpha-n}\int_{|\Gamma_7(R)|}\|D_x u(r)\|_1 r^{n-1}dr\\
&\geq R^{1+\alpha-n}KR^{-\alpha-1}R^{n-1}|\Gamma_7(R)|\\
&= KR^{-1}|\Gamma_7(R)|,
\end{aligned}$$

de lo cual deducimos (y aplicamos de inmediato para el otro caso):

$$|\Gamma_7(R)|, |\Gamma_8(R)| \leq \frac{R}{10}.$$

Por último, por la desigualdad (25) tenemos que:

$$\begin{aligned} C &\geq R^{p\beta-n} \int_0^{2R} \|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \\ &\geq R^{p\beta-n} \int_{|\Gamma_3(R)|} \|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} r^{n-1} dr \\ &\geq R^{p\beta-n} K R^{-p\beta} R^{n-1} |\Gamma_3(R)| \\ &= K R^{-1} |\Gamma_3(R)|, \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que:

$$|\Gamma_3(R)|, |\Gamma_4(R)| \leq \frac{R}{10}.$$

Con esto acabamos de mostrar que $|\Gamma_i(R)| \leq R/10$ para $i = 1, \ldots, 8$, tomando un $K > 0$ suficientemente grande (el cual es independiente de R, solo usando que $R \geq 1$ para aplicar las desigualdades, ya que K solo dependía de C, el cual no depende de R).

Por lo tanto, es claro que:

$$H := (R, 2R) \setminus \bigcup_{i=1}^{8} \Gamma_i(R) \neq \emptyset,$$

ya que la medida de $\bigcup \Gamma_i(R)$ por lo visto antes es a lo más $8R/10$, pero la medida de $(R, 2R)$ es de R. Con esto,podemos encontrar a algún $\tilde{R} \in H$.

Ahora bien, por (12) usando $\tilde{R}$ para los $R \geq 1$ (para asegurar la existencia de $\tilde{R}$), tenemos:

$$\begin{aligned} &(\tilde{R}^{-n} G_1(\tilde{R}))^{1/(q+1)} \\ &\leq C\tilde{R}^2 (\|D_x^2 u\|_{1+\varepsilon} + \tilde{R}^{-2}\|u\|_1)^\nu (\|D_x^2 u\|_k + \tilde{R}^{-2}\|u\|_1)^{1-\nu} \\ &\leq C\tilde{R}^2 ((KR^{-p\beta})^{1/(1+\varepsilon)} + \tilde{R}^{-2}\|u\|_1)^\nu ((KR^{-n}F(4R))^{1/k} + \tilde{R}^{-2}\|u\|_1)^{1-\nu} \\ &\leq C\tilde{R}^2 (R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + \tilde{R}^{-2} K R^{-\alpha})^\nu ((R^{-n}F(4R))^{1/k} + \tilde{R}^{-2} K R^{-\alpha})^{1-\nu} \end{aligned}$$

como $R < \tilde{R} < 2R$, es claro que podemos acotar superiormente de manera que la constante 2 sea absorbida por C, dando así que:

$$(R^{-n} G_1(\tilde{R}))^{1/(q+1)} \leq CR^2 (R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + R^{-\alpha-2})^\nu ((R^{-n}F(4R))^{1/k} + R^{-\alpha-2})^{1-\nu},$$

y como $\alpha + 2 = p\beta$, tenemos que:

$$(R^{-n} G_1(\tilde{R}))^{1/(q+1)} \leq CR^2 (R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + R^{-p\beta})^\nu ((R^{-n}F(4R))^{1/k} + R^{-p\beta})^{1-\nu}.$$

Dado que $p\beta/(1+\varepsilon) < p\beta$, tenemos que:

$$R^{-p\beta} \leq R^{-p\beta/(1+\varepsilon)},$$

por lo que:

$$(R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + R^{-p\beta})^{\nu} \leq CR^{-p\beta\nu/(1+\varepsilon)}.$$

Y como $p\beta > n/k$, esto es debido a que (2), de lo cual tendremos que:

$$\frac{n}{p+1} + \frac{n}{q+1} - (n-2) > 0,$$

y por lo tanto:

$$\frac{n(q+1) + n(p+1) - (n-2)(p+1)(q+1)}{(p+1)(q+1)} > 0,$$

si lo reordenamos obtenemos:

$$n(p+q+2) - n(p+1)(q+1) + 2(p+1)(q+1) > 0,$$

y luego al factorizar damos con:

$$\begin{aligned} 0 &< n\left[p+q+2-(p+1)(q+1)\right] + 2(p+1)(q+1) \\ &= n\left[p+q+2-pq-p-q-1\right] + 2(p+1)(q+1) \\ &= n(1-pq) + 2(p+1)(q+1), \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos:

$$2(p+1)(q+1) > n(pq-1),$$

y por lo tanto, como $pq > 1$:

$$\frac{2(q+1)}{pq-1} > \frac{n}{p+1},$$

y por ultimo multiplicando por p obtenemos que:

$$p\beta = p\frac{2(q+1)}{pq-1} > \frac{np}{p+1} = \frac{n}{k}.$$

Con esto podemos concluir que:

$$R^{-p\beta} \leq R^{-n/k},$$

por lo que:

$$\begin{aligned} ((R^{-n}F(4R))^{1/k} + R^{-p\beta})^{1-\nu} &\leq (R^{-n/k}(F(4R))^{1/k} + R^{-n/k})^{1-\nu} \\ &\leq R^{-n(1-\nu)/k}\left((F(4R))^{1/k} + 1\right)^{1-\nu} \\ &\leq R^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}(1 + (F(4R))^{-1/k}) \end{aligned}$$

entonces nuevamente, si suponemos que $F(4R) < 1$, y usando que $F(1) \leq F(4R)$, tendremos que:

$$F(4R)^{-1/k} \leq F(1)^{-1/k},$$

de lo cual sale que:

$$R^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}(1 + (F(4R))^{-1/k}) \leq CR^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k},$$

y en el caso que $F(4R) \geq 1$, es claro que:

$$R^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}(1 + (F(4R))^{-1/k}) \leq 2R^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k},$$

asi, en ambos casos damos con:

$$R^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}(1 + (F(4R))^{-1/k}) \leq CR^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}.$$

Juntando todo, obtenemos que la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}(R^{-n}G_1(\tilde{R}))^{1/(q+1)} &\leq CR^2R^{-p\beta\nu/(1+\varepsilon)}R^{-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}, \\ &= CR^{-p\beta\nu/(1+\varepsilon)+2-n(1-\nu)/k}(F(4R))^{(1-\nu)/k}\end{aligned}$$

y por lo tanto, para $R \geq 1$ tenemos que:

$$G_1(\tilde{R}) \leq CR^{-(q+1)[p\beta\nu/(1+\varepsilon)+n(1-\nu)/k-2-n/(q+1)]}F(4R)^{(1-\nu)(q+1)p/(p+1)}, \quad (26)$$

donde definiremos a:

$$a = a_\varepsilon = (q+1)\left[\frac{p\beta\nu}{1+\varepsilon} + \frac{n(1-\nu)}{k} - 2 - \frac{n}{q+1}\right]$$

y:

$$b = \frac{(1-\nu)(q+1)p}{p+1} = p(q+1)A$$

Nos quedaría acotar $G_2(\tilde{R})$, para esto usemos la desigualdad (21) aplicada en $\tilde{R}$, de lo cual obtenemos que:

$$\begin{aligned}G_2(\tilde{R}) \leq C\tilde{R}^{n+2}&(\|D_x^2u\|_{1+\varepsilon} + \tilde{R}^{-1}\|D_xu\|_1 + \tilde{R}^{-2}\|u\|_1)^{\tau_1} \\ &\cdot (\|D_x^2u\|_k + \tilde{R}^{-1}\|D_xu\|_1 + \tilde{R}^{-2}\|u\|_1)^{1-\tau_1} \\ &\cdot (\|D_x^2v\|_{1+\varepsilon} + \tilde{R}^{-1}\|D_xv\|_1 + \tilde{R}^{-2}\|v\|_1)^{\tau_2} \\ &\cdot (\|D_x^2v\|_m + \tilde{R}^{-1}\|D_xv\|_1 + \tilde{R}^{-2}\|v\|_1)^{1-\tau_2},\end{aligned}$$

dado que $R < \tilde{R} < 2R$, podemos acotar directamente los términos de $\tilde{R}$ para dejarlos en términos de R, dando así con:

$$\begin{aligned}G_2(\tilde{R}) \leq CR^{n+2}&(\|D_x^2u\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_xu\|_1 + R^{-2}\|u\|_1)^{\tau_1} \\ &\cdot (\|D_x^2u\|_k + R^{-1}\|D_xu\|_1 + R^{-2}\|u\|_1)^{1-\tau_1} \\ &\cdot (\|D_x^2v\|_{1+\varepsilon} + R^{-1}\|D_xv\|_1 + R^{-2}\|v\|_1)^{\tau_2} \\ &\cdot (\|D_x^2v\|_m + R^{-1}\|D_xv\|_1 + R^{-2}\|v\|_1)^{1-\tau_2},\end{aligned}$$

y usando que $\tilde{R} \notin \bigcup \Gamma_i(R)$, podemos acotar nuevamente (haré que las constantes pasen directamente a C), obteniendo:

$$\begin{aligned} G_2(\tilde{R}) \leq CR^{n+2} &(R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + R^{-1}R^{-\alpha-1} + R^{-2}R^{-\alpha})^{\tau_1} \\ &\cdot (R^{-n/k}F(4R)^{1/k} + R^{-1}R^{-\alpha-1} + R^{-2}R^{-\alpha})^{1-\tau_1} \\ &\cdot (R^{-q\alpha/(1+\varepsilon)} + R^{-1}R^{-\beta-1} + R^{-2}R^{-\beta})^{\tau_2} \\ &\cdot (R^{-n/m}F(4R)^{1/m} + R^{-1}R^{-\beta-1} + R^{-2}R^{-\beta})^{1-\tau_2}, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} G_2(\tilde{R}) \leq CR^{n+2} &(R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + R^{-\alpha-2})^{\tau_1} \\ &\cdot (R^{-n/k}F(4R)^{1/k} + R^{-\alpha-2})^{1-\tau_1} \\ &\cdot (R^{-q\alpha/(1+\varepsilon)} + R^{-\beta-2})^{\tau_2} \\ &\cdot (R^{-n/m}F(4R)^{1/m} + R^{-\beta-2})^{1-\tau_2}, \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\alpha + 2 = p\beta > p\beta/(1+\varepsilon)$ y que análogamente $\beta + 2 = q\alpha > q\alpha/(1+\varepsilon)$, y además que $R \geq 1$ tenemos que:

$$R^{-p\beta/(1+\varepsilon)} + R^{-\alpha-2} \leq 2R^{-p\beta/(1+\varepsilon)}, \quad R^{-q\alpha/(1+\varepsilon)} + R^{-\beta-2} \leq 2R^{-q\alpha/(1+\varepsilon)},$$

por el otro lado, dado que $\alpha + 2 > n/k$ (esto ya lo demostramos), y que $\beta + 2 > n/m$ (la demostración de esto es análoga), por el argumento de $F(4R) > 1$ o $F(1) \leq F(4R) < 1$ obtenemos las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} R^{-n/k}F(4R)^{1/k} + R^{-\alpha-2} &\leq CR^{-n/k}F(4R)^{1/k}, \\ R^{-n/m}F(4R)^{1/m} + R^{-\beta-2} &\leq CR^{-n/m}F(4R)^{1/m}, \end{aligned}$$

juntando todo lo antes mencionado, obtenemos que:

$$\begin{aligned} G_2(\tilde{R}) \leq CR^{n+2} &R^{-p\tau_1\beta/(1+\varepsilon)} \\ &\cdot R^{-n(1-\tau_1)/k}F(4R)^{(1-\tau_1)/k} \\ &\cdot R^{-q\tau_2\alpha/(1+\varepsilon)} \\ &\cdot R^{-n(1-\tau_2)/m}F(4R)^{(1-\tau_2)/m}, \end{aligned}$$

lo cual corresponde a:

$$G_2(\tilde{R}) \leq CR^{-\tilde{a}}F^{\tilde{b}}(4R), \quad R \geq 1, \tag{27}$$

con:

$$\begin{aligned} \tilde{a} = \tilde{a}_\varepsilon &:= -(n+2) + \frac{p\beta\tau_1 + q\alpha\tau_2}{1+\varepsilon} + \frac{n(1-\tau_1)}{k} + \frac{n(1-\tau_2)}{m} \\ \tilde{b} &= \frac{1-\tau_1}{k} + \frac{1-\tau_2}{m}. \end{aligned} \tag{28}$$

Sean entonces $\widehat{a} = \text{mín}(a, \tilde{a})$ y $\widehat{b} = \text{máx}(b, \tilde{b})$, con esto, usando el acotamiento (8) y aplicando en este (26) y (27), además de que $R < \tilde{R}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}F(R) &\leq F(\tilde{R})\\ &\leq CR^{-a}F^{b}(4R) + CR^{-\tilde{a}}F^{\tilde{b}}(4R)\\ &\leq CR^{-\widehat{a}}[F^{b}(4R) + F^{\tilde{b}}(4R)]\\ &= CR^{-\widehat{a}}F^{\widehat{b}}(4R)[F^{b-\widehat{b}}(4R) + F^{\tilde{b}-\widehat{b}}(4R)]\end{aligned}$$

es claro que $b - \widehat{b}, \tilde{b} - \widehat{b} \leq 0$, de forma que si $F(4(R)) < 1$, usando que $F(1) \leq F(4R)$, obtenemos que:

$$F^{b-\widehat{b}}(4R) + F^{\tilde{b}-\widehat{b}}(4R) \leq F^{b-\widehat{b}}(1) + F^{\tilde{b}-\widehat{b}}(1) = C,$$

por el otro lado, si $F(4R) \geq 1$, entonces:

$$F^{b-\widehat{b}}(4R) + F^{\tilde{b}-\widehat{b}}(4R) \leq 2,$$

dando así que en cualquier caso, se tiene la siguiente desigualdad:

$$F(R) \leq CR^{-\widehat{a}}F^{\widehat{b}}(4R), \quad R \geq 1, \tag{29}$$

Ahora demostraremos que existe alguna $M > 0$ constante y una sucesión $R_i \to +\infty$ tal que:

$$F(4R_i) \leq MF(R_i), \tag{30}$$

para esto, supongamos por contradicción que para cualquier $M > 0$, existe algún $R_0 > 0$ tal que para todo $R \geq R_0$ se verifica que $F(4R) > MF(R)$. Ahora bien, dado que u es acotado, tenemos que:

$$F(R) = \int_{B_R} u^{q+1} \leq C|B_R| = CR^n, \quad R > 0,$$

y por lo tanto, usando la desigualdad de la contradicción para un $M > 4^n$ fijo, tenemos que existe su $R_0 > 0$ asociado tal que $\forall R \geq R_0 : F(4R) > MF(R)$, sea entonces algún $i \geq 1$ natural, entonces notar que:

$$F(4^iR_0) \geq MF(4^{i-1}R_0) \geq M^2F(4^{i-2}R_0) \geq \cdots \geq M^{i-1}F(4R_0) \geq M^iF(R_0),$$

y por otro lado, usando la desigualdad encontrada por la condición de acotamiento de u, tenemos que:

$$F(4^iR_0) \leq C(4^iR_0)^n = CR_0^n(4^n)^i,$$

concluyendo así que:

$$M^iF(R_0) \leq CR_0^n(4^n)^i$$

pero acá surge un problema, ya que al ser $M > 4^n$, tenemos que:

$$F(R_0) \leq CR_0^n\left(\frac{4^n}{M}\right)^i$$

luego como esto es para todo $i \geq 1$, tomando $i \to \infty$ tendríamos que $F(R_0) \leq 0$, pero $F(R_0) > 0$ ya que estamos suponiendo que $u > 0$, dando así con la contradicción.

Ahora asumamos que ya demostramos (esto se mostrará en el Paso 6) las siguientes condiciones:

$$b < 1, \tag{31}$$

$$a = a_\varepsilon > 0 \quad \text{para algún } \varepsilon > 0, \tag{32}$$

$$\tilde{b} < 1, \tag{33}$$

$$\tilde{a} = \tilde{a}_\varepsilon > 0 \quad \text{para algún } \varepsilon > 0, \tag{34}$$

entonces por (29) y (30) tendríamos que existe algún $M > 0$ y $R_i \to \infty$ que verifican:

$$F(4R_i) \leq MF(R_i) \leq CR_i^{-\widehat{a}} F^{\widehat{b}}(4R_i),$$

por lo que:

$$(F(4R_i))^{1-\widehat{b}} \leq CR_i^{-\widehat{a}},$$

de lo cual se desprende que:

$$F(4R_i) \leq CR^{-\widehat{a}/(1-\widehat{b})},$$

como estamos asumiendo (31) y (33) tenemos que $\widehat{b} = \max\{b, \tilde{b}\} < 1$, y por lo tanto $1 - \widehat{b} > 0$, por otro lado, como asumimos que (32) y (34) tenemos que $\widehat{a} = \min\{a, \tilde{a}\} > 0$, con esto, tendríamos que:

$$-\frac{\widehat{a}}{1 + \widehat{b}} < 0,$$

con esto, a partir de la desigualdad de $F(4R_i)$ tomando $i \to \infty$, tenemos que:

$$\int_{B_R} u^{q+1} = \lim_{i \to \infty} F(4R_i) \leq \lim_{i \to \infty} CR^{-\widehat{a}/(1-\widehat{b})} = 0,$$

concluyendo así que $u \equiv 0$, lo cual es una contradicción, demostrando así que en la región $\max\{\alpha, \beta\} > n - 3$ (esto último será requisito para el Paso 6) no hay soluciones clásicas positivas de (1).

[Paso 6: Terminar detalles.]

Primero verifiquemos (31), es decir, que $b < 1$. Para esto, recordar que b esta definido por (26) y (13), de lo cual tenemos que:

$$b = p(q+1)\left(\frac{n-3}{n-1} - \frac{1}{q+1}\right)_+,$$

entonces pongámonos por casos, de partida es directo que si $q \leq 2/(n-3)$ entonces:

$$q + 1 \leq \frac{2}{n-3} + 1 = \frac{n-1}{n-3},$$

i.e.

$$\frac{1}{q+1} \geq \frac{n-3}{n-1},$$

de lo cual se concluye que $b = 0$, y por lo tanto en particular $b < 1$.

Por el otro lado, si suponemos que $q > 2/(n-3)$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
1 - b &= 1 - p(q+1)\left(\frac{n-3}{n-1} - \frac{1}{q+1}\right), \\
&= 1 - p\left((q+1)\frac{n-3}{n-1} - 1\right), \\
&= (p+1) - p(q+1)\frac{n-3}{n-1}, \\
&= \frac{(p+1)(n-1) - p(q+1)(n-3)}{n-1}, \\
&= \frac{(p+1)(n-1) - pq(n-3) - p(n-3)}{n-1}, \\
&= \frac{(p+1)(n-1) - pq(n-3) + (p+1)(3-n) - (3-n)}{n-1}, \\
&= \frac{(p+1)(n-1+3-n) - pq(n-3) + (n-3)}{n-1}, \\
&= \frac{2(p+1) - (pq-1)(n-3)}{n-1}, \\
&= \frac{pq-1}{n-1}(\alpha - (n-3)).
\end{aligned}$$

Como $pq > 1$, y estamos tomando $n \geq 3$, es claro la condición de que $b < 1$ es equivalente a que $\alpha > (n-3)$, la cual se cumple trivialmente cuando estamos en $n = 3$ o $n = 4$ usando que estamos en la región subcritica:

$$\alpha \geq (\alpha + \beta)/2 > (n-2)/2 \geq n - 3.$$

Para demostrar que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $a_\varepsilon > 0$, definamos a:

$$B := \frac{2(p+1)(q+1)}{pq-1} - n,$$

entonces por (2) podemos demostrar que $B > 0$, para esto notar que de esta última tenemos (al multiplicar por $(p+1)(q+1)$):

$$(q+1) + (p+1) > (p+1)(q+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

i.e.:

$$p + q + 2 > (p+1)(q+1) - \frac{2}{n}(p+1)(q+1).$$

Al juntar todo al lado izquierdo, obtenemos que:

$$p + q + 2 - (p+1)(q+1) + \frac{2}{n}(p+1)(q+1) > 0,$$

pero:

$$\begin{aligned} p + q + 2 - (p+1)(q+1) + \frac{2}{n}(p+1)(q+1) &= -pq + 1 + \frac{2}{n}(p+1)(q+1) \\ &= \frac{1}{n}\left[n(1-pq) + 2(p+1)(q+1)\right], \end{aligned}$$

por lo cual:

$$2(p+1)(q+1) > n(pq-1),$$

y por lo tanto:

$$B = \frac{2(p+1)(q+1)}{pq-1} - n > 0.$$

Con esto listo, dada la dependencia continua de a_ε con respecto a ε, nos bastará con mostrar que si para $\varepsilon = 0$ se tiene que $a_0 > 0$, entonces existirá algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $a_\varepsilon > 0$. Entonces al desarrollar tendremos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= (q+1)\left[p\beta\nu + \frac{n(1-\nu)}{k} - 2 - \frac{n}{q+1}\right] \\ &= (q+1)\left[p\beta(1-(p+1)A) + \frac{n(p+1)A}{k} - 2 - \frac{n}{q+1}\right] \\ &= (q+1)\left[p\beta(1-(p+1)A) + npA - 2 - \frac{n}{q+1}\right] \\ &= (q+1)\left[p\frac{2(q+1)}{pq-1}(1-(p+1)A) + npA - 2 - \frac{n}{q+1}\right] \\ &= (q+1)\left[p\frac{2(q+1)(p+1)}{pq-1}\left(\frac{1}{p+1} - A\right) + npA - 2 - \frac{n}{q+1}\right] \end{aligned}$$

ahora bien, usando la definición de B obtenemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= (q+1)\left[p(B+n)\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+npA-2-\frac{n}{q+1}\right]\\
&= (q+1)\left[pB\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+np\frac{1}{p+1}-npA+npA-2-\frac{n}{q+1}\right]\\
&= (q+1)\left[pB\left(\frac{1}{p+1}-A\right)-2-\frac{n}{q+1}+\frac{n}{p+1}\right]\\
&= (q+1)\left[pB\left(\frac{1}{p+1}-A\right)-2-\frac{n}{q+1}+\frac{np}{p+1}\right]\\
&= (q+1)p\left[B\left(\frac{1}{p+1}-A\right)-n\left(\frac{1}{p(q+1)}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{2}{p}\right]\\
&= (q+1)p\left[B\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+n\left(\frac{pq-1}{p(q+1)(p+1)}\right)-\frac{2}{p}\right]\\
&= (q+1)\left[pB\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+n\left(\frac{pq-1}{(q+1)(p+1)}\right)-2\right]\\
&= (q+1)\left[pB\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+2n\frac{1}{B+n}-2\right]\\
&= (q+1)\left[pB\left(\frac{1}{p+1}-A\right)-\frac{2B}{B+n}\right]\\
&= (q+1)B\left[p\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+\frac{1-pq}{(p+1)(q+1)}\right]\\
&= (q+1)B\left[p\left(\frac{1}{p+1}-A\right)+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-1\right]\\
&= B\left[\frac{p(q+1)}{p+1}-p(q+1)A+\frac{q+1}{p+1}+1-(q+1)\right]\\
&= B(1-p(q+1)A)\\
&= B(1-b),
\end{aligned}$$

y como $B>0$ y $b<1$, podemos concluir que $a_0 = B(1-b) > 0$, demostrando así (32).

Para demostrar (33) y (34), nos pondremos en casos según qué desigualdad verifica q (ya que en ambas expresiones sale el parámetro z, el cual depende justamente del signo de q).

{Caso $q \leq 1/(n-2)$} Recordar que en este caso tenemos que $\tau_1 = 1$ y $\tau_2 = 0$ (esto lo notamos al final del Paso 3), por lo tanto al evaluar en $\varepsilon = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= -(n+2)+p\beta\tau_1+q\alpha\tau_2+\frac{n(1-\tau_1)}{k}+\frac{n(1-\tau_2)}{m}\\
&= -(n+2)+p\beta+\frac{n}{m}
\end{aligned}$$

Y dado que $m = \frac{q+1}{q}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= -(n+2) + p\beta + \frac{nq}{q+1} \\
&= n\left[\frac{q}{q+1} - 1\right] - 2 + p\beta \\
&= n\left[\frac{-1}{q+1}\right] - 2 + p\beta \\
&= (q+1)^{-1}\left[-n + (p\beta+2)(q+1)\right] \\
&= (q+1)^{-1}\left[-n + (q+1)\left(p\frac{2(q+1)}{pq-1} + 2\right)\right] \\
&= (q+1)^{-1}\left[-n + (q+1)\left(\frac{2pq+2p-2pq+2}{pq-1}\right)\right] \\
&= B/(q+1) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

ya que habíamos mostrado previamente que $B > 0$, de lo cual, por la dependencia continua de $\tilde{a}_\varepsilon$ con respecto a ε, podemos concluir que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{a}_\varepsilon > 0$.

Para demostrar que $\tilde{b} < 1$, basta notar que en este caso:

$$\tilde{b} = \frac{1-\tau_1}{k} + \frac{1-\tau_2}{m} = \frac{1}{m} = \frac{q}{q+1} < 1.$$

{Caso $q > 1/(n-2)$**}** En este caso, debemos además, por lo mostrado en el Paso 3, debemos demostrar que existe algún $z \in (1, \infty)$ tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{z} \leq 1 - \frac{1}{n-1} \\
\frac{q}{q+1} - \frac{1}{n-1} \leq 1 - \frac{1}{z} \leq 1 - \frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

la segunda ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{z} \leq 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{q}{q+1} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{n+1},$$

por lo que nos basta con demostrar que:

$$\text{máx}\left\{\frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right\} \leq \frac{1}{z} \leq \text{mín}\left\{1 - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{q+1} + \frac{1}{n-1}\right\}. \quad (35)$$

pero recordemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= \frac{1-\tau_1}{k} + \frac{1-\tau_2}{m} \\ &= \frac{1}{k}(p+1)\left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{m}(q+1)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{n-1}\right) \\ &= p\left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{z}\right) + q\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{n-1}\right),\end{aligned}$$

entonces al imponer que $\tilde{b} < 1$, estamos exigiendo, por la expresión recién mostrada, que:

$$\frac{p(n-2)-q}{n-1} - 1 < \frac{p-q}{z}. \tag{36}$$

con esto, dado que $n \geq 3$, nos basta notar que podemos encontrar algún $z \in (1, \infty)$ tal que verifique (35) y (35) si es que exigimos que:

$$\frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{n-1}, \tag{37}$$

$$\frac{p(n-2)-q}{n-1} - 1 < (p-q)\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{(n-2)(p-q)}{n-1}, \tag{38}$$

y:

$$\frac{p(n-2)-q}{n-1} - 1 < (p-q)\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{n+1}\right). \tag{39}$$

La desigualdad (37) es cierta ya que:

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p+1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{n-1} \\ \iff & 1 - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{n-1} \\ \iff & 1 - \frac{2}{n-1} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{p+1},\end{aligned}$$

pero esto último ya lo mostramos en (10), por lo que se verifica (37).

Para demostrar la desigualdad (38), nos basta con notar que:

$$\begin{aligned} & \frac{p(n-2)-q}{n-1} - 1 < \frac{(n-2)(p-q)}{n-1} \\ \iff & p(n-2) - q - (n-1) < (n-2)(p-q) \\ \iff & pn - 2p - q - n + 1 < np - nq - 2p + 2q \\ \iff & -q - n + 1 < -nq + 2q \\ \iff & -q - n + 1 < q(2-n) \\ \iff & -n + 1 < q(3-n) \\ \iff & q < \frac{n-1}{n-3}.\end{aligned}$$

Pero esta última es cierta ya que al ser $p \geq q$, tenemos que:

$$\begin{aligned} q &\leq p \\ &= \frac{p(q+1)}{(q+1)} \\ &\leq \frac{p(q+1)}{p+1} \\ &= \frac{pq+p}{p+1} \\ &= \frac{pq-1+(p+1)}{p+1} \\ &= 1+\frac{pq-1}{p+1} \\ &= 1+\frac{2}{\alpha} \end{aligned}$$

y dado que estamos suponiendo que $\alpha > n-3$, tenemos que:

$$q \leq 1+\frac{2}{\alpha} < 1+\frac{2}{n-3} = \frac{n-1}{n-3},$$

verificando así la desigualdad (38).

Por último, para demostrar (39) notar que esta desigualdad es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \frac{p(n-2)-q}{n-1} - 1 < (p-q)\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{n-1}\right) \\ \iff \quad & \frac{p(n-2)-q}{n-1} - 1 - \frac{p-q}{n-1} < \frac{p-q}{q+1} \\ \iff \quad & \frac{pn-2p-q-n+1-p+q}{n-1} < \frac{p-q}{q+1} \\ \iff \quad & \frac{p(n-3)-(n-1)}{n-1} < \frac{p-q}{q+1} \\ \iff \quad & \frac{p(n-3)}{n-1} < \frac{p-q}{q+1}+1 \\ \iff \quad & \frac{p(n-3)}{n-1} < \frac{p+1}{q+1} \\ \iff \quad & \frac{p(q+1)}{p+1} < \frac{n-1}{n-3} \\ \iff \quad & 1+\frac{2}{\alpha} < \frac{n-1}{n-3}, \end{aligned}$$

lo cual es cierto por lo mostrado para la desigualdad (38), demostrando así la desigualdad (39).

Solo nos quedaría demostrar (34), para esto, al igual que antes, demostraremos que para $\varepsilon = 0$ se tiene la desigualdad. En este caso, por la definición de $\tilde{a}_\varepsilon$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= -(n+2) + p\beta\tau_1 + q\alpha\tau_2 + \frac{n(1-\tau_1)}{k} + \frac{n(1-\tau_2)}{m} \\
&= -(n+2) + p\beta(1-(p+1)A_1) + q\alpha(1-(q+1)A_2) + \frac{n(p+1)A_1}{k} + \frac{n(q+1)A_2}{m} \\
&= -(n+2) + p\beta(1-(p+1)A_1) + q\alpha(1-(q+1)A_2) + npA_1 + nqA_2,
\end{aligned}$$

y dado que $p\beta = \alpha + 2,\ q\alpha = \beta + 2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= -(n+2) + (\alpha+2)(1-(p+1)A_1) + (\beta+2)(1-(q+1)A_2) + npA_1 + nqA_2 \\
&= 2 - n + \alpha + \beta - \alpha(p+1)A_1 - 2(p+1)A_1 - \beta(q+1)A_2 - 2(q+1)A_2 + n\left(pA_1 + qA_2\right),
\end{aligned}$$

y como:

$$\begin{aligned}
\alpha(p+1)A_1 &= \frac{2(p+1)}{pq-1}pA_1 + \frac{2(p+1)}{pq-1}A_1, \\
\beta(q+1)A_2 &= \frac{2(q+1)}{pq-1}qA_2 + \frac{2(q+1)}{pq-1}A_2,
\end{aligned}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\alpha(p+1)A_1 + 2(p+1)A_1 + \beta(q+1)A_2 + 2(q+1)A_2 \\
&= \frac{2(p+1)}{pq-1}pA_1 + \frac{2(p+1)}{pq-1}A_1 + 2(p+1)A_1 + \frac{2(q+1)}{pq-1}qA_2 + \frac{2(q+1)}{pq-1}A_2 + 2(q+1)A_2 \\
&= pA_1\left[\frac{2(p+1)}{pq-1} + \frac{2(p+1)}{p(pq-1)} + 2\frac{p+1}{p}\right] + qA_2\left[\frac{2(q+1)}{pq-1} + \frac{2(q+1)}{q(pq-1)} + 2\frac{q+1}{q}\right] \\
&= pA_1\left[\frac{2(p+1)p + 2(p+1) + 2(p+1)(pq-1)}{p(pq-1)}\right] + qA_2\left[\frac{2(q+1)q + 2(q+1) + 2(q+1)(pq-1)}{q(pq-1)}\right] \\
&= pA_1\frac{2(p+1)(q+1)}{(pq-1)} + qA_2\frac{2(p+1)(q+1)}{(pq-1)},
\end{aligned}$$

concluyendo así que:

$$\tilde{a}_0 = 2 - n + \alpha + \beta + \left(n - \frac{2(p+1)(q+1)}{(pq-1)}\right)(pA_1 + qA_2),$$

pero dado que:

$$\alpha + \beta = \frac{2(p+1)(q+1)}{(pq-1)} - 2,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= 2 - n + \alpha + \beta + \left(n - \alpha - \beta - 2\right)\left(pA_1 + qA_2\right) \\
&= (2 - n + \alpha + \beta)(1 - (pA_1 + qA_2))
\end{aligned}$$

por último, como: $\tilde{b} = p\left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{z}\right) + q\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{n-1}\right) = pA_1 + qA_2 < 1$, tenemos que:

$$\tilde{a}_0 = (2 - n + \alpha + \beta)(1 - \tilde{b}),$$

y por lo tanto, por (3) y (33), tenemos que $\tilde{a}_0 > 0$, de lo cual se desprende que existe algún $\varepsilon > 0$ (gracias a la continuidad de $\tilde{a}_\varepsilon$ con respecto a ε) tal que $\tilde{a}_\varepsilon > 0$, demostrando así (34), y concluyendo así todo lo que faltaba para la demostración.

Referencias

[1] Jérôme Busca and Raúl Manásevich. A liouville-type theorem for lane-emden systems. *Indiana University Mathematics Journal*, 51(1):37–80, 2002.

[2] D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri. Maximum principles for linear elliptic systems. *Rendiconti dellÍstituto di Matematica dellÚniversità di Trieste*, XXII:36–66, 1990.

[3] Djairo G. de Figueiredo and Patricio L. Felmer. A liouville-type theorem for elliptic systems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 21(3):387–397, 1994.

[4] B. Gidas and J. Spruck. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 34(4):525–598, 1981.

[5] Peter Poláčik, Pavol Quittner, and Philippe Souplet. Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems, I: Elliptic equations and systems. *Duke Mathematical Journal*, 139(3):555 – 579, 2007.

[6] James Serrin and Henghui Zou. Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems. *Differential and Integral Equations*, 9(4):635 – 653, 1996.

[7] Philippe Souplet. The proof of the lane–emden conjecture in four space dimensions. *Advances in Mathematics*, 221(5):1409–1427, 2009.