Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Simulación

Práctica 01

Autor:
Jorge Alberto López Guevara 1809630

5 de Marzo de 2021

Introducción.

En el presente reporte se expondrá el calculo de una integral con el método de Monte Carlo. Por lo que se iniciará con exponer cuál es dicho método y en que consiste.

Por otra parte, se utilizará un programa elaborado en R donde se implementa dicho método. Dicho método se utilizará para calcular la siguiente integral:

$$\int_3^7 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Por consiguiente, se analizará el resultado obtenido por el programa en R y se comparara con el resultado de la integral obtenido por Wolfram.

Objetivo.

El próposito de este reporte de investigación es calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_3^7 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Se sabe por el software Wolfram que la siguiente integral:

$$\int_3^7 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \approx 0{,}048834$$

Por lo que buscamos aproximar el valor de la integral obtenida en esta investigación al valor dado por el software Wolfram en al menos 6 digitos.

Metodología

Se procederá por analizar el programa proporcionado por el profesor Moreno, el cual se mostrará a continuación:

```r
f <- function(x) { return(1 / (exp(x) + exp(-x))) }

simulacion_MC <- function(F, a, b, cantidad) {
  acumumulado <- 0
  for (i in 1:cantidad) {
    x <- runif(1)
    acumumulado <- acumumulado + F(a + (b - a) * x)
  }
  return(((b - a) * acumumulado) / cantidad)
}

comparar_digitos <- function(valor) {
  cantidad <- 0
  for (i in 1:6) {
    montecarlo <- signif(valor, digits = i)
    wolfram <- signif(0.048834, digits = i)
    if (montecarlo != wolfram) {
      return(cantidad)
    }
    cantidad <- cantidad + 1
  }
  return(cantidad)
}

desde <- 3
hasta <- 7
replicas <- 30

df_datos <- data.frame("replica" = integer(), "muestra" = integer(), "integral" = numeric(), "digitos" = integer())

muestras <- 10^(3:5)
for (cantidad in muestras) {
  valores <- numeric()
  digitos <- integer()
  for (i in 1:replicas) {
    integral <- simulacion_MC(f, desde, hasta, cantidad)
    numero <- comparar_digitos(integral)
    valores <- c(valores, integral)
    digitos <- c(digitos, numero)
    #print(paste("Replica ", i, ": ", integral, sep = ""))
  }
  df_datos <- rbind(df_datos, data.frame("replica" = 1:replicas, "muestra" = cantidad,
                                         "integral" = valores, "digitos" = digitos))
}

moda <- function(x) {
  ux <- unique(x)
  ux[which.max(tabulate(match(x, ux)))]
}

df_resultados <- data.frame("muestra" = muestras)
df_resultados$min <- aggregate(df_datos$digitos, by = list(df_datos$muestra), FUN = min)[,2]
df_resultados$media <- aggregate(df_datos$digitos, by = list(df_datos$muestra), FUN = mean)[,2]
df_resultados$mediana <- aggregate(df_datos$digitos, by = list(df_datos$muestra), FUN = median)[,2]
df_resultados$moda <- aggregate(df_datos$digitos, by = list(df_datos$muestra), FUN = moda)[,2]

barplot(df_resultados$moda, names.arg = df_resultados$muestra)

library(ggplot2)
ggplot(data = df_datos, aes(x = as.factor(muestra), y = digitos)) + geom_boxplot()
ggplot(data = df_datos, aes(x = as.factor(muestra), y = digitos)) + geom_violin()
```

Cuadro 1: Código en R del método Monte-Carlo.

En el que se correrán 30 réplicas con distintos conjuntos de tres tamaños de muestras, con lo que se analizará la moda y la mínima cantidad de dígitos en los que coincide el valor de la integral dado por el software de Wolfram.

Marco teorico.

Método Monte Carlo.

El profesor Moreno (2021) define el método como para el calculo de la integra utilizaremos lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(b-a)\cdot g(a+(b-a)u_i)}{k}$$

para k suficientemente grande y $u_i \sim U(0,1)$.

Resultados.

Tomando en cuenta un conjunto de 3 muestras de cantidad 1000, 10000 y 100000 con 30 replicas cada una se obtuvó la siguiente tabla, donde se muestra el resultado de la integral obtenido por el código en R y la cantidad de digitos en los que el resultado del código coincide con el resultado obtenido por el software Wolfram:

Se experimentó con 3 muestras de las cuales se realizaron 30 replicas, esto con motivo de ver la aproximación de digitos del codigo en R comparado con el resultado del software Wolfram.

	replica	muestra	integral	digitos
1	1	1000	0.05036377	1
2	2	1000	0.04670658	1
3	3	1000	0.0514437	1
4	4	1000	0.04981152	1
5	5	1000	0.04802483	1
6	6	1000	0.04724974	1
7	7	1000	0.0495537	1
8	8	1000	0.04767464	1
9	9	1000	0.04950455	1
10	10	1000	0.05015314	1
11	11	1000	0.04778045	1
12	12	1000	0.04646721	1
13	13	1000	0.04742281	1
14	14	1000	0.04857532	2
15	15	1000	0.04797632	1
16	16	1000	0.04907035	2
17	17	1000	0.04977281	1
18	18	1000	0.04956612	1
19	19	1000	0.05223633	1
20	20	1000	0.04838463	1
21	21	1000	0.04572419	1
22	22	1000	0.05034889	1
23	23	1000	0.04832877	1
24	24	1000	0.04750452	1
25	25	1000	0.05013492	1
26	26	1000	0.04726853	1
27	27	1000	0.05081324	1
28	28	1000	0.04937326	2
29	29	1000	0.04918768	2
30	30	1000	0.04839792	1

Cuadro 2: Resultados de muestra 1000 obtenidas con R

	replica	muestra	integral	digitos
31	1	10000	0.04897679	2
32	2	10000	0.04829637	1
33	3	10000	0.04908964	2
34	4	10000	0.04811369	1
35	5	10000	0.04930238	2
36	6	10000	0.04837806	1
37	7	10000	0.0485413	2
38	8	10000	0.0489902	2
39	9	10000	0.04879052	3
40	10	10000	0.04841055	1
41	11	10000	0.04876368	3
42	12	10000	0.04799885	1
43	13	10000	0.04925458	2
44	14	10000	0.04828328	1
45	15	10000	0.0483409	1
46	16	10000	0.04910487	2
47	17	10000	0.04785006	1
48	18	10000	0.04846508	1
49	19	10000	0.04873624	2
50	20	10000	0.04965625	1
51	21	10000	0.04887919	2
52	22	10000	0.04926852	2
53	23	10000	0.04802037	1
54	24	10000	0.04848488	1
55	25	10000	0.04889191	2
56	26	10000	0.04912619	2
57	27	10000	0.04828955	1
58	28	10000	0.04871792	2
59	29	10000	0.04832713	1
60	30	10000	0.04924338	2

Cuadro 3: Resultados de muestra 10000 obtenidas con R

	replica	muestra	integral	digitos
61	1	1.00E+05	0.04903628	2
62	2	1.00E+05	0.04866389	2
63	3	1.00E+05	0.04882885	4
64	4	1.00E+05	0.04876271	3
65	5	1.00E+05	0.04915001	2
66	6	1.00E+05	0.04902985	2
67	7	1.00E+05	0.0485261	2
68	8	1.00E+05	0.04866813	2
69	9	1.00E+05	0.04872305	2
70	10	1.00E+05	0.04901645	2
71	11	1.00E+05	0.04878922	3
72	12	1.00E+05	0.04858949	2
73	13	1.00E+05	0.04898119	2
74	14	1.00E+05	0.04899642	2
75	15	1.00E+05	0.04900178	2
76	16	1.00E+05	0.04875661	3
77	17	1.00E+05	0.04882446	3
78	18	1.00E+05	0.04889986	2
79	19	1.00E+05	0.04898809	2
80	20	1.00E+05	0.04893023	2
81	21	1.00E+05	0.04879039	3
82	22	1.00E+05	0.04889673	2
83	23	1.00E+05	0.04866407	2
84	24	1.00E+05	0.04851629	2
85	25	1.00E+05	0.04909269	2
86	26	1.00E+05	0.04886322	2
87	27	1.00E+05	0.04854783	2
88	28	1.00E+05	0.04880185	3
89	29	1.00E+05	0.04850682	2
90	30	1.00E+05	0.04881429	3

Cuadro 4: Resultados de muestra 100000 obtenidas con R

Como se observa en Cuadro 2, donde se muestran los resultados de las muestras de 1000, en la mayor parte de los resultados obtenidos por el codigo de R se obtuvó una aproximación de 1 digito como mínimo. Por otra parte, en Cuadro 3, donde se muestran los resultados de las muestras de 10000, se obtuvó una aproximación de 1 y 2 digitos casi en la misma cantidad de veces. En cambio, en Cuadro 4, donde se muestran los resultados de las muestras de 100000, muestra una aproximación de 2 digitos en la mayoría de los casos.

Para una vista óptima de este hecho se obtuvó la siguiente tabla donde se analizaron la media, la moda, la mediana, etre otros aspectos:

muestra	min	media	mediana	moda
1000	1	1.13333333	1	1
10000	1	1.6	2	2
1.00E+05	2	2.3	2	2

Cuadro 5: Análisis de tendencia central para el primer conjunto de muestras

En Cuadro 5, muestra que para una muestra de tamaño 1000 como mínimo obtuvó un digito de aproximación respecto al resultado del software Wolfram. Además, se muestra que la mayor cantidad de digitos que concordaron con el resultado obtenido por Wolfram fue 1. Además, para una muestra de tamaño 10000, se obtuvó como mínimo un digito de aproximación, pero se obtuvó una mayor cantidad de dos digitos de aproximación. Por otro lado, para una muestra de tamaño 100000 se obtuvó como mínimo una aproximación de dos digito, además de que fue la aproximación que mas se repitió.

Ahora se analizará el segundo conjunto de muestras en las cuales se tendrán muestras de tamaños 10^6, 10^7 y 10^8, se tomarán en cuenta 30 réplicas de cada muestra.

	replica	muestra	integral	digitos
1	1	1.00E+06	0.04877357	3
2	2	1.00E+06	0.04877613	3
3	3	1.00E+06	0.04880827	3
4	4	1.00E+06	0.04871731	2
5	5	1.00E+06	0.04886609	2
6	6	1.00E+06	0.04886168	2
7	7	1.00E+06	0.04887492	2
8	8	1.00E+06	0.04890629	2
9	9	1.00E+06	0.0487066	2
10	10	1.00E+06	0.04889329	2
11	11	1.00E+06	0.04889787	2
12	12	1.00E+06	0.04882036	3
13	13	1.00E+06	0.04876657	3
14	14	1.00E+06	0.0488479	3
15	15	1.00E+06	0.04887885	2
16	16	1.00E+06	0.04889155	2
17	17	1.00E+06	0.04883874	3
18	18	1.00E+06	0.04882126	3
19	19	1.00E+06	0.04887075	2
20	20	1.00E+06	0.04884858	3
21	21	1.00E+06	0.04873717	2
22	22	1.00E+06	0.04880305	3
23	23	1.00E+06	0.04880881	3
24	24	1.00E+06	0.04880714	3
25	25	1.00E+06	0.04891326	2
26	26	1.00E+06	0.04882356	3
27	27	1.00E+06	0.04878556	3
28	28	1.00E+06	0.04877714	3
29	29	1.00E+06	0.04883705	3
30	30	1.00E+06	0.04886426	2

Cuadro 6: Resultados de muestra 10^6 obtenidas con R

	replica	muestra	integral	digitos
31	1	1.00E+07	0.04883376	5
32	2	1.00E+07	0.04880883	3
33	3	1.00E+07	0.04883437	5
34	4	1.00E+07	0.04884743	3
35	5	1.00E+07	0.04883211	4
36	6	1.00E+07	0.04886212	2
37	7	1.00E+07	0.04880859	3
38	8	1.00E+07	0.04884554	3
39	9	1.00E+07	0.04882782	4
40	10	1.00E+07	0.04886585	2
41	11	1.00E+07	0.0488415	3
42	12	1.00E+07	0.0488243	3
43	13	1.00E+07	0.04882616	4
44	14	1.00E+07	0.0488713	2
45	15	1.00E+07	0.04887899	2
46	16	1.00E+07	0.04883033	4
47	17	1.00E+07	0.04883074	4
48	18	1.00E+07	0.04884203	3
49	19	1.00E+07	0.04885203	2
50	20	1.00E+07	0.04884436	3
51	21	1.00E+07	0.04882992	4
52	22	1.00E+07	0.0488607	2
53	23	1.00E+07	0.04886995	2
54	24	1.00E+07	0.04885543	2
55	25	1.00E+07	0.04884184	3
56	26	1.00E+07	0.0488294	4
57	27	1.00E+07	0.04887419	2
58	28	1.00E+07	0.04883563	3
59	29	1.00E+07	0.04881701	3
60	30	1.00E+07	0.04882477	3

Cuadro 7: Resultados de muestra 10^7 obtenidas con R

	replica	muestra	integral	digitos
61	1	1.00E+08	0.04883709	3
62	2	1.00E+08	0.04883449	5
63	3	1.00E+08	0.04883544	3
64	4	1.00E+08	0.04884006	3
65	5	1.00E+08	0.04883379	5
66	6	1.00E+08	0.04882783	4
67	7	1.00E+08	0.04882988	4
68	8	1.00E+08	0.04883146	4
69	9	1.00E+08	0.04884791	3
70	10	1.00E+08	0.04882988	4
71	11	1.00E+08	0.04884119	3
72	12	1.00E+08	0.04882295	3
73	13	1.00E+08	0.04883344	4
74	14	1.00E+08	0.04882884	4
75	15	1.00E+08	0.04883282	4
76	16	1.00E+08	0.04884158	3
77	17	1.00E+08	0.04883872	3
78	18	1.00E+08	0.04883229	4
79	19	1.00E+08	0.04883756	3
80	20	1.00E+08	0.04883133	4
81	21	1.00E+08	0.04883453	4
82	22	1.00E+08	0.04882649	4
83	23	1.00E+08	0.04883507	3
84	24	1.00E+08	0.0488212	3
85	25	1.00E+08	0.04883394	5
86	26	1.00E+08	0.04883793	3
87	27	1.00E+08	0.04883331	4
88	28	1.00E+08	0.04883082	4
89	29	1.00E+08	0.04884454	3
90	30	1.00E+08	0.04883361	5

Cuadro 8: Resultados de muestra 10^8 obtenidas con R

En Cuadro 6, se puede observar que la mayor cantidad de digitos que coinciden con el resultado en Wolfram es de tres digitos, aunque también se tiene una gran cantidadde resultados que coinciden en dos digitos. En Cuadro 7, se tiene que una menor cantidad de resultados que coinciden en dos digitos, pero los digitos en los que mas veces coinciden es de tres digitos. En cambio, para Cuadro 8, se observa que como minimo el código en R obtuvó una aproximación de tres digitos, y a su vez, es la aproximación que mas se presentó en la experimentación, pero también se obtuvó una coincidencia de cuatro y cinco digitos.

muestra	min	media	mediana	moda
1.00E+06	2	2.53333333	3	3
1.00E+07	2	3.06666667	3	3
1.00E+08	3	3.7	4	3

Cuadro 9: Análisis de tendencia central para el segundo conjunto de muestras

Como se observa en Cuadro 9, para una muestra de tamaño 10^6 se tiene que minimo dos digitos que coinciden y la cantidad de digitos que se repitió fueron tres digitos. Por otro lado, para una muestra de 10^7 se obtuvó como minimo dos digitos de aproximación y la cantidad de digitos que más se presentó fue la de tres digitos. Además, para una muestra de 10^8, se obtuvó como minimo una aproximación en tres digitos, y a su vez, fue el digito que mas se presentó.

Análisis de resultados.

Para el análisis de los resultados del primer conjunto de muestras, se observarán las gráficas de violín de las aproximaciones, las cuales muestran la distribución en que coinciden los digitos.

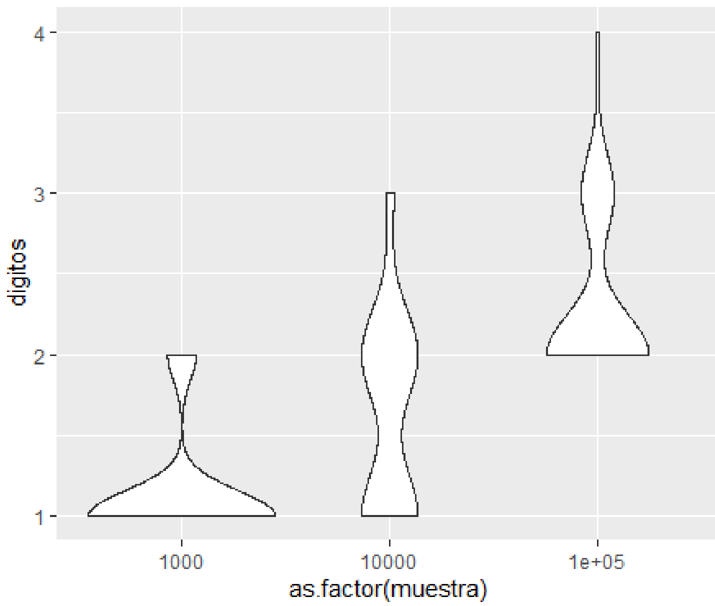

Figura 1: Gráfica de distribución de coincidencia de digitos para el primer conjunto de muestras.

Como se observa en la gráfica de violines, al tener una muestra de tamaño 1000, tenemos que a lo menos tenemos minimo un digito de precisión, y a su vez, tenemos una mayor cantidad de resultados con un digito coincidente. Por otro lado, al considerar la muestra de tamaño 10000, pas algo similar que con la muestra de tamaño 10000, pero esta vez tenemos una mayor cantidad de resultados con dos digitos de precisión. Por último, al tomar en cuenta la muestra de tamaño 100000, se observa que se tiene como minimo dos digitos de precisión y son la mayoría los resultados con dos digitos de coincidencia.

Además, para visualizar los digítos de coincidencia entre el resultado de obtenido en esta investigación y el resultado obtenido por Wolfram se mostrarán las gráficas de violín, donde se muestra la distribución de los digitos presentados en cada muestra para el segundo conjunto de muestras.

Figura 2: Gráfica de distribución de coincidencia de digitos para el segundo conjunto de muestras.

Como se observa en las gráficas anteriores, para una muestra de tamaño 10^6 se puede ver que el número de dígitos en los que el valor de la integral obtenido en R es de mínimo dos, pero el mayor número de digitos en los que el código se aproximó fue de tres dígitos. Además, para una muestra de tamaño 10^7 se obtuvo un mínimo de datos de dos dígitos de coincidencia, aunque el valor que más se presentó fue de tres dígitos de aproximación, pero también se obtuvó una aproximación de cuatro y cinco dígitos, siendo cuatro el más cercano a la aproximación de tres dígitos. Por otro lado, para una muestra de tamaño 10^8, se obtuvó como mínimo una aproximación de tres dígitos, pero en esta ocasión se obtuvó una mayor cantidad de resultados en las que se aproximó en cuatro dígitos, al igual que en la muestra de tamaño 10^7, en la muestra de tamaño 10^8 se obtuvó una coincidencia de cinco dígitos.

Conclusiones.

Como se observó en el apartado anterior, en el último conjunto de la muestra, la coincidencia en los dígitos del resultado de la integral obtenido con el código de R estaba creciendo de forma considerable.

Ya que para las muestras de tamaños 10^3, 10^4, 10^6, 10^8 se obtuvó una aproximación de 1, 2, 3 y 4 dígitos con respecto al resultado obtenido por Wolfram.

Por lo que podemos hipotetizar que para una muestra de tamaño 10^9, alcanzaría un mayor número de resultados que su apoximación fueran de cinco dígitos y si tomamos una muestra de tamaño 10^{10} el resultado sería el esperado, es decir que el mayor número de resultados obtenidos con el código de R tiene una aproximación de seis dígitos.

Bibliografía.

- Moreno, Á. (2021). *Práctica 1: Método Monte-Carlo*
- Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 12.2, 2020. URL https://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator. Champaign,IL.
- https://github.com/JorgeLG46/Simulacion