Surgimiento de patrones en la biología

Grupo 5: Fraick Reyes, Jorge Sepúlveda, Lucas Villagran

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Abstract

El modelo de Schnakenberg es un sistema de reacción-difusión ampliamente estudiado para comprender la formación de patrones en contextos biológicos. Este modelo, esta dado por el sistema de EDPs:

$$u_t = \nabla \cdot (D_{uu}\nabla u) + \nabla \cdot (D_{uv}\nabla v) + R(a - u + u^2 v)$$
$$v_t = \nabla \cdot (D_{vv}\nabla v) + \nabla \cdot (D_{vu}\nabla u) + R(b - u^2 v)$$

Esta formulación incluye términos de reacción no lineales y procesos de difusión que conducen a la aparición de patrones espaciales complejos, los cuales son frecuentemente observados en sistemas biológicos naturales, como las marcas en la piel de animales y la organización celular.

Introducción

El objetivo de este proyecto es el estudio de formación de patrones mediante un sistema de EDPs conocido como reacción difusión. En la naturaleza el reconocimiento de patrones es vital para la supervivencia, distintas especies tienen distintos patrones que son capaces de reconocer.

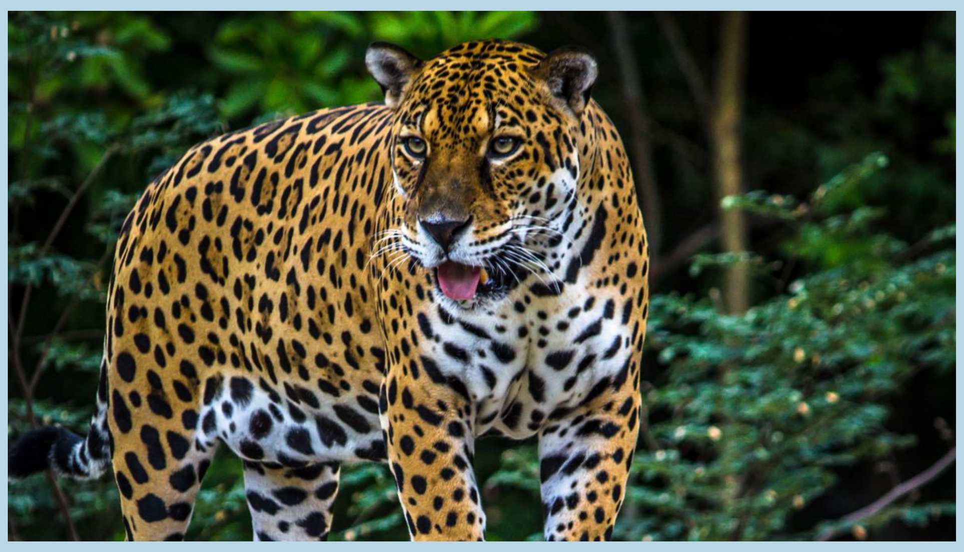

Figura 1: Patrones en un jaguar.

Metodología

Para modelar numéricamente se utilizan Elementos Finitos con la librería FEniCSx de Python y para implementarla se discretizó la derivada temporal, luego se obtuvo la forma variacional del sistema utilizando condiciones de borde Neumann nulas y funciones test w, z para la primera y segunda ecuación respectivamente:
$a_u(u^{n+1}, w) = b_u(w)$, $a_v(v^{n+1}, z) = b_v(z)$
Los métodos numéricos usados son:
· **Iteraciones separadas:** Se resuelven de forma independiente cada ecuación.
· **Elementos mixtos:** Se suman ambas ecuaciones para resolver un sistema más complejo.
En ambos casos se retro-alimentaban las ecuaciones con la iteración anterior en tiempo; Además se consideraban las soluciones en equilibrio con un ruido aleatorio como condiciones iniciales u_0 y v_0.

Referencias

[1] Sepúlveda Soto, F. e. (2023). *generación de patrones en modelos tipo Gierer-Meinhardt mediante inestabilidad de Turing.* [Tesis de magister] Universidad de Chile.

[2] G. Gambino, S. Lupo, M. Sammartino. (1 de noviembre de 2016) *Effects of cross-diffusion on Turing patterns in a reaction-diffusion Schnakenberg model.*

[3] K.S. Al Noufaey. (junio de 2018). *Semi-analytical solutions of the Schnakenberg model of a reaction-diffusion cell with feedback.*

[4] Jones, D. S., Sleeman, B. D. *Differential Equations and Mathematical Biology.*

[5] Beentjes, C. *Pattern formation analysis in the Schnakenberg model.*

[6] Meinhardt, H. *Models of Biological pattern formation.*

Resultados

Se decidió utilizar en profundidad el método de iterar por separado. Esto pues funciona mejor computacionalmente. Esto se evidenció al momento de usar $N = 1000$ iteraciones, donde Elementos mixtos se demora una media de 6 minutos, en contraste al 1min 30s del otro método.

En los siguientes gráficos se uso $D^0 = [[0.5, 2.0], [2.0, 20.0]]$. En la figura 2 y 4 se usaron los siguientes parámetros: $a = 0.07$, $b = 1.4$, $R \in \{10, 80\}$, $\Delta_t = 0.001$, $N = 2000$ iteraciones, condiciones de borde Dirichlet de equilibrio, D constante en la diagonal y lineal en la antidiagonal., donde en el caso de la figura 2 se uso $R = 10$ y en la figura 4, $R = 80$. Por otro lado, para la figura 3, $a = 0.07$, $b = 1.4$, $R = 10$, $\Delta t = 0.001$, $N = 2000$ iteraciones, condiciones de borde Dirichlet estables, D constante en la diagonal y sinusoidal en la antidiagonal. Por ultimo, en la figura 5, $a = 0.07$, $b = 1.4$, $R = 10$, $\Delta_t = 0.001$, $N = 2000$ iteraciones y condiciones de borde Dirichlet estables.

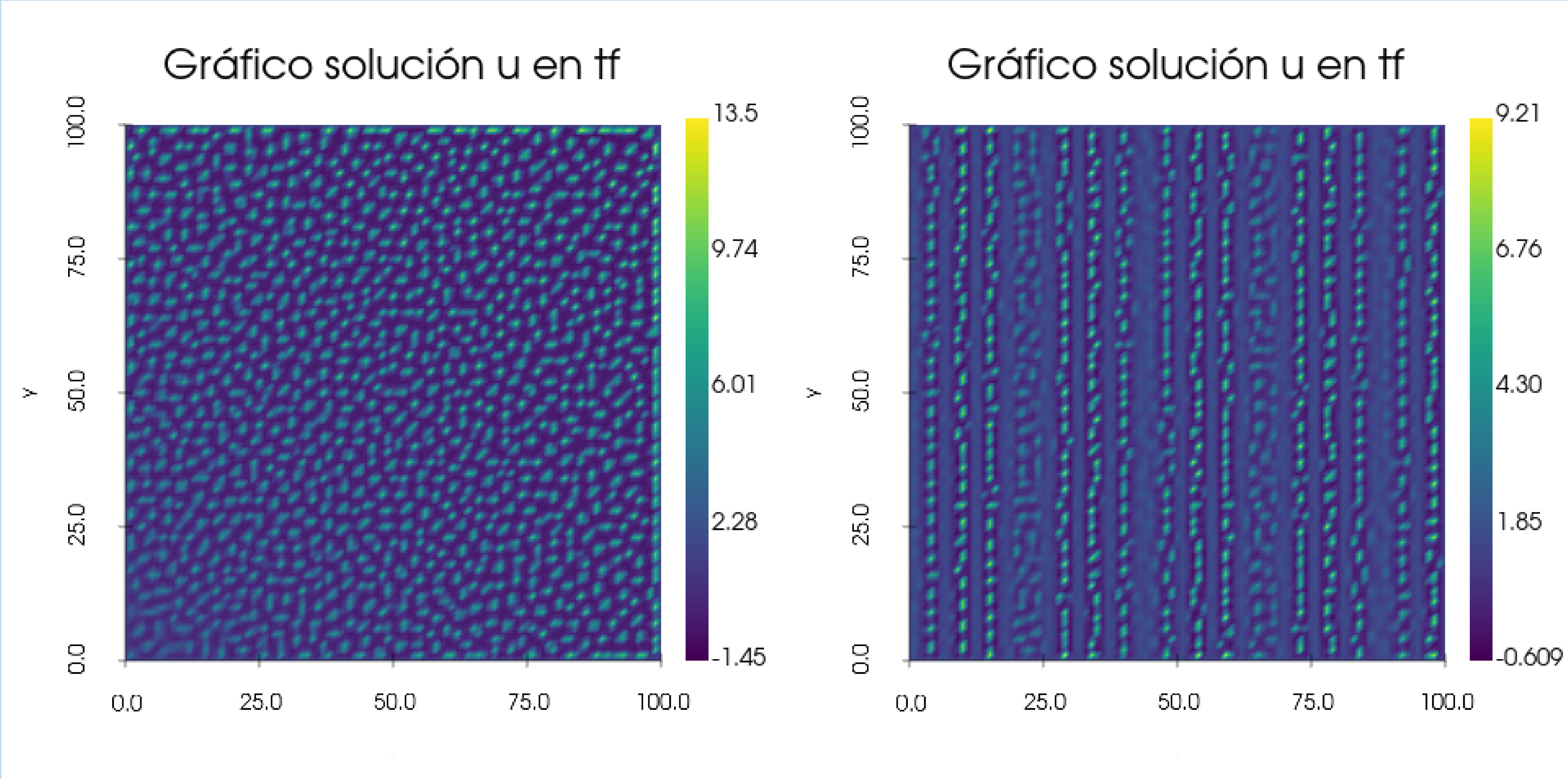

Figura 2 y 3: Formación de patrones.

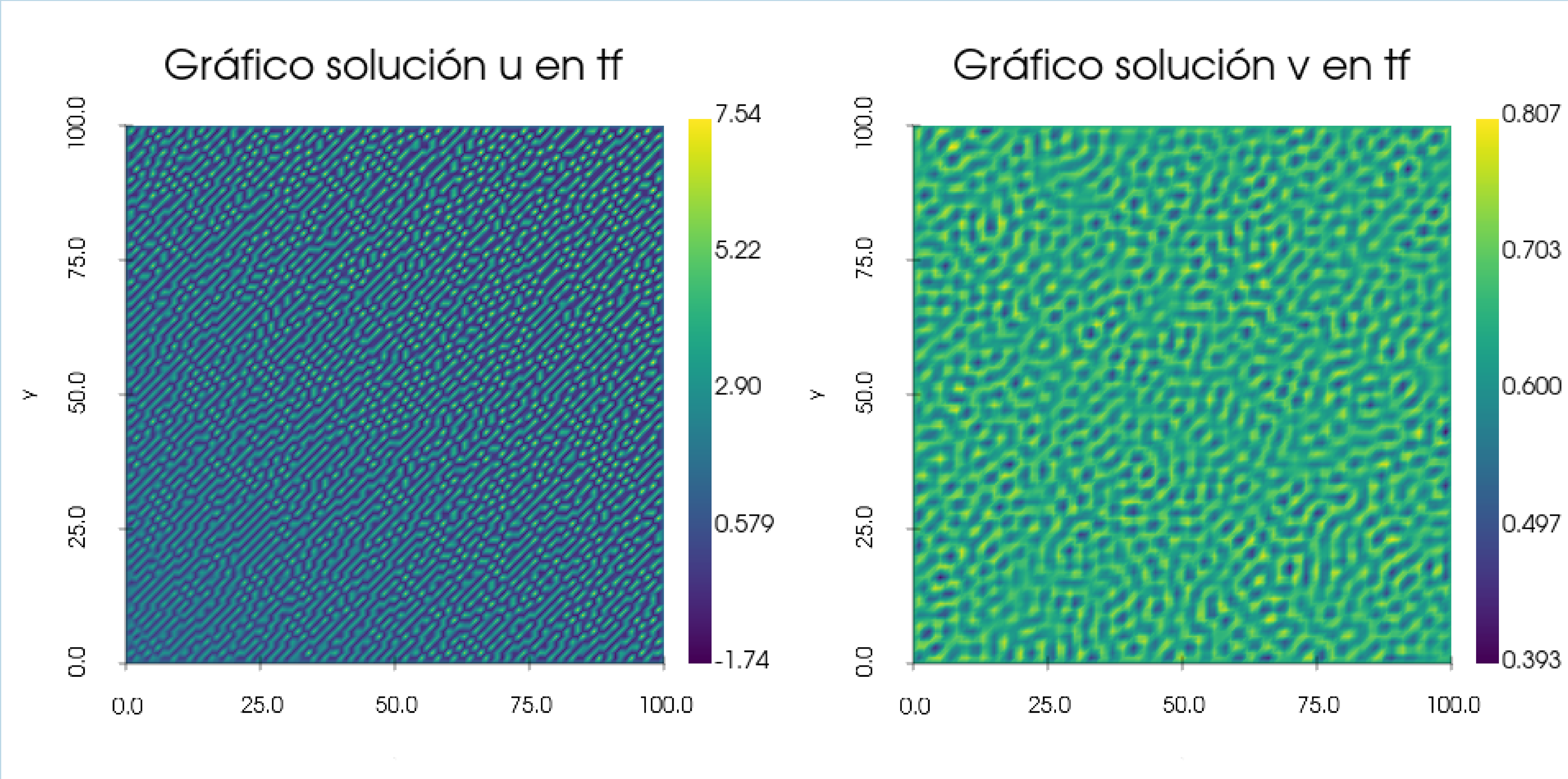

Figura 4 y 5: Formación de patrones.

Discusión y Conclusiones

Se puede apreciar que la ecuación de Schnakenberg posee una gran flexibilidad para la generación de patrones, dado que logro manifestar nubes de puntos, lineas verticales y una combinación de ambos consistiendo de puntos entre lineas de distintas geometrías. Cabe mencionar que gran parte de estos resultan de considerar la matriz D de reacción-difusión como variable en el espacio, y de imponer condiciones de Dirichlet.

Algunas cosas interesantes a mejorar a futuro son: implementar condiciones de borde periódicas para encontrar otros tipos de patrones, probar mas configuraciones de la matriz de difusión D, por ejemplo, esta poseyendo características geométricas relevantes o seleccionar funciones en cada entrada de la matriz que tengan relación entre si, para que el sistema acoplado se enriquezca; y generar patrones en otros tipos de mallado.