Ecuación del calor

Jorge Novoa C.

26 de Junio de 2025

Resumen

Se entrega una explicación exhaustiva de lo presentado acerca de la ecuación del calor en el libro de Cazenave, Haraux y Martel [1].

1. Introducción

Consideraremos a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto acotado con condición de frontera Lipschitz continua, en particular, usaremos a $X = C_0(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$. Además, consideraremos a la función localmente Lipschitz continua $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que:

$$g(0) = 0.$$

Definiremos a la función $F : X \to X$ por:

$$F(u)(x) = g(u(x)),$$

y esto para todo $u \in X, x \in \Omega$. Es fácil de notar que F será Lipschitz continua en conjuntos acotados de X.

En lo que sigue, denotaremos a g y F por la misma expresión antes mencionada, y además, nos referiremos a $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ al semigrupo generado por A en X, con:

$$D(A) = \{u \in X \cap H_0^1(\Omega), \quad \Delta u \in X\}, \quad Au = \Delta u, \quad \forall u \in D(A).$$

y a $(S(t))_{t\geq 0}$ al semigrupo generado por B en Y, con:

$$D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \quad B(u) = \Delta u, \quad \forall u \in D(B).$$

Además, un resultado importante que se ocupará recurrentemente es el siguiente:

Teorema 1. *Sea $\varphi \in L^2(\Omega)$, y consideremos a $u(t) = S(t)\varphi$ para $t \geq 0$. Entonces u es la única solución del problema:*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega)),\ \Delta u \in C((0,\infty), L^2(\Omega)); \\ u'(t) = \Delta u(t), \quad \forall t > 0; \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

y adicionalmente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&u \in C((0,\infty), H_0^1(\Omega));\\
&\|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^{1/2}}\frac{1}{t^{1/2}}\|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall t > 0;\\
&\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^{1/2}}\frac{1}{t^{1/2}}\|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall t > 0.
\end{aligned}
$$

2. Preliminares

Dado $\varphi \in X$, queremos encontrar un $T > 0$ y algún u tal que:

$$
\begin{aligned}
&u \in C([0,T], X) \cap C((0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T], L^2(\Omega));\\
&\Delta u \in C((0,T], L^2(\Omega)); \qquad (1)\\
&u_t - \Delta u = F(u), \quad \forall t \in (0,T]; \qquad (2)\\
&u(0) = \varphi. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Proposición 1. *Sea $\varphi \in X, T > 0$ y sea $u \in C([0,T], X)$. Entonces u es solución de (1)-(3) si y solo si u satisface:*

$$u(t) = \mathcal{T}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds, \tag{4}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demostración. Primero supongamos que u es solución de (1)-(3), como $u \in C([0,T], X)$, dada la condición de F, tenemos por (2) que $u \in C((0,T], H_0^1)$.

Sea $t \in (0,T]$ cualquiera, y tomemos $\varepsilon \in (0,t]$, de esta manera, definamos a:

$$v(s) := u(\varepsilon + s),$$

para $s \in [0, t-\varepsilon]$, entonces es claro que v es solución de (2) en $[0, t-\varepsilon]$, y además $v(0) = u(\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$ por lo mostrado en el primer párrafo.

Por los resultados vistos en clases, en particular, la Fórmula de Duhamel, (acá consideramos el termino no homogéneo $f = F(u)$ con u fijo), tendremos que:

$$v(s) = S(s)u(\varepsilon) - \int_0^s S(s-\sigma)F(v(\sigma))d\sigma, \quad \forall s \in [0, t-\varepsilon].$$

Ahora bien, dada la inyección $X \hookrightarrow Y$ y usando que $G(A) \subseteq G(B)$ dado que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto acotado, podemos concluir que $\forall \varphi \in X, t \geq 0 : \mathcal{T}(t)\varphi = S(t)\varphi$ (esto es básicamente el Lema 3.5.6. del libro) y por lo tanto:

$$u(s+\varepsilon) = \mathcal{T}(s)u(\varepsilon) + \int_0^s \mathcal{T}(s-\sigma)F(u(\sigma+\varepsilon))d\sigma,$$

y esto para todo $s \in [0, t-\varepsilon]$.

Ahora bien, como $u \in C([0,T], X)$, tenemos que para todo $s \in [0,t)$:

$$\mathcal{T}(s)u(\varepsilon) \to \mathcal{T}(s)u(0) = \mathcal{T}(s)\varphi, \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0^+,$$

y como F es Lipschitz continua en acotados, tenemos que (para la familia de acotados $u(\cdot + \varepsilon)$:

$$F(u(\cdot + \varepsilon)) \to F(u(\cdot)), \quad \text{unif. en } [0,s], \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+.$$

Con esto, si primero tomamos $\varepsilon \to 0^+$ y luego $s \to t^-$, tendremos que:

$$u(t) = \mathcal{T}(s)\varphi + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds,$$

y esto lo podemos hacer para todo $t \in [0,T]$, concluyendo así la primera implicancia.

Para la otra implicancia, supongamos que $u \in C([0,T];X)$ verifica (4), y tomemos $0 < t \leq T$, lo que haremos ahora es verificar que se satisfacen las hipótesis que se requerían para usar la formula de Duhamel la cual sabemos que es solución de un problema con la ecuación del calor.

Dado que $\varphi \in X$, y por lo tanto $\varphi \in L^2(\Omega)$, es conocido que $\mathcal{T}(t)\varphi$ es solución del problema:

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega)), \ \Delta u \in C((0,\infty), L^2(\Omega)); \\ u'(t) = \Delta u(t), \quad \forall t > 0; \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

de forma que $t \in (0,\infty) \mapsto \mathcal{T}(t)\varphi$ esta en $C((0,\infty), H_0^1(\Omega))$, por lo que $\mathcal{T}(t)\varphi \in H_0^1(\Omega)$; además, sabemos que se cumple con:

$$\|\nabla \mathcal{T}(t)\varphi\|_{L^2} \leq C\frac{1}{t^{1/2}}\|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall t > 0.$$

Este ultimo resultado sale de la Proposición 3.5.2. del apunte, la cual también fue revisada en clases; ahora bien, la elección de φ para este resultado puede ser cambiada, y en particular, podemos estudiar la *backward heat equation*, de manera que podemos concluir que en particular, dado que $u(s) \in X$ y por lo tanto $F(u(s)) \in X$, que:

$$\|\nabla \mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|_{L^2} \leq C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|F(u(s))\|_{L^2}, \quad \forall s \in (0,t),$$

y usando que g es Lipschitz continua en conjuntos acotados de $\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\|F(u(s))\|_{L^2} \leq CL\|u(s)\|_{L^\infty} \leq C,$$

entonces damos con:

$$\|\nabla\mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|_{L^2} \leq C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}, \quad \forall s \in (0,t),$$

y por otro lado, usando que $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, obtenemos que:

$$\|\mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|_{L^2} \leq \|F(u(s))\|_{L^2} \leq C,$$

obteniendo así que:

$$\|\mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|_{H^1} \leq C\left(1+\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\right), \quad \forall s \in (0,t),$$

pero el lado derecho esta en $L^1(0,t)$, por lo que:

$$\left\|\int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds\right\|_{H^1} \leq \int_0^t \|\mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|_{H^1}ds \leq \int_0^t C\left(1+\frac{1}{(t-s)^{1/2}}ds\right) < \infty,$$

concluyendo así que:

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{H^1} + \left\|\int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds\right\|_{H^1} < \infty$$

y por lo tanto $u(t) \in H_0^1, \forall t \in (0,T]$, (ojo: si bien solo mostramos que $u(t) \in H^1$, dado que $u \in C([0,T],X)$ con $X = C_0(\Omega)$, tenemos que $u(t) = 0$ en $\partial\Omega$, de lo cual se concluye que $u(t) \in H_0^1$), además, no es dificil notar que la dependencia con respecto a t en ambos casos es continua, de manera que $u \in C((0,T],H_0^1)$.

Podemos refinar un poco mas el acotamiento antes mostrado, ya que al acotar obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^1} &\leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{H^1} + \int_0^t C\left(1+\frac{1}{(t-s)^{1/2}}ds\right) \\
&\leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{H^1} + Ct + C2t^{1/2} \\
&\leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{H^1} + CT + C2T^{1/2} \\
&\leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{H^1} + C
\end{aligned}$$

pero:

$$\|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{H^1} \leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\|_{L^2} + \|\nabla\mathcal{T}(t)\varphi\|_{L^2} \leq C + C\frac{1}{t^{1/2}}\|\varphi\|_{L^2} \leq C\left(1+\frac{1}{t^2}\right),$$

obteniendo así que:

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C\left(1+\frac{1}{t^2}\right).$$

Ahora bien, dado que g es Lipschitz continua sobre acotados en $\mathbb{R}$, y la imagen de u es acotada (puesto que $u \in C([0,T],H_0^1)$), dado que $u(t) \in H_0^1$

tenemos que $g(u(t)) \in H^1$, pero como $g(0) = 0$, tenemos que $u(t)(\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$ implica que $g(u(t))(\cdot)|_{\partial\Omega} = 0$, por lo que $F(u(t)) = g(u(t)) \in H_0^1$, y es más, tenemos la siguiente cota con respecto a su norma, ya que:

$$\nabla F(u(t)) = \begin{cases} g'(u(t))\nabla u(t), & \text{para los } u(t) \text{ tal que } g \text{ sea diferenciable,} \\ 0, & \sim \end{cases} ,$$

de lo cual es directo que:

$$\|\nabla F(u(t))\|_{L^2} \leq \|g'(u(t))\|_\infty \|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq L\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq C\left(1 + \frac{1}{t^2}\right).$$

concluyendo así que:

$$\begin{aligned} \|F(u(t))\|_{H^1} &\leq \|F(u(t))\|_{L^2} + \|\nabla F(u(t))\|_{L^2} \\ &\leq C\|u(t)\|_\infty + C\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \\ &\leq C\left(1 + \frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Dado que $u \in C((0,T], H_0^1)$, y que g es Lipschitz continua en acotados, tenemos que $F(u)$ es debilmente continua como mapeo de $(0,T]$ a H_0^1.

Sea $0 < t < T$, entonces nuevamente al usar que $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por el operador A, tenemos que $\Delta\mathcal{T}(t)\varphi \in L^2(\Omega)$, y nuevamente al trabajar con la *ecuacion backward* obtenemos (usando la Proposición 3.5.2. * que:

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|_{L^2} &\leq C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|\nabla F(u(s))\|_{L^2} \\ &\leq C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right), \quad s \in (0,t), \end{aligned}$$

donde el lado derecho de esta desigualdad esta en $L^1(0,t)$, y además se puede concluir que la función $s \mapsto \Delta\mathcal{T}(t-s)F(u(s))$ es débil continua como mapeo de $(0,t)$ a $L^2(\Omega)$.

Por el mismo argumento de la Proposición 3.5.2., tenemos que $\Delta\mathcal{T}(t)\varphi \in L^2(\Omega)$, y con esto, al juntar todo damos con:

$$\begin{aligned} \|\Delta u(t)\|_{L^2} &\leq \|\Delta\mathcal{T}(t)\varphi\|_{L^2} + \left\|\int_0^t \Delta\mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds\right\|_{L^2} \\ &\leq \|\Delta\mathcal{T}(t)\varphi\|_{L^2} + \int_0^t C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)ds \\ &< \infty, \end{aligned}$$

de lo cual se concluye que $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$.

Con esto, tenemos que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ para todo $t \in (0,T]$, y que además $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$, concluyendo así que $u(t) \in D(B), \forall t \in (0,T]$, y por lo tanto $u \in C((0,T), D(B))$, usando nuevamente la dependencia continua de u.

De esta forma, si definimos nuevamente a $v(s) = u(\varepsilon + s)$ para $0 \leq s \leq t - \varepsilon$, tendremos que:

$$v(s) = S(s)u(\varepsilon) + \int_0^s S(s-\sigma)F(v(\sigma))d\sigma, \quad \forall s \in [0, t-\varepsilon],$$

y por lo tanto, dado que satisfacemos la hipótesis de que $v \in C([0, t-\varepsilon], D(B))$ (ya que $[0, t-\varepsilon] \subseteq [0,T)$, de lo cual podemos usar que $u \in C((0,T), D(B))$ implica que $v = u(\cdot + \varepsilon) \in C((0, t-\varepsilon], D(B)))$ para $\varepsilon > 0$ pequeño), tendremos que v es solución de:

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= F(v), \\ v(0) &= u(\varepsilon), \end{aligned}$$

y ahora nuevamente pasando primero al limite de $\varepsilon \to 0+$ y luego a $t \to T^-$, obtenemos que u es solución de (1)-(3), concluyendo así lo pedido. $\square$

3. Existencia local

En clases habíamos visto el siguiente resultado:

Proposición 2. *Existe una función $T : X \to (0, \infty]$ con la siguiente propiedad: para todo $x \in X$, existe un $u \in C([0, T(x)), X)$ tal que para todo $0 < T < T(x)$, $u \in C([0,T], X)$ es la única solución de:*

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

Adicionalmente, tenemos que:

$$2L(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|) \geq \frac{1}{T(x) - t} - 2,$$

esto para todo $t \in [0, T(x))$. En particular, tenemos las siguientes alternativas:

1. *$T(x) = \infty$,*
2. *$T(x) < \infty$ y $\lim_{t \nearrow T(x)} \|u(t)\| = \infty$.*

de forma que podemos deducir el siguiente resultado con respecto al problema que estábamos tratando:

Teorema 2. *Para todo $\varphi \in X$, existe una única función u, definida en un intervalo maximal $[0, T(\varphi))$, tal que u es solución de (1)-(3) para todo $T \in (0, T(\varphi))$. Adicionalmente, si $T(\varphi) < \infty$, tenemos que $\|u(t)\| \to \infty$ cuando $t \nearrow T(\varphi)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in X$, entonces por la Proposición 2. tenemos que existe un único $u \in C([0, T(x)), X)$ tal que para todo $0 < T < T(x)$, u es la única solución de:

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)F(u(s))ds,$$

luego por la Proposición 1. tenemos que u es solución de (1)-(3), pero esto para $T \in (0, T(\varphi)$.

Por último, si $T(\varphi) < \infty$, por la alternativa de la Proposición 2. tendremos que $\|u(t)\| \to \infty$ cuando $t \nearrow T(\varphi)$, concluyendo así la demostración. $\square$

Ahora daremos un resultado que vincula la regularidad de u (Proposición 1.) con respecto a la regularidad de φ.

Proposición 3. *Supongamos que $\varphi \in X \cap H_0^1(\Omega)$, entonces la solución u de (1)-(3) está en $C([0, T(\varphi)), H_0^1(\Omega))$.*

Es más, en el caso que $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, entonces $u \in C([0, T(\varphi)), D(B)) \cap C^1([0, T(\varphi)), L^2(\Omega))$.

Demostración. Supongamos que $\varphi \in X \cap H_0^1(\Omega)$, y sea $t \in (0, T(\varphi))$, luego por el Teorema 2. tenemos que u definido por la formula de Duhamel es solucion de (1)-(3), y usando que $\mathcal{T}(t)\varphi = S(t)\varphi, \quad \forall t \geq 0$,

$$\|u(t) - \varphi\|_{H^1} \leq \|S(t)\varphi - \varphi\|_{H^1} + \int_0^t \|S(t-s)F(u(s))\|_{H^1} ds,$$

pero por el argumento de usar la ecuación *backwards*, y el Teorema 1., tenemos que:

$$\begin{aligned}\|S(t-s)F(u(s))\|_{H^1} &\leq \|S(t-s)F(u(s))\|_{L^2} + \|\nabla S(t-s)F(u(s))\|_{L^2} \\ &\leq \|F(u(s))\|_{L^2} + C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|F(u(s))\|_{L^2},\end{aligned}$$

de manera que:

$$\int_0^t \|S(t-s)F(u(s))\|_{H^1} ds \leq \int_0^t \left(\|F(u(s))\|_{L^2} + C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|F(u(s))\|_{L^2} \right)$$

y usando que $u \in C((0, T(\varphi)), X)$ (y por lo tanto el rango de u en $[0, t]$ es acotado), junto con que g es Lipschitz continua en acotados, podemos acotar $\|F(u(s))\|_{L^2}$, concluyendo así que:

$$\int_0^t \left(\|F(u(s))\|_{L^2} + C\frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|F(u(s))\|_{L^2} ds \right) \leq Ct + Ct^{1/2},$$

de forma que:

$$\|u(t) - \varphi\|_{H^1} \leq \|S(t)\varphi - \varphi\|_{H^1} + Ct + Ct^{1/2},$$

luego por continuidad fuerte del semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ en su dominio (acá es donde usamos que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$), tenemos que:

$$\|S(t)\varphi - \varphi\|_{H^1} \to 0, \quad \text{cuando } t \searrow 0,$$

y por lo tanto, como los demás términos del lado derecho de la cota también convergen a 0 cuando $t \to 0^+$, podemos concluir que:

$$\|u(t) - \varphi\|_{H^1} \to 0, \quad \text{cuando } t \searrow 0,$$

dado que ya sabíamos (demostración de la Proposición 1.) que $u \in C((0,T], H_0^1)$, lo cual se mantiene ahora para $t \in (0, T(\varphi))$, ahora acabamos de demostrar que también es fuertemente continua en $t = 0$, concluyendo así que $u \in C([0, T(\varphi)), H_0^1(\Omega))$.

En particular, si $T < T(\varphi)$, entonces tendremos que u será acotada en $H_0^1(\Omega)$ en $[0,T]$, y por lo cual también será acotada $F(u)$.

Supongamos ahora que $\varphi \in X$ verifica que $\Delta\varphi \in L^2$, entonces es claro que $\varphi \in X \cap H_0^1$, recuperando así lo antes mencionado, y además, argumentando de la misma manera que antes (salvo que ahora ocupamos la cota para $\Delta S(t-s)F(u(s))$ por el Teorema 1.), junto con la propiedad de conmutación de B con respecto al semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$, ya que φ bajo estas hipótesis pertenece a $D(B)$, obteniendo así que:

$$\|\Delta(u(t) - \varphi)\|_{L^2} \leq \|(S(t) - I)\Delta\varphi\|_{L^2} + C\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|F(u(s))\|_{L^2} ds,$$

donde el lado derecho tiende a 0 cuando $t \searrow 0$ (acá usamos implícitamente que $\|F(u(s))\|_{H^1}$ acotado implica que $\|F(u(s))\|_{L^2}$ es acotado, y además que si $\Delta\varphi \in L^2$, entonces $S(t)\Delta\varphi \to \Delta\varphi$ fuertemente en L^2 cuando $t \searrow 0$ (ya que el semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo, i.e. lo es en $t = 0$ como se vio en clases), concluyendo así que:

$$\|\Delta(u(t) - \varphi)\|_{L^2} \to 0, \quad \text{cuando } t \searrow 0,$$

y como ya sabíamos por la Proposición 1. que $u \in C((0,T), D(B))$, lo cual se mantiene ahora para $t \in (0, T(\varphi))$, podemos concluir que $u \in C([0, T(\varphi)), D(B))$.

En particular, dado que u es solución de (2), tenemos que:

$$u_t(t) = \Delta u(t) + F(u(t)) \longrightarrow \Delta\varphi + F(\varphi), \quad \text{en } L^2 \text{ cuando } t \searrow 0.$$

y si tomamos $t < T(\varphi)$ tendremos que:

$$\frac{u(t) - \varphi}{t} = \frac{S(t) - I}{t}\varphi + \frac{1}{t}\int_0^t S(t-s)F(u(s))\,\mathrm{d}s \longrightarrow \Delta\varphi + F(\varphi) \quad \text{as } t \searrow 0.$$

por lo tanto:

$$\left(\frac{d^+u}{dt}\right)(0) = \lim_{t\searrow 0} u_t(t),$$

dado que ya sabíamos que $u \in C^1((0,T],L^2)$ lo cual sigue siendo válido usando $T = t \in (0,T(\varphi))$, con el resultado de recién acabamos de concluir que $u \in C^1([0,T(\varphi),L^2)$, dando así que:

$$u \in C([0,T(\varphi)),D(B)) \cap C^1([0,T(\varphi)),L^2),$$

demostrando así la proposición.

□

4. Existencia Global

Demostraremos dos tipos de resultados, primeramente mostraremos que si g satisface ciertas condiciones para $|x|$ grande, entonces todas las soluciones de (1)-(3) serán globales, y lo segundo será mostrar que si g satisface condiciones para $|x|$ pequeño, entonces las soluciones de (1)-(3) con información pequeña inicial son globales.

Ahora inicialmente demostraremos un principio del máximo para estos problemas.

Proposición 4. *Sean $T > 0$, $\varphi \in X$, $u \in C([0,T],X) \cap C((0,T),H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T),L^2(\Omega))$ con $\Delta u \in C((0,T),L^2(\Omega))$ y $f \in C([0,T],X)$ tales que:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \quad \forall t \in (0,T); \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Si asumimos que existe una constante C tal que:

$$|f(t,x)| \leq C|u(t,x)|,$$

en $[0,T] \times \Omega$, entonces si $\varphi \geq 0$ tendremos que $u(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T]$.

Demostración. Para $t \in (0,T)$, y definimos a:

$$v(t) = \int_\Omega (u^-(t))^2,$$

entonces mostraremos que $v(t) = 0$ para $t \in (0,T)$. Entonces multiplicando la ecuación $u_t - \Delta u = f$ por $-u^-(t)$, tenemos que:

$$-u_t u^-(t) + \Delta u \cdot u^-(t) = -f u^-(t),$$

Ahora bien, notar que para $t > 0$:

$$\begin{aligned}
v'(t) &\leq \frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-(t))^2 \\
&= 2\int_\Omega u^-(t)u_t^-(y) \\
&= -2\int_\Omega u^-(t)u_t(t) \\
&= -2\int_\Omega u^-(t)(\Delta u(t) + f) \\
&= -2\int_\Omega u^-(t)\Delta u(t) - 2\int_\Omega u^-(t)f(t),
\end{aligned}$$

integrando por partes y usando que $u(t) \in X$:

$$-2\int_\Omega u^-(t)\Delta u(t) = 2\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla u^-(t) = -2\int_\Omega |\nabla u^-|^2 \leq 0,$$

por lo cual:

$$\begin{aligned}
v'(t) &\leq -2\int_\Omega u^-(t)f(t) \\
&\leq 2\int_\Omega u^-(t)|f(t)| \\
&\leq C\int_\Omega |u(t)|u^-(t) \\
&= C\int_\Omega (u^-(t))^2 \\
&= Cv(t),
\end{aligned}$$

y con esto, por la *desigualdad de Gronwall* aplicándolo en $0 < s \leq t < T$, obtenemos que:

$$v(t) \leq v(s)e^{C(t-s)},$$

dejando que $s \searrow 0$, sigue que:

$$v(t) \leq e^{Ct}\int_\Omega (\varphi^-)^2 = 0, \quad \forall t \in (0,T),$$

siendo esta última igualdad ya que $\varphi \geq 0$ por hipótesis, de lo cual se concluye que $u^-(t) = 0, \forall t \in (0,T)$, concluyendo así que $u(t) \geq 0$ para todo $t \in (0,T)$, por continuidad podemos dar con que $u(t) \geq 0, \forall t \in (0,T]$, y en $t = 0$ es directo de que $u(0) = \varphi \geq 0$, demostrando así el resultado.

□

Observación 1. *Si aplicamos la proposición recién mostrada con $v = -u$, entonces tendremos que si $\varphi \leq 0$ implica que $u(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,T]$.*

Ahora mostraremos el primer resultado de existencia global.

Proposición 5. *Supongamos que existen $K, C < \infty$ tales que:*

$$xg(x) \leq C|x|^2, \qquad \textit{cuando } |x| \geq K.$$

Entonces para cualquier $\varphi \in X$, la solución de (1)-(3) *dada por el Teorema 2. es global.*

Demostración. Nos pondremos en casos, inicialmente supongamos que $\varphi \in X$ es tal que $\varphi \geq 0$, ahora bien, sea u la solución obtenida por el Teorema 2., entonces si definimos a $h(t) = F(u(t))$, gracias a la condición de Lipschitz podemos concluir que para cualquier $T < T(\varphi)$, $h(t)$ satisface que:

$$|h(t)(x)| \leq C|u(t,x)|, \quad \text{en } [0,T] \times \Omega,$$

de lo cual, por la Proposición 4. podemos concluir que $u(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$.

Ahora bien, por la desigualdad que verifica g es claro que:

$$xg(x) \leq Cx^2 \Longrightarrow g(x) \leq Cx, \quad x \geq K,$$

y por otro lado, como g es acotada para $x \in [0, K]$ (gracias a la Lipschitz continuidad), tendremos que:

$$g(x) \leq C + Cx, \quad \forall x \geq 0,$$

por lo tanto, como $u \geq 0$, y que $F(u(t)) = g(u(t))$, podemos concluir que:

$$\|F(u(t))\| \leq C + \|u(t)\|, \quad \forall t \in [0, T(\varphi)).$$

Con esto, usando la igualdad que verifica u con la formula de Duhamel, y la igualdad de $S(t)\varphi = \mathcal{T}(t)\varphi$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\|u\| &\leq \|S(t)\varphi\| + \int_0^t \|S(t-s)F(u(s))\| ds \\
&\leq \|\varphi\| + \int_0^t \|F(u(s))\| ds \\
&\leq \|\varphi\| + \int_0^t (C + C\|u(s)\|) ds, \quad t \in (0, T(\varphi))
\end{aligned}$$

supongamos por contradicción que $T(\varphi) < \infty$, entonces tenemos que:

$$\int_0^t (C + \|u(s)\|) ds \leq CT(\varphi) + C\int_0^t \|u(s)\| ds,$$

y por lo tanto:

$$\|u\| \leq \|\varphi\| + C + C\int_0^t \|u(s)\| ds,$$

de lo cual, por *Gronwall* tenemos que:

$$\|u(t)\| \leq (C + \|\varphi\|)e^{Ct}, \quad t \in (0, T(\varphi)),$$

pero dada la alternativa del Teorema 2., tenemos que $\|u(t)\| \to \infty$ cuando $t \nearrow T(\varphi)$, pero la desigualdad recién mostrada nos muestra que:

$$\lim_{t \nearrow T(\varphi)} \|u(t)\| \leq (C + \|\varphi\|)e^{CT(\varphi)} < \infty,$$

lo cual es una contradicción, mostrando así que $T(\varphi) = \infty$, y por lo tanto, tenemos que la solución es global.

Ahora tenemos que estudiar el caso general; sea $\varphi \in X$, y definamos a $\psi = |\varphi| \in X$, sea entonces v la solución obtenida por el Teorema 2. usando ψ, y tomemos a $T < \min\{T(\varphi), T(\psi)\}$, como $\psi \geq 0$, por lo antes mencionado tendremos que $T(\psi) = \infty$, de lo cual se deduce que $\min\{T(\varphi), T(\psi)\} = T(\varphi)$.

Sea entonces $w = v - u$, entonces es claro que w es solución de:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = F(v) - F(u), & \forall t \in (0, T); \\ w(0) = \psi - \varphi = |\varphi| - \varphi. \end{cases}$$

y por lo tanto, como $|\varphi| - \varphi \geq 0$, y además gracias a la Lipschitz continuidad tenemos que:

$$|F(v(t,x)) - F(u(t,x))| \leq C|v(t,x) - u(t,x)| = C|w(t,x)|,$$

podemos concluir que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 4., concluyendo así que $w(t) \geq 0, \forall t \in [0,T]$, es decir;

$$u(t) \leq v(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Como queremos acotar la norma de u, debemos acotar inferiormente, y para esto consideraremos a $\underline{v}$ a la solución maximal de la ecuación:

$$\underline{v} = \mathcal{T}(t)\psi + \int_0^t \mathcal{T}(t-s)(-F(-\underline{v}(s)))ds,$$

por el Teorema 2., dado que $-F(-u)$ verifica las mismas propiedades que el F (al menos con respecto a ser Lipschitz continua), podemos asegurar que existe $\underline{v}$, y en particular, dado que $-F(-u(t,x)) = -g(-u(t,x))$ y que:

$$x(-g(-x)) = -xg(-x) = \leq C|x|^2, \quad |x| \geq K,$$

donde usamos que g verifica la condición, tendríamos todas las hipótesis para concluir, por el primer caso, que $\underline{v}$ es una solución global, ya que $\psi \geq 0$ y $-g(-x)$ verifica la desigualdad para todo $|x| \geq K$.

Sea $z = \underline{v} + u$, usaremos el mismo $T < T(\varphi)$ de antes, entonces es claro que satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = -F(-\underline{v}) + F(u), & \forall t \in (0,T); \\ w(0) = \psi + \varphi = |\varphi| + \varphi. \end{cases}$$

por lo tanto, como $|\varphi| + \varphi \geq 0$, y además:

$$| - F(-\underline{v}(t,x)) + F(u(t,x))| \leq C|u(t,x) + v(t,x)| = C|z(t,x)|,$$

por lo cual se satisfacen las hipótesis de la Proposición 2., por lo que podemos concluir que $z(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T]$, y por lo tanto:

$$u(t) \geq -\underline{v}(t), \quad t \in [0,T].$$

Con ambas desigualdades podemos concluir que:

$$\|u(t)\| \leq \text{máx}\{\|v(t)\|, \|\underline{v}(t)\|\}, \quad \forall t \in [0,T],$$

de lo cual sigue que si suponemos que $T(\varphi) < \infty$ tendríamos una contradicción, ya que el lado derecho no diverge cuando $t \nearrow T(\varphi)$, obteniendo así $T(\varphi) = \infty$, demostrando así que la solución es global en el caso general.

$\square$

Proposición 6. *Supongamos que existe $K < \infty$ tal que:*

$$xg(x) \leq 0, \qquad \textit{cuando } |x| \geq K,$$

entonces para cualquier $\varphi \in X$, las soluciones verifican:

$$\|u(t)\| \leq \text{máx}\{K, \|\varphi\|\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Al igual que en la demostración de la proposición anterior, nos restringiremos inicialmente al caso $\varphi \geq 0$, ya que el otro caso sera totalmente análogo al desarrollo de la proposición antes mencionada.

Sea u la solución de (1)-(3) obtenida por el Teorema 2., y sea $k = \text{máx}\{K, \|\varphi\|\}$, con esto es claro que la función $(u-k)^+$ verifica estar en $H_0^1(\Omega)$, el que este en $H^1(\Omega)$ lo hereda directamente de que $u \in H_0^1(\Omega)$, es más, podemos concluir que $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ ya que $(u-k)^+|_{\partial\Omega} = (0-k)^+ = 0$.

Entonces definamos a $f(t) = \int_\Omega ((u(t)-k)^+)^2$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\int_\Omega (u(t)-k)^+ \cdot ((u(t)-k)^+)' \\ &\leq 2\int_\Omega (u(t)-k)^+ u_t(t), \end{aligned}$$

y usando que u es solución de (2), tenemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u(t)-k)^+ u_t(t) &= 2\int_\Omega (u(t)-k)^+(\Delta u(t)+F(u(t)))\\ &= 2\int_\Omega (u(t)-k)^+\Delta u(t) + 2\int_\Omega (u(t)-k)^+ F(u(t)),\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u(t)-k)^+\Delta u(t) &= \int_\Omega (u(t)-k)^+\Delta((u(t)-k)^+)\\ &= -\int_\Omega |\nabla(u(t)-k)^+|^2\\ &\leq 0,\end{aligned}$$

juntando todo, y usando la desigualdad que verifica g (la cual debe verificar para $|x|\geq k$ por la definición de k), podemos concluir que:

$$\begin{aligned}f'(t) &\leq 2\int_\Omega (u(t)-k)^+ F(u(t))\\ &= 2\int_\Omega (u(t)-k)^+ g(u(t))\\ &= 2\int_{u(t)\geq k} \frac{(u(t)-k)}{u(t)} u(t) g(u(t))\\ &\leq 0,\end{aligned}$$

de lo cual se concluye que $f(t)$ es decreciente, ahora bien, notar que:

$$f(0)=\int_\Omega ((u(0)-k)^+)^2 = \int_\Omega ((\varphi-k)^+)^2 = 0,$$

ya que $\varphi \leq \|\varphi\| \leq k$ en Ω, por lo tanto, concluimos que:

$$0 \leq f(t) \leq f(0) = 0,$$

demostrando así que $u(t)-k\leq 0$, i.e. $u(t)\leq k$ para todo $t\geq 0$ (esto ultimo es valido ya que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 5. para poder concluir que la solución u es global), concluyendo así lo pedido.

□

Si la constante C de la desigualdad de $xg(x)$ es suficientemente pequeña, también se puede rescatar un resultado parecido al de recién.

Proposición 7. *Supongamos que existe un $K, C < \infty$ tal que $C < \lambda$, con λ el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$*

$$\lambda := \text{ínf}\{\|\nabla u\|_{L^2} : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1\} > 0,$$

tal que:

$$xg(x) \leq C|x|^2, \quad |x| \geq K,$$

entonces para todo $\varphi \in X$*, la solución* u *de* (1)-(3) *satisface:*

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\| < \infty.$$

Demostración. Dada la hipótesis de g, es claro que:

$$xg(x) \leq C_1 + C_2 x^2, \quad \forall x \geq 0,$$

en lo que sigue, nos bastara con demostrar que se tiene la propiedad para $\varphi \geq 0$. Sea $\varphi \geq 0, \varphi \in X$, y sea u la solución de (1)-(3) obtenida por la Proposición 5., entonces es claro que $u \geq 0$.

Ahora bien, si definimos a $f(t) = \int_\Omega u(t)^2$ para $t \geq 0$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2\int_\Omega u(t)u_t(t) \\
&= 2\int_\Omega u(t)(\Delta u(t) + g(u(t))) \\
&= -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega u(t)g(u(t)) \\
&= -2\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega u(t)g(u(t)),
\end{aligned}$$

por la definición de λ, tenemos que:

$$0 < \lambda \leq \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2}}{\|u(t)\|_{L^2}},$$

y por lo tanto:

$$-2\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq -2\lambda\|u(t)\|_{L^2}^2 = -2\lambda f(t),$$

usando esto, y además de que $u(t) \geq 0$ y por lo tanto tenemos que $u(t)g(u(t)) \leq C_1 + Cu(t)^2$, tendríamos que:

$$\begin{aligned}
f'(t) &\leq -2\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega u(t)g(u(t)), \\
&\leq -2\lambda f(t) + 2\int_\Omega u(t)g(u(t)) \\
&\leq -2\lambda f(t) + 2C_1|\Omega| + 2C\int_\Omega u(t)^2 \\
&= -2(\lambda - C)f(t) + C_1|\Omega|,
\end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que:

$$f'(t) + 2(\lambda - C)f(t) \leq C_1|\Omega|,$$

donde $\lambda - C, C_1 > 0$, y por lo tanto, podemos definir a

$$w(t) = e^{2(\lambda - C)t}\left(f(t) - \frac{C_1|\Omega|}{2(\lambda - C)}\right),$$

de lo cual se tiene que:

$$w'(t) = e^{2(\lambda-C)t}\left(f'(t) + 2(\lambda - C)f(t) - C_1|\Omega|\right) \leq 0,$$

concluyendo así que $w(t) \leq w(0)$, i.e.:

$$e^{2(\lambda-C)t}\left(f(t) - \frac{C_1|\Omega|}{2(\lambda - C)}\right) \leq f(0) - \frac{C_1|\Omega|}{2(\lambda - C)} \leq f(0),$$

de lo cual podemos dar con:

$$f(t) \leq e^{-2(\lambda-C)t}f(0) + \frac{C_1|\Omega|}{(\lambda - C)},$$

y dado que $f(0) \geq 0$, y que $e^{-2(\lambda-C)t} \leq 1$ podemos concluir que:

$$f(t) \leq f(0) + C_1\frac{|\Omega|}{\lambda - C}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dado que $f(0) = \|\varphi\|_{L^2}^2 < \infty$, y que $f(t) = \|u(t)\|_{L^2}^2$, junto con la desigualdad obtenemos que:

$$\sup_{0\leq t<\infty} \|u(t)\|_{L^2} = K < \infty.$$

Consideremos ahora a $p \in (N/2, \infty)$, entonces dado que conocemos los siguientes resultados:

1. Si $1 \leq q \leq p \leq \infty$, entonces $\|S(t)\varphi\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|\varphi\|_{L^q}$, para todo $t > 0$, $\varphi \in X$.
2. Sea $\lambda > 0$ el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces existe $M = M(\lambda, \Omega, N) > 0$ tal que: $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\lambda t}$, para $t \geq 0$.

se puede concluir que $\|\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} \in L^1(0, +\infty)$.

Por el otro lado, dado que $xg(x) \leq C|x|^2$ para $|x| \geq K$, al igual que en la demostración de la Proposición 5. podemos concluir que $g(x) \leq C_2 + Cx$ para $x \geq 0$, y usando que $u(t) \geq 0$, tendremos que al usar esta desigualdad y aplicar la norma L^p junto con la desigualdad triangular, podemos dar con que:

$$\|g(u(t))\|_{L^p} \leq C_2 + C\|u(t)\|_{L^p}, \quad \forall t \geq 0,$$

y por lo tanto, al usar la fórmula de Duhamel para u obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \|\mathcal{T}(t)\varphi\| + \int_0^t \|\mathcal{T}(s)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} \|g(u(s))\|_{L^p} ds \\
&\leq \|\varphi\| + \int_0^t \|\mathcal{T}(s)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} (C_2 + C\|u(s)\|_{L^p}) ds \\
&\leq \|\varphi\| + C_2 \int_0^t \|\mathcal{T}(s)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} ds + C \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\|_{L^p} \int_0^t \|\mathcal{T}(s)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} ds, \\
&\leq \|\varphi\| + \|\mathcal{T}(\cdot)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} (C_2 + C \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\|_{L^p}),
\end{aligned}$$

donde usamos que $\|\mathcal{T}(\cdot)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} = \|\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^\infty)} \in L^1(0,+\infty)$, pero por lo mismo tendremos que estas son solamente constantes fijas, de lo cual podemos concluir que:

$$\|u(t)\| \leq C_3 + C_4 \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\|_{L^p}, \quad \forall t \geq 0.$$

No nos conviene que quede en función de la norma L^p, por lo tanto, notar que:

$$\|v\|_{L^p}^p \leq \|v\|^{p-2} \|v\|_{L^2}^2,$$

de lo cual se deduce que $\|v\|_{L^p} \leq \|v\|^{1-\frac{2}{p}} \|v\|_{L^2}^{\frac{2}{p}}$, ahora bien, al definir $\alpha = \frac{p}{p-2}$ y $\beta = \frac{p}{2}$ tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{2}{p} + \frac{2}{p} = 1,$$

entonces, tomemos a algún $\varepsilon > 0$ cualquiera, con esto tenemos por la *Desigualdad de Young* que:

$$\begin{aligned}
\|v\|^{p-2}\|v\|_{L^2}^2 &= \left(\varepsilon^{1/\alpha}\|v\|^{1/\alpha}\right)\left(\varepsilon^{-1/\alpha}\|v\|_{L^2}^{1/\beta}\right) \\
&\leq \left(\varepsilon^{1/\alpha}\|v\|^{1/\alpha}\right)^\alpha \frac{1}{\alpha} + \left(\varepsilon^{-1/\alpha}\|v\|_{L^2}^{1/\beta}\right)^\beta \frac{1}{\beta} \\
&= \left(1 - \frac{2}{p}\right)\varepsilon\|v\| + \left(\frac{2}{p}\varepsilon^{-\beta/\alpha}\right)\|v\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon\|v\| + \left(\frac{2}{p}\varepsilon^{-(p-2)/2}\right)\|v\|_{L^2},
\end{aligned}$$

tomando a $C(\varepsilon) := \frac{2}{p}\varepsilon^{-(p-2)/2}$, podemos concluir que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier $v \in X$ se verifique:

$$\|v\|_{L^p} \leq \varepsilon\|v\| + C(\varepsilon)\|v\|_{L^2}.$$

De esta forma, si tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\varepsilon C_4 \leq 1/2$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq C_3 + C_4 \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\|_{L^p} \\
&\leq C_3 + C_4 \sup_{0\leq s\leq t} [\varepsilon\|u(s)\| + C(\varepsilon)\|u(s)\|_{L^2}] \\
&= C_3 + \varepsilon C_4 \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\| + C_4 C(\varepsilon) \sup_{0\leq t<\infty} \|u(s)\|_{L^2} \\
&\leq C_3 + \varepsilon C_4 \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\| + C_4 C(\varepsilon) K \\
&\leq C_3 + \frac{1}{2} \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\| + C_4 C(\varepsilon) K,
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que:

$$\sup_{0\leq s\leq t} \|u(s)\| \leq C_3 + C_4 C(\varepsilon) K, \quad \forall t \geq 0,$$

y por lo tanto:

$$\sup_{0\leq t<\infty} \|u(t)\| \leq C_3 + C_4 C(\varepsilon) K < \infty,$$

concluyendo así lo pedido. □

Ahora demostraremos que si g verifica algunas condiciones en alguna vecindad de 0, entonces las soluciones con información inicial pequeña serán globales.

Proposición 8. *Supongamos que existen $\alpha > 0$, $0 < \mu < \lambda$ tales que:*

$$xg(x) \leq \mu |x|^2, \quad |x| \leq \alpha.$$

Entonces existe algún $A < \infty$ tal que si $A\|\varphi\| < \alpha$, por lo tanto, la solución asociada (1)-(3) *es global y satisface:*

$$\|u(t)\| \leq A\|\varphi\| e^{-(\lambda-\mu)t}, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Al igual que antes, solo mostraremos la propiedad para el caso $\varphi \geq 0$, y definamos a:

$$T = \sup\{t \in [0, T(\varphi)) : \|u(s)\| \leq \alpha, \quad \forall s \in [0,t]\} > 0.$$

para que este T esté bien definido, debemos exigir que $\|\varphi\| \leq \alpha$, por lo tanto lo supondremos, y de ahí refinaremos un poco como debe ser la cota; además, consideraremos que $T < \infty$ para dar con la contradicción.

Al igual que en la Proposición 7., al definir a $f(t) = \int_\Omega u(t)^2$, pero ahora para $t \in [0, T]$, tendremos que:

$$f'(t) \leq -2\lambda f(t) + 2\int_\Omega u(t) g(u(t)),$$

y por lo tanto, al usar la desigualdad de $xg(x)$ junto con que $\|u(t)\| \leq \alpha$ para todo $t \in [0, T]$ (por la definición de T), obtenemos que:

$$f'(t) \leq -2\lambda f(t) + 2 \int_\Omega \mu |u(t)|^2 = -2\lambda f(t) + 2\mu f(t) = -2(\lambda - \mu) f(t),$$

de lo cual, aplicando factor integrante y desarrollando, obtenemos que:

$$f(t) \leq f(0) e^{-2(\lambda-\mu)t}, \quad \forall t \in [0, T],$$

y por lo tanto:

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^2} e^{-(\lambda-\mu)t}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ahora bien, usando la fórmula de Duhamel para $u(t)$, podemos dar con:

$$e^{(\lambda-\mu)t} u(t) = e^{(\lambda-\mu)t} \mathcal{T}(t)\varphi + \int_0^t e^{(\lambda-\mu)(t-s)} \mathcal{T}(t-s) \left(e^{(\lambda-\mu)s} F(u(s)) \right) ds,$$

y al igual que antes, tendremos que $\|e^{(\lambda-\mu)t}\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(L^p, L^\infty)} \in L^1(0, +\infty)$, para notar esto basta ver que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|e^{(\lambda-\mu)t}\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(L^p, L^\infty)} dt &= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \|\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(L^p, L^\infty)} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} M e^{-\lambda t} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{-\mu t} dt < \infty \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que:

$$\|e^{(\lambda-\mu)t}\mathcal{T}(t)\|_{\mathcal{L}(L^p, L^\infty)} \in L^1(0, +\infty),$$

y con esto podremos argumentar de la misma manera a la que hicimos en la Proposición 7., teniendo cuidado de notar que ahora estamos trabajando también con $e^{(\lambda-\mu)t} g(u(s))$ en el signo integral, por lo tanto, obtendremos que:

$$e^{(\lambda-\mu)t} \|u(t)\| \leq e^{(\lambda-\mu)t} \|\mathcal{T}(t)\varphi\| + C_4 \sup_{0 \leq s \leq t} e^{(\lambda-\mu)s} \|u(s)\|,$$

y usando el mismo argumento para quitar la norma L^p, obtenemos la siguiente desigualdad (con constantes que pueden depender de T, por eso asumimos que $T < \infty$ por contradicción):

$$e^{(\lambda-\mu)t} \|u(t)\| \leq e^{(\lambda-\mu)t} \|\mathcal{T}(t)\varphi\| + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq s \leq t} e^{(\lambda-\mu)} \|u(s)\| + C_5,$$

y usando que $\|S(t)\varphi\| \leq e^{-\lambda t}\|\varphi\|$ (Proposición 3.5.5. del libro), haciendo el cambio a $\mathcal{T}(t)$, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
e^{(\lambda-\mu)t}\|u(t)\| &\leq e^{-\mu t}\|\varphi\| + \frac{1}{2}\sup_{0\leq s\leq t} e^{(\lambda-\mu)}\|u(s)\| + C_5 \\
&\leq \|\varphi\| + C_5 + \frac{1}{2}\sup_{0\leq s\leq t} e^{(\lambda-\mu)}\|u(s)\| \\
&\leq A\|\varphi\| + \frac{1}{2}\sup_{0\leq s\leq t} e^{(\lambda-\mu)}\|u(s)\|,
\end{aligned}
$$

donde esta última desigualdad se tiene para una constante A (que puede depender de C_5 pero no de T). En lo que sigue, dado que la desigualdad recién mostrada es para todo $t \in [0,T]$, tendríamos que:

$$
\sup_{0\leq s\leq t} e^{(\lambda-\mu)s}\|u(s)\| \leq A\|\varphi\|, \quad \forall t \in [0,T],
$$

y con esto, si suponemos que inicialmente se tiene que $\|\varphi\| < \text{mín}\{\alpha/A, \alpha\}$, entonces $A\|\varphi\| < \alpha$, dando así que:

$$
\sup_{0\leq s\leq t} e^{(\lambda-\mu)s}\|u(s)\| \leq \alpha, \quad \forall t \in [0,T],
$$

de lo cual tendríamos que en particular:

$$
\|u(t)\| \leq e^{-(\lambda-\mu)t}\alpha < \alpha, \quad \forall t \in [0,T],
$$

pero por la continuidad de los términos en la desigualdad (con respecto a $t > 0$) podríamos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y aun así verificar que:

$$
\|u(t)\| \leq \alpha, \quad \forall t \in [0, T+\varepsilon]
$$

lo cual es una contradicción a la definición de T, por lo cual solo queda que $T = \infty$.

Con esto último concluimos que necesariamente $T(\varphi) = \infty$, y por lo tanto u es solución global de (1)-(3), y además, por la desigualdad que habíamos obtenido antes, tenemos que:

$$
\|u(t)\| \leq A\|\varphi\|e^{-(\lambda-\mu)t}, \quad t \geq 0.
$$

□

Proposición 9. *Asumamos que existe algún $\mu \geq 0$, $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tal que:*

$$
xg(x) \leq \mu|x|^{2+\varepsilon}, \quad |x| \leq \alpha.
$$

Entonces existen $\beta, \gamma > 0$ tal que si $\|\varphi\| < \beta$, entonces la solución u asociada de $(1)-(3)$ es global y además:

$$
\|u(t)\| \leq \gamma\|\varphi\|e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.
$$

Demostración. Al igual que antes, solo veremos el caso $\varphi \geq 0$. Sea entonces:

$$\theta(x) = \frac{\mu M}{\varepsilon\lambda} x^{1+\varepsilon} - x, \quad x \geq 0,$$

y consideremos a $-\xi = \min \theta < 0$, para demostrar que el mínimo es menor a 0, notar que equivale a que exista algún $x > 0$ tal que:

$$\frac{\mu M}{\varepsilon\lambda} x^{1+\varepsilon} < x,$$

y por lo tanto:

$$x < \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\mu M}\right)^{1/\varepsilon},$$

lo cual es posible si tomamos $\mu, M, \varepsilon, \lambda > 0$ (en el caso que $\mu = 0$ se tiene trivialmente que $\min \theta < 0$).

Sea entonces $a \in (0, \xi)$ arbitrario, entonces podemos afirmar que existen $0 < x_a < y_a$ tales que:

$$\theta(x_a) + a = \theta(y_a) + a = 0,$$

y que además se verifica que $a < x_a < a(1+\varepsilon)/\varepsilon$. Para demostrar esto basta notar que por lo antes mencionado, teníamos que $\theta(x) \leq 0$ para todo $0 \leq x \leq \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\mu M}\right)^{1/\varepsilon}$, y por lo tanto, como $-a \in (-\xi, 0)$, se tiene que debe existir algún $x_a \in (0, (\varepsilon\lambda/\mu M)^{1/\varepsilon})$ tal que $\theta(x_a) = a$, i.e. $\theta(x_a) - a = 0$.

Por otro lado, por la simetría que tiene $\theta(x)$ con respecto al punto donde alcanza su mínimo, el cual seria $x_{min} = (\varepsilon\lambda/(1+\varepsilon)\mu M)^{1/\varepsilon}$, tenemos que si $x_a = x_{\text{mín}} - h$, entonces $y_a = x_{\text{mín}} + h$ también verifica que $\theta(y_a) - a = 0$.

Para verificar que $a < x_a$, basta notar que $-x < \theta(x)$ para todo $x > 0$, por lo que $-x_a < \theta(x_a)$, lo que implica que $-x_a + a < \theta(x_a) + a = 0$, dando así que $a < x_a$.

Para demostrar que $x_a < a(1+\varepsilon)/\varepsilon$, para esto podemos mostrar de manera análoga, ya que $\theta(x) \leq -\varepsilon x/(1+\varepsilon)$, para $0 \leq x \leq x_{min}$, para ver esto basta notar que la recta definida por $y = -\varepsilon x/(1+\varepsilon)$ intersecta en dos puntos a la recta $y = \theta(x)$, primero es en $(0,0)$ y después es en algún $x_0 > 0$ tal que:

$$\theta(x_0) = \frac{-\varepsilon x_0}{1+\varepsilon},$$

pero esto último equivale a que:

$$\frac{\mu M}{\lambda\varepsilon} x_0^{1+\varepsilon} - x_0 = \frac{-\varepsilon x_o}{1+\varepsilon},$$

de lo cual al despejar obtenemos que:

$$x_0 = \left(\frac{\varepsilon\lambda}{\mu M(1+\varepsilon)}\right)^{1/\varepsilon} = x_{min},$$

y como $\theta(x)$ es estrictamente convexa, su epigrafo es convexo, por lo que la recta $y = -\varepsilon x/(1+\varepsilon)$ para $x \in [0, x_{min}]$ debe estar contenida en el epigrafo de $\theta(x)$, dando asi que $\theta(x) \leq -\varepsilon x/(1+\varepsilon)$ para $x \in [0, x_{min}]$.

Con esto, tenemos que:

$$\theta(x_a) \leq \frac{-\varepsilon x_a}{1+\varepsilon},$$

y sumando a:

$$\theta(x_a) + a = 0 \leq \frac{-\varepsilon x_a}{1+\varepsilon} + a,$$

y por lo tanto:

$$x_a \leq \frac{a(1+\varepsilon)}{a}.$$

Entonces para partir con el problema, supongamos que $\|\varphi\| < \alpha$ y definamos a:

$$T = \sup\{t \in [0, T(\varphi)) : \|u(s)\| \leq \alpha, \quad \forall s \in [0, t]\} > 0,$$

y a:

$$f(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} e^{\lambda s} \|u(s)\|.$$

entonces para $t \in [0, T]$ tendremos que $\|u(s)\| \leq \alpha$, y por lo tanto $|u(t, x)| \leq \alpha$ para cualquier $t \in [0, T], x \in \Omega$, de lo cual tendremos por la desigualdad de g que:

$$u(t, x) g(u(t, x)) \leq \mu |u(t, x)|^{2+\varepsilon}, \quad \forall x \in \Omega,$$

de lo cual obtenemos que:

$$\|u(t)\| \|g(u(t))\| \leq \mu \|u(t)\|^{2+\varepsilon},$$

lo que implica que:

$$\|F(u(t))\| \leq \mu \|u(t)\|^{1+\varepsilon}, \quad \forall t \in [0, T].$$

con esto, al usar la fórmula de Duhamel multiplicandola por $e^{\lambda t}$ damos con:

$$e^{\lambda t} u(t) = e^{\lambda t} \mathcal{T}(t) \varphi + \int_0^t e^{\lambda t} \mathcal{T}(t-s) F(u(s)) ds,$$

de lo cual obtenemos que al tomar $0 \leq t \leq \tau \leq T$, tendremos:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t}||u(t)|| &\leq e^{\lambda t}\|\mathcal{T}(t)\varphi\| + \int_0^t e^{\lambda t}\|\mathcal{T}(t-s)F(u(s))\|ds \\
&\leq e^{\lambda t}Me^{-\lambda t}\|\varphi\| + \int_0^t e^{\lambda t}Me^{-\lambda(t-s)}\|F(u(s))\|ds \\
&\leq M\|\varphi\| + M\int_0^t e^{\lambda s}\|F(u(s))\|ds \\
&\leq M\|\varphi\| + \mu M\int_0^t e^{\lambda s}\|u(t)\|^{1+\varepsilon}ds \\
&= M\|\varphi\| + \mu M\int_0^t e^{-\varepsilon\lambda s}(e^{\lambda s}\|u(t)\|)^{1+\varepsilon}ds \\
&= M\|\varphi\| + \mu M\int_0^t e^{-\varepsilon\lambda s}\left(\sup_{0\leq s\leq\tau} e^{\lambda s}\|u(t)\|\right)^{1+\varepsilon} ds \\
&\leq M\|\varphi\| + \mu M f(\tau)^{1+\varepsilon}\int_0^t e^{-\varepsilon\lambda s}ds \\
&= M\|\varphi\| + \mu M f(\tau)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon\lambda} - \frac{e^{-\varepsilon\lambda t}}{\varepsilon\lambda}\right) \\
&\leq M\|\varphi\| + \frac{\mu M}{\varepsilon\lambda}f(\tau)^{1+\varepsilon},
\end{aligned}$$

entonces al tomar el supremo de t en $0 \leq t \leq \tau$, obtenemos que:

$$f(\tau) \leq M\|\varphi\| + \frac{\mu M}{\varepsilon\lambda}f(\tau)^{1+\varepsilon}, \quad \forall\tau \in [0,T],$$

y por lo tanto, tendremos que:

$$M\|\varphi\| + \frac{\mu M}{\varepsilon\lambda}f(\tau)^{1+\varepsilon} - f(\tau) \geq 0, \quad \forall\tau \in [0,T],$$

de lo cual damos con:

$$\theta(f(t)) + M\|\varphi\| \geq 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Entonces supongamos que $M\|\varphi\| < \xi$, entonces tenemos que existen $0 < x_{M\|\varphi\|} < y_{M\|\varphi\|}$ tales que:

$$\theta(x_{M\|\varphi\|}) + M\|\varphi\| = \theta(y_{M\|\varphi\|}) + M\|\varphi\| = 0,$$

por lo tanto, como $\theta(f(t)) + M\|\varphi\| \geq 0$, tenemos que:

$$f(t) \in [0, x_{M\|\varphi\|}) \cup (y_{M\|\varphi\|}, \infty), \quad \forall t \in [0,T].$$

Ahora bien, como $f(0) = \|\varphi\| \leq M\|\varphi\|$ (recordemos que $M = e^{\lambda|\Omega|^{2/N}/(4\pi)} > 1$), usando que $a < x_a$, damos con $f(0) \leq M\|\varphi\| < x_{M\|\varphi\|}$, de lo cual se concluye que $f(0) \in [0, x_{M\|\varphi\|})$, y por lo tanto, dado que $f(t)$ es continua con respecto a t ($f(t)$ es el supremo con respecto al intervalo con cota superior t de la norma infinito de una función continua), podemos concluir que:

$$f(t) \in [0, x_{M\|\varphi\|}), \quad \forall t \in [0, T],$$

ya que en caso contrario habría un salto en la continuidad de f.

Con esto ultimo, y usando que $x_a < a(1+\varepsilon)/\varepsilon$, tenemos que:

$$e^{\lambda t}\|u(t)\| \leq x_{M\|\varphi\|} \leq \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\|\varphi\|, \quad \forall t \in [0, T],$$

entonces si exigimos que $\frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\|\varphi\| \leq \alpha$ (lo que es mas fuerte que exigir que $\|\varphi\| \leq \alpha$), tendríamos que:

$$e^{\lambda t}\|u(t)\| \leq \alpha, \quad \forall t \in [0, T],$$

y nuevamente daríamos con que

$$\|u(t)\| \leq e^{-\lambda t}\alpha < \alpha, \quad \forall t \in [0, T],$$

pero por el mismo argumento de continuidad, si suponemos que $T < \infty$, tendríamos que existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que:

$$\|u(t)\| \leq \alpha, \quad \forall t \in [0, T + \varepsilon],$$

lo cual contradeceria la definición de T, por lo que $T = \infty$, y en particular $T(\varphi) = \infty$, concluyendo así que u es una solución global.

Por último, por el desarrollo recién mostrado tendríamos que:

$$\|u(t)\| \leq \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\|\varphi\|e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0,$$

por lo tanto, si tomamos $\gamma = \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ y $\beta = \min\{\alpha, \frac{\varepsilon\alpha}{M(1+\varepsilon)}\}$ tenemos las constantes del enunciado.

□

5. Blow-up en tiempo finito

Vamos a partir con un resultado cuya demostración es simple. Considere a la función $\psi \in D(B)$ tal que:

$$\Delta\psi + \lambda\psi = 0, \tag{5}$$
$$\psi \geq 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{6}$$
$$\int_\Omega \psi = 1. \tag{7}$$

en este caso ψ corresponde a la primera eigenfunction de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

Proposición 10. *Supongamos que existen $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ tales que $g(x) \geq \alpha x^{1+\varepsilon} - \beta x$, para $x \geq 0$. Sea $\varphi \in X$, $\varphi \geq 0$ en Ω tal que:*

$$\int \varphi\psi > \left(\frac{\lambda+\beta}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon}.$$

Entonces $T(\varphi) < \infty$.

Demostración. Sea u la solución de (1)-(3) dada por el Teorema 2., dado que $\varphi \geq 0$, por la Proposición 4. tenemos que $u(t) \geq 0$ en Ω, para todo $t \in [0, T(\varphi))$, y entonces definamos a:

$$f(t) = \int_\Omega u(t)\psi \geq 0, \quad \forall t \in [0, T(\varphi)).$$

Con esto tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_\Omega u_t(t)\psi \\ &= \int_\Omega (\Delta u(t) + g(u(t)))\psi \\ &= \int_\Omega u(t)\Delta\psi + \int_\Omega g(u(t))\psi, \end{aligned}$$

dado que ψ es la función propia de $-\Delta$ en H_0^1, y dado que $u(t) \in H_0^1$, tendremos que:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_\Omega u(t)\Delta\psi + \int_\Omega g(u(t))\psi, \\ &= -\lambda \int_\Omega u(t)\psi + \int_\Omega g(u(t))\psi \\ &= -\lambda f(t) + \int_\Omega g(u(t))\psi \\ &\geq -\lambda f(t) + \int_\Omega (\alpha u(t)^{1+\varepsilon} - \beta u(t))\psi \\ &= -(\lambda+\beta) f(t) + \alpha \int_\Omega u(t)^{1+\varepsilon}\psi, \end{aligned}$$

por el otro lado, notar que al ocupar Hölder:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_\Omega u(t)\psi \\ &= \int_\Omega u(t)\psi^{1/(1+\varepsilon)}\psi^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\ &\leq \left(\int_\Omega u(t)^{1+\varepsilon}\psi^{(1+\varepsilon)/(1+\varepsilon)}\right)^{1/(1+\varepsilon)} \left(\int_\Omega \left(\psi^{e/(1+\varepsilon)}\right)^{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\ &= \left(\int_\Omega u(t)^{1+\varepsilon}\psi\right)^{1/(1+\varepsilon)} \left(\int_\Omega \psi\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

y dado que $\int_\Omega \psi = 1$, obtenemos que:

$$f(t) \leq \left(\int_\Omega u(t)^{1+\varepsilon}\psi\right)^{1/(1+\varepsilon)},$$

pero esto implica que:

$$\alpha f(t)^{1+\varepsilon} \leq \alpha \int_\Omega u(t)^{1+\varepsilon}\psi,$$

y por lo cual, al volver a la desigualdad de $f'(t)$ tendremos que:

$$f'(t) \geq -(\lambda+\beta)f(t) + \alpha f(t)^{1+\varepsilon} = f(t)(-(\lambda+\beta)+\alpha f(t)^\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T(\varphi)).$$

Definamos entonces a:

$$T = \sup\left\{t \in (0, T(\varphi)) : f'(s) > 0, \forall s \in (0,t)\right\},$$

gracias a la hipótesis tenemos:

$$f(0) = \int_\Omega \varphi\psi > \left(\frac{\lambda+\beta}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon},$$

entonces:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &\geq f(0^+)(-(\lambda+\beta)+\alpha f(0^+)^\varepsilon) \\ &> f(0)\left(-(\lambda+\beta)+\alpha\frac{\lambda+\beta}{\alpha}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo cual $T > 0$.

Si suponemos que $T < T(\varphi)$, entonces tendríamos que $f'(T) = 0$, pero por otro lado, como $f'(t) > 0, \forall t \in [0, T)$, tendríamos que $f(0) < f(T)$, y dado que $f(0) > 0$, se tendría que:

$$\begin{aligned} f'(T) &\geq f(T)(-(\lambda+\beta)+\alpha f(T)^\varepsilon) \\ &> f(T)(-(\lambda+\beta)+\alpha f(0)^\varepsilon) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto tenemos que $T = T(\varphi)$, y en particular, $f'(t) > 0$ para todo $t \in [0, T(\varphi))$.

Ahora sea $\delta > 0$ tal que:

$$(\alpha - \delta) f(0)^{\varepsilon} = \lambda + \beta,$$

podemos asegurar que este $\delta > 0$ existe ya que esta ultima aseveración requiere que:

$$f(0) = \left(\frac{\lambda + \beta}{\alpha - \delta}\right)^{1/\varepsilon} > \left(\frac{\lambda + \beta}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon},$$

lo cual ya sabemos que se verifica por la hipótesis, además, por la igualdad es claro que $\alpha - \delta > 0$, puesto que $\lambda, \beta > 0$ y $f(0) \geq 0$.

Con esto, si nos vamos a la desigualdad de $f'(t)$ para $t \in (0, T(\varphi))$, y usamos que $f(0) < f(t)$ (dado que $f' > 0$ en $(0, T(\varphi))$) tendremos que:

$$\begin{aligned}
f'(t) &\geq f(t)(-(\lambda + \beta) + \alpha f(t)^{\varepsilon}) \\
&= \delta f(t)^{1+\varepsilon} - \delta f(t)^{1+\varepsilon} + f(t)(-(\lambda + \beta) + \alpha f(t)^{\varepsilon}) \\
&= \delta f(t)^{1+\varepsilon} + f(t)(-(\lambda + \beta) + (\alpha - \delta) f(t)^{\varepsilon}) \\
&\geq \delta f(t)^{1+\varepsilon} + f(t)(-(\lambda + \beta) + (\alpha - \delta) f(0)^{\varepsilon}) \\
&= \delta f(t)^{1+\varepsilon},
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$f(t)^{-\varepsilon-1} f'(t) \geq \delta,$$

con esto concluimos que:

$$-\left(\frac{f(t)^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)' \geq (\delta t)' \Longrightarrow \left(\delta t + \frac{f(t)^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)' \leq 0,$$

y finalmente damos con que:

$$\delta t + \frac{f(t)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \leq \frac{f(0)^{-\varepsilon}}{\varepsilon},$$

i.e.:

$$0 \leq \frac{f(t)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \leq \frac{f(0)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} - \delta t, \quad \forall t \in (0, T(\varphi)).$$

Con esto tendremos que:

$$0 \leq f(t)^{-\varepsilon} \leq f(0)^{-\varepsilon} - \varepsilon \delta t, \quad \forall t \in (0, T(\varphi))$$

por lo tanto, es claro que $T(\varphi) < \infty$ ya que de lo contrario la desigualdad no se cumpliría para t suficientemente grande, es más, podemos acotar $T(\varphi)$, ya que se tiene que verificar que:

$$0 \leq f(0)^{-\varepsilon} - \delta \varepsilon T(\varphi),$$

por lo que:

$$T(\varphi) \leq \frac{f(0)^{-\varepsilon}}{\delta\varepsilon}.$$

□

Ahora demostraremos un segundo resultado donde ocurre blow-up, pero usando un método distinto. Para esto necesitaremos al funcional E definido por:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(u),$$

para $u \in X \cap H_0^1(\Omega)$, donde:

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para demostrarlo, requeriremos de los siguientes dos Lemas:

Lema 1. *Sea $T > 0$ y $u \in C((0,T),X) \cap C((0,T),D(B)) \cap C^1((0,T),L^2(\Omega))$, entonces:*

$$\int_s^t \int_\Omega (\Delta u + g(u))u_t + E(u(t)) = E(u(s)), \quad \forall 0 < s < t < T.$$

Demostración. Por densidad nos restringiremos al caso donde $u \in C^1((0,T),D(A))$ (en donde posiblemente tendremos que reemplazar u con $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} J_\lambda u(s)ds$), entonces notar que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u(t)) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 - \frac{d}{dt}\int_\Omega G(u(t)) \\
&= \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \frac{d}{dt}\nabla u(t) - \int_\Omega g(u(t))u_t(t) \\
&= \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla u_t(t) - \int_\Omega g(u(t))u_t(t) \\
&= -\int_\Omega \Delta u(t)u_t(t) - \int_\Omega g(u(t))u_t(t) \\
&= -\int_\Omega (\Delta u(t) + g(u(t)))u_t(t),
\end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
E(u(t)) - E(u(s)) &= \int_s^t \frac{d}{d\tau}E(u(\tau))d\tau \\
&= -\int_s^t \int_\Omega (\Delta u(\tau) + g(u(\tau)))u_t(\tau),
\end{aligned}$$

y reordenando los términos obtenemos que:

$$\int_s^t \int_\Omega (\Delta u + g(u))u_t + E(u(t)) = E(u(s)), \quad \forall 0 < s < t < T.$$

□

Lema 2. *Sea $\varphi \in X$ y sea u su solución asociada al problema* (1) - (3)*, entonces:*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)^2 dx + 2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx = 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx; \tag{8}$$

$$\int_s^t \int_\Omega u_t^2 + E(u(t)) = E(u(s)) \tag{9}$$

para todo $0 < s < t < T(\varphi)$.

Demostración. Para demostrar la primera igualdad, notar que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)^2 &= 2\int_\Omega u(t)u_t(t) \\
&= 2\int_\Omega u(t)(\Delta u(t) + g(u(t))) \\
&= -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega u(t)g(u(t)),
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)^2 dx + 2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx = 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx, \quad \forall t \in (0, T(\varphi)).$$

Para la segunda igualdad, notar que por el Lema 1. y usando que u es solución de (2), tenemos que:

$$E(u(s)) = E(u(t)) + \int_s^t \int_\Omega (\Delta u + g(u))u_t = E(u(t)) + \int_s^t \int_\Omega u_t^2, \quad \forall 0 < s < t < T(\varphi).$$

□

Con esto listo, mostraremos el siguiente caso donde ocurre blow-up:

Proposición 11. *Supongamos que existe un $K \geq 0$ y algún $\varepsilon > 0$ tal que:*

$$xg(x) \geq (2+\varepsilon)G(x), \quad |x| \geq K.$$

Sea $\mu = \min_{0 \leq x \leq K} xg(x)$ y $\nu = \max_{0 \leq x \leq K} G(x)$, entonces si tomamos a $\varphi \in X \cap H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$(2+\varepsilon)E(\varphi) < |\Omega|(\mu - (2+\varepsilon)\nu),$$

entonces $T(\varphi) < \infty$.

Demostración. Sea $f(t) = \int_\Omega u(t)^2$, entonces por (8), para $t \in (0, T(\varphi))$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega u(t)g(u(t)) \\ &= -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) + 2\int_{|u|\geq K} u(t)g(u(t)), \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de $xg(x)$:

$$f'(t) \geq -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) + 2(2+\varepsilon)\int_{|u|\geq K} G(u(t)). \quad (10)$$

Por el otro lado, notar que por la Proposición 3. podremos usar $s = 0$ en la igualdad (9), tendremos que:

$$\int_0^t \int_\Omega u_t^2 + E(u(t)) = E(u(0)) = E(\varphi),$$

por lo que:

$$E(u(t)) = E(\varphi) - \int_0^t \int_\Omega u_t^2$$

pero:

$$\begin{aligned} E(u(t)) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 - \int_\Omega G(u(t)) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 - \int_{|u|<K} G(u(t)) - \int_{|u|\geq K} G(u(t)), \end{aligned}$$

dando asi que:

$$\begin{aligned} 2(2+\varepsilon)\left\{E(\varphi) - \int_0^t \int_\Omega u_t^2\right\} = (2+\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|\geq K} G(u(t)) \\ - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)), \end{aligned}$$

lo cual podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} 2(2+\varepsilon)\int_{|u|\geq K} G(u(t)) = -2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) + (2+\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \\ - 2(2+\varepsilon)\left\{E(\varphi) - \int_0^t \int_\Omega u_t^2\right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

reemplazando en (10) obtenemos que:

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) \\ &+ (2+\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 - 2(2+\varepsilon)\left\{E(\varphi) - \int_0^t\int_\Omega u_t^2\right\}. \\ &= \varepsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) \\ &- 2(2+\varepsilon)\left\{E(\varphi) - \int_0^t\int_\Omega u_t^2\right\}. \\ &= 2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_t^2 + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + 2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) \\ &- 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) - 2(2+\varepsilon)E(\varphi). \end{aligned}$$

Para seguir acotando, notar que dado $\mu = \text{mín}_{0\leq x\leq K} xg(x)$ y $\nu = \text{máx}_{0\leq x\leq K} G(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} &2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) \\ &\geq 2\int_{|u|<K} \mu - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} \nu \\ &= \int_{|u|<K} 2(\mu - (2+\varepsilon)\nu) \\ &= 2|\{|u|<K\}|(\mu - (2+\varepsilon)\nu), \end{aligned}$$

y * según el libro (ecuación 5.18 de la pagina 75), tenemos que es más, que:

$$2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) \;\geq 2|\Omega|(\mu - (2+\varepsilon)\nu),$$

Si aceptamos esto ultimo, y usamos también la hipótesis de $E(\varphi)$ tendremos que:

$$\begin{aligned} f'(t) \geq 2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_t^2 + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \\ + 2|\Omega|(\mu - (2+\varepsilon)\nu) - 2|\Omega|(\mu - (2+\varepsilon)\nu), \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene que:

$$f'(t) \geq 2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_t^2 + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \geq 2(2+\varepsilon)\int_0^t\int_\Omega u_t^2 > 0$$

Definamos ahora a:

$$h(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t \int_\Omega u^2,$$

entonces es claro que:

$$\begin{aligned} h'(t) - h'(0) &= f(t) - f(0) \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} f(s)ds \\ &= 2\int_0^t \int_\Omega u(s)u_t(s), \end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*, obtenemos que:

$$\int_0^t \int_\Omega uu_t \leq \left(\int_0^t \int_\Omega u^2\right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^2\right)^{1/2} = h(t)^{1/2} \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^2\right)^{1/2},$$

de lo cual obtenemos que:

$$h'(t) - h'(0) \leq 2h(t)^{1/2} \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^2\right)^{1/2},$$

i.e.:

$$(h'(t) - h'(0))^2 \leq 4h(t) \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^2\right),$$

y usando la desigualdad de $f'(t)$, tendríamos que:

$$2(2+\varepsilon)(h'(t) - h'(0))^2 \leq 4h(t)2(2+\varepsilon) \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^2\right) \leq 4h(t)f'(t),$$

pero dado que $h'(t) = f(t)$, es claro que $h''(t) = f'(t)$, de manera que esta ultima expresión podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(h'(t) - h'(0))^2 \leq h(t)h''(t), \quad \forall t \in [0, T(\varphi)). \tag{12}$$

Entonces para demostrar que $T(\varphi) < \infty$, supondremos por contradicción que $T(\varphi) = \infty$, con esto, usando que $h'(t) - h'(0) = f(t) - f(0) > 0$, donde $f(0) > 0$, tendremos que:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(h'(t) - h'(0))^2 \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(h'(t))^2 \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(h'(t))^2,$$

entonces tendríamos que:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(h'(t))^2 \leq h(t)h''(t), \quad \forall t \in [0, T(\varphi)).$$

De esto podemos deducir que:

$$(h(t)^{-\varepsilon/4})'' \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{13}$$

para notar esto basta con calcularlo:

$$\begin{aligned}
(h(t)^{-\varepsilon/4})'' &= \left[-\frac{\varepsilon}{4}h(t)^{-\varepsilon/4-1}h'(t)\right]' \\
&= -\frac{\varepsilon}{4}\left[-\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)h(t)^{-\varepsilon/4-2}(h'(t))^2 + h(t)^{-\varepsilon/4-1}h''(t)\right] \\
&= -\frac{\varepsilon}{4}h(t)^{\varepsilon/4-2}\left[-\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)(h'(t))^2 + h(t)h''(t)\right] \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $h(t) > 0$ y $h(t)$ creciente (basta con notar que $h'(t) = f(t) > 0$ para cualquier t), tendremos que:

$$h(t)^{-\varepsilon/4} \to 0, \quad \text{cuando } t \to \infty,$$

por lo que debe existir algún $t_1 > 0$ tal que $(h^{-\varepsilon/4}(t))'(t_1) < 0$.

Pero usando que $h^{-\varepsilon/4}(t)$ es cóncava, tenemos que en particular:

$$0 \leq h(t)^{-\varepsilon/4} \leq h(t_1)^{-\varepsilon/4} + (t-t_1)(h(t_1)^{-\varepsilon/4})', \quad \forall t \geq t_1,$$

y por lo tanto:

$$-h(t_1)^{-\varepsilon/4} \leq t(h(t_1)^{-\varepsilon/4})' - t_1(h(t_1)^{-\varepsilon/4})',$$

de lo cual, al despejar t, y usar que $(h(t_1)^{-\varepsilon/4})' < 0$, obtenemos que:

$$t \leq t_1 - \frac{h(t_1)^{-\varepsilon/4}}{(h(t_1)^{-\varepsilon/4})'}, \quad \forall t \geq t_1,$$

lo cual es una contradicción ya que basta tomar un t suficientemente grande, en particular $t > \text{máx}\left\{t_1, t_1 - \frac{h(t_1)^{-\varepsilon/4}}{(h(t_1)^{-\varepsilon/4})'}\right\}$, para no verificar la desigualdad. Con esto se concluye que $T(\varphi) < \infty$, y por lo tanto, hay blow-up.

$\square$

6. Ejemplos de aplicaciones

Para dar ejemplos concisos donde si se verifican las hipótesis de lo que hemos señalado, consideraremos a la función $g(x) = a|x|^{\alpha}x$ con $\alpha > 0$ y $a \neq 0$, sea $\varphi \in X$ y denotemos a u como su solución asociada del problema (1)-(3).

Considerando lo antes mencionado, tenemos los siguientes resultados con respecto a las soluciones globales:

- Si $a \leq 0$, entonces tenemos que $xg(x) = a|x|^{\alpha+2} \leq 0$, y esto para cualquier x, por lo tanto, se satisfacen las hipótesis de la Proposición 6 (tomando $K = 0$), de lo cual se concluye que $T(\varphi) = \infty$.
- Si $a > 0$ con $a < \lambda$, entonces dado que $xg(x) = a|x|^{\alpha+2}$, entonces si tomamos a los $|x| < 1$ tendremos que $a|x|^{\alpha+2} < a|x|^2$. Con esto tenemos que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 8., concluyendo así que $T(\varphi) = \infty$.
- Si $a > 0$, pero podemos asegurar que $\|\varphi\| < \beta$ para el β de la Proposición 9., entonces se satisfacen todas las hipótesis para concluir que $T(\varphi) = \infty$.

y con respecto a las soluciones con blow-up, podemos notar que:

1. Si suponemos que $a > 0$, entonces es claro que existen $A, B, \varepsilon > 0$ tales que $g(x) = a|x|^{\alpha+2} \geq A|x|^{1+\varepsilon} - Bx$ para $x \geq 0$ (basta tomar $A = a$, $\varepsilon = 1, B = 1$), y si además consideramos a $\zeta \in X$ tal que $\zeta \geq 0$ y tomamos a un $k > 0$ entero suficientemente grande tal que:
$$k \int \zeta\psi > \left(\frac{\lambda + \beta}{\alpha}\right)^{1/\varepsilon},$$
entonces basta con definir a $\varphi = k\zeta$, y con esto se satisfacen las hipótesis de la Proposición 10., concluyendo así que $T(\varphi) < \infty$.
2. Si suponemos que $a < 2(\alpha + 2)$, dado que:
$$G(x) = \int_0^x g(s)ds = \frac{a|x|^{\alpha+2}}{\alpha + 2} \leq \frac{a}{2}|x|^{\alpha+2},$$
luego es claro que $xg(x) = a|x|^{a+2} \geq (2 + \varepsilon)G(x)$ para cualquier $\varepsilon > 0$, y tomando $K > 0$ libre, con esto, podemos encontrar algún $\varphi \in X \cap H_0^1(\Omega)$ tal que para ciertos parámetros $\varepsilon, K > 0$ (por esto los dejamos libres), se verifique la condición con respecto a $E(\varphi)$ de la Proposición 11., concluyendo así que $T(\varphi) < \infty$.

Referencias

[1] Thierry Cazenave, Alain Haraux, and Yvan Martel. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations.* Oxford University Press, 10 1998.