Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT). Unidad Monterrey

Matrices aleatorias: Tarea 1

Jorge Luis Ramos Zavaleta

11 de septiembre de 2018

1. Ejercicio

De las diapositivas correspondientes a esta sesión, completar los pasos para llegar de la ec. 6 a la ec. 9.

1.1. Solución

Tenemos que

$$f(x,t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}d\Delta\rho(\Delta)f(x-\Delta,t)$$

Expandiendo el lado izquierdo en su serie de Taylor alrededor de τ tenemos que

$$f(x,t+\tau)=f(x,t)+\tau\frac{df}{dt}+...$$

Ahora expandiendo $f(x-\Delta,t)$ alrededor de Δ

$$f(x-\Delta,t)=f(x,t)-\Delta\frac{df}{dx}+\frac{\Delta^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}+...$$

Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned}f(x,t)+\tau\frac{df}{dt}+...&=\int_{-\infty}^{\infty}d\Delta\rho(\Delta)\left[f(x,t)-\Delta\frac{df}{dx}+\frac{\Delta^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}+...\right]\\&=f(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}d\Delta\rho(\Delta)-\frac{df}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta d\Delta\rho(\Delta)+\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2d\Delta\rho(\Delta)+...\end{aligned}$$

Ahora por la propiedad de normalización, es decir, dado que ρ es función de densidad de probabilidad tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\rho(\Delta) = 1$. Además por la propiedad de simetría $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^n d\Delta\rho(\Delta) = 0$ para todo n impar. Luego

$$f(x,t) + \tau\frac{df}{dt} + ... = f(x,t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 d\Delta\rho(\Delta) + ...$$

Truncando la ecuación al segundo momento de ρ tenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{d^2 f}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2\tau} d\Delta\rho(\Delta) = D\frac{d^2 f}{dx^2}$$

que es una ecuación de calor. Para resolverla consideramos la transformada de Fourier de f con lo que tenemos

$$\hat{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iyx} f(y,t)dy$$

Luego

$$\frac{d^2\hat{f}}{dx^2} = (2\pi ix)^2\hat{f}(x,t) = -4\pi^2x^2\hat{f}$$

así

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = D(-4\pi^2x^2\hat{f})$$

Por lo que tenemos una EDO lineal con respecto a t y resolviendo tenemos

$$\hat{f} = \hat{f}(x,0)e^{-4\pi^2Dx^2t}$$

considerando la condición inicial $f(x,0) = \delta(x)$ cuya transformada inversa de Fourier esta dada por $\hat{\delta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)e^{-i\omega y}dy = 1$. Entonces

$$\hat{f} = e^{-4\pi^2Dx^2t}$$

cuya transformada inversa de Fourier es

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$

Verificaremos que realmente esta última expresión es solución de la ecuación de calor descrita. Derivando f con respecto a x tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - \frac{xe^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
D\frac{d^2f}{dx^2} &= -\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi D}t^{3/2}} + \left(-\frac{x}{4\sqrt{\pi}(Dt)^{3/2}}\right)\left(-\frac{x}{2t}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right) \\
&= -\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi D}t^{3/2}} + \frac{x^2e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{8\sqrt{\pi}D^{3/2}t^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\frac{df}{dt} = -\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{4\sqrt{\pi D}t^{3/2}} + \frac{x^2e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{8\sqrt{\pi}D^{3/2}t^{5/2}}
$$

Por lo que

$$
f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-x^2}{4Dt}}
$$

es la solución a la ecuación de calor dada la condición inicial $f(x,0) = \delta(x)$.

2. Ejercicio

A través de una simulacón numérica, mostrar la convergencia en distribución de la suma de n = 2, 3, y 1000 variables aleatorias i.i.d., para los procesos estocásticos con la siguiente función de densidad:

1. Uniforme
2. Exponencial
3. Gaussiana
4. Cauchy-Lorentz

2.1. Solución

La simulación se realizo en R el código se anexa al final de este documento, aunque no se fijo una semilla por lo que los resultados aunque no son exactamente reproducibles en este caso deben de dar resultados similares debido a las propiedades de convergencia de las sumas de variables aleatorias haciendo uso del Teorema del Límite Central sin estandarización de la varianza y media.

2.1.1. Uniforme(0,1)

En la figura 2.1 puede observarse que la suma de 2 variables aleatorias uniformes continuas en (0,1) dan como resultado una distribución triangular, y al ir agregando variables aleatorias del mismo tipo a la suma la distribución tiende a converger a una distribución normal con media y varianza cada vez mayor.

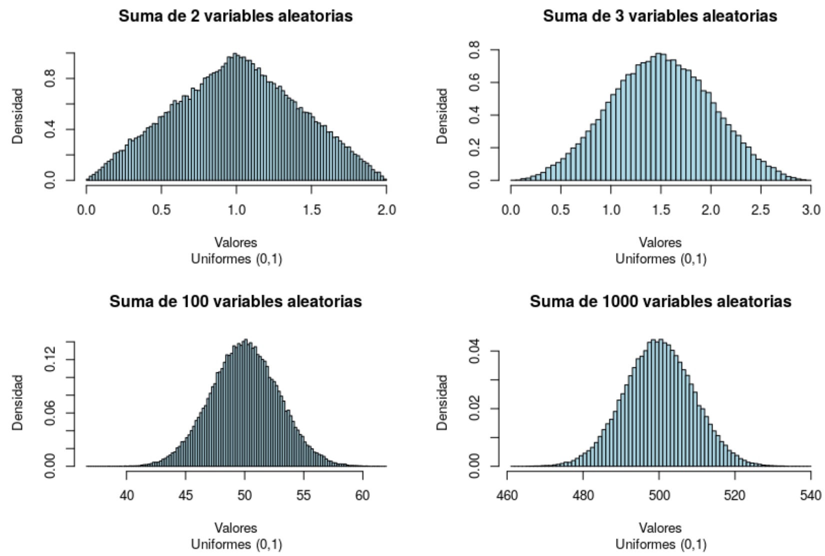

Figura 2.1: Convergencia en distribución de la suma de 2,3,100 y 1000 variables aleatorias uniformes continuas en (0,1)

2.1.2. Exponencial con rate=1

En la figura 2.2 puede observarse que la suma de 2 variables aleatorias con rate=1 es una distribución exponencial, y al ir agregando variables aleatorias del mismo tipo a la suma la distribución tiende a converger a una distribución normal con media y varianza cada vez mayor. Sin embargo, el proceso de normalización procede mucho más lentamente que en el caso anterior.

2.1.3. Gaussianas estandar N(0,1)

En la figura 2.3 puede observarse que la suma de 2 variables aleatorias Gaussianas estandar toman la forma de una distribución Gaussiana N(0, 2^2), y al ir agregando variables aleatorias del mismo tipo a la suma la distribución tiende a converger a una distribución Gaussiana N(0, n^2), con n el número de variables aleatorias sumadas.

2.1.4. Cauchy-Lorentz con $\gamma = 1$ y localización=0

Una curiosidad de esta función de distribuci'on es que no tiene sus momentos definidos por lo que la Ley débil de los grandes números no se cumple y por tanto el Teorema del Límite Central no aplica para este tipo de distribuciones. Particularmente a este tipo de distribuciones se les conoce como estables y tienen la particularidad de que una combinación lineal de variables aleatorias que siguen estas distribuciones es la misma distribución que la del primer sumando. En la figura 2.4 puede observarse este fenómeno.

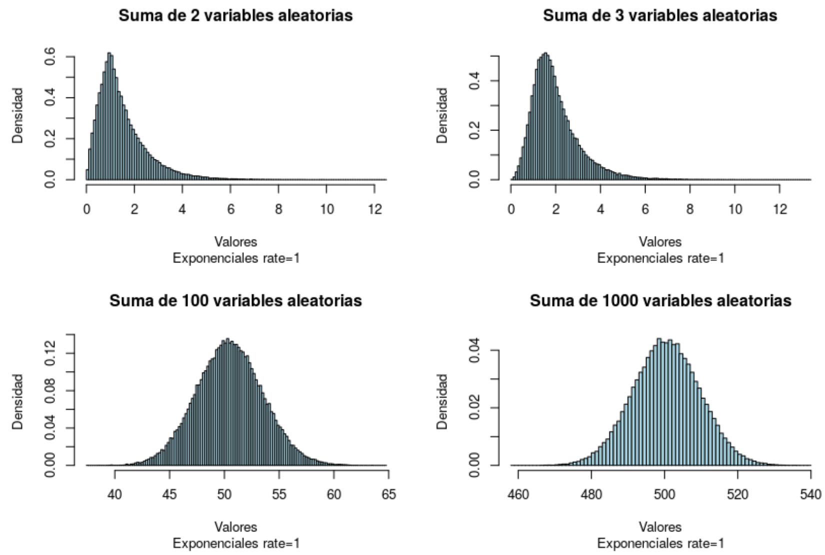

Figura 2.2: Convergencia en distribución de la suma de 2,3,100 y 1000 variables aleatorias exponenciales con rate=1

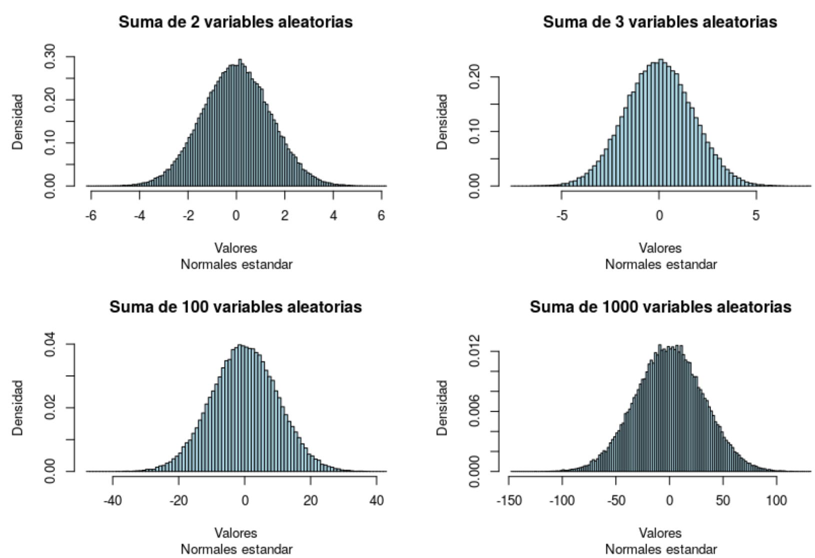

Figura 2.3: Convergencia en distribución de la suma de 2,3,100 y 1000 variables aleatorias Gaussianas estandar N(0,1)

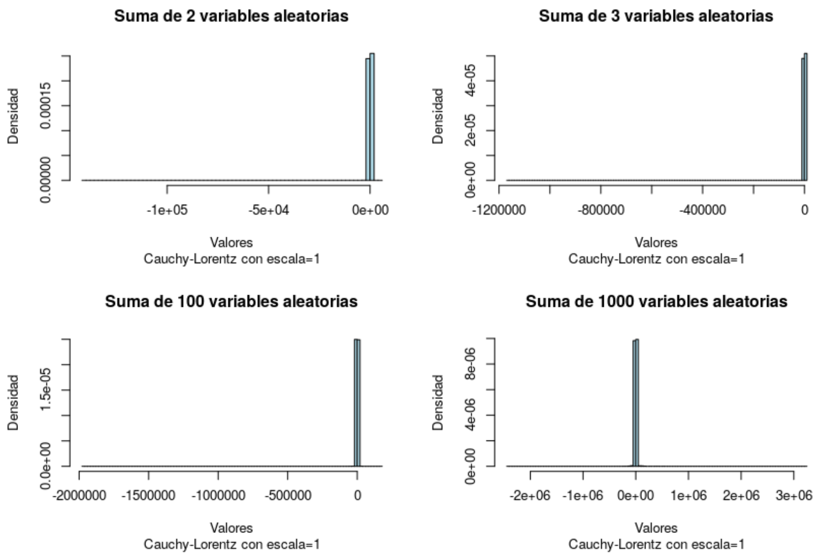

Figura 2.4: Convergencia en distribución de la suma de 2,3,100 y 1000 variables aleatorias de Cauchy-Lorentz con $\gamma = 1$ y localización=0

3. Anexo: código

```
#Limpiamos la memoria
rm(list = ls())

#Generando las distribuciones para variables
#aleatorias uniformes continuas en (0,1)
A1 = runif(100000,0,1)
par(mfrow=c(2,2))
for (i in 1:999){
  A1 = A1+runif(100000,0,1)
  if (i==1 | i==2 | i==99| i==999) {
    texto=paste0("Suma de ", i+1, " variables aleatorias")
    hist(A1, freq=FALSE, breaks=100,main=texto, col="lightblue", sub="Uniformes (0,1)", ylab="
       Densidad",xlab="Valores")
    }
}


#Generando las distribuciones para variables
#aleatorias exponenciales con lambda=1
B1 = rexp(100000, rate = 1)
par(mfrow=c(2,2))
for (i in 1:999){
  B1 = B1+runif(100000,0,1)
  if (i==1 | i==2 | i==99| i==999) {
```

```
    texto=paste0("Suma de ", i+1, " variables aleatorias")
    hist(B1, freq=FALSE, breaks=100,main=texto, col="lightblue", sub="Exponenciales rate=1", ylab=
      "Densidad",xlab="Valores")
  }
}

#Generando las distribuciones para variables
#aleatorias normales estandar
C1 = rnorm(100000)
par(mfrow=c(2,2))
for (i in 1:999){
  C1 = C1+rnorm(100000)
  if (i==1 | i==2 | i==99| i==999) {
    texto=paste0("Suma de ", i+1, " variables aleatorias")
    hist(C1, freq=FALSE, breaks=100,main=texto, col="lightblue", sub="Normales estandar", ylab="
      Densidad",xlab="Valores")
  }
}

#Generando las distribuciones para variables
#aleatorias Cauchy-Lorentz con localizacion=0 y escala 1
D1 = rcauchy(10000,location=0, scale=1)
par(mfrow=c(2,2))
for (i in 1:9999){
  D1 = D1+rcauchy(10000,location=0, scale=1)
  if (i==1 | i==2 | i==99| i==999) {
    texto=paste0("Suma de ", i+1, " variables aleatorias")
    #plot(density(D1))
    hist(D1, freq=FALSE, breaks=100,main=texto, col="lightblue", sub="Cauchy-Lorentz con escala=1
      ", ylab="Densidad",xlab="Valores")
  }
}
```

language=R