



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Apuntes
Procesos Estocásticos

Autor:
Jorge Miguel Alvarado Reyes

3 de marzo de 2024

Índice

1. Problema 1	2
2. Problema 2	2
3. Problema 3	3
4. Problema 4	3
5. Problema 5	3
6. Problema 6	3
7. Practica 2	4
8. Cadena de markov	5
8.1. Problema 1	5
8.2. Problema 2	5
8.3. Problema 3	6

1. Problema 1

Demuestre que para un N_n definido en un proceso de Bernoulli, la varianza, $\text{Var}(N_n)$, es igual a npq . Sea X el número de éxitos, entonces:

$$E(N_n) = np$$

Para cualquier X_i :

$$P(X_i = 1) = p \text{ Éxito}$$

$$P(X_i = 0) = 1 - p = q \text{ Fracaso}$$

Entonces la esperanza de X es:

$$E(N_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

Para cualquier X_i :

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Entonces:

$$E(N_n) = p + p + p \text{ Así } n \text{ veces}$$

$$E(N_n) = np$$

ahora debemos encontrar $E(N_n^2)$

$$E(N_n^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot P(N_n = k)$$

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

entonces

$$E(N_n^2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

$$E(N_n^2) = npq + (np)^2$$

Entonces la varianza es

$$\text{Var}(N_n) = E(N_n^2) - E(N_n)^2$$

$$\text{Var}(N_n) = npq + (np)^2 - (np)^2$$

$$\text{Var}(N_n) = npq$$

2. Problema 2

Demuestre que la función generatriz de momentos de la caminata aleatoria es $M(t) = (pe^t + qe^{-t}) * n$. Recuerda que la función generatriz de momentos es: $m(t) = E(e^{tx})$

Paso 1: Definición de la Función Generatriz de Momentos

La función generatriz de momentos $m(t)$ de una variable aleatoria X se define como:

$$m(t) = E[e^{tX}]$$

Paso 2: Aplicación a la Caminata Aleatoria

Para un solo paso X_i de la caminata, donde $X_i = +1$ con probabilidad p y $X_i = -1$ con probabilidad q , la función generatriz de momentos es:

$$m_i(t) = E[e^{tX_i}] = pe^{t(+1)} + qe^{t(-1)} = pe^t + qe^{-t}$$

Paso 3: Función Generatriz de Momentos para n Pasos

Considerando que la caminata aleatoria está compuesta por n pasos independientes y que la función generatriz de momentos para la suma de variables aleatorias independientes es el producto de sus funciones generatriz de momentos individuales, la función generatriz de momentos para la caminata aleatoria completa, $M(t)$, es:

$$M(t) = (m_i(t))^n = (pe^t + qe^{-t})^n$$

3. Problema 3

Demuestre que para $n, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$P\{N_{n+1} = k\} = p * P\{N_n = k - 1\} + q * P\{N_n = k\}$$

donde N_n es el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli, p es la probabilidad de éxito, y $q = 1 - p$ es la probabilidad de fracaso.

Utilizando la ley de probabilidad total:

$$P\{N_{n+1} = k\} = P\{N_{n+1} = k | N_n = k - 1\} \cdot P\{N_n = k - 1\} + P\{N_{n+1} = k | N_n = k\} \cdot P\{N_n = k\}$$

En un ensayo solo puede ocurrir un éxito o un fracaso:

$$P\{N_{n+1} = k | N_n = k - 1\} = p$$

$$P\{N_{n+1} = k | N_n = k\} = q$$

La fórmula se reduce a:

$$P\{N_{n+1} = k\} = p \cdot P\{N_n = k - 1\} + q \cdot P\{N_n = k\}$$

4. Problema 4

Demuestre la formula de probabilidades de transicion de una caminata aleatoria simple usando ahora los pasos que se dan a la izquierda

5. Problema 5

Para una caminata aleatoria simple X_n sobre los enteros, demuestre que:

$$P(X_{n+1} = x) = pP(X_n = x - 1) + qP(X_n = x + 1)$$

Sugerencia: Sustituya los parámetros de las probabilidades en la fórmula de probabilidades de transición de una caminata aleatoria y con álgebra verifique la igualdad.

6. Problema 6

Una partícula realiza una caminata aleatoria simétrica sobre los enteros empezando en 0. Encuentre la probabilidad de que la partícula no se encuentre nuevamente en el origen en el sexto paso.

7. Practica 2

Problema 1

Considere que existe una partícula que realiza una caminata aleatoria sobre los números enteros, iniciando en 3. La probabilidad de dar un paso a la derecha es de $\frac{2}{3}$. Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre:

- a) En la posición 8 en 10 pasos.
- b) Regrese a la posición 3 en 6 pasos.

Punto a

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 8 después de 10 pasos es:

$$P\{X_{10} = 8 | X_0 = 3\} = \binom{10}{\frac{10+8-3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{10+8-3}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{10-8+3}{2}},$$

dado que $\frac{10+8-3}{2}$ no es un número entero, la probabilidad es 0. esto se debe a que no se puede llegar a una posición par dando un número par de pasos desde una posición inicial impar

Punto b

La probabilidad de que la partícula regrese a la posición 3 en 6 pasos es:

$$P\{X_6 = 3 | X_0 = 3\} = \binom{6}{\frac{6+3-3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6+3-3}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{6-3+3}{2}},$$

aplicando los valores obtenemos que la probabilidad es aproximadamente 0.2195 o 21.95 %.

Problema 2

Considere una partícula que realiza una caminata aleatoria simple simétrica sobre los enteros. Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre:

- a) En la posición 5 en 9 pasos.
- b) En la posición 3 o 7 en 10 pasos
- c) En la posición 2 en 7 pasos

Punto a

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 5 después de 9 pasos, comenzando desde una posición inicial X_0 , es:

$$P\{X_9 = 5 | X_0 = X_0\} = \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P\{X_9 = 5 | X_0 = X_0\} = \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^9,$$

$$P\{X_9 = 5 | X_0 = X_0\} = 0.0703125,$$

lo que representa una probabilidad del 7.03125 %.

Punto b

No es posible llegar a una posición impar dando un número par de pasos

Punto c

No es posible llegar a una posición par dando un número impar de pasos

8. Cadena de Markov

8.1. Problema 1

Considere el modelo del valor de una acción. Al final de un día dado se registra el precio. Si la acción subió la probabilidad de que suba mañana es de 0.7. Si la acción bajó, la probabilidad de que suba mañana es de sólo 0.5. (Por simplicidad, cuando una acción permanezca con el mismo valor, se considerará un aumento)

El **espacio de estados** S es definido como:

$$S = \{\text{Sube}, \text{Baja}\}$$

Donde:

- "Sube" indica que el precio de la acción sube o permanece igual (considerado como aumento).
- "Baja" indica que el precio de la acción baja.

La **matriz de transición** P representa las probabilidades de pasar de un estado a otro. Para este modelo, la matriz es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Donde:

- La primera fila $(0,7 \quad 0,3)$ representa las probabilidades de transición desde el estado "Sube": Si hoy el precio subió (o se mantuvo igual), la probabilidad de que suba mañana es de 0.7 y la de que baje es de 0.3.
- La segunda fila $(0,5 \quad 0,5)$ representa las probabilidades de transición desde el estado "Baja": Si hoy el precio bajó, la probabilidad de que suba mañana es de 0.5 y la de que baje es también de 0.5.

8.2. Problema 2

Suponga ahora que el modelo de mercado de acciones se cambia de manera que el hecho de que una acción suba o no mañana, depende de si subió o no hoy y ayer. En particular, si la acción subió los dos días, ayer y hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción subió hoy, pero ayer bajó, la probabilidad de que mañana suba es de 0.6. Si la acción bajó hoy pero ayer subió la probabilidad de que mañana suba es de 0.5. Si bajó durante estos 2 días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3.

Considere solo 4 estados, SUBIÓ-SUBIÓ, SUBIÓ-BAJÓ, BAJÓ-SUBIÓ, BAJÓ-BAJÓ.

$$S = SUBIO - SUBIO, SUBIO - BAJO, BAJO - SUBIO, BAJO - BAJO$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

8.3. Problema 3

La compañía Colgate ha estado promoviendo un nuevo tipo de detergente. El resultado de dicha promoción es que el 75 % de las personas que usan el detergente durante un período de un mes continúan utilizándolo. De las personas que usan otro detergente durante un período de un mes, un 45 % cambia al detergente de Colgate al mes siguiente.

Definimos el **espacio de estados** S como:

$$S = \{\text{Colgate}, \text{Otro}\}$$

La **matriz de transición** P es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$$