Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Apuntes

Ecuaciones Diferenciales

Autor:

Jorge Miguel Alvarado Reyes

29 de febrero de 2024

Índice

1. 30/01/2024

1.1. Contacto

- Email: Camo6812@acatlan.unam.mx

1.2. Evaluación

- Tareas 60 % Examenes 40 %

Tarea
Tomarse una selfi con una de las referencias bibliograficas

2. 01/02/2024

2.1. Transformadas integrales

Las transformadas integrales son operadores que asocian nuevas funciones a un determinado conjunto mediante integración respecto a un determinado parámetro. La forma general de una transformada integral se puede expresar como:

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\, dt$$

Donde:

- T representa el operador de transformada.
- $f(t)$ es la función original que queremos transformar.
- $F(s)$ es la función transformada, que depende de la variable s.
- $K(s,t)$ es el núcleo de la transformada, una función que depende tanto de la variable original t como de la nueva variable s.
- a y b son los límites de integración, que pueden ser finitos o infinitos dependiendo del tipo específico de transformada integral.

Las transformadas integrales más conocidas y utilizadas incluyen:

- **La Transformada de Fourier**, donde $a = -\infty$, $b = \infty$, y $K(s,t) = e^{-2\pi i s t}$, utilizada ampliamente en el análisis de señales y sistemas.
- **La Transformada de Laplace**, con $a = 0$, $b = \infty$, y $K(s,t) = e^{-st}$, muy usada en la solución de ecuaciones diferenciales y en la teoría de control.
- **La Transformada de Mellin**, que es otra forma de transformada integral con un núcleo específico que permite transformaciones de productos en convoluciones, útil en teoría de números y análisis complejo.

Estas transformadas convierten funciones del dominio del tiempo o espacio (dominio t) a funciones en el dominio de frecuencias o complejo (dominio s), facilitando la manipulación matemática y la solución de problemas complejos.

Tarea 2

En https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_integral hay una tabla con las tranformaciones y sus inversas. Elabore una tabla similar pero con nuestra simbologia. Para cada tranformada intente calcular la de $f(t) = t + c$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{s - c - t} \right) dt$$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{1}{s - c - t} \right) dt$$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{1}{u} \right) - du$$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \frac{1}{\pi} - [\ln(u)]_a^b$$

Ejercicios
La tranformada de Laplace y condiciones de existencia
Para calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \sin(t)$, utilizamos la definición:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin(t)\, dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \sin(t), \qquad dv = e^{-st} dt$$

$$du = \cos(t) dt, \qquad v = \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

La fórmula de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$ nos lleva a:

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin(t)\, dt = \left[-\frac{1}{s} \sin(t) e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin(t)\, dt = 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt$$

Ahora debemos calcular

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \cos(t), \qquad dv = e^{-st} dt$$

$$du = -\sin(t) dt, \qquad v = \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt = \left[-\frac{1}{s} \cos(t) e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} - \sin(t)\, dt$$

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt = 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} - \sin(t)\, dt$$

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt = \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin(t)\, dt \right)$$

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(t)\, dt = \left(-\frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin(t)\, dt \right)$$

Para calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \cos(\alpha t)$, utilizamos la definición:

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \cos(\alpha t), \qquad dv = e^{-st}dt$$
$$du = -\alpha\sin(\alpha t), \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

La fórmula de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$ nos lleva a:

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t)e^{-st}\,dt = \left[\cos(\alpha t) - \frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st} - \alpha\sin(\alpha t)\,dt$$

$$\left[\cos(\alpha t) - \frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \left[\cos(\alpha\infty) - \frac{1}{s}e^{-s\infty} - \cos(\alpha 0) - \frac{1}{s}e^{-s0}\right]$$

$$\left[\cos(\alpha\infty) - \frac{1}{s}e^{-s\infty} - \cos(\alpha 0) - \frac{1}{s}e^{-s0}\right] = \frac{1}{s}$$

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt$$

Debemos resolver

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \sin(\alpha t), \qquad dv = e^{-st}dt$$
$$du = \alpha\cos(\alpha t), \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int_0^\infty \sin(\alpha t)e^{-st}\,dt = \left[\sin(\alpha t)\cdot -\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\alpha\cos(\alpha t)$$

$$\left[\sin(\alpha t)\cdot -\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \left[\sin(\alpha\infty)\cdot -\frac{1}{s}e^{-s\infty} - \sin(\alpha 0)\cdot -\frac{1}{s}e^{-s0}\right] = 0$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(\alpha t)e^{-st}\,dt &= 0 - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\alpha\cos(\alpha t)\\ &= \frac{\alpha}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(\alpha t)\end{aligned}$$

3. 08/02/2024

3.1. Teoremas de la tranformada de laplace

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{sen(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

$$\mathcal{L}\{senh(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{cosh(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

4. Tarea 4

1. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$
2. $y' - y = 1 - te^t, \quad y(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$
4. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
5. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
6. $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
7. $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$
8. $2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$
9. $y'' - y' = e^tcos(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
10. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$

4.1. Solución

4.1.1. Problema 1

$$y' + 4y = e^{-4t}, \qquad y(0) = 2$$

Aplicar la Transformada de Laplace en la ecuación es:

$$\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}.$$

Resolviendo $\mathcal{L}\{e^{-4t}\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-4t}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-4t}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+4)t}\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{s+4} e^{-(s+4)t} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{s+4}
\end{aligned}$$

Resolviendo $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0), \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s),
\end{aligned}$$

Sustituyendo con la condicion inicial $y(0) = 2$ en la ecuación:

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Esto simplifica a:

$$Y(s)(s+4) = 2 + \frac{1}{s+4}$$

Despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{1}{(s+4)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2s+9}{(s+4)^2}$$

4.1.2. Problema 2

$$y' - y = 1 - te^t, \qquad y(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1 - te^t\}$$

Utilizamos las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{te^{\alpha t}\} = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

Por lo tanto, para $\mathcal{L}\{1 - te^t\}$ tenemos:

$$\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{te^t\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

Para $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$, considerando la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Sustituyendo en la ecuación transformada:

$$sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

Resolviendo para $Y(s)$:

$$Y(s)(s-1) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^3}$$

4.1.3. Problema 3

$$y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0)\\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = y'(0) = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(1) - 1\\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 1\\
\mathcal{L}\{y''\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - s - 1 + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - s - 1 + 2sY(s) - 2 + Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 1) - s - 3 = 0$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = s + 3$$

Despejando $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

4.1.4. Problema 4

$$y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\}.$$

para $\mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\}$ tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\} = \frac{3!}{(s-2)^4} = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = y'(0) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2 Y(s) - s(0) - 0 \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 0 \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2 Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Factorizamos el término en $Y(s)$ y simplificamos:

$$Y(s)(s^2 - 4s + 4) = \frac{6}{(s-2)^4},$$

$$Y(s)(s-2)^2 = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^6}.$$

4.1.5. Problema 5

$$y'' - 6y' + 9y = t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}.$$

para $\mathcal{L}\{t\}$ tenemos:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(0) - 1 \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 0 \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - 1 - 6sY(s) + 9Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 6s + 9) - 1 = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 6s + 9) = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$Y(s)(s-3)^2 = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

4.1.6. Problema 6

$$y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^3\}.$$

para $\mathcal{L}\{t^3\}$ tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(1) - 0 \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 1 \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - s - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = \frac{6}{s^4}$$

$$s^2Y(s) - s - 4sY(s) - 4 + 4Y(s) = \frac{6}{s^4}$$

$$Y(s)(s^2 - 4s + 4) - s = \frac{6}{s^4}$$

$$Y(s)(s-2)^2 = \frac{6}{s^4} + s$$

$$Y(s) = \frac{6}{s^4(s-2)^2} + \frac{1}{s(s-2)^2}$$

4.1.7. Problema 7

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = -3$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 13\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0)\\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s)\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 0$ y $y'(0) = 3$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(0) - 3\\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 0\\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s)\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - 3 - 6sY(s) + 13Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 - 6s + 13) - 3 = 0$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2 - 6s + 13)}$$

4.1.8. Problema 8

$$2y'' + 20y' + 51y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$2\mathcal{L}\{y''\} + 20\mathcal{L}\{y'\} + 51\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}.$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s) \end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(2) - 0 \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 2 \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s) \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$2(s^2Y(s) - 2s) + 20(sY(s) - 2) + 51Y(s) = 0$$

$$2s^2Y(s) - 4s + 20sY(s) - 40 + 51Y(s) = 0$$

$$Y(s)(2s^2 + 20s + 51) - 4s - 40 = 0$$

$$Y(s)(2s^2 + 20s + 51) = 4s + 40$$

$$Y(s) = \frac{4s + 40}{2s^2 + 20s + 51}$$

4.1.9. Problema 9

$$y'' - y' = e^t cos(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^t \cos(t)\}.$$

Resolviendo $\mathcal{L}\{e^t \cos(t)\}$:
Sabemos:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^t \cos(t)\} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1^2}$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$
$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s)$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - sY(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1^2}$$

$$Y(s)(s^2 - s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s^2 - s)((s-1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{s(s-1)((s-1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s((s-1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + 2s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s^1 + 2)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s((s-1)^2 + 1)}$$

$$\frac{1}{s((s-1)^2 + 1)} = \frac{A(s-1) + B}{(s-1)^2 + 1} + \frac{C}{s}$$

donde $r = s - 1$

$$\frac{Ar+B}{r^2+1}|^{r=s-1}$$

$$\frac{Ar(r+1)+B(r+1)+C(r^2+1)}{(r^2+1)(r+1)}$$

$$\frac{Ar^2+Ar+Br+B+Cr^2+C}{(r^2+1)(r+1)}$$

4.1.10. Problema 10

$$y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 4$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1 + t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Para $\mathcal{L}\{y''\}$, $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 0$ y $y'(0) = 4$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(0) - 4 \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - (0) \\
\mathcal{L}\{y\} &= Y(s)
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - 4 - 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 5) - 4 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 5)} + \frac{1}{s^2(s^2 - 2s + 5)} + \frac{4}{(s^2 - 2s + 5)}$$

5. Funcion de impulso

$$\mathcal{L}\{f(t)S(t-c)\} =$$

$$S(t-c) =$$