



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Apuntes
Procesos Estocásticos

Autor:
Jorge Miguel Alvarado Reyes

26 de marzo de 2024

Índice

1. Elementos de procesos estocásticos	2
1.1. Definición de procesos estocásticos	2
1.1.1. Ejercicio 1 - Resuelto	2
1.2. Clasificación de procesos estocásticos	3
1.2.1. Ejercicio 2 - Resuelto	3
1.3. Ejemplos de procesos estocásticos	4
1.3.1. Ejercicio 3 - Tarea 1, Ejemplos de procesos estocástico	4
1.4. Conceptos básicos de procesos estocásticos	5
1.4.1. Ejercicio 4 - Ejercicios de clase, procesos de bernoulli y caminata aleatoria	5
1.4.2. Ejercicio 5 - Ejercicios caminata aleatoria y distribucion de probabilidad	7
1.4.3. Ejercicio 6 - Practica 2: Caminata aleatoria	7
2. Cadena de markov	10
2.1. Definicion, Probabilidades de transicion, Analisis matricial	10
2.1.1. Ejercicio 7 - Ejercicios de cadenas de markov, matriz y diagrama de transicion .	10
2.1.2. Ejercicio 8 - Ejercicios de cadenas de markov, matrices de transicion de n pasos y probabilidades incondicionales	11
2.1.3. Ejercicio 8 - Practica 4: Caminata aleatoria	12
2.2. Clasificación de estados	14
2.2.1. Ejercicio 8 - Ejercicios de clasificación de cadenas de markov y estados	14
2.3. Comportamiento asintotico	14
2.3.1. Ejercicio 9 - Ejercicios de distribución estacionaria	14
2.3.2. Ejercicio 10 - Ejercicios de tiempo de primera pasada	15

1. Elementos de procesos estocásticos

1.1. Definición de procesos estocásticos

1.1.1. Ejercicio 1 - Resuelto

Sea X_t el resultado de la suma sucesiva (acumulada) del lanzamiento de dos dados con solo tres caras. Se realizan 2 lanzamientos.

1. Defina S y T
2. Calcule las probabilidades asociadas a cada valor de X_1 y X_2

Solucion ejercicio 1

Indice 1

- $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- $T = \{1, 2\}$

Indice 2

suma de dos lanzamientos	Resultado
1+1	2
1+2	3
1+3	4
2+1	3
2+2	4
2+3	5
3+1	4
3+2	5
3+3	6

- $\mathbb{P}(X_t = 2) = 1/9$
- $\mathbb{P}(X_t = 3) = 2/9$
- $\mathbb{P}(X_t = 4) = 3/9$
- $\mathbb{P}(X_t = 5) = 2/9$
- $\mathbb{P}(X_t = 6) = 1/9$

1.2. Clasificación de procesos estocásticos

1.2.1. Ejercicio 2 - Resuelto

Indique la clasificación de cada proceso estocástico, considerándolo de acuerdo a la naturaleza de su conjunto de estados y conjunto paramétrico. Indique los valores de s y t .

1. Es el proceso estocástico que contabiliza la cantidad de lluvia que cae en la ciudad de México cada día.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots\} \text{Cada los días}$$

2. Es el proceso estocástico que indica la cantidad de impresoras descompuestas en cada departamento de la FES Acatlán.

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$T = \{1, 2, 3\} \text{Cada departamento de la FES}$$

3. Es el proceso estocástico que calcula el porcentaje de enfermos de dengue por colonia en Pachuca, Hidalgo.

$$S = \{x : x \in [0, 100]\}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots, N\} N \text{ es el número de colonias}$$

4. Es el proceso estocástico que mide el tiempo que tarda en caer la n -ésima pelota lanzada desde el techo de una casa.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots\} \text{correspondiente a cada } n\text{-ésima pelota lanzada}$$

5. Es el proceso estocástico que mide el tiempo de clase diaria que imparte un profesor.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots\} \text{representando cada día de clase}$$

6. Es el proceso estocástico que mide la cantidad de agua que existe en una cisterna en un instante específico.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$T = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \text{representando el tiempo continuo}$$

7. Es el proceso estocástico que mide el promedio de calificaciones de un grupo de alumnos durante cada semestre, en una carrera que dura 10 semestres.

$$S = \{x \in [0, 100]\}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \text{cada semestre de la carrera}$$

8. Es el proceso estocástico que indica la posición de un elevador de 5 pisos en un instante de tiempo definido.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$T = \mathbb{R}^+ \text{ tiempo continuo}$$

9. Es el proceso estocástico que determina el marcador de un partido de tenis, durante 5 sets.

$$S = \text{Conjunto de posibles marcadores en tenis}$$

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{correspondiente a cada set del partido}$$

10. Es el proceso estocástico que mide el porcentaje de llenado individual de 40 botellas en un período de 10 segundos.

$$S = \{x \in [0, 100]\}$$

$$T = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 10\}$$

1.3. Ejemplos de procesos estocásticos

1.3.1. Ejercicio 3 - Tarea 1, Ejemplos de procesos estocástico

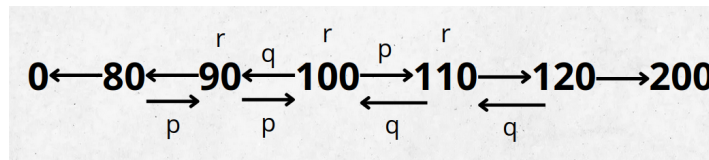
En cada ejercicio determine S , T y si es posible, las probabilidades de transición (como fórmula, tabla o gráfica)

Problema 1

Un alumno realiza apuestas de \$10 con una probabilidad “ p ” de ganar, una probabilidad “ q ” de perder y una probabilidad “ r ” de quedarse igual. Inicia el juego con un capital de \$100. Se retira del juego si pierde todo su capital o si lo duplica. Sea X_t el capital del alumno después de la t -ésima apuesta.

$$S = \{0, 10, 20, \dots, 200\}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots\} \text{Numero de apuestas} \leftarrow \text{PENDIENTE, si es este?}$$

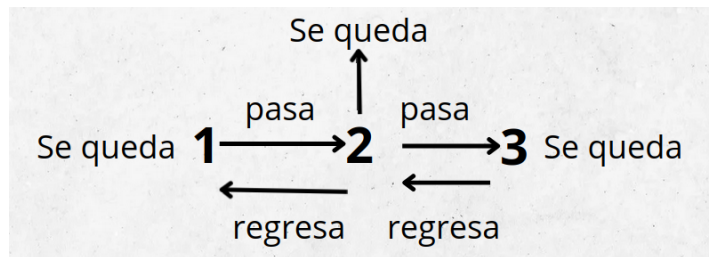


Problema 2

Suponer que al final de cada año escolar un estudiante tiene que repetir el año o pasar al curso siguiente. Considere que se requiere un mínimo de 3 años para completar el nivel académico.

$$S = \{1, 2, 3\} \text{Cada uno de los semestres que va a cursar}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots\} \text{evaluacion al final de cada año que determina si el alumno pasa o no}$$



Problema 3

Suponer que se lleva un control del comportamiento del dólar en cada día, considerando que baja, sube o se mantiene.

$$S = \text{Baja, Sube, Se mantiene}$$

$$T = 1, 2, 3, \dots \text{Dias en los que se hace la medición}$$

DIAGRAMA PENDIENTE

Problema 4

Constrúyase un proceso para estudiar el escrutinio de los votos de una justa electoral entre sólo 2 candidatos.

$$s = \text{PENDIENTE}$$

$$T = \{1, 2, \dots, n\} \text{Numero de votos a contar}$$

Problema 5

Una fábrica tiene 2 máquinas, pero en cualquier día dado no se usa más que una. Esta máquina tiene una probabilidad constante p de sufrir una avería, y si así sucede, la avería ocurre la final del trabajo del día. Se emplea un solo hombre para repararla. A este hombre le toma 2 días reparar la máquina y sólo trabaja en una máquina a la vez. Considere que X_t es el proceso estocástico que registra al final del día t , el número de días que serán necesarios para que ambas máquinas trabajen.

$$s = \text{PENDIENTE}$$

$$T = \{1, 2, 3, \dots\} \text{Días en los que se eobserva la disponibilidad}$$

1.4. Conceptos básicos de procesos estocasticos

1.4.1. Ejercicio 4 - Ejercicios de clase, procesos de bernoulli y caminata aleatoria

Problema 1

Demuestre que para un N_n definido en un proceso de Bernoulli, la varianza, $\text{Var}(N_n)$, es igual a npq Sea X el número de éxitos, entonces:

$$E(N_n) = np$$

Para cualquier X_i :

$$P(X_i = 1) = p \text{ Exito}$$

$$P(X_i = 0) = 1 - p = q \text{ Fracaso}$$

Entonces la esperanza de X es:

$$E(N_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

Para cualquier X_i :

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Entonces:

$$E(N_n) = p + p + p \text{ Asi n veces}$$

$$E(N_n) = np$$

ahora debemos encontrar $E(N_n^2)$

$$E(N_n^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot P(N_n = k)$$

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

entonces

$$E(N_n^2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$E(N_n^2) = npq + (np)^2$$

Entonces la varianza es

$$Var(N_n) = E(N_n^2) - E(N_n)^2$$

$$Var(N_n) = npq + (np)^2 - (np)^2$$

$$Var(N_n) = npq$$

Problema 2

Demuestre que la función generatriz de momentos de la caminata aleatoria es $M(t) = (pe^t + qe^{-t}) * n$. Recuerda que la función generatriz de momentos es: $m(t) = E(e^{tx})$

Paso 1: Definición de la Función Generatriz de Momentos

La función generatriz de momentos $m(t)$ de una variable aleatoria X se define como:

$$m(t) = E[e^{tX}]$$

Paso 2: Aplicación a la Caminata Aleatoria

Para un solo paso X_i de la caminata, donde $X_i = +1$ con probabilidad p y $X_i = -1$ con probabilidad q , la función generatriz de momentos es:

$$m_i(t) = E[e^{tX_i}] = pe^{t(+1)} + qe^{t(-1)} = pe^t + qe^{-t}$$

Paso 3: Función Generatriz de Momentos para n Pasos

Considerando que la caminata aleatoria está compuesta por n pasos independientes y que la función generatriz de momentos para la suma de variables aleatorias independientes es el producto de sus funciones generatriz de momentos individuales, la función generatriz de momentos para la caminata aleatoria completa, $M(t)$, es:

$$M(t) = (m_i(t))^n = (pe^t + qe^{-t})^n$$

Problema 3

Demuestre que para $n, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$P\{N_{n+1} = k\} = p * P\{N_n = k - 1\} + q * P\{N_n = k\}$$

donde N_n es el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli, p es la probabilidad de éxito, y $q = 1 - p$ es la probabilidad de fracaso.

Utilizando la ley de probabilidad total:

$$P\{N_{n+1} = k\} = P\{N_{n+1} = k | N_n = k - 1\} \cdot P\{N_n = k - 1\} + P\{N_{n+1} = k | N_n = k\} \cdot P\{N_n = k\}$$

En un ensayo solo puede ocurrir un éxito o un fracaso:

$$P\{N_{n+1} = k | N_n = k - 1\} = p$$

$$P\{N_{n+1} = k | N_n = k\} = q$$

La fórmula se reduce a:

$$P\{N_{n+1} = k\} = p \cdot P\{N_n = k - 1\} + q \cdot P\{N_n = k\}$$

1.4.2. Ejercicio 5 - Ejercicios caminata aleatoria y distribucion de probabilidad

Problema 1

Demuestre la formula de probabilidades de transicion de una caminata aleatoria simple usando ahora los pasos que se dan a la izquierda

PENDIENTE

Problema 2

Para una caminata aleatoria simple X_n sobre los enteros, demuestre que:

$$P(X_{n+1} = x) = pP(X_n = x - 1) + qP(X_n = x + 1)$$

Sugerencia: Sustituya los parámetros de las probabilidades en la fórmula de probabilidades de transición de una caminata aleatoria y con álgebra verifique la igualdad.

PENDIENTE

Problema 3

Una partícula realiza una caminata aleatoria simétrica sobre los enteros empezando en 0. Encuentre la probabilidad de que la partícula no se encuentre nuevamente en el origen en el sexto paso.

PENDIENTE

1.4.3. Ejercicio 6 - Practica 2: Caminata aleatoria

Problema 1

Considere que existe una partícula que realiza una caminata aleatoria sobre los números enteros, iniciando en 3. La probabilidad de dar un paso a la derecha es de $\frac{2}{3}$. Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre:

- a) En la posición 8 en 10 pasos.
- b) Regrese a la posición 3 en 6 pasos.

Punto a

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 8 después de 10 pasos es:

$$P\{X_{10} = 8 | X_0 = 3\} = \binom{10}{\frac{10+8-3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{10+8-3}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{10-8+3}{2}},$$

dado que $\frac{10+8-3}{2}$ no es un número entero, la probabilidad es 0. esto se debe a que no se puede llegar a una posición par dando un número par de pasos desde una posición inicial impar

$$P\{X_{10} = 8 | X_0 = 3\} = 0$$

Punto b

La probabilidad de que la partícula regrese a la posición 3 en 6 pasos es:

$$P\{X_6 = 3 | X_0 = 3\} = \binom{6}{\frac{6+3-3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6+3-3}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{6-3+3}{2}},$$

aplicando los valores obtenemos que la probabilidad es aproximadamente 0.2195 o 21.95 %.

Problema 2

Considere una partícula que realiza una caminata aleatoria simple simétrica sobre los enteros. Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre:

- a) En la posición 5 en 9 pasos.
- b) En la posición 3 o 7 en 10 pasos
- c) En la posición 2 en 7 pasos

Punto a

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 5 después de 9 pasos, comenzando desde una posición inicial X_0 , es:

$$P\{X_9 = 5 | X_0 = X_0\} = \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P\{X_9 = 5 | X_0 = X_0\} = \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^9,$$

$$P\{X_9 = 5 | X_0 = X_0\} = 0,0703125,$$

lo que representa una probabilidad del 7.03125 %.

Punto b

$$P\{X_{13} = 3 | X_0 = 0\} = \binom{13}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,1571,$$

$$P\{X_{13} = 7 | X_0 = 0\} = \binom{13}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,0349,$$

$$P\{X_{13} = 3 | X_0 = 0\} \cup P\{X_{13} = 7 | X_0 = 0\} = 0,1571 + 0,0349 = 0,1920$$

Punto c

No es posible llegar a una posición par dando un número impar de pasos

Problema 3

Considere una persona que bajo los efectos del alcohol da pasos hacia delante con probabilidad de 0,57 y hacia atrás con probabilidad complementaria, sobre una calle que puede referenciarse con los números enteros. Él sale de la cantina que se encuentra en la posición -3 . Su casa se encuentra en la posición 4. La casa de su mejor amigo en la posición 2 y un Oxxo en el origen. Considere la probabilidad de que el borracho, saliendo de la cantina:

- a) se encuentre en su casa después de 5 pasos.
- b) se encuentre en su casa después de 13 pasos.
- c) llegue al Oxxo para comprar más alcohol después de 5 pasos.
- d) no “caiga en la casa de su mejor amigo” en 9 pasos.

Punto a

$$P\{X_5 = 4 | X_0 = -3\} = \binom{5}{\frac{5+4+3}{2}} (0,57)^{\frac{5+4+3}{2}} (0,43)^{\frac{5-4-3}{2}}$$

El numero de pasos para llegar de -3 a 4 es de minimo 7 por lo tanto con 5 pasos no se puede llegar

Punto b

$$\begin{aligned} P\{X_{13} = 4 | X_0 = -3\} &= \binom{13}{\frac{13+4-(-3)}{2}} (0,57)^{\frac{13+4-(-3)}{2}} (0,43)^{\frac{13-4+(-3)}{2}} \\ &= \binom{13}{\frac{14}{2}} (0,57)^{\frac{14}{2}} (0,43)^{\frac{6}{2}} \\ &= \binom{13}{7} (0,57)^7 (0,43)^3 \\ &= 0,2120 \end{aligned}$$

Punto c

$$\begin{aligned} P\{X_5 = 0 | X_0 = -3\} &= \binom{5}{\frac{5+0-(-3)}{2}} (0,57)^{\frac{5+0-(-3)}{2}} (0,43)^{\frac{5-0+(-3)}{2}} \\ &= \binom{5}{\frac{8}{2}} (0,57)^{\frac{8}{2}} (0,43)^{\frac{2}{2}} \\ &= \binom{5}{4} (0,57)^4 (0,43) \\ &= 0,2269 \end{aligned}$$

Punto d

$$\begin{aligned} P\{X_9 = 2 | X_0 = -3\} &= \binom{9}{\frac{9+2-(-3)}{2}} (0,57)^{\frac{9+2-(-3)}{2}} (0,43)^{\frac{9-2+(-3)}{2}} \\ &= \binom{5}{\frac{14}{2}} (0,57)^{\frac{14}{2}} (0,43)^{\frac{4}{2}} \\ &= \binom{5}{7} (0,57)^4 (0,43)^2 \\ &= 0,1302 \end{aligned}$$

La probabilidad de que no caiga es $1 - 0,1302 = 0,8698$

2. Cadena de markov

2.1. Definicion, Probabilidades de transicion, Analisis matricial

2.1.1. Ejercicio 7 - Ejercicios de cadenas de markov, matriz y diagrama de transicion

Problema 1

Considere el modelo del valor de una acción. Al final de un día dado se registra el precio. Si la acción subió la probabilidad de que suba mañana es de 0.7. Si la acción bajó, la probabilidad de que suba mañana es de sólo 0.5. (Por simplicidad, cuando una acción permanezca con el mismo valor, se considerará un aumento)

El **espacio de estados** S es definido como:

$$S = \{\text{Sube}, \text{Baja}\}$$

La **matriz de transición** P representa las probabilidades de pasar de un estado a otro. Para este modelo, la matriz es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Donde:

- El primer renglón representa la probabilidad de transición cuando la acción sube: - 0,7 es la probabilidad de que la acción suba nuevamente mañana. - 0,3 es la probabilidad de que la acción baje mañana.
- El segundo renglón representa la probabilidad de transición cuando la acción baja: - 0,5 es la probabilidad de que la acción suba mañana. - 0,5 es la probabilidad de que la acción baje nuevamente mañana.

En resumen, el primer renglón de la matriz se refiere a las probabilidades cuando la acción está en estado "Sube", y el segundo renglón se refiere a las probabilidades cuando la acción está en estado "Baja"

Problema 2

Suponga ahora que el modelo de mercado de acciones se cambia de manera que el hecho de que una acción suba o no mañana, depende de si subió o no hoy y ayer. En particular, si la acción subió los dos días, ayer y hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción subió hoy, pero ayer bajó, la probabilidad de que mañana suba es de 0.6. Si la acción bajó hoy pero ayer subió la probabilidad de que mañana suba es de 0.5. Si bajó durante estos 2 días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3.

Considere solo 4 estados, SUBIÓ-SUBIÓ, SUBIÓ-BAJÓ, BAJÓ-SUBIÓ, BAJÓ-BAJÓ.

$$S = SUBIO - SUBIO, SUBIO - BAJO, BAJO - SUBIO, BAJO - BAJO$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Problema 3

La compañía Colgate ha estado promoviendo un nuevo tipo de detergente. El resultado de dicha promoción es que el 75 % de las personas que usan el detergente durante un período de un mes

continúan utilizándolo. De las personas que usan otro detergente durante un período de un mes, un 45 % cambia al detergente de Colgate al mes siguiente.

Definimos el **espacio de estados** S como:

$$S = \{\text{Colgate}, \text{Otro}\}$$

La **matriz de transición** P es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Ejercicio 8 - Ejercicios de cadenas de markov, matrices de transicion de n pasos y probabilidades incondicionales

Problema 1

considere un experimento donde se encuentran 5 sillas etiquetadas como a, b, c, d, e. una persona que se encuentra sentada en c debe moverse de un asiento a otro en base al lanzamiento de un dado y sus movimientos están definidos por la siguiente regla:

- a) si no está al final de los asientos, se mueve a la izquierda si sale 1 o 2, se mueve a la derecha si sale 3 o 4 y se queda donde está si sale 5 o 6
- b) si está al final de los asientos, vuelve a c si sale un número impar y se queda donde está si sale un número par

escribir la matriz de transición con estas reglas. obtener la matriz de transición de 4 pasos. calcule las probabilidades de las siguientes secuencias:

- a) c, d, e, c, d, a, c
- b) c, b, d, e, e

Problema 2

Una tienda de fotografía tiene un problema de inventario. La tienda tiene en almacén un modelo especial de cámara que puede solicitar cada semana. Sean d_1, d_2, \dots las demandas respectivas de la cámara (el número de unidades que se venderían si hay cámaras en el inventario) durante la primera, segunda semanas, etc... Suponga que las d_t son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas como una distribución de Poisson con $\lambda = 1$ sea x_t el número de cámaras disponibles al final de la semana t la política de pedidos es que al final de cada semana t la tienda hace un pedido que le entregan al momento de abrir la tienda el lunes. El pedido es de 3 cámaras si $x_t = 0$ y no se ordena ninguna cámara si $x_t > 0$ obtenga

- a) la matriz y diagrama de transición
- b) la matriz de transición de 3 pasos
- c) indique ¿cuál es la probabilidad de que no haya cámaras en inventario 2 semanas después dado que se tiene una cámara al final de una semana?
- d) indique ¿cuál es la probabilidad incondicional de que haya 3 cámaras en inventario 2 semanas después sabiendo que $a = (0,25, 0,25, 0,25, 0,25)$?

2.1.3. Ejercicio 8 - Practica 4: Caminata aleatoria

Problema 1

Suponga que hay 3 periódicos dominicales: Excelsior, El Universal y La Prensa. Y suponga además que cada persona cada domingo compra solo uno de ellos. Supongase los siguiente porcentajes de cambio de periódico al paso de los años

- a) 80 % siguen comprando el mismo periódico de un año para otro
- b) De los lectores de Excelsior, el 15 % cambia a El Universal
- c) De los lectores de El Universal el 10 % cambia a La Prensa
- d) De los lectores de La Prensa, el 8 % cambian a Excelsior

Escriba la matriz de transición de un y de 3 pasos. Determine las probabilidades de las siguientes sucesiones suponiendo que el primero de los periódicos de las series tiene una probabilidad de 1:

- 1. Excelsior-El Universal-La Prensa
- 2. La Prensa-El Universal-Excelsior
- 3. El Universal-Excelsior-La Prensa

Solucion

- $P(E \rightarrow E) = 80 \%$,
- $P(E \rightarrow U) = 15 \%$,
- $P(E \rightarrow P) = 5 \%$, dado que $100 \% - 80 \% - 15 \% = 5 \%$,
- $P(U \rightarrow U) = 80 \%$,
- $P(U \rightarrow P) = 10 \%$,
- $P(U \rightarrow E) = 10 \%$, dado que $100 \% - 80 \% - 10 \% = 10 \%$,
- $P(P \rightarrow P) = 80 \%$,
- $P(P \rightarrow E) = 8 \%$,
- $P(P \rightarrow U) = 12 \%$, dado que $100 \% - 80 \% - 8 \% = 12 \%$.

Esto nos da la matriz de transición P para 1 paso (en forma de porcentaje):

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,08 & 0,12 & 0,8 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de 3 pasos, obtenida elevando la matriz de 1 paso al cubo, es:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,5594 & 0,30705 & 0,13355 \\ 0,2143 & 0,5786 & 0,2071 \\ 0,18488 & 0,26292 & 0,5522 \end{bmatrix}$$

- 1. Excelsior-El Universal-La Prensa, $P(E \rightarrow U) * P(U \rightarrow P) = 1,5 \%$
- 2. La Prensa-El Universal-Excelsior $P(P \rightarrow U) * P(U \rightarrow E) = 1,2 \%$
- 3. El Universal-Excelsior-La Prensa $P(U \rightarrow E) * P(E \rightarrow P) = 0,05 \%$

Problema 2

Tres supermercados locales x, y, z compiten por los precios; una investigación descubre que cada mes el cambio de supermercados se da en las siguientes proporciones:

- a) X conserva el 80 % de sus clientes y gana 10 % de los de Y y 2 % de los de Z
- b) Y conserva el 70 % de sus clientes, gana 14 % de los de X y 8 % de los de Z
- c) Z conserva el 90 % de sus clientes, gana 6 % de X y 20 % de Y

Obtener la matriz de transición para el porcentaje de cambios por mes. ¿Cuál es porcentaje de clientes que tendrá cada supermercado en septiembre, suponiendo que la matriz calculada para el mes de junio?

Solucion

	x	y	z
x	0.80	0.14	0.06
y	0.10	0.70	0.20
z	0.02	0.08	0.90

Donde la columna es la marca que obtiene el porcentaje del renglon, ejemplo la columna x en su renglon y significa que x gana el 10 % de sus clientes de y

Problema 3

El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20 % de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además el 30 % de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. Construya la matriz de transición e indique ¿cuántos lo comprarán el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

Solucion

Primero definimos la matriz de transición T y el vector de estado inicial \vec{v}_0 :

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Para calcular cuántas personas comprarán el producto el mes próximo (\vec{v}_1), multiplicamos la matriz de transición T por el vector de estado inicial \vec{v}_0 :

$$\vec{v}_1 = T \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 740 \end{pmatrix}$$

Esto significa que 260 personas comprarán el producto el mes próximo.

Para calcular cuántas personas lo comprarán dentro de dos meses (\vec{v}_2), multiplicamos la matriz de transición T por el vector de estado después de 1 mes \vec{v}_1 :

$$\vec{v}_2 = T \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 740 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 340 \\ 660 \end{pmatrix}$$

Lo que indica que 340 personas comprarán el producto dentro de dos meses.

Problema 4

En una población de 10000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5 % de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario o menos, y un 2 % de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete o menos, hay un 10 % de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete hay un 5 % de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar un paquete o menos. Obtenga la matriz de transición e indique ¿cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?

Primero, definimos la matriz de transición T y el vector de estado inicial \vec{v}_0 :

$$T = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,05 & 0,02 \\ 0,10 & 0,80 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,85 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2500 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

Para encontrar cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes (\vec{v}_1), multiplicamos la matriz de transición T por el vector de estado inicial \vec{v}_0 :

$$\vec{v}_1 = T \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,05 & 0,02 \\ 0,10 & 0,80 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5000 \\ 2500 \\ 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4825 \\ 2750 \\ 2625 \end{pmatrix}$$

Esto indica que habrá 4825 individuos que no fuman, 2750 que fuman un paquete o menos al día, y 2625 que fuman más de un paquete al día el próximo mes.

2.2. Clasificación de estados

2.2.1. Ejercicio 8 - Ejercicios de clasificación de cadenas de markov y estados

Este ejercicio se vio durante la clase

2.3. Comportamiento asintotico

2.3.1. Ejercicio 9 - Ejercicios de distribución estacionaria

Problema 1

Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades a, b y c. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en c, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a b es 0.4 y la de tener que ir a a es 0.2. Si el viajante duerme un día en b, con probabilidad de 0.2 tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60 % de los casos viajará a c, mientras que irá a a con probabilidad 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo un día en a, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad de 0.1, irá a b con una probabilidad de 0.3 y a c con una probabilidad de 0.6. ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

$$P = \begin{bmatrix} P(a|a) & P(b|a) & P(c|a) \\ P(a|b) & P(b|b) & P(c|b) \\ P(a|c) & P(b|c) & P(c|c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\pi_a &= 0,1\pi_a + 0,2\pi_b + 0,2\pi_c \\
\pi_b &= 0,3\pi_a + 0,2\pi_b + 0,4\pi_c \\
\pi_c &= 0,6\pi_a + 0,6\pi_b + 0,4\pi_c \\
1 &= \pi_a + \pi_b + \pi_c
\end{aligned}$$

Reorganizando el sistema

$$\begin{aligned}
-0,9\pi_a + 0,2\pi_b + 0,2\pi_c &= 0 \\
0,3\pi_a - 0,8\pi_b + 0,4\pi_c &= 0 \\
0,6\pi_a + 0,6\pi_b - 0,6\pi_c &= 0 \\
\pi_a + \pi_b + \pi_c &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & -0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & -0,6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_a \\ \pi_b \\ \pi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_a \\ \pi_b \\ \pi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 7/22 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: coca cola y pepsi cola. Cuando una persona ha comprado coca cola hay una probabilidad de 90 % de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró pepsi, hay 80 % de posibilidad de que repita la vez siguiente. Encuentre el vector de distribución estacionaria.

2.3.2. Ejercicio 10 - Ejercicios de tiempo de primera pasada

Problema 1

En la industria de la cerveza ligera, 3 marcas comparten aproximadamente un alto porcentaje de las ventas: La Sudco, Mills y Shotz. Estas tres marcas compiten en forma intensa por los clientes de la cerveza ligera. Se hizo un estudio y se mostró que después de 3 meses 50 % de los clientes de la Sudco seguían prefiriéndola, 30 % preferían la Mills y 20 % la Shotz. De los clientes de la Mills 60 % prefieren la Mills, 30 % la Sudco y 10 % la Shotz. De los clientes de la Shotz 40 % prefieren su marca, 30 % la Sudco y 30 % la Mills. Calcule el tiempo de primera transición de la Shotz a la Sudco.

Problema 2

Una compañía que se dedica a la renta de autobuses, ha dividido su área de servicio en 3: norte, centro y sur. De un estudio reciente obtuvo la matriz de transición:

$$T = \begin{bmatrix} & N & C & S \\ N & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ C & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ S & 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

La compañía desea saber cuál es el tiempo promedio que se requiere para que un autobús rentado en el norte llegue al centro. Así también, desea saber el tiempo promedio necesario para que un autobús rentado en el sur, regrese al sur.