Revisión del paper *"A Liouville-type theorem for elliptic systems"*

Jorge Novoa C.

27 de Mayo, 2025

1. Introducción

En el paper [3] se considera el siguiente sistema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = v^{\alpha} \\ -\Delta v = u^{\beta} \end{cases} \tag{1}$$

en todo $\mathbb{R}^N$, para $N \geq 3$, considerando $\alpha, \beta > 0$.

La pregunta que surge para esta clase de problemas es encontrar cuáles son los parámetros $\alpha, \beta > 0$ tales que la única solución no negativa sea $(u, v) = (0, 0)$, donde nos referimos a solución como solución clásica del problema, es decir, $u, v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$.

Hay resultados conocidos cuando no es un sistema, es decir, el problema:

$$\Delta u + u^p = 0, \quad u \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \tag{2}$$

en particular, se probó en [4] que la única solución del problema (2) es $u = 0$ cuando:

$$1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}, \quad N \geq 3$$

lo cual terminó siendo generalizado para el caso $p > 0$. Esto significa que hay un parámetro p^* el cual divide los parámetros $p > 0$ en dos regiones, una en donde existen soluciones positivas y una en donde no.

A partir de esto surge la siguiente conjetura para el problema (1), si es que la región:

$$\left\{ \alpha > 0,\, \beta > 0 \;\middle|\; \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = 1 - \frac{2}{N} \right\},$$

la cual conocemos como la *Hipérbola de Sobolev*, divide a los parámetros (α, β) entre la existencia y no existencia de soluciones positivas del problema (1), siendo esta conjeturada ya que hay muchos motivos de por medio, ya que, por ejemplo, se ha mostrado que existen soluciones radiales positivas para (1) si (α, β) está por encima de la *Hipérbola de Sobolev*. La cuestión en el caso más general, es decir, sin asumir simetría radial, es más compleja y, hasta donde sabemos, aún no ha sido completamente resuelta.

Considerando esto, Felmer y Figueiredo buscaron encontrar alguna región de no existencia de soluciones positivas, en particular, en lo que presentaremos en el documento, demostraron que:

(Felmer-Figueiredo) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son tales que

$$\alpha, \beta \leq \frac{N+2}{N-2}, \quad \text{pero no ambas iguales a } \frac{N+2}{N-2}, \tag{3}$$

entonces la única solución no negativa de clase C^2 de (0.1) en todo $\mathbb{R}^N$ es la trivial: $u = 0,\ v = 0$. Y si $\alpha = \beta = \frac{N+2}{N-2}$, entonces u y v son radialmente simétricas con respecto a algún punto de $\mathbb{R}^N$.

Este resultado se puede ver en el siguiente gráfico, el cual viene del paper [1], donde tratan el mismo problema:

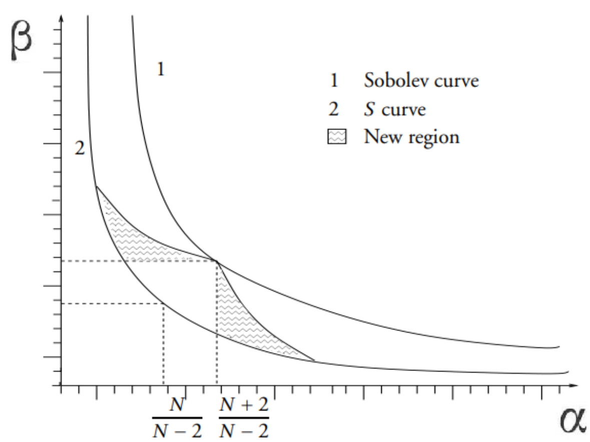

Figura 1: La región encerrada en $\alpha = \beta = (N+2)/(N-2)$ corresponde a conjunto de puntos los cuales consideraron Felmer y Figueiredo.

2. Resultados previos

2.1. Preliminares

Primero daremos unos resultados preliminares que nos servirán en la demostración del Teorema.

Lema 2.1 (**Hadamard three body problem**). *Sea Ω un conjunto abierto que contiene el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^N : r_1 \leq |x| \leq r_2\}, \quad N \geq 3, \quad 0 < r_1 < r_2$$

y sea $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \geq 0$. Para $r_1 \leq r \leq r_2$, definimos

$$M(r) = \max\{u(x) : |x| = r\}.$$

Entonces,

$$M(r) \leq \frac{M(r_1)(r^{2-N} - r_2^{2-N}) + M(r_2)(r_1^{2-N} - r^{2-N})}{r_1^{2-N} - r_2^{2-N}}, \tag{4}$$

para todo $r \in [r_1, r_2]$.

Demostración. Sea $\varphi(r) = a + br^{2-N}$, entonces escojamos a a y b tales que:

$$\varphi(r_1) = M(r_1), \quad \varphi(r_2) = M(r_2)$$

para esto, notar que esto implicaría que:

$$a + br_1^{2-N} = M(r_1), \quad a + br_2^{2-N} = M(r_2)$$

de forma que al despejar a en ambas igualdades e igualarlo, tendríamos que:

$$M(r_1) - br_1^{2-N} = M(r_2) - br_2^{2-N}$$

y despejando a b, obtenemos que:

$$b(r_2^{2-N} - r_1^{2-N}) = M(r_2) - M(r_1)$$

y dado que $0 < r_1 < r_2$ tenemos que:

$$b = \frac{M(r_2) - M(r_1)}{r_2^{2-N} - r_1^{2-N}}$$

Posterior a esto, despejando la ecuación sobre $\varphi(r_1)$:

$$a + \frac{M(r_2) - M(r_1)}{r_2^{2-N} - r_1^{2-N}} \cdot r_1^{2-N} = M(r_1)$$

lo cual implica que:

$$a = M(r_1) - \frac{M(r_2)r_1^{2-N} - M(r_1)r_1^{2-N}}{r_2^{2-N} - r_1^{2-N}} = \frac{M(r_1)r_2^{2-N} - M(r_2)r_1^{2-N}}{r_2^{2-N} - r_1^{2-N}}$$

con esto obtenemos que:

$$\varphi(r) = \frac{M(r_1)(r^{2-N} - r_2^{2-N}) + M(r_2)(r_1^{2-N} - r^{2-N})}{r_1^{2-N} - r_2^{2-N}}$$

Entonces definamos $v(x) = u(x) - \varphi(|x|)$, entonces es claro que:

$$\Delta v = \Delta u - \Delta\varphi(|x|) \geq -\Delta\varphi(|x|)$$

pero:

$$\Delta\varphi(|x|) = \varphi''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\varphi'(|x|)$$

donde:

$$\varphi'(r) = b(2-N)r^{1-N}, \quad \varphi''(r) = b(2-N)(2-N-1)r^{-N}$$

de forma que, denotando $r = |x|$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= b(2-N)(2-N-1)r^{-N} + b(N-1)r^{-1}(2-N)r^{1-N} \\
&= b(2-N)(2-N-1)r^{-N} + b(N-1)(2-N)r^{-N} \\
&= b(2-N)r^{-N}(2-N-1+N-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

obteniendo así que:

$$\Delta v \geq 0, \quad \text{en } U = \{x \in \mathbb{R}^N : r_1 < |x| < r_2\}$$

por otro lado, notar que en ∂U se verifica que:

$$x \in \partial U \iff |x| = r_1 \vee |x| = r_2$$

de forma que, si consideramos el caso $|x| = r_1$, tenemos que para tal x:

$$\begin{aligned}
v(x) &= u(x) - \varphi(|x|) \\
&= u(x) - \varphi(r_1) \\
&= u(x) - M(r_1) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

donde usamos la propiedad de φ y la definición de $M(r)$, el caso para $|x| = r_2$ es totalmente análogo, por lo que se concluye que:

$$v(x) \leq 0, \quad \text{en } \partial U$$

Juntando todo lo anterior, tenemos que v es una función $C^2(\overline{U})$ que verifica:

$$\begin{cases} \Delta v \geq 0, & U \\ v \leq 0, & \partial U \end{cases}$$

por lo tanto, aplicando el Principio del Máximo para funciones subharmonicas tenemos que $v \leq 0$ en todo $\overline{U}$, es decir:

$$u(x) \leq \varphi(|x|), \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^N : r_1 \leq |x| \leq r_2\}$$

Esto ultimo implica que en particular para todo $r \in [r_1, r_2]$:

$$\begin{aligned} M(r) &= \text{máx}\{u(x) : |x| = r\} \\ &\leq \varphi(r) \\ &= \frac{M(r_1)(r^{2-N} - r_2^{2-N}) + M(r_2)(r_1^{2-N} - r^{2-N})}{r_1^{2-N} - r_2^{2-N}} \end{aligned}$$

concluyendo así lo pedido. ■

Lema 2.2. *Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ tal que $u < 0$ y $\Delta u \geq 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, uno tiene que:*

$$u(x) \leq M(\varepsilon), \quad 0 < |x| \leq \varepsilon$$
$$u(x) \leq \frac{M(\varepsilon)\varepsilon^{N-2}}{|x|^{N-2}}, \quad |x| \geq \varepsilon$$

Demostración. En el Lema anterior, si tomamos $r_2 = \varepsilon$, tendremos que:

$$M(r) \leq \frac{M(r_1)(r^{2-N} - \varepsilon^{2-N}) + M(\varepsilon)(r_1^{2-N} - r^{2-N})}{r_1^{2-N} - \varepsilon^{2-N}}, \quad r_1 \leq r \leq \varepsilon$$

lo que en particular significa que:

$$M(r) \leq \frac{M(r_1)(r^{2-N} - \varepsilon^{2-N}) + M(\varepsilon)(r_1^{2-N} - r^{2-N})}{r_1^{2-N} - \varepsilon^{2-N}}, \quad r_1 < r \leq \varepsilon$$

Como $\frac{r^{2-N} - \varepsilon^{2-N}}{r_1^{2-N} - \varepsilon^{2-N}} > 0$ para $r_1 < r \leq \varepsilon$, y sabemos que $M(r_1) < 0$, tendremos que:

$$\frac{M(r_1)(r^{2-N} - \varepsilon^{2-N})}{r_1^{2-N} - \varepsilon^{2-N}} < 0$$

obteniendo así que:

$$M(r) \leq \frac{M(\varepsilon)(r_1^{2-N} - r^{2-N})}{r_1^{2-N} - \varepsilon^{2-N}}, \quad r_1 < r \leq \varepsilon$$

De esta forma, si tomamos $r_1 \to 0^+$, es claro que:

$$M(r) \leq M(\varepsilon), \quad 0 < |x| \leq \varepsilon$$

Para la otra desigualdad, tomamos $r_1 = \varepsilon$, dando así con:

$$M(r) \leq \frac{M(\varepsilon)(r^{2-N} - r_2^{2-N}) + M(r_2)(\varepsilon^{2-N} - r^{2-N})}{\varepsilon^{2-N} - r_2^{2-N}}, \quad \varepsilon \leq r \leq r_2$$

luego tomando $r_2 \to +\infty$, obtenemos que $r_2^{N-2} \to 0$ y que $M(r_2) \to$

$$\frac{M(\varepsilon)(r^{2-N} - r_2^{2-N}) + M(r_2)(\varepsilon^{2-N} - r^{2-N})}{\varepsilon^{2-N} - r_2^{2-N}} \to \frac{M(\varepsilon)r^{2-N} + (\lim_{r_2\to+\infty} M(r_2))\varepsilon^{2-N}}{\varepsilon^{2-N}}$$

y como $u < 0$, es claro que $M(r) < 0$, de forma que:

$$\frac{M(\varepsilon)r^{2-N} + (\lim_{r_2\to+\infty} M(r_2))\varepsilon^{2-N}}{\varepsilon^{2-N}} < \frac{M(\varepsilon)r^{2-N}}{\varepsilon^{2-N}}$$

concluyendo así que:

$$M(r) \leq \frac{M(\varepsilon)r^{2-N}}{\varepsilon^{2-N}}, \quad \varepsilon \leq r$$

obteniendo así por la definición de $M(r)$ que:

$$u(x) \leq \frac{M(\varepsilon)|x|^{2-N}}{\varepsilon^{2-N}}, \quad |x| \geq \varepsilon$$

■

Corolario 2.3. *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $u > 0$ y $\Delta u \leq 0$ en todo $\mathbb{R}^N$, y definamos a:*

$$w(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

la cual corresponde a su Transformada de Kelvin. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, entonces existen constantes positivas b_ε y c_ε tal que:

$$\begin{aligned} &w(x) \geq c_\varepsilon, \quad 0 < |x| \leq \varepsilon \\ &\frac{\varepsilon^{N-2}c_\varepsilon}{|x|^{N-2}} \leq w(x) \leq \frac{b_\varepsilon}{|x|^{N-2}}, \quad |x| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Demostración. La función $-w$ satisface las hipótesis del Lema 2.2., por lo tanto al tomar:

$$c_\varepsilon = \min\{w(x) : |x| = \varepsilon\}, \quad b_\varepsilon = \{u(y) : |y| \leq \varepsilon^{-1}\}$$

tenemos por el Lema 2.2. que:

$$-w(x) \leq M(\varepsilon), \quad 0 < |x| \leq \varepsilon$$

por lo que:

$$w(x) \geq -M(\varepsilon) = \min\{w(x) : |x| = \varepsilon\} = c_\varepsilon, \quad 0 < |x| \leq \varepsilon$$

por el mismo lema tenemos que:

$$-w(x) \leq \frac{M(\varepsilon)\varepsilon^{N-2}}{|x|^{N-2}}, \quad |x| \geq \varepsilon$$

dando así análogamente que:

$$\frac{\varepsilon^{N-2}c_\varepsilon}{|x|^{N-2}} \leq w(x), \quad |x| \geq \varepsilon$$

Para la otra cota, basta notar que:

$$|x|^{N-2}w(x) = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

tomando $|x| \geq \varepsilon$ tenemos que :

$$\left|\frac{x}{|x|^2}\right| = \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

por lo que:

$$|x|^{N-2}w(x) \leq \text{máx}\{u(y) : |y| \leq \varepsilon^{-1}\} = b_\varepsilon, \quad |x| \geq \varepsilon$$

concluyendo así que:

$$w(x) \leq \frac{b_\varepsilon}{|x|^{N-2}}, \quad |x| \geq \varepsilon$$

■

2.2. Preliminares 2.0.

Sea $u, v > 0$ soluciones C^2 del sistema (1) con $\alpha, \beta \leq \frac{N+2}{N-2}$. Entonces para sus Transformadas de Kelvin asociadas,

$$w(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}}u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad z(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}}v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

las cuales están definidas para $x \neq 0$, cumplen con lo siguiente:

$$\begin{cases} \Delta w + \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}}z^\alpha = 0 \\ \Delta z + \frac{1}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}}w^\beta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

esto ya que:

$$\Delta w(x) = \frac{1}{|x|^{N+2}}\Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

de forma que:

$$|x|^{N+2}\Delta w(x) = \Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \underbrace{=}_{\text{u. sol.}} -v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)^\alpha = -|x|^{\alpha(N-2)}z(x)^\alpha$$

obteniendo así que:

$$\Delta w(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}}z^\alpha(x) = 0$$

y de forma análoga la otra ecuación.

Usaremos el método de *Moving Planes*, para esto consideraremos planos paralelos a $x_1 = 0$, que vienen desde $-\infty$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definamos a:

$$\Sigma_\lambda = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < \lambda\}, \quad T_\lambda = \partial\Sigma_\lambda$$

y x^λ como la reflexión de x con respecto al plano T_λ, es decir:

$$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Sea $e_\lambda = (2\lambda, 0, \dots, 0)$, en lo que sigue consideremos a $\lambda \leq 0$ y definamos a $\tilde{\Sigma}_\lambda = \Sigma_\lambda \setminus \{e_\lambda\}$, y dentro de este mismo conjunto definamos a las funciones:

$$w_\lambda(x) = w(x^\lambda), \quad z_\lambda(x) = z(x^\lambda)$$

$$W_\lambda(x) = w_\lambda(x) - w(x), \quad Z_\lambda(x) = z_\lambda(x) - z(x)$$

están bien definidas ya que para $x \in \Sigma_\lambda$, $x \neq 0$, y si $x = e^\lambda$, tendremos que $x^\lambda = (2\lambda - \lambda, 0, \dots, 0) = 0$, por lo tanto en $\tilde{\Sigma}_\lambda$ no puede pasar que $x = 0$ o bien $x^\lambda = 0$, lo cual es requisito para que las transformadas de Kelvin $w(\cdot), z(\cdot)$ estén bien definidas.

El primer paso para ocupar el método de *Moving Planes* es mostrar que podemos empezar el proceso, esto quiere decir que podemos encontrar algún $\lambda < 0$ tal que $W_\lambda(x) \geq 0$ y que $Z_\lambda(x) \geq 0$, para todo $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$.; la cosa es que para estas funciones en particular no se tendrá este resultado (lo cual se vera mas adelante) pero si hay una manera de modificar las funciones para obtener esto (y obtener lo que queremos).

Sea $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$, entonces por (5) tenemos que:

$$\Delta w(x^\lambda) + \frac{1}{|x^\lambda|^{N+2-\alpha(N-2)}} z^\alpha(x^\lambda) = 0$$

notar entonces que:

$$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N) \Longrightarrow |x^\lambda|^2 = (2\lambda - x_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2$$

por lo que:

$$|x^\lambda|^2 - |x|^2 = (2\lambda - x_1)^2 - x_1^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda x_1 = 4\lambda(\lambda - x_1)$$

como $x_1 \leq \lambda$ y $\lambda \leq 0$, tenemos que $\lambda(\lambda - x_1) \leq 0$, de forma que
$|x^\lambda|^2 - |x|^2 \leq 0$, lo cual implica que $|x^\lambda| \leq |x|$.

Con esto, y gracias a la invarianza del laplaciano con respecto a las reflexiones tendremos que:

$$\Delta w_\lambda(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}} z_\lambda^\alpha(x) \leq 0$$

de forma que para $W_\lambda(x) = w_\lambda(x) - w(x)$ (notar que esto implica que en $\partial\tilde{\Sigma}_\lambda$ se tiene que $W_\lambda(x) = 0$)), se cumple que:

$$\Delta W_\lambda(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}}(z_\lambda^\alpha(x) - z^\alpha(x)) \leq 0$$

Ahora bien, si definimos a la función $f(s) = s^\alpha$, es claro que por el Teorema del Valor medio al evaluarlo en el intervalo $[z_\lambda(x), z(x)]$ tendremos que:

$$\frac{z_\lambda^\alpha(x) - z^\alpha(x)}{z_\lambda(x) - z(x)} = \alpha c^{\alpha-1}$$

para algún $c \in [z_\lambda(x), z(x)]$, digamos $c = \psi(x;\lambda)$, obteniendo así que:

$$z_\lambda^\alpha(x) - z^\alpha(x) = \alpha\psi(x;\lambda)^{\alpha-1}(z_\lambda(x) - z(x)) = \alpha\psi(x;\lambda)^{\alpha-1}Z_\lambda(x)$$

por lo tanto, definiendo a:

$$c(x;\lambda) = \frac{\alpha\psi(x;\lambda)^{\alpha-1}}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}}$$

tendremos que:

$$\Delta W_\lambda(x) + c(x;\lambda)Z_\lambda(x) \leq 0$$

De manera análoga uno puede obtener que:

$$\Delta Z_\lambda(x) + \hat{c}(x;\lambda)W_\lambda(x) \leq 0$$

con:

$$\hat{c}(x;\lambda) = \frac{\beta\hat{\psi}(x;\lambda)^{\beta-1}}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}}$$

donde $\hat{\psi}(x;\lambda) \in [w_\lambda(x), w(x)]$. Con esto tenemos el siguiente sistema en $\tilde{\Sigma}_\lambda$:

$$\begin{aligned} \Delta W_\lambda(x) + c(x;\lambda)Z_\lambda(x) &\leq 0 \\ \Delta Z_\lambda(x) + \hat{c}(x;\lambda)W_\lambda(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Nos gustaría inferir que $W_\lambda(x), Z_\lambda(x) \geq 0$ en todo $x \in \Sigma_\lambda$ para algún $\lambda < 0$, pero resulta que el sistema antes mencionado no satisface las hipótesis necesarias para aplicar algún principio del máximo, por lo que tendremos que modificarlo.

Sea $g(x) = \sqrt{1 - x_1}$ definida para todo x tal que $x_1 < 0$ (por lo tanto g esta bien definida en $\tilde{\Sigma}_\lambda$), entonces definiendo a las funciones:

$$\overline{W}_\lambda(x) = \frac{W_\lambda(x)}{g(x)}, \quad \overline{Z}(x) = \frac{Z_\lambda(x)}{g(x)}$$

de esta forma, es claro que $W_\lambda = g\overline{W}_\lambda$, con lo que podemos calcular:

$$\Delta W_\lambda = \Delta(g\overline{W}_\lambda) = g\Delta\overline{W}_\lambda + 2\nabla g \cdot \nabla\overline{W}_\lambda + \overline{W}_\lambda\Delta g$$

por lo tanto, al reemplazar en el sistema tendremos que:

$$(g\Delta\overline{W}_\lambda(x) + 2\nabla g(x) \cdot \nabla\overline{W}_\lambda(x) + \overline{W}_\lambda(x)\Delta g(x)) + c(x;\lambda)g(x)\overline{Z}_\lambda(x) \leq 0$$

luego dividiendo por $g(x) > 0$ tendremos que:

$$\Delta\overline{W}_\lambda(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{W}_\lambda(x) + \overline{W}_\lambda(x)\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + c(x;\lambda)\overline{Z}_\lambda(x)) \leq 0$$

y bajo el mismo argumento damos con:

$$\Delta\overline{Z}_\lambda(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{Z}_\lambda(x) + \overline{Z}_\lambda(x)\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda)\overline{W}_\lambda(x) \leq 0$$

Considerando todo lo anterior, nos queda el siguiente tipo de sistema:

$$\begin{aligned} \left[\Delta\overline{W}_\lambda(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{W}_\lambda(x)\right] + \frac{\Delta g(x)}{g(x)}\overline{W}_\lambda(x) + c(x;\lambda)\overline{Z}_\lambda(x) \leq 0 &\quad \text{en } \tilde{\Sigma}_\lambda \\ \left[\Delta\overline{Z}_\lambda(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{Z}_\lambda(x)\right] + \hat{c}(x;\lambda)\overline{W}_\lambda(x) + \frac{\Delta g(x)}{g(x)}\overline{Z}_\lambda(x) \leq 0 &\quad \text{en } \tilde{\Sigma}_\lambda \\ \overline{W}_\lambda(x) = \overline{Z}_\lambda(x) = 0 &\quad \text{en } \partial\tilde{\Sigma}_\lambda \end{aligned}$$

el cual resulta ser cooperativo ya que $c(x;\lambda), \hat{c}(x;\lambda) \geq 0$ (los términos no diagonales de la matriz que se multiplica al vector $(\overline{W}_\lambda, \overline{Z}_\lambda)^T$ deben ser no negativos).

Considerando lo anterior, el sistema antes mencionado si permite el uso de un Principio del Máximo, el cual corresponde al presentado en el Teorema 1.1. de [2], donde requerimos como hipótesis que:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + c(x;\lambda) \leq 0, \quad \frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) \leq 0$$

lo cual sera lo que resta por mostrar.

Considerando lo antes mencionado, demostraremos algunos Lemas los cuales nos clarificaran algunas propiedades de las funciones $\overline{W}_\lambda, \overline{Z}_\lambda$ que ocuparemos.

Observación: Los siguientes lemas los formularemos para $\overline{W}_\lambda$, pero sin perdida de generalidad podemos aplicarlo para $\overline{Z}_\lambda$.

Lema 2.4. *(i) Si $\overline{W}_\lambda > 0$ para todo x en alguna bola perforada $\dot{B}_\varepsilon(e_\lambda) \subset \tilde{\Sigma}_\lambda$, y si $c_\lambda := \inf\left\{\overline{W}_\lambda(x) : x \in \tilde{\Sigma}_\lambda\right\} < 0$, entonces $\overline{W}_\lambda$ alcanza su ínfimo en $\tilde{\Sigma}_\lambda$.*
(ii) Existe un $\overline{\lambda} < 0$ tal que si $\lambda \leq \overline{\lambda}$ y $c(\lambda) < 0$, entonces $\overline{W}_\lambda$ alcanza su ínfimo en $\tilde{\Sigma}_\lambda$.

Demostración. (i) Por lo mostrado en el Corolario 2.3. tenemos que $W_\lambda(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, podemos encontrar un $r_1 > 0$ tal que:

$$W_\lambda(x) \geq \frac{1}{2}c_\lambda, \quad |x| > r_1$$

por lo que el ínfimo de $\overline{W}_\lambda$ se alcanza en el conjunto compacto:

$$\overline{B}_{r_1}(0) \cap \overline{(\tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_\varepsilon(e_\lambda))}$$

ahora bien, como $\overline{W}_\lambda$ se anula en T_λ, es claro que el ínfimo debe estar en:

$$\overline{B}_{r_1}(0) \cap (\tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_\varepsilon(e_\lambda)) \subseteq \tilde{\Sigma}_\lambda$$

concluyendo así que se alcanza el ínfimo en $\tilde{\Sigma}_\lambda$.

(ii) Por el Corolario 2.3. tenemos que existen $c_1, r > 0$ tales que:

$$\begin{aligned} w(x) &\geq c_1, \quad 0 < |x| \leq 1 \\ w(x) &\leq \frac{c_1}{2}, \quad |x| \geq r \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} w(x) &\geq c_1, \quad 0 < |x| \leq 1 \\ -w(x) &\geq -\frac{c_1}{2}, \quad |x| \geq r \end{aligned}$$

entonces tomando $\overline{\lambda} = \text{mín}\{-r, -1\}$, entonces es claro que si $\lambda \leq \overline{\lambda}$, tendremos para $x \in B_1(e_\lambda)$:

$$1 > |x - e_\lambda|^2 = (x_1 - 2\lambda)^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 = |x^\lambda|^2$$

de forma que $|x^\lambda| \leq 1$, concluyendo así que para $x \in B_1(e_\lambda) \setminus \{e_\lambda\}$ (para que w_λ este definido):

$$w_\lambda(x) = w(x^\lambda) \geq c_1$$

Por otro lado, podemos observar que:

$$\begin{aligned}|x| &= |x - e_\lambda + e_\lambda| \\ &\geq ||e_\lambda| - |x - e_\lambda|| \\ &\geq |e_\lambda| - |x - e_\lambda| \\ &\geq 2|\lambda| - 1\end{aligned}$$

donde usamos que $|x - e_\lambda| < 1$; ahora bien, dado que $\lambda \leq -1 < 0$ y a la vez $\lambda \leq -r$, tenemos que:

$$|x| \geq 2|\lambda| + \lambda = -2\lambda + \lambda = -\lambda \geq r$$

concluyendo así que $|x| \geq r$, de forma que para $x \in B_1(e_\lambda)$ se cumple que:

$$-w(x) \geq -\frac{c_1}{2}$$

Por lo tanto, al tomar $\lambda \leq \overline{\lambda}$ se verifica:

$$\overline{W}_\lambda(x) = \frac{1}{g(x)}(w_\lambda(x) - w(x)) \geq \frac{1}{g(x)}\left(c_1 - \frac{c_1}{2}\right) > 0, \quad \forall x \in B_1(e_\lambda) \setminus \{e_\lambda\}$$

luego usando la parte (i) del Lema, tenemos gracias a la hipótesis de que $c_\lambda < 0$ que $\overline{W}_\lambda$ alcanza su ínfimo en $\tilde{\Sigma}_\lambda$.

■

Lema 2.5. (*i*) *Existe una constante positiva d_λ, que depende solamente de w y de λ, tal que:*

$$\hat{c}(x;\lambda) \leq \frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4}$$

para todo $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(e_\lambda)$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$.

(*ii*) *Existe un $R_\lambda > 0$, que depende solamente de λ y w, tal que:*

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) < 0$$

para todo $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_{R_\lambda}(0)$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$.

Demostración. (*i*) Recordemos que $\beta > 0$, por lo que nos pondremos en casos. Si $\beta \geq 1$, como $\overline{W}_\lambda(x) < 0$ tenemos que $w_\lambda(x) < w(x)$, de forma que, por la definición de $\hat{\psi}(x;\lambda)$, que:

$$w_\lambda(x) \leq \hat{\psi}(x;\lambda) \leq w(x)$$

Necesitamos condiciones sobre $\hat{\psi}(x;\lambda)$ ya que $\hat{c}(x;\lambda)$ viene dado por:

$$\hat{c}(x;\lambda) = \frac{\beta}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}}(\hat{\psi}(x;\lambda))^{\beta-1}$$

Considerando la desigualdad que dimos para $\hat{\psi}$, podemos acotar por arriba aprovechando las cotas que conocemos de $w(x)$ usando el Corolario 2.3., para esto notar que al tomar $d_\lambda = \text{máx}\{u(y) : |y| \leq |\lambda|^{-1}\}$, tendremos que:

$$\hat{\psi}(x;\lambda) \leq w(x) \leq \frac{d_\lambda}{|x|^{N-2}}, \quad |x| \geq |\lambda|$$

luego por la definición de $\hat{c}$, como $\beta \geq 1$ podemos acotar por arriba con la cota encontrada para $\hat{\psi}$, concluyendo así que:

$$\hat{c}(x,\lambda) \leq \frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}} \frac{1}{|x|^{(\beta-1)(N-2)}} = \frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4}$$

ahora bien, esto es para $|x| \geq |\lambda|$, por lo que queda verificar que esto se cumpla para $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(e_\lambda)$.

Como $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$, tenemos que:

$$x_1 < \lambda$$

de forma que:

$$|x_1| \geq |\lambda|$$

y por lo tanto, como $|x| \geq |x_1|$, se concluye que:

$$|x| \geq |\lambda|$$

obteniendo así la desigualdad para este caso (notar que no necesitamos la no pertenencia a la bola centrada en e_λ).

Ahora supongamos que $0 < \beta < 1$, en este caso como teníamos que:

$$w_\lambda(x) \leq \hat{\psi}(x;\lambda) \leq w(x) \quad , \quad \hat{c}(x;\lambda) = \frac{\beta}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}}(\hat{\psi}(x;\lambda))^{\beta-1}$$

tendremos que:

$$(\hat{\psi}(x;\lambda))^{\beta-1} \leq (w_\lambda(x;\lambda))^{\beta-1}$$

de forma que:

$$\hat{c}(x;\lambda) \leq \frac{\beta}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}}(w_\lambda(x;\lambda))^{\beta-1}$$

por lo que nos bastara con acotar a w_λ.

Usando el Corolario 2.3. para $d_\lambda = \text{mín}\{w(x) : |x| = 1\}$ tendremos que:

$$\frac{d_\lambda}{|x|^{N-2}} = \frac{1^{N-2} d_\lambda}{|x|^{N-2}} \leq w(x), \quad |x| \geq 1$$

Si tomamos $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(e_\lambda)$, significa que:

$$|x - e_\lambda| \geq 1$$

ahora bien, por la definición de reflejar con respecto a T_λ, tenemos que:

$$|x^\lambda|^2 = (x-2\lambda)^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 = |x - e_\lambda|^2 \geq 1$$

de forma que podemos aplicar la desigualdad recién encontrada para $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(e_\lambda)$, dando así con:

$$\frac{d_\lambda}{|x^\lambda|^{N-2}} \leq w_\lambda(x)$$

y como ya sabemos que para $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ se verifica que $|x^\lambda| \leq |x|$, tenemos que:

$$w_\lambda(x) \geq \frac{d_\lambda}{|x^\lambda|^{N-2}} \geq \frac{d_\lambda}{|x|^{N-2}}$$

con esto damos con:

$$(w_\lambda(x))^{\beta-1} \leq \frac{d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^{\beta(N-2)-(N-2)}}$$

y de esta forma obtenemos la cota:

$$\hat{c}(x;\lambda) \leq \frac{\beta}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}} \frac{d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^{\beta(N-2)-(N-2)}} = \frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4}$$

concluyendo así la cota en ambos casos.

Para probar (ii), nos basta con notar que:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} = -\frac{1}{4(1-x_1)^2} \leq -\frac{1}{8(1+x_1^2)}$$

Ahora bien, por el orden del denominador, podemos encontrar un $R'_\lambda > 0$ (que depende de λ y w) tal que:

$$\frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4} < \frac{1}{8(1+x_1^2)}, \quad |x| \geq R'_\lambda$$

de forma que usando la cota recién mostrada y la desigualdad de (i), tendremos que:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) \leq -\frac{1}{8(1+x_1^2)} + \frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4} < 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(e_\lambda), \quad |x| \geq R'_\lambda$$

concluyendo así que para $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_{R_\lambda}(0)$ con $R_\lambda > R'_\lambda$ tal que $B_{R_\lambda}(0) \supset B_1(e_\lambda)$ se verifica que:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) < 0$$

■

Lema 2.6. *Existe un $\lambda^* \leq \overline{\lambda}$ tal que para todo $\lambda < \lambda^*$ se verifique:*

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) < 0$$

para cualquier $x \in \tilde{\Sigma}$ donde $\overline{W}_\lambda(x) < 0$.

Demostración. Por lo mostrado en el Lema anterior, tomando $\lambda \leq \overline{\lambda}$ (con $\overline{\lambda}$ del Lema 2.4.) tenemos que:

$$\begin{aligned} (\beta \geq 1): &\quad d_\lambda := \max\{u(y) : |y| \leq |\lambda|^{-1}\} \\ (0 < \beta < 1): &\quad d_\lambda := \min\{w(x) : |x| = 1\} \end{aligned}$$

luego como $|\lambda| \geq |\overline{\lambda}|$ y por lo tanto $|\lambda|^{-1} \leq |\overline{\lambda}|^{-1}$, tenemos que:

$$\max\{u(y) : |y| \leq |\lambda|^{-1}\} \leq \max\{u(y) : |y| \leq |\overline{\lambda}|^{-1}\}$$

dando así que en el caso $\beta \geq 1$:

$$\frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4} \leq \frac{\beta d_{\overline{\lambda}}^{\beta-1}}{|x|^4}$$

y en el caso $0 < \beta < 1$ tendremos que:

$$d_\lambda = d_{\overline{\lambda}} = \min\{w(x) : |x| = 1\}$$

concluyendo así que:

$$\frac{\beta d_\lambda^{\beta-1}}{|x|^4} = \frac{\beta d_{\overline{\lambda}}^{\beta-1}}{|x|^4}$$

De esta forma, en cualquier caso obtenemos que para $\lambda \leq \overline{\lambda}$:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) \leq -\frac{1}{8(1+x_1^2)} + \frac{\beta d_{\overline{\lambda}}^{\beta-1}}{|x|^4}$$

para $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(e_\lambda)$ con $\overline{W}_\lambda(x) < 0$.

Ahora bien, por el Lema 2.4. (ii) tenemos para $\lambda \leq \overline{\lambda}$:

$$W_\lambda(x) > 0, \quad x \in B_1(e_\lambda)$$

con esto tenemos que si $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$, necesariamente tendremos que $x \notin B_1(e_\lambda)$, por lo que:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) \leq -\frac{1}{8(1+x_1^2)} + \frac{\beta d_{\overline{\lambda}}^{\beta-1}}{|x|^4}$$

para $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$.

El lado derecho de la desigualdad antes mostrada es negativo cuando $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_{R_{\overline{\lambda}}}(0)$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$ (ya que depende de $\overline{\lambda}$), por lo tanto, si tomamos $\lambda^* \leq \overline{\lambda}$ tal que:

$$\tilde{\Sigma}_{\lambda^*} \subset \{x \in R^N : |x| > R_{\overline{\lambda}}\}$$

tendremos que para $\lambda \leq \lambda^*$ con $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$ implica que $x \in \tilde{\Sigma}_{\overline{\lambda}} \setminus B_{R_{\overline{\lambda}}}(0)$, y con esto daremos con:

$$\frac{\Delta g(x)}{g(x)} + \hat{c}(x;\lambda) \leq -\frac{1}{8(1+x_1^2)} + \frac{\beta d_{\overline{\lambda}}^{\beta-1}}{|x|^4} < 0$$

para todo $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ tal que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$.

■

Lema 2.7. *Si existe un $x_0 \in \overline{\Sigma}_\lambda$ tal que:*

$$\overline{W}_\lambda(x_0) = \inf\{\overline{W}_\lambda(x) : x \in \tilde{\Sigma}_\lambda\} < 0$$

entonces $\overline{Z}_\lambda(x_0) < 0$. Es más, si $|x_0| > R_\lambda$ (con R_λ mostrado en el Lema 2.5. (ii) para $\overline{Z}_\lambda$), entonces $\overline{Z}_\lambda(x_0) < \overline{W}_\lambda(x_0)$.

Demostración. Primero notar que $\nabla\overline{W}_\lambda(x_0) = 0$, esto ya que en x_0 se alcanza el infimo, y como $\overline{W}_\lambda(x) = 0$ para $x \in \partial\tilde{\Sigma}_\lambda$, tenemos que $x_0 \notin \partial\tilde{\Sigma}_\lambda$ (ya que estamos asumiendo que el infimo es estrictamente negativo), concluyendo asi que $x_0 \in \tilde{\Sigma}_\lambda$, de lo cual sale que al alcanzar el infimo, se tiene que $\nabla\overline{W}_\lambda(x_0) = 0,\ \Delta\overline{W}_\lambda(x_0) \geq 0$.

Ahora bien, como $\overline{W}_\lambda, \overline{Z}_\lambda$ verifican:

$$\left[\Delta\overline{W}_\lambda(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{W}_\lambda(x)\right] + \frac{\Delta g(x)}{g(x)}\overline{W}_\lambda(x) + c(x;\lambda)\overline{Z}_\lambda(x) \leq 0$$

tendremos que en $x = x_0$:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)}\overline{W}_\lambda(x_0) + c(x_0;\lambda)\overline{Z}_\lambda(x_0) \leq 0$$

Ahora bien, como $\Delta g(x)/g(x) < 0$ para todo $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$, tenemos que:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)}\overline{W}_\lambda(x_0) > 0$$

de forma que:

$$c(x_0;\lambda)\overline{Z}_\lambda(x_0) < -\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)}\overline{W}_\lambda(x_0) < 0$$

y como $c(x_0;\lambda) > 0$ (por como se define), tenemos que necesariamente $\overline{Z}_\lambda(x_0) < 0$.

En el caso que además tengamos que $|x_0| > R_\lambda$ (con R_λ asociado al Lema 2.5 (ii) para $\overline{Z}_\lambda$), podemos reescribir la desigualdad en x_0 mostrada previamente:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)}\overline{W}_\lambda(x_0) + c(x_0;\lambda)\overline{Z}_\lambda(x_0) \leq 0$$

como:

$$\left[\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)} + c(x_0;\lambda)\right]\overline{W}_\lambda(x_0) + c(x_0;\lambda)\left[\overline{Z}_\lambda(x_0) - \overline{W}_\lambda(x_0)\right] \leq 0$$

Con esto, como el Lema 2.5 (ii) es aplicable en $\overline{Z}_\lambda$, tenemos que:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)} + c(x_0;\lambda) < 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_{R_\lambda}(0),\ \overline{Z}_\lambda(x) < 0$$

por lo tanto podemos aplicar la desigualdad para x_0 ya que verifica que $|x_0| > R_\lambda$ y que $\overline{Z}_\lambda(x_0) < 0$, obteniendo asi que:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)} + c(x_0;\lambda) < 0$$

y por lo tanto:

$$c(x_0;\lambda)\left[\overline{Z}_\lambda(x_0) - \overline{W}_\lambda(x_0)\right] \leq -\left[\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)} + c(x_0;\lambda)\right]\overline{W}_\lambda(x_0) < 0$$

luego como $c(x_0;\lambda) > 0$ por definición, tenemos que $\overline{Z}_\lambda(x_0) - \overline{W}_\lambda(x_0) < 0$, concluyendo así que $\overline{Z}_\lambda(x_0) < \overline{W}_\lambda(x_0)$.

■

Con estos lemas listos podemos demostrar las siguientes dos proposiciones con las que demostraremos el Teorema.

Proposición 2.8. *Existe un $\lambda^* \leq 0$ tal que para todo $\lambda \leq \lambda^*$, $\overline{W}_\lambda(x) \geq 0$ y $\overline{Z}_\lambda(x) \geq 0$ para todo $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$.*

Demostración. Sea λ^* definido como el mínimo de los λ^* dados por el Lema 2.6. al aplicarlo a $\overline{W}_\lambda, \overline{Z}_\lambda$). Supondremos por contradicción que existe un $\lambda \leq \lambda^*$ tal que:

1. $\overline{W}_\lambda(x) < 0$ para algún $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$, o bien
2. $\overline{Z}_\lambda(x) < 0$ para algún $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\overline{W}_\lambda(x) < 0$ para algún $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$, con esto, es claro que el ínfimo de $\overline{W}_\lambda$ (el cual es alcanzado en algún x_0 ya que $\lambda \leq \lambda^* \leq \overline{\lambda}$ y usando el Lema 2.4. (ii)) es menor estricto que 0, luego por el Lema 2.7. tendremos que $\overline{Z}_\lambda(x_0) < 0$, de forma que $\overline{Z}_\lambda(x) < 0$ para algún $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$. El mismo argumento se puede hacer al partir asumiendo que $\overline{Z}_\lambda(x) < 0$, de forma que en cualquier caso se tiene o bien que ambas son no negativas, o bien ambas son estrictamente negativas en algún punto (el cual no necesariamente deba ser el mismo).

Ahora bien, podemos aplicar el Lema 2.6. en el punto x_0 tal que $\overline{Z}_\lambda(x_0) < 0$ (en particular usaremos x_0 el punto donde se alcanza el ínfimo de $\overline{W}_\lambda$) , dando así que:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)} + c(x_0;\lambda) < 0$$

con esto tendremos que el primer bracket de la siguiente desigualdad (la cual mostramos en Lema 2.7. **por si se requiere revisar**) es negativo:

$$\left[\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0)} + c(x_0;\lambda)\right]\overline{W}_\lambda(x_0) + c(x_0;\lambda)\left[\overline{Z}_\lambda(x_0) - \overline{W}_\lambda(x_0)\right] \leq 0$$

por lo tanto, como $\overline{W}_\lambda(x_0) < 0$ y $c(x_0;\lambda) > 0$, tenemos que:

$$\overline{Z}_\lambda(x_0) < \overline{W}_\lambda(x_0)$$

ahora podemos hacer un argumento similar para $\overline{Z}_\lambda$ y concluir que:

$$\overline{W}_\lambda(x_1) < \overline{Z}_\lambda(x_1)$$

donde $x_1 \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ es el punto donde $\overline{Z}_\lambda$ alcanza su ínfimo.

Con estas desigualdades, y usando que $\overline{Z}_\lambda(x_1) \leq \overline{Z}_\lambda(x_0)$ y $\overline{W}_\lambda(x_0) \leq \overline{W}_\lambda(x_1)$ (por la definición de x_1 y x_0), tendremos que:

$$\overline{Z}_\lambda(x_0) < \overline{W}_\lambda(x_0) \leq \overline{W}_\lambda(x_1) < \overline{Z}_\lambda(x_1) \leq \overline{Z}_\lambda(x_0)$$

lo cual es una contradicción.

■

Gracias a la Proposición 2.8. podemos asegurar que el siguiente elemento esta bien definido:

$$\lambda_0 := \sup\left\{\lambda < 0 : \overline{W}_\lambda(x) \geq 0, \overline{Z}_\lambda(x) \geq 0,\ \forall x \in \tilde{\Sigma}_\lambda\right\}$$

Proposición 2.9. *Si $\lambda_0 < 0$, entonces $\overline{W}_{\lambda_0}(x), \overline{Z}_{\lambda_0}(x) \equiv 0$ para todo $x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$.*

Observación: Esta proposición nos dice que w y z son simetricos con respecto al hiperplano T_{λ_0}.

Demostración. Por continuidad tenemos que $\overline{W}_{\lambda_0}(x), \overline{Z}_{\lambda_0}(x) \geq 0$ para todo $x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$. Supongamos entonces que $\overline{Z}_{\lambda_0}(x) \equiv 0$, entonces por la ecuación:

$$\left[\Delta\overline{Z}_{\lambda_0}(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{Z}_{\lambda_0}(x)\right] + \hat{c}(x;\lambda_0)\overline{W}_{\lambda_0}(x) + \frac{\Delta g(x)}{g(x)}\overline{Z}_{\lambda_0}(x) \leq 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$$

tendremos que:

$$\hat{c}(x;\lambda_0)\overline{W}_{\lambda_0}(x) \leq 0$$

por lo que $\overline{W}_{\lambda_0}(x) \leq 0$, de forma que la única opción que queda es que $\overline{W}_{\lambda_0} \equiv 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, el mismo argumento se puede aplicar asumiendo que $\overline{W}_{\lambda_0} \equiv 0$, de forma que si queremos contradecir la proposición, debemos asumir que $\overline{W}_{\lambda_0}, \overline{Z}_{\lambda_0} \not\equiv 0$

Notar entonces que tenemos que $c(x;\lambda_0)\overline{Z}_{\lambda_0}(x) \geq 0$ en todo $x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, por lo que la siguiente desigualdad es valida:

$$\left[\Delta\overline{W}_{\lambda_0}(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{W}_{\lambda_0}(x)\right] + \frac{\Delta g(x)}{g(x)}\overline{W}_{\lambda_0}(x) \leq 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$$

de forma que por el Principio del Máximo Fuerte (para operadores elípticos de segundo orden) (ya que satisfacemos las hipótesis trivialmente puesto que $\frac{\Delta g(x)}{g(x)} \leq 0$ y sabemos que $\overline{W}_{\lambda_0} \geq 0$), tenemos que o bien $\overline{W}_{\lambda_0} \equiv 0$ o bien $\overline{W}_{\lambda_0}(x) > 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, por lo tanto tenemos que $\overline{W}_{\lambda_0}(x) > 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$.

El mismo argumento antes mencionado se puede aplicar para $\overline{Z}_{\lambda_0}$, de forma que concluimos que $\overline{Z}_{\lambda_0}(x) > 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$.

Con esto tenemos que:

$$\begin{aligned}\left[\Delta\overline{W}_{\lambda_0}(x) + 2\frac{\nabla g(x)}{g(x)} \cdot \nabla\overline{W}_{\lambda_0}(x)\right] + \frac{\Delta g(x)}{g(x)}\overline{W}_{\lambda_0}(x) &\leq 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0} \\ \overline{W}_{\lambda_0} &> 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0} \\ \overline{W}_{\lambda_0} &= 0, \quad x \in \partial\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}\end{aligned}$$

de forma que podemos aplicar el *Lema de Hopf* en todo el borde (lo mismo para $\overline{Z}_{\lambda_0}$), concluyendo así que:

$$\frac{\partial\overline{W}_{\lambda_0}}{\partial\nu}, \frac{\partial\overline{Z}_{\lambda_0}}{\partial\nu} < 0, \quad \text{en } T_{\lambda_0} = \partial\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$$

donde $\partial/\partial\nu$ es $\partial/\partial x_1$ dada las condiciones del problema. En lo que queda mostraremos que es imposible que esto ultimo ocurra.

De la definición de λ_0 tenemos que existe una sucesión de números reales $\lambda_k \to \lambda_0$ con $\lambda_k > \lambda_0$ y una sucesión de puntos $w_k \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$ tales que o bien $\overline{W}_{\lambda_k}(w_k)$ es negativo o $\overline{Z}_{\lambda_k}(w_k)$ es negativo (asumiremos sin perdida de generalidad el primer caso).

Ahora bien, recordemos que W_λ verificaba la siguiente ecuación:

$$\Delta W_{\lambda_0}(x) + c(x;\lambda_0)Z_{\lambda_0}(x) \leq 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$$

por lo tanto, como $\overline{Z}_{\lambda_0}(x) > 0$ implica que $Z_{\lambda_0}(x) > 0$, tenemos que necesariamente $c(x;\lambda_0)Z_{\lambda_0}(x) \geq 0$, de forma que $\Delta W_{\lambda_0}(x) \leq 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ (i.e. W_{λ_0} es superharmónica en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$).

En particular tendremos que W_{λ_0} sera superharmonica en $B_{2R}(e_{\lambda_0}) \setminus \{e_{\lambda_0}\}$ con $2R = |\lambda_0|$ (ya que esta bola abierta esta totalmente contenida en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$). Lo que significa que $W_{\lambda_0}(x) > 0$, $\Delta W_{\lambda_0}(x) \leq 0$ para $x \in B_{2R}(e_{\lambda_0}) \setminus \{e_{\lambda_0}\}$, de forma que por los mismos argumentos mostrados en el Lema 2.2. (aplicandolo para la funcion $-W_{\lambda_0}$) tendremos que existe un $c_0 > 0$ tal que:

$$W_{\lambda_0}(x) \geq c_0, \quad x \in B_R(e_{\lambda_0}) \setminus \{e_{\lambda_0}\}$$

con un argumento similar podemos concluir que:

$$Z_{\lambda_0}(x) \geq c_0, \quad x \in B_R(e_{\lambda_0}) \setminus \{e_{\lambda_0}\}$$

(ojo, acá tomamos c_0 como el mínimo de los c_0 que nos entrega este argumento, para que se cumpla para W_{λ_0} y Z_{λ_0}).

Con esto tendremos que:

$$\overline{W}_{\lambda_0}(x), \overline{Z}_{\lambda_0}(x) \geq \tilde{c}_0 > 0, \quad x \in B_R(e_{\lambda_0}) \setminus \{e_{\lambda_0}\}$$

ahora bien, para k suficientemente grandes, por continuidad tendremos que:

$$\overline{W}_{\lambda_k}(x), \overline{Z}_{\lambda_k}(x) \geq \frac{\tilde{c}_0}{2}, \quad x \in B_{R/2}(e_{\lambda_k}) \setminus \{e_{\lambda_k}\}$$

ya que para un k suficientemente grande tendremos que

$$B_{R/2}(e_{\lambda_k}) \setminus \{e_{\lambda_k}\} \subset B_R(e_{\lambda_0}) \setminus \{e_{\lambda_0}\}$$

y de ahí usar la continuidad que hay con respecto a λ para W_λ, Z_λ.

En lo que sigue usaremos los k suficientemente grandes para que se cumpla lo antes mencionado, de forma que por el Lema 2.4. (i), dado que se tiene que $\overline{W}_{\lambda_k} > 0$ en $B_{R/2}(e_{\lambda_k}) \setminus \{e_{\lambda_k}\}$ y el infimo de $\overline{W}_{\lambda_k}$ en $\tilde{\Sigma}_k$ es estrictamente negativo (ya que asumimos que existe al menos un punto donde es estrictamente negativa la función $\overline{W}_{\lambda_k}$), tenemos que $\overline{W}_{\lambda_k}$ alcanza su mínimo en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$, y por lo tanto, por el Lema 2.7. tendremos que $\overline{Z}_{\lambda_k}(x_0) < 0$ para x_0 el punto donde se alcanza el ínfimo en $\tilde{\Sigma}_k$, lo que implica que el ínfimo es negativo y nuevamente, por el Lema 2.4. (i) tendremos que $\overline{Z}_{\lambda_k}$ alcanza su ínfimo (el cual es negativo) en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$.

(Observación) Notar que este argumento también es valido si se asumía que $\overline{Z}_{\lambda_k}$ fuese negativa en un punto de $\tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$, por lo que se justifica el haber dicho sin perdida de generalidad.

Denotemos entonces a x_k y y_k, respectivamente, a los puntos donde se alcanza el ínfimo de $\overline{W}_{\lambda_k}$ y $\overline{Z}_{\lambda_k}$, ahora bien, supongamos por contradicción que x_k e y_k son no acotados cuando $k \to \infty$. Por la definición de los R_{λ_k} tenemos que al ser $(\lambda_k)_k$ acotado, que $(R_{\lambda_k})_k$ es acotada, por lo tanto debe existir algún k lo suficientemente grande tal que:

$$|x_k|, |y_k| > R_{\lambda_k}$$

de forma que por el Lema 2.7. tenemos que:

$$\overline{Z}_{\lambda_k}(x_k) < \overline{W}_{\lambda_k}(x_k) \quad , \quad \overline{W}_{\lambda_k}(y_k) < \overline{Z}_{\lambda_k}(y_k)$$

y como $\overline{W}_{\lambda_k}(x_k) \leq \overline{W}_{\lambda_k}(y_k)$ por la definición de x_k, tendremos que:

$$\overline{Z}_{\lambda_k}(x_k) < \overline{W}_{\lambda_k}(x_k) \leq \overline{W}_{\lambda_k}(y_k) < \overline{Z}_{\lambda_k}(y_k)$$

lo cual es una contradicción ya que $\overline{Z}_{\lambda_k}(y_k) \leq \overline{Z}_{\lambda_k}(x_k)$, concluyendo así que o bien $(x_k)_k$ es acotado, o bien $(y_k)_k$ lo es.

Supongamos que $(x_k)_k$ es acotado, entonces al pasar a una subsucesión podemos asumir que $x_k \to \overline{x}$. Ya sabemos que $\nabla \overline{W}_{\lambda_k}(x_k) = 0$ (por el argumento de que el ínfimo no podía estar en $\partial\tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$) y además ya sabíamos que $\overline{W}_{\lambda_k}(x_k) < 0$, así que por continuidad tendremos que:

$$\nabla \overline{W}_{\lambda_0}(\overline{x}) = 0, \quad \overline{W}_{\lambda_0}(\overline{x}) \leq 0$$

Ahora bien, como $\overline{x} \neq e_{\lambda_0}$ ya que teníamos:

$$\overline{W}_{\lambda_k}(x), \overline{Z}_{\lambda_k}(x) \geq \frac{\tilde{c}_0}{2}, \quad x \in B_{R/2}(e_{\lambda_k}) \setminus \{e_{\lambda_k}\}$$

lo cual implica que $x_k \notin B_{R/2}(e_{\lambda_k})$ para todo k (tampoco puede estar en $\{e_{\lambda_k}\}$ ya que recordemos que el ínfimo era alcanzado en $x_k \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$), de forma que en el limite tenemos que $\overline{x} \notin B_{R/2}(e_{\lambda_0})$, por lo que sigue $\overline{x} \neq e_{\lambda_0}$.

Además teníamos que $\overline{W}_{\lambda_0}(x) > 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, por lo que concluimos que necesariamente $\overline{x} \in T_{\lambda_0}$.

Con esto tenemos que $\frac{\partial \overline{W}_{\lambda_0}(\overline{x})}{\partial \nu} = \nabla \overline{W}_{\lambda_0}(\overline{x}) \cdot \nu = 0$ con $\overline{x} \in T_{\lambda_0} = \partial\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, lo cual contradice a lo obtenido previamente por el Lema de Hopf.

El mismo argumento se puede aplicar al asumir que $(y_k)_k$ es acotado, concluyendo así la demostración.

■

3. Demostración del Teorema Principal

Primero demostraremos que si $\alpha, \beta \leq \frac{N+2}{N-2}$ pero no ambas iguales a $\frac{N+2}{N-2}$ entonces la única solución no negativa de clase C^2 en $\mathbb{R}^N$ del sistema:

$$\begin{cases} \Delta u + v^\alpha = 0 \\ \Delta v + u^\beta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Por el desarrollo antes mencionado tenemos dos posibilidades:

1. Si $\lambda_0 < 0$, por la Proposición 2.9. tendríamos que w y z son simétricos con respecto al plano T_{λ_0}, pero recordemos que w y z verificaban las siguiente ecuaciones para $x \neq 0$:

$$\begin{cases} \Delta w(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}} z^\alpha(x) = 0 \\ \Delta z(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}} w^\beta(x) = 0 \end{cases}$$

Entonces aplicándolo a x^{λ_0} tendremos que:

$$\begin{cases} \Delta w_{\lambda_0}(x) + \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\alpha(N-2)}} z^\alpha_{\lambda_0}(x) = 0 \\ \Delta z_{\lambda_0}(x) + \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\beta(N-2)}} w^\beta_{\lambda_0}(x) = 0 \end{cases}$$

luego por la simetría de w y z con respecto a T_{λ_0}:

$$\begin{cases} \Delta w(x) + \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\alpha(N-2)}} z^{\alpha}(x) = 0 \\ \Delta z(x) + \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\beta(N-2)}} w^{\beta}(x) = 0 \end{cases}$$

por lo que para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tendríamos que:

$$\begin{cases} \Delta w(x) + \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\alpha(N-2)}} z^{\alpha}(x) = \Delta w(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}} z^{\alpha}(x) \\ \Delta z(x) + \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\beta(N-2)}} w^{\alpha}(x) = \Delta z(x) + \frac{1}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}} w^{\alpha}(x) \end{cases}$$

lo cual, a menos que $w \equiv z \equiv 0$ (lo que nos sirve ya que es lo que queremos mostrar) tendríamos que:

$$\frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\alpha(N-2)}} = \frac{1}{|x|^{N+2-\alpha(N-2)}}, \quad \frac{1}{|x^{\lambda_0}|^{N+2-\beta(N-2)}} = \frac{1}{|x|^{N+2-\beta(N-2)}}$$

como estamos asumiendo que no puede pasar que $\alpha = \beta = \frac{N+2}{N-2}$, tenemos que al menos uno de los exponentes es distinto de 0, obteniendo así que:

$$\frac{1}{|x^{\lambda_0}|} = \frac{1}{|x|}$$

pero esto no es posible a menos que que $\lambda_0 = 0$, por lo tanto es una contradicción.

2. Si $\lambda_0 = 0$, por la definición de λ_0 tendríamos que $w_0(x) \geq w(x)$ y $z_0(x) \geq z(x)$ para $x \in \tilde{\Sigma}_0$, pero podemos aplicar todos los argumentos antes mencionados desde la derecha ($\lambda > 0$), por lo tanto llegaríamos nuevamente a algún $\lambda_0^r = 0$ (ya que por 1. aplicado a ese caso tendríamos que $\lambda_0^r \not> 0$), lo que nos daría que $w(x) \geq w_0(x)$ y $z(x) \geq z_0(x)$ para $x \in \tilde{\Sigma}_0$, concluyendo así que $w = w_0, z = z_0$ en $\tilde{\Sigma}_0$, es decir, que w y z son simétricos con respecto al plano T_0 (el plano $x_1 = 0$).

Notar que todo el desarrollo se pudo hacer para cualquier dirección, por lo que la única posibilidad que queda es que w y z sean ambas radialmente simétricas con respecto al origen.

Ahora bien, las ecuaciones podíamos modificarlas para hacer al origen cualquier punto $y \in \mathbb{R}^N$ (bastaba hacer un cambio de coordenadas), por lo tanto, como bajo los mismos argumentos tenemos que w y z deben ser radialmente simétricas con el origen, tenemos que w y z son radialmente simétricas con respecto a todo punto $y \in \mathbb{R}^N$, lo cual necesariamente significa que w y z sean constantes, pero recordemos que:

$$w(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad z(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

por lo cual podemos concluir que $u = v = 0$.

Ahora demostraremos lo que falta, asumiremos que $\alpha = \beta = \frac{N+2}{N-2}$, para esto primero mostraremos que w y z deben ser simétricos con respecto a un plano paralelo a $x_1 = 0$, para esto nuevamente tenemos que estudiar los casos según el λ_0.

1. Si $\lambda_0 < 0$, por la Proposición 2.9. tenemos que w y z son simétricos con respecto a T_{λ_0}.

2. Si $\lambda_0 = 0$, no podemos decir directamente que haya un plano paralelo a $x_1 = 0$ tal que w y z sean simétricos, pero podemos aplicar el proceso antes mencionado para λ desde la derecha, dando así con un $\lambda_0^r \geq 0$.

   Ahora bien, si $\lambda_0^r > 0$, por la Proposición 2.9. (adaptada al caso $\lambda > 0$) obtenemos que w y z son simétricos con respecto al plano $T_{\lambda_0^r}$, el cual es paralelo a $x_1 = 0$.

   Si $\lambda_0^r = 0$, tendríamos que $\lambda_0 = \lambda_0^r = 0$, de forma que:

$$w_0(x) \geq w(x) \geq w_0(x), \quad z_0(x) \geq z(x) \geq w_0(x) \quad \text{en } \tilde{\Sigma}_0$$

   de forma que $w = w_0, z = z_0$, concluyendo así que w y z son simétricos con respecto al plano $T_0 = \{x_1 = 0\}$

Con esto, al aplicar el método de *moving planes* tomando planos **perpendiculares** a toda dirección, $\gamma \in \mathbb{R}^N$, $|\gamma| = 1$, encontramos planos T_γ tales que w y z son simétricos respecto a estos T_γ (por el argumento en el caso $x_1 = 0$ tenemos que estos planos T_γ son perpendiculares a la dirección γ).

En el caso de que estos planos no intersecten tendríamos que $w = z = 0$, ya que tendríamos que $w(x) = w(x^\gamma)$, con x^γ la reflexión en la dirección γ, para γ arbitrario), si en ningún punto coinciden tendríamos que w debe ser constante, y por las ecuaciones que verifica se concluye que es igual a la constante 0 (lo mismo para z).

En el caso de que estos planos intersecten en 2 o más puntos, tendríamos que w y z son radialmente simétricas con respecto a dos puntos distintos, lo cual implica que son constantes, y nuevamente se rescata que $w = z = 0$ por las ecuaciones.

Por ultimo, si los planos intersectan en un único punto, tendríamos que w y z son radialmente simétricos con respecto a ese punto, de lo cual se concluye que u y v también lo son, concluyendo así el teorema.

□

Referencias

[1] Jérôme Busca and Raúl Manásevich. A liouville-type theorem for lane-emden systems. *Indiana University Mathematics Journal*, 51(1):37–80, 2002.

[2] D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri. Maximum principles for linear elliptic systems. *Rendiconti dellÍstituto di Matematica dellÚniversità di Trieste*, XXII:36–66, 1990.

[3] Djairo G. de Figueiredo and Patricio L. Felmer. A liouville-type theorem for elliptic systems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 21(3):387–397, 1994.

[4] B. Gidas and J. Spruck. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 34(4):525–598, 1981.