Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Apuntes

Ecuaciones Diferenciales

Autor:

Jorge Miguel Alvarado Reyes

22 de febrero de 2024

Índice

1. 30/01/2024

1.1. Contacto

- Email: Camo6812@acatlan.unam.mx

1.2. Evaluación

- Tareas 60 % Examenes 40 %

Tarea
Tomarse una selfi con una de las referencias bibliograficas

2. 01/02/2024

2.1. Transformadas integrales

Las transformadas integrales son operadores que asocian nuevas funciones a un determinado conjunto mediante integración respecto a un determinado parámetro. La forma general de una transformada integral se puede expresar como:

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt$$

Donde:

- T representa el operador de transformada.
- $f(t)$ es la función original que queremos transformar.
- $F(s)$ es la función transformada, que depende de la variable s.
- $K(s,t)$ es el núcleo de la transformada, una función que depende tanto de la variable original t como de la nueva variable s.
- a y b son los límites de integración, que pueden ser finitos o infinitos dependiendo del tipo específico de transformada integral.

Las transformadas integrales más conocidas y utilizadas incluyen:

- **La Transformada de Fourier**, donde $a = -\infty$, $b = \infty$, y $K(s,t) = e^{-2\pi ist}$, utilizada ampliamente en el análisis de señales y sistemas.
- **La Transformada de Laplace**, con $a = 0$, $b = \infty$, y $K(s,t) = e^{-st}$, muy usada en la solución de ecuaciones diferenciales y en la teoría de control.
- **La Transformada de Mellin**, que es otra forma de transformada integral con un núcleo específico que permite transformaciones de productos en convoluciones, útil en teoría de números y análisis complejo.

Estas transformadas convierten funciones del dominio del tiempo o espacio (dominio t) a funciones en el dominio de frecuencias o complejo (dominio s), facilitando la manipulación matemática y la solución de problemas complejos.

Tarea 2

En https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_integral hay una tabla con las tranformaciones y sus inversas. Elabore una tabla similar pero con nuestra simbologia. Para cada tranformada intente calcular la de $f(t) = t + c$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{s-c-t}\right)\,dt$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{1}{s-c-t}\right)\,dt$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{1}{u}\right) -\,du$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\pi} - [\ln(u)]_a^b$$

Ejercicios

La tranformada de Laplace y condiciones de existencia

Para calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \sin(t)$, utilizamos la definición:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \sin(t), \qquad dv = e^{-st}dt$$

$$du = \cos(t)dt, \qquad v = \int e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

La fórmula de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$ nos lleva a:

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt = \left[-\frac{1}{s}\sin(t)e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt$$

Ahora debemos calcular

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \cos(t), \qquad dv = e^{-st}dt$$

$$du = -\sin(t)dt, \qquad v = \int e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt = \left[-\frac{1}{s}\cos(t)e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} - \sin(t)\,dt$$

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} - \sin(t)\,dt$$

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt = \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt\right)$$

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)\,dt = \left(-\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt\right)$$

Para calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \cos(\alpha t)$, utilizamos la definición:

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos(\alpha t)\, dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \cos(\alpha t), \qquad dv = e^{-st} dt$$
$$du = -\alpha \sin(\alpha t), \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

La fórmula de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$ nos lleva a:

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t) e^{-st}\, dt = \left[\cos(\alpha t) - \frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} - \alpha \sin(\alpha t)\, dt$$

$$\left[\cos(\alpha t) - \frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \left[\cos(\alpha \infty) - \frac{1}{s} e^{-s\infty} - \cos(\alpha 0) - \frac{1}{s} e^{-s0}\right]$$

$$\left[\cos(\alpha \infty) - \frac{1}{s} e^{-s\infty} - \cos(\alpha 0) - \frac{1}{s} e^{-s0}\right] = \frac{1}{s}$$

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t) e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin(\alpha t)\, dt$$

Debemos resolver

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin(\alpha t)\, dt$$

Aplicamos la técnica de integración por partes, donde elegimos:

$$u = \sin(\alpha t), \qquad dv = e^{-st} dt$$
$$du = \alpha \cos(\alpha t), \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\int_0^\infty \sin(\alpha t) e^{-st}\, dt = \left[\sin(\alpha t) \cdot -\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \alpha \cos(\alpha t)$$

$$\left[\sin(\alpha t) \cdot -\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \left[\sin(\alpha \infty) \cdot -\frac{1}{s} e^{-s\infty} - \sin(\alpha 0) \cdot -\frac{1}{s} e^{-s0}\right] = 0$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(\alpha t) e^{-st}\, dt &= 0 - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \alpha \cos(\alpha t) \\ &= \frac{\alpha}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(\alpha t)\end{aligned}$$

3. 08/02/2024

3.1. Teoremas de la tranformada de laplace

$$\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{sen(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

$$\mathcal{L}\{senh(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{cosh(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

4. Tarea 4

1. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$
2. $y' - y = 1 - te^{t}, \quad y(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$
4. $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
5. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
6. $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
7. $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$
8. $2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$
9. $y'' - y' = e^{t} cos(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
10. $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$

4.1. Solución

Problema 1

$y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$
La Transformada de Laplace de la ecuación es:

$$\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}. \tag{1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \frac{1}{s+4}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-4t}\,dt.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \int_0^\infty e^{-(s+4)t}\,dt.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \left[-\frac{1}{s+4}e^{-(s+4)t}\right]_0^\infty.$$

Usando las propiedades de la Transformada de Laplace, tenemos:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0),$$
$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s),$$

Sustituyendo con la condicion inicial $y(0) = 2$ en la ecuación:

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s+4}. \tag{2}$$

Esto simplifica a:

$$(s+4)Y(s) = 2 + \frac{1}{s+4}. \tag{3}$$

Despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{1}{(s+4)^2}. \tag{4}$$

Para encontrar $y(t)$, aplicamos la Transformada de Laplace inversa a $Y(s)$, usando las transformadas inversas conocidas:

$$y(t) = 2e^{-4t} + te^{-4t}. \tag{5}$$

Este es el resultado de aplicar la Transformada de Laplace y su inversa a la ecuación diferencial dada, con la condición inicial $y(0) = 2$.

Problema 4

$y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^3e^{2t}\}. \tag{6}$$

Utilizamos las propiedades de la Transformada de Laplace para las derivadas y la condición inicial dada:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0),$$
$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0).$$

Dado que $y(0) = y'(0) = 0$, simplificamos a:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s),$$
$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s).$$

Para calcular $\mathcal{L}\{t^3e^{2t}\}$, aplicamos el teorema del desplazamiento en el eje s y obtenemos:

$$\mathcal{L}\{t^3e^{2t}\} = \frac{3!}{(s-2)^4} = \frac{6}{(s-2)^4}. \tag{7}$$

Sustituimos estos resultados en la ecuación transformada:

$$s^2Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{6}{(s-2)^4}. \tag{8}$$

Factorizamos el término en $Y(s)$ y simplificamos:

$$Y(s)(s^2 - 4s + 4) = \frac{6}{(s-2)^4}, \tag{9}$$

$$Y(s)(s-2)^2 = \frac{6}{(s-2)^4}. \tag{10}$$

Finalmente, despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^6}. \tag{11}$$

Este resultado representa la Transformada de Laplace de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial original. Para encontrar $y(t)$, aplicaríamos la Transformada de Laplace inversa a $Y(s)$.