Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Examen Unidad 1

Ecuaciones Diferenciales

Autor:

Jorge Miguel Alvarado Reyes

421010301

17 de marzo de 2024

Índice

1. 2

Demuestre que la Transformada de Laplace de una convolución de dos funciones es

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s) \quad \text{donde} \quad f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

2. 3

Observe entonces que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,$$

Determine la Transformada Inversa de Laplace de

2.1. 3.1

$$F(s) = \frac{7}{s^4}, \quad G(s) = \frac{2}{(s^2 - 4s + 13)}$$

Solucion

Calculando $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s^4}\right\} = \frac{t^{4-1}}{(4-1)!} = \frac{7t^3}{6}$$

Calculando $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2 - 4s + 13)}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 3^2}\right\}$$

Usando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\right\} = e^{at}\sin(bt)$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 3^2}\right\} = 2e^{2t}\cos(3t)$$

Por lo tanto nuestras $f(t)$ y $g(t)$ son

$$f(t) = \frac{7t^3}{6}, \quad g(t) = 2e^{2t}\cos(3t)$$

Por lo tanto la convolucion es:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau)\,d\tau$$

Sustituyendo las funciones:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \frac{7\tau^3}{6} \cdot 2e^{2(t-\tau)}\cos(3(t-\tau))\,d\tau$$

```
In[170]:= A[s_] := 7/s^4
          B[s_] := 2/(s^2 - 4 s + 13)

          a[t_] = InverseLaplaceTransform[A[s], s, t]
                  transformada de Laplace inversa
          b[t_] = InverseLaplaceTransform[B[s], s, t]
                  transformada de Laplace inversa

          convolution[t_] := Integrate[a[τ] b[t - τ], {τ, 0, t}]
                             integra
          ComplexExpand[convolution[t]]
          expande funciones complejas
          ComplexExpand[InverseLaplaceTransform[A[s] × B[s], s, t]]
          expande funcio··· transformada de Laplace inversa
```

Out[172]= $\frac{7\,t^3}{6}$

Out[173]= $-\frac{1}{3}\,i\,e^{(2-3\,i)\,t}\left(-1+e^{6\,i\,t}\right)$

Out[175]= $-\frac{560}{28561}+\frac{42\,t}{2197}+\frac{28\,t^2}{169}+\frac{7\,t^3}{39}+\frac{560\,e^{2\,t}\,\mathrm{Cos}[3\,t]}{28561}-\frac{1666\,e^{2\,t}\,\mathrm{Sin}[3\,t]}{85683}$

Out[176]= $-\frac{560}{28561}+\frac{42\,t}{2197}+\frac{28\,t^2}{169}+\frac{7\,t^3}{39}+\frac{560\,e^{2\,t}\,\mathrm{Cos}[3\,t]}{28561}-\frac{1666\,e^{2\,t}\,\mathrm{Sin}[3\,t]}{85683}$

2.2. 3.4

$$F(s) = \frac{7s^2 + 7s - 14}{s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1}, \quad G(s) = \frac{2}{s^2}$$

Solucion

Dado $G(s) = \frac{2}{s^2}$, podemos aplicar directamente la definición para encontrar la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} = 2t = g(t)$$

Para $F(s) = \frac{7s^2+7s-14}{s^6+3s^4+3s^2+1}$, primero observamos que el denominador puede ser reescrito como $(s^2+1)^3$. Entonces, tenemos:

$$F(s) = \frac{7s^2 + 7s - 14}{(s^2+1)^3}$$

La descomposición en fracciones parciales de $F(s)$ nos da:

```
In[9]:= Apart[(7 s^2 + 7 s - 14) / (s^2 + 1)^3]
        separa fracciones simples
```

Out[9]= $\frac{7\,(-3+s)}{\left(1+s^2\right)^3}+\frac{7}{\left(1+s^2\right)^2}$

$$F(s) = \frac{7(s-3)}{(s^2+1)^3} + \frac{7}{(s^2+1)^2}$$

Para encontrar la transformada inversa de Laplace, aplicamos las reglas correspondientes para cada término:

```
In[16]:= InverseLaplaceTransform[Out[9], s, t]
         transformada de Laplace inv···  salida

Out[16]= -7/8 ((-5 + t) t Cos[t] - (-5 + t + 3 t^2) Sin[t])
```

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7(s-3)}{(s^2+1)^3} + \frac{7}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{7}{8}\left((-5+t)t\cos(t) - (-5+t+3t^2)\sin(t)\right) = f(t)$$

El producto de convolución, que es la transformada inversa de Laplace del producto de $F(s)$ y $G(s)$, se define como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

donde $f(t)$ y $g(t)$ son las transformadas inversas de Laplace de $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente. En este caso, necesitaríamos calcular la integral:

$$\int_0^{\infty}\left(-\frac{7}{8}\left((-5+\tau)\tau\cos(\tau) - (-5+\tau+3\tau^2)\sin(\tau)\right)\right)(2(t-\tau))\,d\tau$$

Al resover esta integral obtendremos la transformada de laplace

```
In[129]:= F[s_] := (7 s^2 + 7 s - 14) / (s^6 + 3 s^4 + 3 s^2 + 1)
          G[s_] := 2 / s^2

          f[t_] = InverseLaplaceTransform[F[s], s, t]
                  transformada de Laplace inversa
          g[t_] = InverseLaplaceTransform[G[s], s, t]
                  transformada de Laplace inversa

          convolution[t_] := Integrate[f[τ] g[t - τ], {τ, 0, t}]
                             integra
          ComplexExpand[convolution[t]]
          expande funciones complejas
          ComplexExpand[InverseLaplaceTransform[F[s] × G[s], s, t]]
          expande funcio···  transformada de Laplace inversa

Out[131]= -7/8 ((-5 + t) t Cos[t] - (-5 + t + 3 t^2) Sin[t])

Out[132]= 2 t

Out[134]= 14 - 28 t - 14 Cos[t] - 119/4 t Cos[t] + 7/4 t^2 Cos[t] + 231 Sin[t]/4 - 35/4 t Sin[t] - 21/4 t^2 Sin[t]

Out[135]= 14 - 28 t - 14 Cos[t] - 119/4 t Cos[t] + 7/4 t^2 Cos[t] + 231 Sin[t]/4 - 35/4 t Sin[t] - 21/4 t^2 Sin[t]
```

En esta caputra podemos confirmar que realizar la inversa de laplace de $F(s)$ y $G(s)$ para obtener $f(t)$ y $g(t)$ y despues calcular su convolucion da el mismo resultado que calcular la inversa de $F(s)$ y $G(s)$

3. 4

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

3.1. 4.1

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \delta(t-5), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

3.2. 4.2

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 1 + \delta(t-3), y(0) = 0, y'(0) = 1$$