



**Universidad Nacional Autónoma de México**

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

**Apuntes**  
Ecuaciones Diferenciales

**Autor:**  
Jorge Miguel Alvarado Reyes

6 de marzo de 2024

# Índice

<b>1. 30/01/2024</b>	<b>2</b>
1.1. Contacto . . . . .	2
1.2. Evaluación . . . . .	2
<b>2. 01/02/2024</b>	<b>2</b>
2.1. Transformadas integrales . . . . .	2
<b>3. 08/02/2024</b>	<b>5</b>
3.1. Teoremas de la tranformada de laplace . . . . .	5
<b>4. Tarea 4</b>	<b>6</b>
4.1. Solución . . . . .	7
4.1.1. Problema 1 . . . . .	7
4.1.2. Problema 2 . . . . .	9
4.1.3. Problema 3 . . . . .	11
4.1.4. Problema 4 . . . . .	13
4.1.5. Problema 5 . . . . .	15
4.1.6. Problema 6 . . . . .	18
4.1.7. Problema 7 . . . . .	20
4.1.8. Problema 8 . . . . .	21
4.1.9. Problema 9 . . . . .	22
4.1.10. Problema 10 . . . . .	23
<b>5. Sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>24</b>
5.1. Conversion de ecuaciones de orden mayor a sistemas de primer orden . . . . .	24

## 1. 30/01/2024

### 1.1. Contacto

- Email: Camo6812@acatlan.unam.mx

### 1.2. Evaluación

- Tareas 60 % Exámenes 40 %

#### Tarea

Tomarse una selfi con una de las referencias bibliograficas

## 2. 01/02/2024

### 2.1. Transformadas integrales

Las transformadas integrales son operadores que asocian nuevas funciones a un determinado conjunto mediante integración respecto a un determinado parámetro. La forma general de una transformada integral se puede expresar como:

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt$$

Donde:

- $T$  representa el operador de transformada.
- $f(t)$  es la función original que queremos transformar.
- $F(s)$  es la función transformada, que depende de la variable  $s$ .
- $K(s, t)$  es el núcleo de la transformada, una función que depende tanto de la variable original  $t$  como de la nueva variable  $s$ .
- $a$  y  $b$  son los límites de integración, que pueden ser finitos o infinitos dependiendo del tipo específico de transformada integral.

Las transformadas integrales más conocidas y utilizadas incluyen:

- **La Transformada de Fourier**, donde  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ , y  $K(s, t) = e^{-2\pi i s t}$ , utilizada ampliamente en el análisis de señales y sistemas.
- **La Transformada de Laplace**, con  $a = 0$ ,  $b = \infty$ , y  $K(s, t) = e^{-st}$ , muy usada en la solución de ecuaciones diferenciales y en la teoría de control.
- **La Transformada de Mellin**, que es otra forma de transformada integral con un núcleo específico que permite transformaciones de productos en convoluciones, útil en teoría de números y análisis complejo.

Estas transformadas convierten funciones del dominio del tiempo o espacio (dominio  $t$ ) a funciones en el dominio de frecuencias o complejo (dominio  $s$ ), facilitando la manipulación matemática y la solución de problemas complejos.

#### Tarea 2

En [https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada\\_integral](https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_integral) hay una tabla con las transformaciones y sus inversas. Elabore una tabla similar pero con nuestra simbología. Para cada transformada intente calcular la de  $f(t) = t + c$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{s - c - t} \right) dt \\ \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left( \frac{1}{s - c - t} \right) dt \\ \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left( \frac{1}{u} \right) - du \\ \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{\pi} - [\ln(u)]_a^b \end{aligned}$$

### Ejercicios

La transformada de Laplace y condiciones de existencia

Para calcular la transformada de Laplace de  $f(t) = \sin(t)$ , utilizamos la definición:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$\begin{aligned} u &= \sin(t), & dv &= e^{-st} dt \\ du &= \cos(t) dt, & v &= \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

La fórmula de integración por partes  $\int u dv = uv - \int v du$  nos lleva a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) dt &= \left[ -\frac{1}{s} \sin(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt \\ \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) dt &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular

$$\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$\begin{aligned} u &= \cos(t), & dv &= e^{-st} dt \\ du &= -\sin(t) dt, & v &= \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \\ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt &= \left[ -\frac{1}{s} \cos(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} - \sin(t) dt \\ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} - \sin(t) dt \\ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt &= \frac{1}{s} \left( -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) dt \right) \\ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(t) dt &= \left( -\frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) dt \right) \end{aligned}$$

Para calcular la transformada de Laplace de  $f(t) = \cos(\alpha t)$ , utilizamos la definición:

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(\alpha t) dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$\begin{aligned} u &= \cos(\alpha t), & dv &= e^{-st} dt \\ du &= -\alpha \sin(\alpha t), & v &= -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

La fórmula de integración por partes  $\int u dv = uv - \int v du$  nos lleva a:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(\alpha t) e^{-st} dt &= \left[ \cos(\alpha t) - \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} - \alpha \sin(\alpha t) dt \\ \left[ \cos(\alpha t) - \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} &= \left[ \cos(\alpha \infty) - \frac{1}{s} e^{-s\infty} - \cos(\alpha 0) - \frac{1}{s} e^{-s0} \right] \\ \left[ \cos(\alpha \infty) - \frac{1}{s} e^{-s\infty} - \cos(\alpha 0) - \frac{1}{s} e^{-s0} \right] &= \frac{1}{s} \\ \int_0^{\infty} \cos(\alpha t) e^{-st} dt &= \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(\alpha t) dt \end{aligned}$$

Debemos resolver

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sin(\alpha t) dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$\begin{aligned} u &= \sin(\alpha t), & dv &= e^{-st} dt \\ du &= \alpha \cos(\alpha t), & v &= -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt &= \left[ \sin(\alpha t) \cdot -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \alpha \cos(\alpha t) \\ \left[ \sin(\alpha t) \cdot -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} &= \left[ \sin(\alpha \infty) \cdot -\frac{1}{s} e^{-s\infty} - \sin(\alpha 0) \cdot -\frac{1}{s} e^{-s0} \right] = 0 \\ \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt &= 0 - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \alpha \cos(\alpha t) \\ &= \frac{\alpha}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(\alpha t) \end{aligned}$$

### 3. 08/02/2024

#### 3.1. Teoremas de la transformada de laplace

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

$$\mathcal{L}\{\text{senh}(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}$$

#### 4. Tarea 4

1.  $y' + 4y = e^{-4t}$ ,  $y(0) = 2$   $y'(0) = 0$
2.  $y' - y = 1 - te^t$ ,  $y(0) = 0$
3.  $y'' + 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$
4.  $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$
5.  $y'' - 6y' + 9y = t$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 1$
6.  $y'' - 4y' + 4y = t^3$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$
7.  $y'' - 6y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = -3$
8.  $2y'' + 20y' + 51y = 0$ ,  $y(0) = 2, y'(0) = 0$
9.  $y'' - y' = e^t \cos(t)$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$
10.  $y'' - 2y' + 5y = 1 + t$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 4$

## 4.1. Solución

### 4.1.1. Problema 1

$$y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$$

Aplicar la Transformada de Laplace en la ecuación es:

$$\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}.$$

Resolviendo  $\mathcal{L}\{e^{-4t}\}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-4t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-4t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+4)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s+4} e^{-(s+4)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+4}\end{aligned}$$

Resolviendo  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0), \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s),\end{aligned}$$

Sustituyendo con la condición inicial  $y(0) = 2$  en la ecuación:

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Esto simplifica a:

$$Y(s)(s+4) = 2 + \frac{1}{s+4}$$

Despejamos  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{1}{(s+4)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2s+9}{(s+4)^2}$$

$$\frac{2s+9}{(s+4)^2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{(s+4)^2}$$

$$2s+9 = A(s+4) + B$$

$$2s+9 = As + 4A + B$$

$$2s+9 = A(s+4) + B$$

Para  $s = -4$

$$2(-4) + 9 = A(-4 + 4) + B$$



$$-8 + 9 = A(0) + B$$

$$1 = B$$

Como sabemos que  $B = 1$

$$2s + 9 = A(s + 4) + 1$$

Para  $s = 1$

$$2(1) + 9 = A(1 + 4) + 1$$

$$11 = A5 + 1$$

$$2 = A$$

Por lo tanto los valores de  $A$  y  $B$  son

$$A = 2 \quad B = 1$$

$$\frac{2s + 9}{(s + 4)^2} = \frac{2}{s + 4} + \frac{1}{(s + 4)^2}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 4)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 4)^2}\right\}$$

Sabemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - a}\right] = e^{at} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - a)^n}\right] = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n - 1)!}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 4)^2}\right\} &= 2e^{-4t} + \frac{t^{2-1}e^{-4t}}{(2 - 1)!} \\ &= 2e^{-4t} + \frac{te^{-4t}}{1!} \\ &= 2e^{-4t} + te^{-4t} \\ &= e^{-4t}(2 + t) \end{aligned}$$

Podemos confirmar este resultado con Mathematica

```
In[2]:= (*Problema 1*)
ResolverEcuacionDiferencialConTransformadaDeLaplace[y'[t] + 4 y[t] == E^(-4 t),
{2, 0}]
          9 + 2 s
          (4 + s)^2
Out[2]= e^(-4 t) (2 + t)
```

#### 4.1.2. Problema 2

$$y' - y = 1 - te^t, \quad y(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1 - te^t\}$$

Utilizamos las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{te^{\alpha t}\} = \frac{1}{(s - \alpha)^2}$$

Por lo tanto, para  $\mathcal{L}\{1 - te^t\}$  tenemos:

$$\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{te^t\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s - 1)^2}$$

Para  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ , considerando la condición inicial  $y(0) = 0$ , obtenemos:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Sustituyendo en la ecuación transformada:

$$sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s - 1)^2}$$

Resolviendo para  $Y(s)$ :

$$Y(s)(s - 1) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s - 1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s - 1)} - \frac{1}{(s - 1)^3}$$

Ahora debemos buscar las fracciones parciales de:

$$\frac{1}{s(s - 1)} - \frac{1}{(s - 1)^3}$$

Calculamos las fracciones parciales de  $\frac{1}{s(s-1)}$

$$\frac{1}{s(s - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 1}$$

$$1 = A(s - 1) + Bs$$

Para  $s = 0$

$$1 = A(0 - 1) + B(0)$$

$$1 = -A$$

$$A = -1$$

Para  $s = 1$

$$1 = A(1 - 1) + B(1)$$

$$1 = A(0) + B$$

$$1 = B$$

$$\frac{1}{s(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}$$

Sabemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s}\right] = a \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = -\frac{t^2 e^t}{2}$$

$$-1 + e^t - \frac{t^2 e^t}{2}$$

Podemos confirmar este resultado con Mathematica

```
In[18]:= (*Problema 2*)
ResolverEcuacionDiferencialConTransformadaDeLaplace[y'[t] - y[t] == 1 - t*E^t,
{0}]

$$\frac{1 - 3s + s^2}{(-1 + s)^3 s}$$

Out[18]= -1 - \frac{1}{2} e^t (-2 + t^2)
```

### 4.1.3. Problema 3

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = y'(0) = 1$ , tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - s(1) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = Y(s)$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - s - 1 + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - s - 1 + 2sY(s) - 2 + Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 1) - s - 3 = 0$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = s + 3$$

Despejando  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)^2}$$

Calculamos las fracciones parciales

$$\frac{s + 3}{(s + 1)^2} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B}{(s + 1)^2}$$

$$s + 3 = A(s + 1) + B$$

Para  $s = -1$

$$-1 + 3 = A(0) + B$$

$$2 = B$$

Para  $s = 3$

$$-3 + 3 = A(-3 + 1) + B$$

$$0 = A(-2) + B$$

Sabemos que  $B = 2$

$$0 = A(-2) + 2$$

$$-2A = -2$$

$$A = 1$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

Aplicamos la transformada inversa de laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

Sabemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = 2te^{-t}$$

La solución es:

$$e^{-t} + 2te^{-t} = e^{-t}(1 + 2t)$$

Podemos confirmar este resultado con Mathematica

```
In[6]:= (*Problema 3*)
```

```
ResolverEcuacionDiferencialConTransformadaDeLaplace[y''[t] + 2 y'[t] + y[t] == 0,
{1, 1}]
```

$$\frac{3+s}{(1+s)^2}$$

```
Out[6]= e-t (1 + 2 t)
```

#### 4.1.4. Problema 4

$$y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\}.$$

para  $\mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\}$  tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\} = \frac{3!}{(s-2)^4} = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s)\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = y'(0) = 0$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2 Y(s) - s(0) - 0 \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 0 \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s)\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$s^2 Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{6}{(s-2)^4}.$$

Factorizamos el término en  $Y(s)$  y simplificamos:

$$\begin{aligned}Y(s)(s^2 - 4s + 4) &= \frac{6}{(s-2)^4}, \\ Y(s)(s-2)^2 &= \frac{6}{(s-2)^4}.\end{aligned}$$

Despejamos  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^6}.$$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] &= \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!} \\ 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^6}\right] &= 6\frac{t^5 e^{2t}}{5!} \\ &= 6\frac{t^5 e^{2t}}{120} \\ &= \frac{t^5 e^{2t}}{20}\end{aligned}$$

Podemos confirmar este resultado con Mathematica

In[7]:= (\*Problema 4\*)

ResolverEcuacionDiferencialConTransformadaDeLaplace[

$y''[t] - 4 y'[t] + 4 y[t] = t^3 E^{(2 t)}$ , {0, 0}]

[número e

$$\frac{6}{(-2 + s)^6}$$

Out[7]=  $\frac{1}{20} e^{2 t} t^5$

#### 4.1.5. Problema 5

$$y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}.$$

para  $\mathcal{L}\{t\}$  tenemos:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 1$ , tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - s(0) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - 0$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - 1 - 6sY(s) + 9Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 6s + 9) - 1 = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 6s + 9) = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$Y(s)(s - 3)^2 = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$Y(s)(s - 3)^2 = \frac{1 + s^2}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1 + s^2}{s^2(s - 3)^2}$$

Calculamos las fracciones parciales

$$\frac{1 + s^2}{s^2(s - 3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s - 3)} + \frac{D}{(s - 3)^2}$$

$$1 + s^2 = As(s - 3)^2 + B(s - 3)^2 + Cs^2(s - 3) + Ds^2$$

Expandiendo:

$$1 + s^2 = As^3 - 6As^2 + 9As + Bs^2 - 6Bs + 9B + Cs^3 - 3Cs^2 + Ds^2$$

$$1 + s^2 = (A + C)s^3 + (-6A + B - 3C + D)s^2 + (9A - 6B)s + 9B$$



$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
-6A + B - 3C + D &= 1 \\
9A - 6B &= 0 \\
9B &= 1
\end{aligned}$$

DE este sistema observamos:

$$B = \frac{1}{9}$$

Sustituyendo arriba

$$\begin{aligned}
9A - 6\left(\frac{1}{9}\right) &= 0 \\
9A &= \frac{6}{9} \\
A &= \frac{6}{81} \\
A &= \frac{2}{27}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera expresion

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
\frac{2}{27} + C &= 0 \\
C &= -\frac{2}{27}
\end{aligned}$$

Resolviendo la ultima expresion

$$\begin{aligned}
-6A + B - 3C + D &= 1 \\
-6\left(\frac{2}{27}\right) + \frac{1}{9} - 3\left(-\frac{2}{27}\right) + D &= 1 \\
-\frac{12}{27} + \frac{1}{9} + \frac{6}{27} + D &= 1 \\
-\frac{12}{27} + \frac{1}{9} + \frac{6}{27} + D &= 1 \\
-\frac{1}{9} + D &= 1 \\
D = 1 + \frac{1}{9} &= \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

$$\frac{1+s^2}{s^2(s-3)^2} = \frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} + \frac{-2/27}{(s-3)} + \frac{10/9}{(s-3)^2}$$

Aplicar la tranformada inversa de laplace  
Sabemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s}\right] = a \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2/27}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/9}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2/27}{(s-3)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10/9}{(s-3)^2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2/27}{s}\right] = \frac{2}{27}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/9}{s^2}\right] = \frac{1}{9} \cdot \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} = \frac{1}{9}t$$

$$-2/27 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)}\right] = \frac{-2}{27} e^{3t}$$

$$10/9 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = \frac{10}{9} \frac{te^{3t}}{1}$$

La transformada inversa de laplace completa es:

$$\frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$$

#### 4.1.6. Problema 6

$$y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^3\}.$$

para  $\mathcal{L}\{t^3\}$  tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s)\end{aligned}$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - s(1) - 0 \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{y\} &= Y(s)\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}s^2Y(s) - s - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) &= \frac{6}{s^4} \\ s^2Y(s) - s - 4sY(s) + 4 + 4Y(s) &= \frac{6}{s^4} \\ s^2Y(s) - 4sY(s) + 4 + 4Y(s) &= \frac{6}{s^4} + s \\ Y(s)(s^2 - 4s + 4) + 4 &= \frac{6}{s^4} + s \\ Y(s)(s - 2)^2 &= \frac{6}{s^4} + s - 4 \\ Y(s)(s - 2)^2 &= \frac{s^5 - 4s^4 + 6}{s^4} \\ Y(s) &= \frac{s^5 - 4s^4 + 6}{s^4(s - 2)^2}\end{aligned}$$

Buscamos las fracciones parciales de esta expresion

$$\frac{s^5 - 4s^4 + 6}{s^4(s - 2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s - 2} + \frac{F}{(s - 2)^2}$$

podemos calcular las fracciones parciales con **Mathematica**

$$\begin{aligned}\text{In[5]:= } & \text{Apart}[(s^5 - 4s^4 + 6) / (s^4 * (s - 2)^2)] \\ & \text{[separa fracciones simples]} \\ \text{Out[5]= } & -\frac{13}{8(-2 + s)^2} + \frac{1}{4(-2 + s)} + \frac{3}{2s^4} + \frac{3}{2s^3} + \frac{9}{8s^2} + \frac{3}{4s}\end{aligned}$$

$$\frac{13}{8(s-2)^2} + \frac{1}{4(s-2)} + \frac{3}{2s^4} + \frac{3}{2s^3} + \frac{9}{8s^2} + \frac{3}{4s}$$

Calculamos la inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{13}{8(s-2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4(s-2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s^4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{8s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{4s}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{13}{8(s-2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{13}{8} \cdot \frac{1}{(s-2)^2}\right] = \frac{13}{8}e^{2t}t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2}\right] = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^4}\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^3}\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2!} = \frac{3t^2}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{8s^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{s^2}\right] = \frac{9}{8} \cdot \frac{t}{1!} = \frac{9t}{8}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{4s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s}\right] = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{13}{8(s-2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4(s-2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s^4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{8s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{4s}\right] \\ &= \frac{13}{8}e^{2t}t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{t^3}{4} + \frac{3t^2}{4} + \frac{9t}{8} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(\*Problema 6\*)

**ResolverEcuacionDiferencialConTransformadaDeLaplace[**  
**y''[t] - 4 y'[t] + 4 y[t] == t^3, {1, 0}]**

$$\frac{6 - 4 s^4 + s^5}{(-2 + s)^2 s^4}$$

$$\frac{1}{8} \left( 6 + e^{2t} (2 - 13 t) + 9 t + 6 t^2 + 2 t^3 \right)$$

#### 4.1.7. Problema 7

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 13\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 3$ , tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - s(0) + 3$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - 0$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) + 3 - 6sY(s) + 13Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 - 6s + 13) + 3 = 0$$

$$Y(s) = -\frac{3}{(s^2 - 6s + 13)} = -\frac{3}{(s - 3)^2 + 4}$$

$$L\{e^{at} \sin(bt)\} = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$$

$$L^{-1}\left\{-\frac{3}{(s - 3)^2 + 2^2}\right\} = -3e^{3t} \sin(2t)$$

In[4]:= (\*Problema 7\*)

ResolverEcuacionDiferencialConTransformadaDeLap

y''[t] - 6 y'[t] + 13 y[t] == 0, {0, -3}]

$$-\frac{3}{13 - 6s + s^2}$$

Out[4]= -3 e<sup>3 t</sup> Cos[t] Sin[t]

#### 4.1.8. Problema 8

$$2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$2\mathcal{L}\{y''\} + 20\mathcal{L}\{y'\} + 51\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}.$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = 0$ , tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - s(2) - 0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - 2$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Sustituyendo:

$$2(s^2Y(s) - 2s) + 20(sY(s) - 2) + 51Y(s) = 0$$

$$2s^2Y(s) - 4s + 20sY(s) - 40 + 51Y(s) = 0$$

$$Y(s)(2s^2 + 20s + 51) - 4s - 40 = 0$$

$$Y(s)(2s^2 + 20s + 51) = 4s + 40$$

$$Y(s) = \frac{4s + 40}{2s^2 + 20s + 51}$$

$$Y(s) = \frac{4s + 40}{(s - 5)^2 + 50}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \right\} = e^{at} \cos(\omega t)$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} \right\} = e^{at} \sin(\omega t)$$

$$2 \left( 3\sqrt{2} \sin(5\sqrt{2}t) + 2 \cos(5\sqrt{2}t) \right) e^{5t} u(t)$$

#### 4.1.9. Problema 9

$$y'' - y' = e^t \cos(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^t \cos(t)\}.$$

Resolviendo  $\mathcal{L}\{e^t \cos(t)\}$ :

Sabemos:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^t \cos(t)\} = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1^2}$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 0$ , tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s)$$

Sustituyendo:

$$s^2 Y(s) - sY(s) = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1^2}$$

$$Y(s)(s^2 - s) = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{(s^2 - s)((s - 1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s(s - 1)((s - 1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s((s - 1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + 2s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)}$$

#### 4.1.10. Problema 10

$$y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1 + t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Para  $\mathcal{L}\{y''\}$ ,  $\mathcal{L}\{y'\}$  y  $\mathcal{L}\{y\}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 4$ , tenemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - s(0) - 4$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - (0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

Sustituyendo:

$$s^2Y(s) - 4 - 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 5) - 4 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 5) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 4$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 5) = \frac{4s^2 + s + 1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + s + 1}{s^2(s^2 - 2s + 5)}$$



## 5. Sistemas de ecuaciones lineales

**Objetivo:** El alumno comprendera la teoria de los sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, homogeneos y no homogeneos, analizara la matriz exponencial, las aplicaciones de los sistemas lineales y determinara soluciones mediante la transformada de laplace

### 5.1. Conversion de ecuaciones de orden mayor a sistemas de primer orden

#### Introduccion

Una solucion de la ecuacion diferencial:

$$g_1(t)f''(t) + g_2(t)f'(t) + g_3(t)f(t) = H(t)$$

Es una funcion  $f(t) = F$  que cumple  $s[f(t)] = 0$

**Ejemplo:**

$$t^2 y''(t) + 2ty'(t) - 6y(t) = 0$$

Determinar si  $y_1(t) = t$  y  $y_2(t) = t^2$  son soluciones.

$$S[y_1(t)] = t^2(y_1)'' + 2t(y_1)' - 6(y_1)$$

$$y_1'(t) = 1$$

$$y_1''(t) = 0$$

$$S[y_1(t)] = t^2(0) + 2t(1) - 6(t)$$

$$S[y_1(t)] = 2t - 6t$$

$$S[y_1(t)] = -4t \neq 0$$

Por lo tanto,  $y_1(t)$  no es solución.

Ahora para  $y_2(t)$ :

$$S[y_2(t)] = t^2(y_2)'' + 2t(y_2)' - 6(y_2)$$

$$y_2'(t) = 2t$$

$$y_2''(t) = 2$$

$$S[y_2(t)] = t^2(2) + 2t(2t) - 6(t^2)$$

$$S[y_2(t)] = 2t^2 + 4t^2 - 6t^2$$

$$S[y_2(t)] = 0$$

Por lo tanto,  $y_2(t)$  sí es solución.

**Ejemplo**

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 6y(t) = 0 \quad (1)$$

$$y''(t) = -\frac{2t}{t^2} y'[t] - \frac{6}{t^2} y(t)$$

$$y''(t) = -2t^{-1} y'(t) - 6t^{-2} y(t)$$

$$u_1(t) = y(t)$$

$$u_2(t) = u'_1 = y'(t)$$

$$u'_2 = y''(t) = -2t^{-1} u_2(t) - 6t^{-2} u_1(t)$$

$$u'_1 = u_2(t)$$

$$u'_2 = -2t^{-1} u_2(t) - 6t^{-2} u_1(t)$$

**Ejemplo**

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

$$u_1 = y$$

$$u_2 = u'_1 = y'$$

$$u'_2 = -2y - y$$

$$u'_1 = u_2$$

$$u'_2 = -2u_2 - u_1$$

**Ejemplo**

$$x'' + 3x' + x'' = t$$

$$x' + 3x + y' + y'' = e^{2t}$$

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

- $L\{x(t)\} = X(s)$
- $L\{y(t)\} = Y(s)$
- $L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s)$
- $L\{x''(t)\} = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s)$
- $L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$
- $L\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$

**Aplicando la Transformada de Laplace a las ecuaciones:**

Para las ecuaciones corregidas y asumiendo que la primera ecuación es  $x'' + 3x' + 2x = t$  y la segunda  $x' + 3x + y' + y'' = e^{2t}$ , aplicamos la transformada de Laplace:

$$s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s^2} \quad (2)$$

$$(s + 3)X(s) + (s^2 + s)Y(s) = \frac{1}{s - 2} \quad (3)$$

**Resolver para  $X(s)$  y  $Y(s)$ :**

De la primera ecuación podemos aislar  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 3s + 2)} \quad (4)$$

Para resolver el sistema completamente y encontrar  $X(s)$  y  $Y(s)$ , necesitamos ecuaciones claras y correctas. Si hay errores en las ecuaciones proporcionadas, deben ser corregidos antes de proceder.

Nota: Es importante verificar la precisión de las ecuaciones diferenciales y sus condiciones iniciales antes de aplicar la transformada de Laplace.