

Práctica de Máquinas de Turing

| | |
|---|----|
| Introducción | 2 |
| 0. Palíndromos I | 3 |
| a. MT Determinista de 1 cinta | 3 |
| b. MT Determinista de 2 cintas | 3 |
| c. MT No Determinista de 2 cintas | 3 |
| Guía de Resolución Ejercicio 0. | 4 |
| 1. Suma de enteros en base UNO | 8 |
| a. MT Determinista con una cinta. | 8 |
| b. MT con dos cintas. | 8 |
| c. Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas. | 8 |
| 2. Suma de enteros en base DOS | 9 |
| a. MT Determinista con una cinta. | 9 |
| b. MT con dos cintas. | 9 |
| c. Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas. | 9 |
| 3. Comparativa de los Ejercicios 1 y 2. | 10 |
| a. Determinar la eficiencia de cada algoritmo | 10 |
| b. ¿Por qué la diferencia de complejidades? | 10 |
| c. ¿Cómo se interpretan las diferencias en complejidad y en eficiencia? | 10 |
| 4. Palabras de estructura triplicada | 11 |
| a. Diseñar MT Multicinta Determinista | 11 |
| b. Diseñar MT Multicinta NO Determinista | 11 |
| ENTREGAS | 12 |

Introducción

La práctica propone el uso de la herramienta Jflap para diseñar y evaluar diversas Máquinas de Turing. El objetivo es que asimiléis los conceptos impartidos en Magistral para tener un conocimiento claro sobre qué son y para qué sirven Máquinas de Turing Multicinta y No Deterministas, cómo se pueden aplicar al Análisis de Coste Computacional de Algoritmos, las implicaciones que tiene usar una u otra variante, o el uso de una base u otra relacionado con el tamaño de las instancias y la complejidad que se deriva de ellas, etc.

Leed con detenimiento el enunciado completo antes de comenzar los diseños y evaluaciones.

Responded a las cuestiones planteadas.

Indicaciones

Las máquinas de Turing deben ser diseñadas y validadas con Jflap. Para ello usaremos el modo de *Input → Multiple Run (Trasducer)*. Damos por supuesto que **todas las máquinas empiezan y terminan con el cabezal situado sobre el símbolo significativo más a la izquierda**. De otra forma, la transducción no funcionará correctamente.

En las versiones multicinta consideraremos que la primera es la que debe contener tanto la palabra inicial como los posibles resultados.

Utilizaremos Jflap 7 para el trabajo. En Jflap 6.4 funciona la Traza (Fast Run → Trace) pero no facilita contar transiciones.

Para facilitar el proceso de contar los pasos de la Máquina de Turing podéis usar el simulador <https://turingmachinesimulator.com/>. Podéis usar el script proporcionado en AG para convertir los diseños de jflap. El simulador sólo sirve para máquinas deterministas.

Alternativamente se puede usar algún programa para contar *clicks* de teclado (*autoclickers*), o para programar series de *clicks*.

No se recomienda el uso de Building Block por los problemas que puede causar. Y además dificulta obtener el coste total necesarios para el Análisis de Coste Computacional.

Ejercicios:

0. Palíndromos I

Se plantea uno de los ejemplos vistos en clase magistral

Dado el lenguaje $\Sigma = \{ a, b \}$

Definimos x palíndromo

$x \in \Sigma^*, |x| = 2k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\exists w \in \Sigma^*, |w|=k \mid x = w \cdot w^{-1}$

Ejemplos de palabras:

válidas: $\lambda, aa, bb, aaaa, bbbb, abba, baab, aaaaaa, aabbaa, \dots$

inválidas: $ab, ba, aaa, aba, bbb, abb, \dots, aabb, abab, baba, \dots$

Tareas propuestas:

a. MT Determinista de 1 cinta

- I. Implementad el diseño propuesto (más adelante)
- II. Determinad cuál es el peor caso en cuanto a coste computacional para un tamaño n dado.
- III. Realizad las simulaciones para palabras de diferente tamaño (usando step). Preparad la tabla de tamaños de problema y con los pasos obtenidos.
- IV. Calculad las diferencias finitas
- V. Calculad T(n)
- VI. Determinad una cota superior asintótica, para $n_0 = 10$

b. MT Determinista de 2 cintas

(la misma secuencia que para a)

c. MT No Determinista de 2 cintas

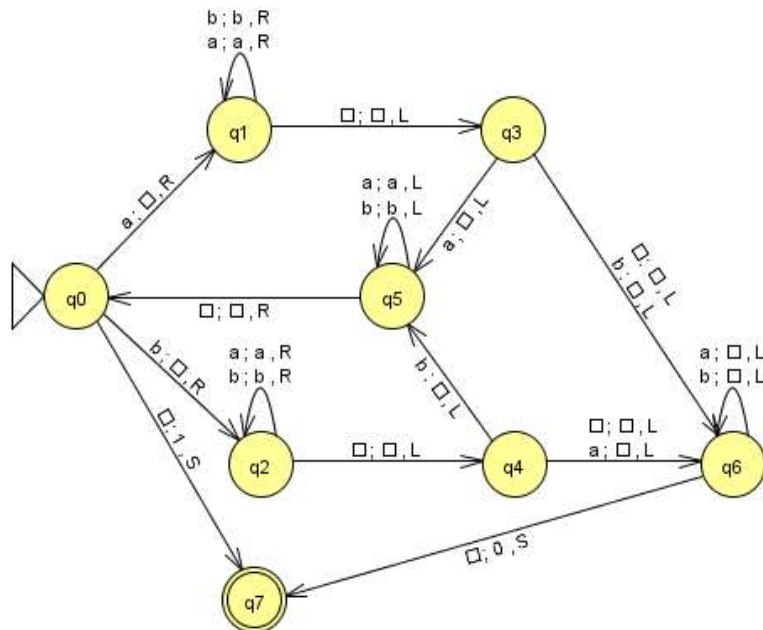
(la misma secuencia que para a)

A continuación, se dan los detalles necesarios para realizar esta parte de la práctica guiada.

Guía de Resolución Ejercicio 0.

1. MT Determinista de 1 cinta

Proponemos el siguiente diseño:



| Input | Output | Result |
|--------|--------|--------|
| a | 0 | Accept |
| aa | 1 | Accept |
| aaa | 0 | Accept |
| aaaa | 1 | Accept |
| aaaaa | 0 | Accept |
| aaaaaa | 1 | Accept |
| ababab | 0 | Accept |
| abbbba | 1 | Accept |

MT1DxPalindromo

Funcionamiento:

Ciclo

Borra una letra en extremo izqda.

Busca la correspondiente a la dcha

La borra

Vuelve atrás a la primera letra por la izqda.

Fin1: Cinta en blanco Deja 1 en la cinta y Para (Acepta)

Fin2: Falla una correspondencia Deja 1 en la cinta y Para ("Falla")

Fin3: Incluye caso de número impar de letras se trata en Fin2

Detalles:

- Palabra de tamaño $n=2k$
- La MT hace k recorridos si n es el número de símbolos inicial
- Recorridos sucesivos se acortan en 2 símbolos
- En caso de fallar la correspondencia
 - ⇒ hay que borrar la cinta (q6) con un recorrido lineal

- **Determinar el peor caso:**
(cuando es palíndromo de tamaño par)

Análisis: I. Fase Empírica:

| Input | #tam | #pasos |
|--------------|------|--------|
| λ | 0 | 1 |
| aa | 2 | 6 |
| abba | 4 | 15 |
| aabaaba | 6 | 28 |
| aaabbaaa | 8 | 45 |
| bbaabbaabb | 10 | 66 |
| bbbbbaabbbbb | 12 | 91 |

| | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|
| N | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| Pasos | 1 | 6 | 15 | 28 | 45 | 66 | 91 |

Análisis: II. Fase Analítica:

Diferencias Finitas:

| | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| N | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| Pasos | 1 | 6 | 15 | 28 | 45 | 66 | 91 |
| Dif 1 | | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 |
| Dif 2 | | | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| Dif 3 | | | | 0 | 0 | 0 | |

Al ser constantes las Diferencias Finitas segundas (y nulas las terceras)

⇒ Podemos aproximar $T(N)$ con polinomio de segundo orden

$$T(N) = aN^2 + bN + c$$

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 6$$

$$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 15$$

$$4a + 2b = 5 \quad (\times 2)$$

$$16a + 4b = 14$$

$$8a = 4 \Rightarrow a = 1/2$$

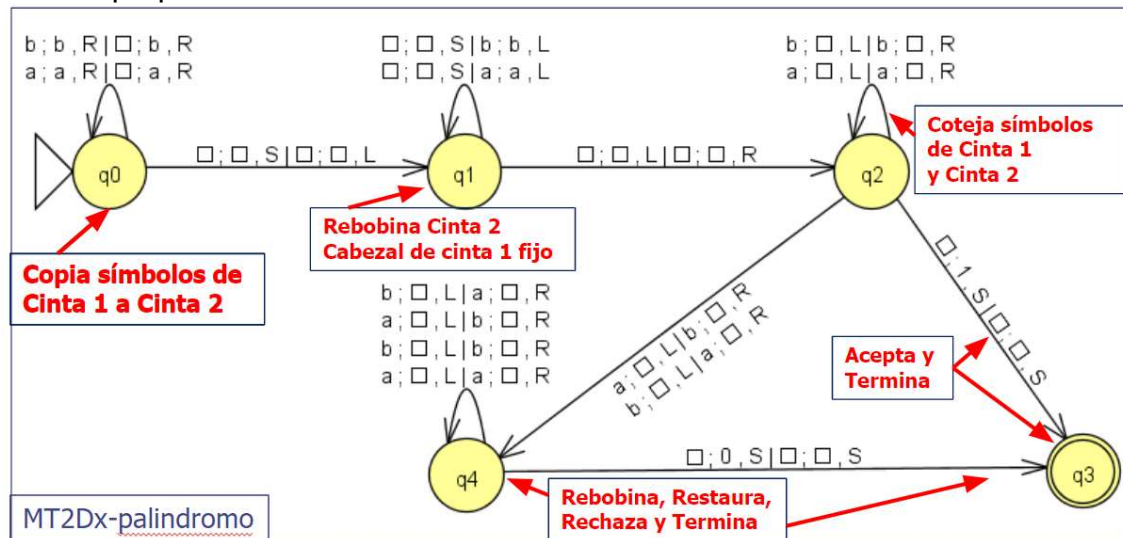
$$4a + 2b = 5$$

$$2 + 2b = 5 \Rightarrow b = 3/2$$

$$\Rightarrow T(N) = N^2/2 + 3N/2 + 1$$

2. MT Determinista de 2 cintas

Diseño propuesto



Coste Computacional:

La MT2D realiza tres recorridos:

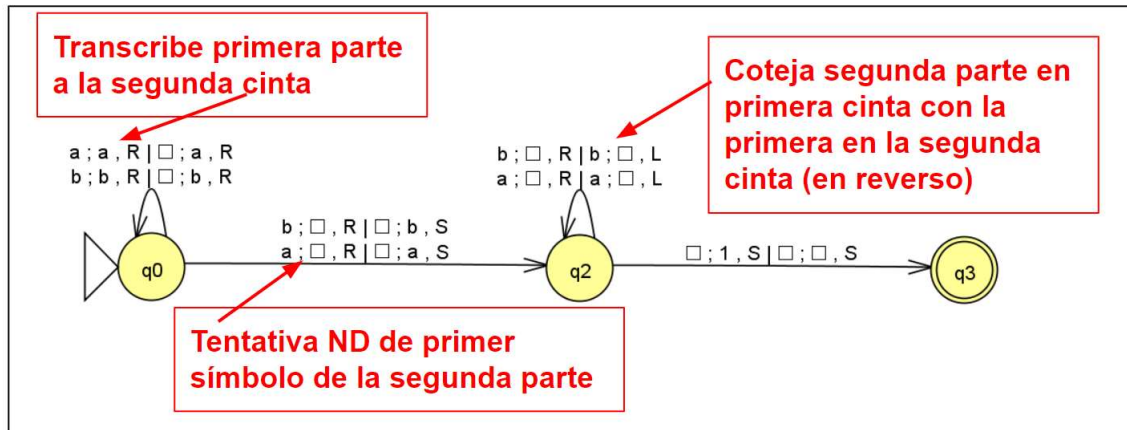
1. Copia de Cinta 1 a Cinta 2 n+1
2. Rebobina Cinta 2 n+1
3. Coteja Cinta 1 con Cinta 2 en reverso n+1

En caso de fallo, termina de borrar ambas

$$\Rightarrow T(n) = 3(n+1)$$

3. MT NO Determinista de 2 cintas

Diseño propuesto



3 estados!!!

Se basa en:

- Transcribir la primera mitad de la palabra de la primera cinta a la segunda.
- A partir de la mitad de la palabra se coteja el resto en la primera cinta con lo transcrito en la segunda (en reverso).
- Problema. A priori la MT NO SABE dónde está la mitad.
- Solución: va bifurcando de forma no determinista en cada símbolo en la transición $q_0 \rightarrow q_1$ suponiendo que el último símbolo procesado es el último de la primera mitad.
- Si w es palíndromo alguno de ellos será el último de la primera mitad
- Si alguna de las instancias de la MT llega al estado final \Rightarrow palabra w es palíndromo
- En este caso, no se incluye la opción de dejar un 0 en la cinta en caso de que no sea palíndromo, porque sólo debe sobrevivir la instancia que reconozca el palíndromo.

Coste computacional:

$$T(n) = n + 1 \quad O(n)$$

+1 debido a transición al estado final.

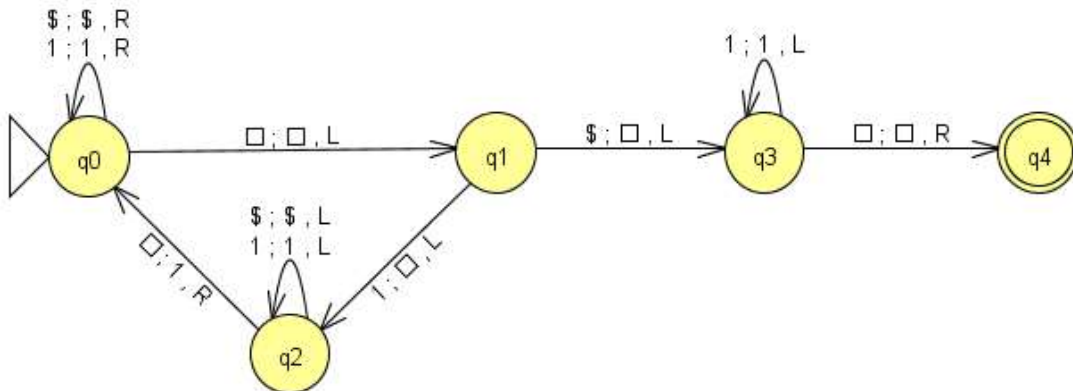
Es lineal, pero obviamente NO DETERMINISTA.

1. Suma de enteros en base UNO

La suma dos números enteros x e y representados en **base UNO**. La cinta inicial contendrá $\#x\$y\#$. Al final sólo debe quedar el valor de x en la cinta ($\#x\#$). Estudiad las mejoras obtenidas con las siguientes opciones:

a. MT Determinista con una cinta.

La Máquina de Turing indicada a continuación es un sumador de dos números en base uno. Los dos números están separados por el símbolo $\$$. La suma se realiza en base a las operaciones succ y pred de la aritmética de Peano. La primera opera por la derecha de y , la segunda por la izquierda de x , sobreescribiendo éste valor.



I. Implementad el diseño propuesto

II. **Determinad cuál es el peor caso en cuanto a coste computacional para un tamaño n dado.**

III. Realizad las simulaciones para palabras de diferente tamaño (usando step). Preparad la tabla de tamaños de problema y con los pasos obtenidos.

IV. Calculad las diferencias finitas

V. Calculad $T(n)$

VI. Determinad una cota superior asintótica, para $n_0 = 10$

b. MT con dos cintas.

Diseñad una versión con 2 cintas. Completad los mismos a.

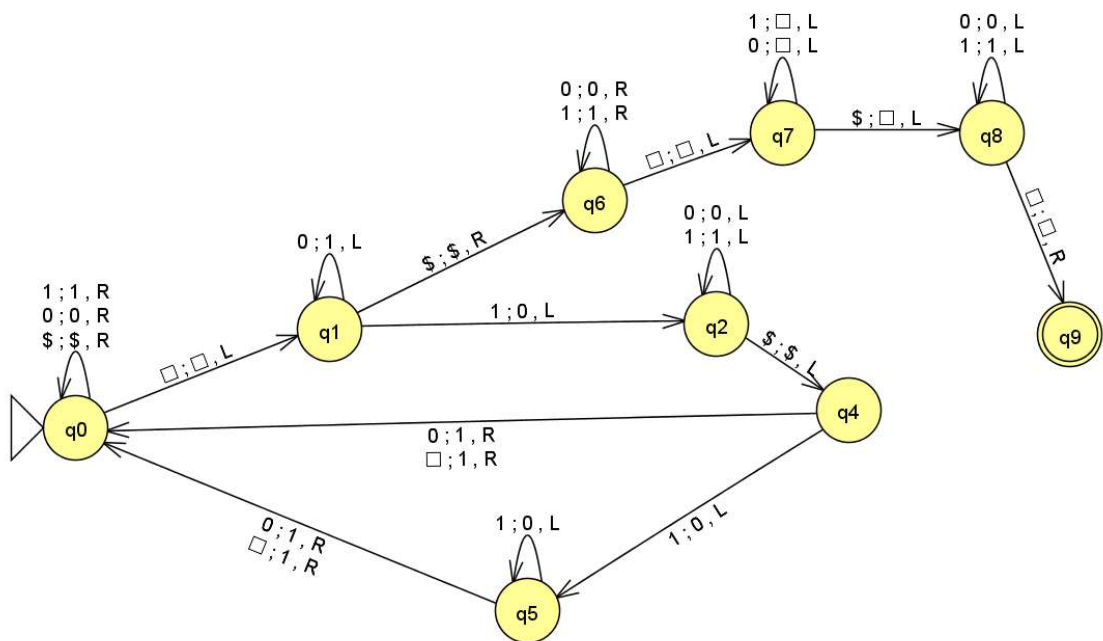
c. Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas.

2. Suma de enteros en base DOS

La suma dos números enteros x e y representados en **base DOS**. La cinta inicial contendrá $\#x\$y\#$. Al final sólo debe quedar el valor de x en la cinta ($\#x\#$). Estudiad las mejoras obtenidas con las siguientes opciones:

a. MT Determinista con una cinta.

La Máquina de Turing indicada a continuación es un sumador de dos números en base dos. Los dos números están separados por el símbolo $\$$. La suma se realiza en base a las operaciones succ y pred de la aritmética de Peano. La primera opera sobre y , la segunda sobre x , dejando en él resultado.



- Implementad el diseño propuesto
- Determinad cuál es el peor caso en cuanto a coste computacional para un tamaño n dado.
- Realizad las simulaciones para palabras de diferente tamaño (usando step). Preparad la tabla de tamaños de problema y con los pasos obtenidos.
- Calculad las diferencias finitas
- Calculad $T(n)$. Incluid el desarrollo
- Determinad una cota superior asintótica, para $n_0 = 10$

b. MT con dos cintas.

(los mismos apartados que para a).

c. Evaluación de la mejora obtenida con la MT de dos cintas.

3. Comparativa de los Ejercicios 1 y 2.

a. Determinar la eficiencia de cada algoritmo

Mediante una tabla para comparar los pasos realizados para las sumas con los mismos valores. Es decir, para comparar resultados hay que evaluar en ambas máquinas la misma suma, por ejemplo $3+5$ traducida a la base correspondiente.

Incluid gráficas superpuestas de los costes para facilitar la comparativa.

La comparativa debe realizarse para máquinas de 1 cinta por un lado, y para las de dos cintas por otro lado.

b. ¿Por qué la diferencia de complejidades?

c. ¿Cómo se interpretan las diferencias en complejidad y en eficiencia?

4. Palabras de estructura triplicada

Dado el alfabeto $\Sigma = \{ a, b \}$

Dada la palabra $x \in \Sigma$

$\exists w \mid x = w \cdot w^{-1} \cdot w$

Ejemplos:

- aaa, abbaab

La cinta inicial contendrá $\#k\$x\#$, siendo k un número en base 1. La cinta final contendrá $\#1\#$ en caso de aceptar.

a. Diseñar MT Multicinta Determinista

que determine si una palabra x contiene una estructura triplicada, La MT debe procesar la entrada y determinar si se cumple el problema de decisión. En tal caso parará en un estado final. En caso contrario puede terminar con fallo.

- I. Implementad el diseño propuesto
- II. **Determinad cuál es el peor caso en cuanto a coste computacional para un tamaño n dado.**
- III. Realizad las simulaciones para palabras de diferente tamaño (usando step). Preparad la tabla de tamaños de problema y con los pasos obtenidos.
- IV. Calculad las diferencias finitas
- V. Calculad $T(n)$
- VI. Determinad una cota superior asintótica, para $n_0 = 10$
- VII. Representad el comportamiento del coste mediante gráficas en las que varía el tipo de escala, etc.
- VIII. Los cálculos deben estar detallados adecuadamente.

b. Diseñar MT Multicinta NO Determinista

Es importante que sólo llegue a estado final aceptando cuando determine que efectivamente la palabra tiene estructura triplicada.

No se recomienda diseñar la MT Determinista de 1 cinta.

Evitad diseñar máquinas de más de 15 estados. No suelen aportar resultados apropiados, salvo que se trate de varias máquinas encadenadas.

ENTREGAS

Fechas de Entrega

Dispondréis de varias fechas de entrega:

- Entrega 1, viernes 1-04-2022, ejercicios 0 y 1.
- Entrega 2, viernes 8-04-2022, ejercicios 0 - 3.
- Entrega **Final**, martes 19-04-2022

Entrega FINAL:

Debéis entregar un **archivo zip** de nombre **MT_grupo_Apellido1_Apellido2_Apellido3.zip**, donde

- **ApellidoK s el primer apellido** de cada alumno, **puestos en orden alfabético**.
- **grupo es el grupo de trabajo, no el grupo reducido**.

Con el contenido:

- Un documento que recoja
 - los diseños y análisis de todos los apartados indicados en la memoria.
 - En anexos se podrá incluir el trabajo no solicitado explícitamente en este enunciado.

Utilizad siempre **imágenes en formato PNG**.

Nombre: **Memoria_MT_grupo_Apellido1_Apellido2_Apellido3.pdf**

- Los ficheros de todos los diseños, usando una nomenclatura sistemática (se propone seguir la numeración de apartados de este enunciado).
 - Las máquinas diseñadas, en formato jff.
 - Las imágenes de todas las máquinas, siempre **en formato PNG**.

Recomendaciones para la memoria:

- Incluid los diseños, tablas de pasos y de diferencias, desarrollos de las ecuaciones analíticas, y gráficas. Son necesarias para demostrar vuestros razonamientos respecto a lo que obtenéis como resultado.
 - Revisad las escalas de vuestras gráficas y que son coherentes.
 - Poner el polinomio directamente, sin mostrar cómo se obtiene no aporta mucho. Puede ser verdad o no. Es tarea vuestra mostrar cómo se llega a él.
- Los resultados obtenidos mediante regresiones automáticas no sirven en nuestro contexto. En nuestro caso necesitamos polinomios y exponenciales con bases y exponentes enteros.
- Si habéis hecho algún análisis alternativo para un ejercicio, incluídlo en el apartado correspondiente.
- Si habéis analizado una MT diferente a la pedida, incluídla en Anexos.