Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Apuntes

Procesos Estocasticos

Autor:

Jorge Miguel Alvarado Reyes

9 de marzo de 2024

Índice

1. Problema 1

Demuestre que para un N_n definido en un proceso de Bernoulli, la varianza, $\text{Var}(N_n)$, es igual a npq
Sea X el número de éxitos, entonces:

$$E(N_n) = np$$

Para cualquier X_i:

$$P(X_i = 1) = p \text{ Exito}$$

$$P(X_i = 0) = 1 - p = q \text{ Fracaso}$$

Entonces la esperanza de X es:

$$E(N_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

Para cualquier X_i:

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Entonces:

$$E(N_n) = p + p + p \text{ Asi n veces}$$

$$E(N_n) = np$$

ahora debemos encontrar $E(N_n^2)$

$$E(N_n^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(N_n = k)$$

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

entonces

$$E(N_n^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$E(N_n^2) = npq + (np)^2$$

Entonces la varianza es

$$Var(N_n) = E(N_n^2) - E(N_n)^2$$

$$Var(N_n) = npq + (np)^2 - (np)^2$$

$$Var(N_n) = npq$$

2. Problema 2

Demuestre que la funcion generatriz de momentos de la caminata aleatoria es $M(t) = (pe^t + qe^{-t}) * n$.
Recuerda que la funcion generatriz de momentos es: $m(t) = E(e^{tx})$

Paso 1: Definición de la Función Generatriz de Momentos

La función generatriz de momentos $m(t)$ de una variable aleatoria X se define como:

$$m(t) = E[e^{tX}]$$

Paso 2: Aplicación a la Caminata Aleatoria

Para un solo paso X_i de la caminata, donde $X_i = +1$ con probabilidad p y $X_i = -1$ con probabilidad q, la función generatriz de momentos es:

$$m_i(t) = E[e^{tX_i}] = pe^{t(+1)} + qe^{t(-1)} = pe^t + qe^{-t}$$

Paso 3: Función Generatriz de Momentos para n Pasos

Considerando que la caminata aleatoria está compuesta por n pasos independientes y que la función generatriz de momentos para la suma de variables aleatorias independientes es el producto de sus funciones generatriz de momentos individuales, la función generatriz de momentos para la caminata aleatoria completa, $M(t)$, es:

$$M(t) = (m_i(t))^n = (pe^t + qe^{-t})^n$$

3. Problema 3

Demuestre que para $n, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$P\{N_{n+1} = k\} = p * P\{N_n = k - 1\} + q * P\{N_n = k\}$$

donde N_n es el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli, p es la probabilidad de éxito, y $q = 1 - p$ es la probabilidad de fracaso.
Utilizando la ley de probabilidad total:

$$P\{N_{n+1} = k\} = P\{N_{n+1} = k|N_n = k - 1\} \cdot P\{N_n = k - 1\} + P\{N_{n+1} = k|N_n = k\} \cdot P\{N_n = k\}$$

En un ensayo solo puede ocurrir un éxito o un fracaso:

$$P\{N_{n+1} = k|N_n = k - 1\} = p$$

$$P\{N_{n+1} = k|N_n = k\} = q$$

La fórmula se reduce a:

$$P\{N_{n+1} = k\} = p \cdot P\{N_n = k - 1\} + q \cdot P\{N_n = k\}$$

4. Problema 4

Demuestre la formula de probabilidades de transicion de una caminata alaeatoria simple usando ahora los pasos que se dan a la izquierda

5. Problema 5

Para una caminata aleatoria simple X_n sobre los enteros, demuestre que:

$$P(X_{n+1} = x) = pP(X_n = x - 1) + qP(X_n = x + 1)$$

Sugerencia: Sustituya los parámetros de las probabilidades en la fórmula de probabilidades de transición de una caminata aleatoria y con álgebra verifique la igualdad.

6. Problema 6

Una partícula realiza una caminata aleatoria simétrica sobre los enteros empezando en 0. Encuentre la probabilidad de que la partícula no se encuentre nuevamente en el origen en el sexto paso.

7. Practica 2

Problema 1

Considere que existe una partícula que realiza una caminata aleatoria sobre los números enteros, iniciando en 3. La probabilidad de dar un paso a la derecha es de $\frac{2}{3}$. Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre:

a) En la posición 8 en 10 pasos.

b) Regrese a la posición 3 en 6 pasos.

Punto a

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 8 después de 10 pasos es:

$$P\{X_{10} = 8|X_0 = 3\} = \binom{10}{\frac{10+8-3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{10+8-3}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{10-8+3}{2}},$$

dado que $\frac{10+8-3}{2}$ no es un número entero, la probabilidad es 0. esto se debe a que no se puede llegar a una posicion par dando un numero par de pasos desde una posicion inicial impar

Punto b

La probabilidad de que la partícula regrese a la posición 3 en 6 pasos es:

$$P\{X_6 = 3|X_0 = 3\} = \binom{6}{\frac{6+3-3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6+3-3}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{6-3+3}{2}},$$

aplicando los valores obtenemos que la probabilidad es aproximadamente 0.2195 o 21.95 %.

Problema 2

Considere una partícula que realiza una caminata aleatoria simple simétrica sobre los enteros. Encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre:

a) En la posición 5 en 9 pasos.

b) En la posicion 3 o 7 en 10 pasos

c) En la posicion 2 en 7 pasos

Punto a

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición 5 después de 9 pasos, comenzando desde una posición inicial X_0, es:

$$P\{X_9 = 5|X_0 = X_0\} = \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P\{X_9 = 5|X_0 = X_0\} = \binom{9}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^9,$$

$$P\{X_9 = 5|X_0 = X_0\} = 0{,}0703125,$$

lo que representa una probabilidad del 7.03125 %.

Punto b

No es posible llegar a una posicion impar danndo un numero par de pasos

Punto c

No es posible llegar a una posicion par dando un numero impar de pasos

8. Cadena de markov

8.1. Problema 1

Considere el modelo del valor de una acción. Al final de un día dado se registra el precio. Si la acción subió la probabilidad de que suba mañana es de 0.7. Si la acción bajó, la probabilidad de que suba mañana es de sólo 0.5. (Por simplicidad, cuando una acción permanezca con el mismo valor, se considerará un aumento)
El **espacio de estados** S es definido como:

$$S = \{\text{Sube}, \text{Baja}\}$$

Donde:

- "Subeïndica que el precio de la acción sube o permanece igual (considerado como aumento).
- "Bajaïndica que el precio de la acción baja.

La **matriz de transición** P representa las probabilidades de pasar de un estado a otro. Para este modelo, la matriz es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Donde:

- La primera fila $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ representa las probabilidades de transición desde el estado "Sube": Si hoy el precio subió (o se mantuvo igual), la probabilidad de que suba mañana es de 0.7 y la de que baje es de 0.3.
- La segunda fila $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ representa las probabilidades de transición desde el estado "Baja": Si hoy el precio bajó, la probabilidad de que suba mañana es de 0.5 y la de que baje es también de 0.5.

8.2. Problema 2

Suponga ahora que el modelo de mercado de acciones se cambia de manera que el hecho de que una acción suba o no mañana, depende de si subió o no hoy y ayer. En particular, si la acción subió los dos días, ayer y hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción subió hoy, pero ayer bajó, la probabilidad de que mañana suba es de 0.6. Si la acción bajó hoy pero ayer subió la probabilidad de que mañana suba es de 0.5. Si bajó durante estos 2 días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3.
Considere solo 4 estados, SUBIÓ-SUBIÓ, SUBIÓ-BAJÓ, BAJÓ-SUBIÓ, BAJÓ-BAJÓ.

$$S = SUBIO - SUBIO, SUBIO - BAJO, BAJO - SUBIO, BAJO - BAJO$$

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

8.3. Problema 3

La compañía Colgate ha estado promoviendo un nuevo tipo de detergente. El resultado de dicha promoción es que el 75 % de las personas que usan el detergente durante un período de un mes continúan utilizándolo. De las personas que usan otro detergente durante un período de un mes, un 45 % cambia al detergente de Colgate al mes siguiente.
Definimos el **espacio de estados** S como:

$$S = \{\text{Colgate}, \text{Otro}\}$$

La **matriz de transición** P es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$$

9. Practica 4

Problema 1

Suponga que hay 3 periódicos dominicales: Excelsior, El Universal y La Prensa. Y suponga además que cada persona cada domingo compra solo uno de ellos. Supongase los siguiente porcentajes de cambio de periódico al paso de los años

a) 80 % siguen comprando el mismo periódico de un año para otro

b) De los lectores de Excelsior, el 15 % cambia a El Universal

c) De los lectores de El Universal el 10 % cambia a La Prensa

d) De los lectores de La Prensa, el 8 % cambian a Excelsior

Escriba la matriz de transición de un y de 3 pasos. Determine las probabilidades de las siguientes sucesiones suponiendo que el primero de los periódicos de las series tiene una probabilidad de 1:

1. Excelsior-El Universal-La Prensa
2. La Prensa-El Universal-Excelsior
3. El Universal-Excelsior-La Prensa

Solucion

- $P(E \to E) = 80\,\%$,
- $P(E \to U) = 15\,\%$,
- $P(E \to P) = 5\,\%$, dado que $100\,\% - 80\,\% - 15\,\% = 5\,\%$,
- $P(U \to U) = 80\,\%$,
- $P(U \to P) = 10\,\%$,
- $P(U \to E) = 10\,\%$, dado que $100\,\% - 80\,\% - 10\,\% = 10\,\%$,
- $P(P \to P) = 80\,\%$,
- $P(P \to E) = 8\,\%$,
- $P(P \to U) = 12\,\%$, dado que $100\,\% - 80\,\% - 8\,\% = 12\,\%$.

Esto nos da la matriz de transición P para 1 paso (en forma de porcentaje):

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de 3 pasos, obtenida elevando la matriz de 1 paso al cubo, es:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0{,}5594 & 0{,}30705 & 0{,}13355 \\ 0{,}2143 & 0{,}5786 & 0{,}2071 \\ 0{,}18488 & 0{,}26292 & 0{,}5522 \end{bmatrix}$$

1. Excelsior-El Universal-La Prensa, $P(E \to U) * P(U \to P) = 1{,}5\,\%$
2. La Prensa-El Universal-Excelsior $P(P \to U) * P(U \to E) = 1{,}2\,\%$
3. El Universal-Excelsior-La Prensa $P(U \to E) * P(E \to P) = 0{,}05\,\%$

Problema 2

Tres supermercados locales x, y, z compiten por los precios; una investigación descubre que cada mes el cambio de supermercados se da en las siguientes proporciones:

a) X conserva el 80 % de sus clientes y gana 10 % de los de Y y 2 % de los de Z

b) Y conserva el 70 % de sus clientes, gana 14 % de los de X y 8 % de los de Z

c) Z conserva el 90 % de sus clientes, gana 6 % de X y 20 % de Y

Obtener la matriz de transición para el porcentaje de cambios por mes. ¿Cuál es porcentaje de clientes que tendrá cada supermercado en septiembre, suponiendo que la matriz calculada para el mes de junio?

Solucion

	x	y	z
x	0.80	0.14	0.06
y	0.10	0.70	0.20
z	0.02	0.08	0.90

Donde la columna es la marca que obtiene el porcentaje del renglon, ejemplo la columna x en su renglon y significa que x gana el 10 % de sus clientes de y

Problema 3

El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20 % de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además el 30 % de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. Construya la matriz de transición e indique ¿cuántos lo comprarán el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

Solucion

Primero definimos la matriz de transición T y el vector de estado inicial $\vec{v}_0$:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Para calcular cuántas personas comprarán el producto el mes próximo ($\vec{v}_1$), multiplicamos la matriz de transición T por el vector de estado inicial $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_1 = T \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 740 \end{pmatrix}$$

Esto significa que 260 personas comprarán el producto el mes próximo.
Para calcular cuántas personas lo comprarán dentro de dos meses ($\vec{v}_2$), multiplicamos la matriz de transición T por el vector de estado después de 1 mes $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_2 = T \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 740 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 340 \\ 660 \end{pmatrix}$$

Lo que indica que 340 personas comprarán el producto dentro de dos meses.

Problema 4

En una población de 10000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5 % de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario o menos, y un 2 % de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete o menos, hay un 10 % de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete hay un 5 % de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar un paquete o menos. Obtenga la matriz de transición e indique ¿cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?
Primero, definimos la matriz de transición T y el vector de estado inicial $\vec{v}_0$:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}05 & 0{,}02 \\ 0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}85 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2500 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

Para encontrar cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes ($\vec{v}_1$), multiplicamos la matriz de transición T por el vector de estado inicial $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_1 = T \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}05 & 0{,}02 \\ 0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5000 \\ 2500 \\ 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4825 \\ 2750 \\ 2625 \end{pmatrix}$$

Esto indica que habrá 4825 individuos que no fuman, 2750 que fuman un paquete o menos al día, y 2625 que fuman más de un paquete al día el próximo mes.