



**Contenido**

[1.- INTRODUCCIÓN](#_heading=h.30j0zll) **2**

[2.- PALÍNDROMOS](#_heading=h.1fob9te) **3**

[2.1.- MT Determinista de 1 cinta](#_heading=h.3dy6vkm) 3

[2.2.- MT Determinista de 2 cintas](#_heading=h.vlmfylq3ci3x) 5

[2.3.- MT No Determinista de 2 cintas](#_heading=h.c0gyll957oyj) 7

[3.- SUMA DE ENTEROS EN BASE UNO](#_heading=h.q5s3f9pbcuxr) 8

[3.1.- MT Determinista con 1 cinta](#_heading=h.jxxq06ix2a51) 9

[3.2.- MT con 2 cintas](#_heading=h.fu2q6rlw400h) 10

[3.3.- Evaluación de la mejora obtenida con la MT de 2 cintas](#_heading=h.5ux7s3ua5k4c) 12

# 1.- INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta práctica es comprender qué son y para que se utilizan las Máquinas de Turing (MT) Multicinta y No Deterministas, cómo se pueden aplicar al análisis de coste computacional de algoritmos, las implicaciones que tiene usar una u otra variante o el uso de una base u otra relacionado con el tamaño de las instancias y la complejidad que se deriva de ellas.

Para ello, se hará uso del programa Jflap utilizando el modo de *Input* -> *Multiple Run (Trasducer)*. Damos por supuesto que todas las MTs empiezan y terminan con el cabezal situado sobre el símbolo significativo situado más a la izquierda. En las versiones multicinta consideraremos que la primera es la que debe contener tanto la palabra inicial como los posibles resultados.

En cuanto al presente documento, en primer lugar encontramos una introducción a las MTs y a la práctica. A continuación, una sección en la que se resolverá el problema de definir un palíndromo utilizando una MT Determinista de 1 cinta, otra de 2, y una No Determinista de 2 cintas, determinando el peor caso en cuanto a coste computacional, calculando las diferencias finitas, calculando *T(n)* y determinando una cota superior asintótica. En la siguiente sección, tendremos que usar una MT de 1 cinta y otra de 2 y compararlas sobre el problema de suma de enteros en base uno, y en la siguiente, lo mismo pero con suma en base dos. La penúltima sección se trata de una comparativa entre la suma en base uno y en base dos determinando la eficiencia de cada algoritmo, por qué se diferencian las complejidades y cómo se interpretan. Y finalmente, en la última sección se diseñará una MT Determinista y otra No Determinista para identificar palabras de estructura triplicada.

Cabe destacar que para contar los pasos de las MTs deterministas se ha empleado el script proporcionado en Aula Global junto a la web de simulación de MTs. Para los gráficos en los que se representan funciones se ha utilizado la web Symbolab. Por otro lado, para el cálculo de las diferencias finitas, con el fin de agilizar los cálculos, excel ha sido nuestra herramienta elegida.

# 2.- PALÍNDROMOS

En esta primera sección, el objetivo es identificar un palíndromo (palabra o expresión que es igual si se lee de derecha a izquierda o al revés) utilizando distintas Máquinas de Turing y comparando sus complejidades.

En primer lugar, el peor caso en cuanto a coste computacional es el mismo para las distintas MTs utilizadas, y se trata de cuando es un palíndromo de tamaño par. Simplemente se debe a que la palabra para un tamaño n siempre va a ser igual a 2k, siendo k el número de recorridos.

En segundo lugar, determinamos las simulaciones especificando las palabras utilizadas, el tamaño de la palabra (n) y el número de pasos realizados empíricamente.

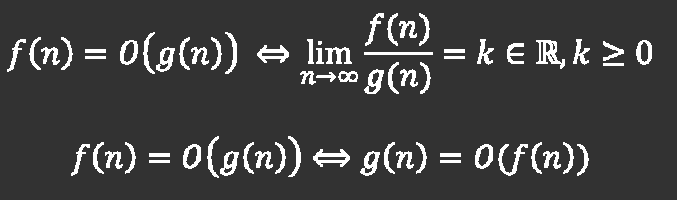
A continuación, realizamos una fase analítica calculando las diferencias finitas, así como el coste computacional T(n).

Finalmente, determinamos la cota superior asintótica para n0 = 10. Sabiendo lo siguiente:

Para una función de coste computacional dada f(n) existirá otra g(n) perteneciente a O(f(n)) y un coeficiente c tal que c\*g(n) > f(n) y que esa condición se asegura a partir de un valor n > =n\_0.

Para intentar obtener la cota superior más ajustada entre todas las posibles se iguala c\*g(n) = f(n) y se despeja c para n=n\_0. El coeficiente c depende del valor n\_0 y el ajuste es mayor cuanto mayor sea el valor de n\_0.

También se tiene en cuenta lo siguiente:



Una vez obtenida la cota superior asintótica se muestra una gráfica con la misma y f(n).

## 2.1.- MT Determinista de 1 cinta

**Análisis: I - Fase Empírica:**

| **Input** | **Tamaño** | **Pasos** |
| --- | --- | --- |
| λ | 0 | 1 |
| aa | 2 | 6 |
| abba | 4 | 15 |
| abaaba | 6 | 28 |
| aaabbaaa | 8 | 45 |
| bbaabbaabb | 10 | 66 |
| bbbbbaabbbbb | 12 | 91 |

**Análisis: II - Fase Analítica:**

**Diferencias finitas y Cálculo de T(n):**

| **N** | **0** | **2** | **4** | **6** | **8** | **10** | **12** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Pasos** | **1** | **6** | **15** | **28** | **45** | **66** | **91** |
| **Dif 1** |  | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 |
| **Dif 2** |  |  | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| **Dif 3** |  |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 |

Al ser constantes las diferencias finitas segundas (y nulas las terceras) ⇨ Podemos aproximar T(N) con polinomio de segundo orden.

* T(N) = aN^2 + bN + c

a\*0^2 + b\*0 + c = 1 ⇨ c = 1

a\*2^2 + b\*2 + c = 6

a\*4^2 + b\*4 + c = 15

8a = 4 ⇨ a = 1/2

4a + 2b = 5 ⇨ a = 3/2

* T(N) = (N^2)/2 + 3N/2 + 1

Se trata de una complejidad cuadrática O(N^2).

**Cota superior asintótica:**Utilizando las fórmulas expuestas al inicio del apartado y dado n0 = 10:

* g(n) = n^2
* f(n) = T(n) = N^2/2 + 3N/2 + 1
* n = n0 = 10
* c\*n0 = n0^2/2 + 3n0/2 + 1

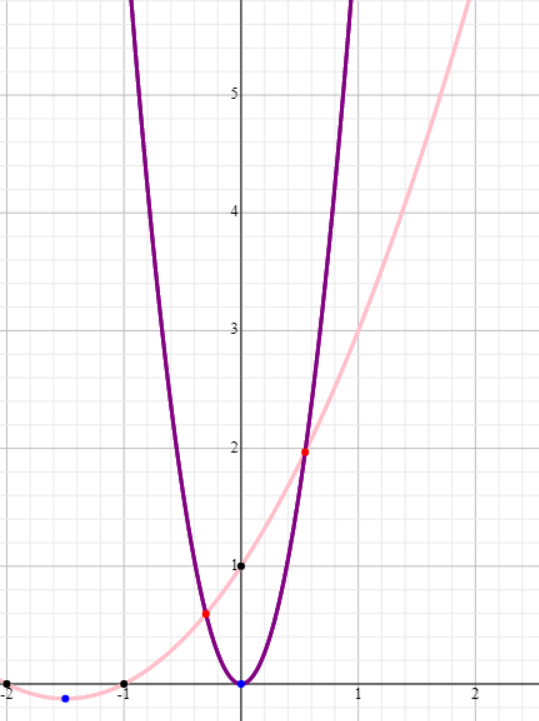
c \* 10 = (10^2)/2 + (3\*10)/2 + 1

c \* 10 = 66

* c = 66 / 10

Por lo que la cota superior asintótica es (66/10)\*n^2

f(n) = N^2/2 + 3N/2 + 1 c(n) = (66/10)\*n^2



La función es c(n) cota superior asintótica de f(n) a partir del punto x = 0.55 en y = 1.97, cuando n tiende a infinito.

## 2.2.- MT Determinista de 2 cintas

**Análisis: I - Fase Empírica:**

| **Input** | **Tamaño** | **Pasos** |
| --- | --- | --- |
| λ | 0 | 3 |
| aa | 2 | 9 |
| abba | 4 | 15 |
| abaaba | 6 | 21 |
| aaabbaaa | 8 | 27 |
| bbaabbaabb | 10 | 33 |
| bbbbbaabbbbb | 12 | 39 |

**Análisis: II - Fase Analítica:**

**Diferencias finitas y Cálculo de T(n):**

| **N** | **0** | **2** | **4** | **6** | **8** | **10** | **12** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Pasos** | **3** | **9** | **15** | **21** | **27** | **33** | **39** |
| **Dif 1** |  | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| **Dif 2** |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Al ser constantes las diferencias finitas primeras (y nulas las segundas) ⇨ Podemos aproximar T(N) con polinomio de primer orden.

* T(N) = aN + b

a\*0 + b = 3 ⇨ b = 3

a\*2 + 3 = 9 ⇨ a = 3

* T(N) = 3N + 3

La MT realiza tres recorridos: primero copia de la C1 a la C2, luego rebobina la C2 hasta el cabezal izquierdo, y luego va comparando ambas cintas en reverso. Por lo tanto, se podría calcular también como que cada recorrido es de complejidad n + 1 (recorre las n posiciones y cambia de estado), y como son 3:

* T(n) = 3(N+1) = 3N + 3

Se trata de una complejidad lineal O(n).

**Cota superior asintótica:**

Utilizando las fórmulas expuestas al inicio del apartado y dado n0 = 10:

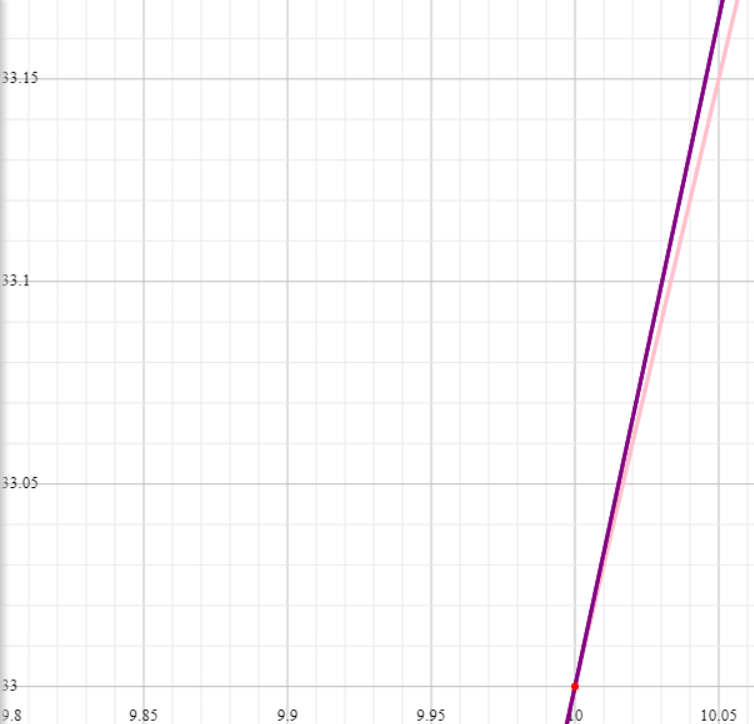
* g(n) = n
* f(n) = T(n) = 3n+ 3
* n = n0 = 10
* c\*n0 = 3n0+ 3

c \* 10 = 3\*10 + 3

* c = 33/10

Por lo que la cota superior asintótica es c(n) = (33/10)\*n

f(n) = 3N + 3 c(n) = (33/10)\*n



La función es c(n) cota superior asintótica de f(n) a partir del punto x = 10 en y = 33, cuando n tiende a infinito.

## 2.3.- MT No Determinista de 2 cintas

**Análisis: I - Fase Empírica:**

| **Input** | **Tamaño** | **Pasos** |
| --- | --- | --- |
| λ | 0 | 1 |
| aa | 2 | 3 |
| abba | 4 | 5 |
| abaaba | 6 | 7 |
| aaabbaaa | 8 | 9 |
| bbaabbaabb | 10 | 11 |
| bbbbbaabbbbb | 12 | 13 |

**Análisis: II - Fase Analítica:**

**Diferencias finitas y Cálculo de T(n):**

| **N** | **0** | **2** | **4** | **6** | **8** | **10** | **12** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Pasos** | **1** | **3** | **5** | **7** | **9** | **11** | **13** |
| **Dif 1** |  | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **Dif 2** |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Al ser constantes las diferencias finitas primeras (y nulas las segundas) ⇨ Podemos aproximar T(N) con polinomio de primer orden.

* T(N) = aN + b

a\*0 + b = 1 ⇨ b = 1

a\*2 + 1 = 3 ⇨ a = 1

* T(N) = N + 1;

Se trata de una complejidad lineal, O(n). El +1 es debido a la transición al estado final.

**Cota superior asintótica:**

Utilizando las fórmulas expuestas al inicio del apartado y dado n0 = 10:

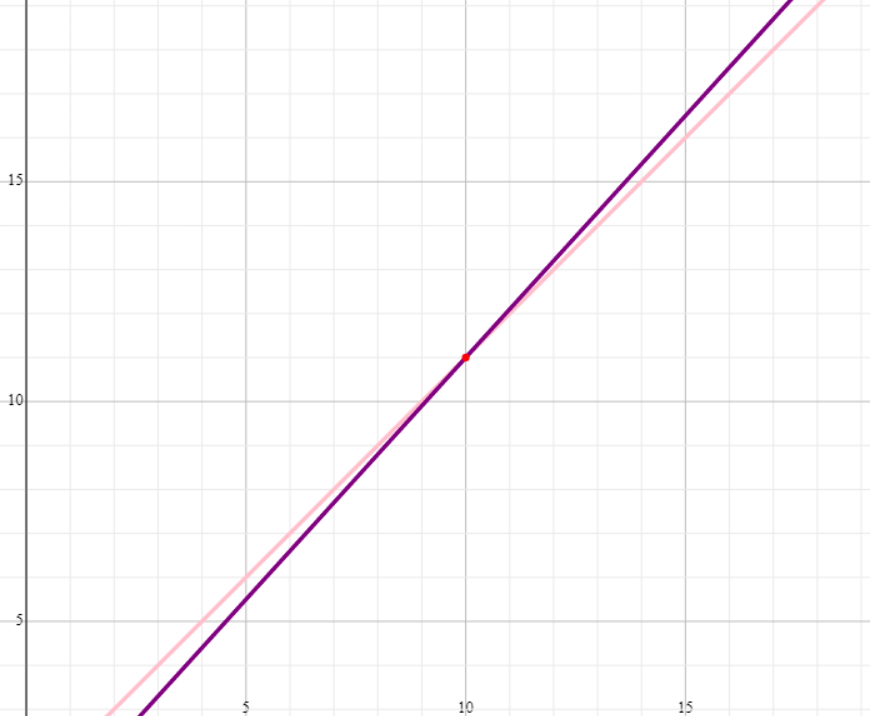
* g(n) = n
* f(n) = T(n) = n+ 1
* n = n0 = 10
* c\*n0 = n0+ 1

c \* 10 = 10 + 1

* c = 11/10

Por lo que la cota superior asintótica es c(n) = (11/10)\*n.

f(n) = N +1 c(n) = (11/10)\*n



La función es c(n) cota superior asintótica de f(n) a partir del punto x = 10 en y = 11, cuando n tiende a infinito.

# 3.- SUMA DE ENTEROS EN BASE UNO

En este apartado contamos con máquinas de Turing que realizan la suma de dos números separados por el símbolo $ en base 1.

El peor caso para este sumador es que el número de la derecha sea el más grande de los dos sumandos, pues la máquina funciona pasando los unos de la derecha a la izquierda. El resultado de sumar 11 a 1 es el mismo que el de sumar 1 a 11, sin embargo el segundo tarda más. Debido a esto en la columna tamaño solo se contará el número de unos a la derecha, pues para las pruebas a la izquierda solo habrá un 1.

Por este motivo en este caso en la columna tamaño solo se cuenta el del número de la derecha que es el que va variando en cada prueba y el que añade mayor complejidad.

## 3.1.- MT Determinista con 1 cinta

**Análisis: I - Fase Empírica:**

| **Input** | **Tamaño** | **Pasos** |
| --- | --- | --- |
| 1$1 | 1 | 15 |
| 1$11 | 2 | 28 |
| 1$111 | 3 | 45 |
| 1$1111 | 4 | 66 |
| 1$11111 | 5 | 91 |
| 1$111111 | 6 | 120 |
| 1$1111111 | 7 | 153 |

**Análisis: II - Fase Analítica:**

**Diferencias finitas y Cálculo de T(n):**

| **N** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Pasos** | **15** | **28** | **45** | **66** | **91** | **120** | **153** |
| **Dif 1** |  | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 |
| **Dif 2** |  |  | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| **Dif 3** |  |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 |

Al ser constantes las diferencias finitas segundas (y nulas las terceras) ⇨ Podemos aproximar T(N) con polinomio de segundo orden.

* T(N) = aN^2 + bN + c

a\*1^2 + b\*1 + c = 15

a\*2^2 + b\*2 + c = 28

a\*3^2 + b\*3 + c = 45

a= 4/3; b = 31/3; c = 2

* T(N) = (4N^2)/3+ 31N/3 + 2

Se trata de una complejidad cuadrática O(N^2).

**Cota superior asintótica:**

Utilizando las fórmulas expuestas al inicio del apartado anterior y dado n0 = 10:

* g(n) = n^2
* f(n) = T(n) = (4N^2)/3+ 31N/3 + 2
* n = n0 = 10
* c\*n0 = (4n0^2)/3+ 31n0/3 + 2

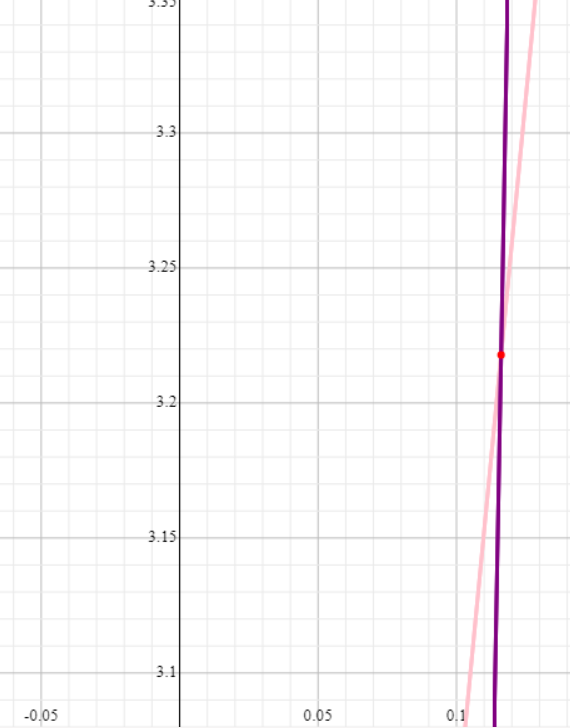
c \* 10 = (4\*10^2)/3+ 31\*10/3 + 2

c \* 10 = 400/3 + 310/3 + 2

* c = 716/3

Por lo que la cota superior asintótica es c(n) = (716/3)\*n^2.

f(n) = (4N^2)/3+ 31N/3 + 2 c(n) = (716/3)\*n^2



La función es c(n) cota superior asintótica de f(n) a partir del punto x = 0.12 en y = 3.22, cuando n tiende a infinito.

## 3.2.- MT con 2 cintas

**Análisis: I - Fase Empírica:**

| **Input** | **Tamaño** | **Pasos** |
| --- | --- | --- |
| 1$1 | 1 | 9 |
| 1$11 | 2 | 12 |
| 1$111 | 3 | 15 |
| 1$1111 | 4 | 18 |
| 1$11111 | 5 | 21 |
| 1$111111 | 6 | 24 |
| 1$1111111 | 7 | 27 |

**Análisis: II - Fase Analítica:**

**Diferencias finitas y Cálculo de T(n):**

| **N** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Pasos** | **9** | **12** | **15** | **18** | **21** | **24** | **27** |
| **Dif 1** |  | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **Dif 2** |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Al ser constantes las diferencias finitas primeras (y nulas las segundas) ⇨ Podemos aproximar T(N) con polinomio de primer orden.

* T(N) = aN + b

a\*1 + b = 9

a\*2 + b = 12

a = 3 ; b = 6;

* T(N) = 3N + 6;

Se trata de una complejidad lineal, O(n).

**Cota superior asintótica:**

Utilizando las fórmulas expuestas al inicio del apartado anterior y dado n0 = 10:

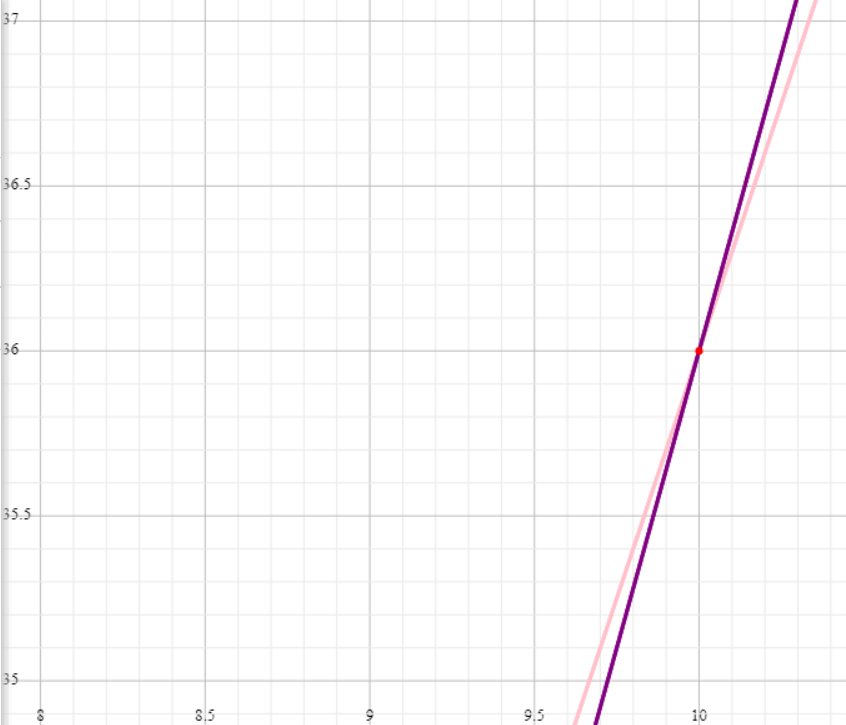
* g(n) = n
* f(n) = T(n) = 3n+ 6
* n = n0 = 10
* c\*n0 = 3n0+ 6

c \* 10 = 30 + 6

* c = 36/10

Por lo que la cota superior asintótica es c(n) = (36/10)\*n.

f(n) = 3n + 6 c(n) = (36/10)\*n



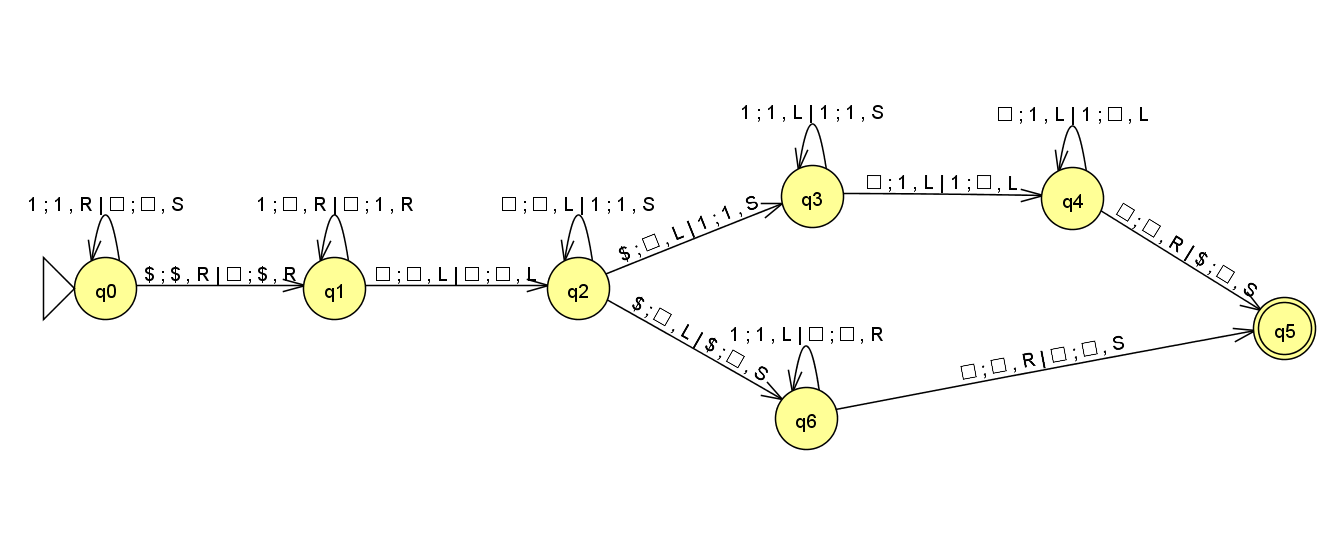
La función es c(n) cota superior asintótica de f(n) a partir del punto x = 10 en y = 36, cuando n tiende a infinito.

## 3.3.- Evaluación de la mejora obtenida con la MT de 2 cintas

En primer lugar, vamos a explicar el funcionamiento de la MT de 2 cintas que hemos diseñado. Consta de seis estados, y su funcionamiento consiste en:

* Primero recorrer toda la cinta y trasladar el segundo sumando y el dólar a la segunda cinta.
* A continuación, retroceder en la primera cinta hasta el símbolo del dólar y eliminarlo.
* Lo siguiente es llegar hasta el final por la izquierda de la primera cinta, es decir, retroceder todos los unos del primer sumando.
* Ahora trasladamos los 1 de la segunda cinta a la primera.
* Por último, eliminamos el símbolo del dólar de la segunda cinta.

A continuación, se expone una gráfica de la máquina descrita.



En el análisis empírico, podemos observar que hay una clara mejoría respecto a la MT de 1 cinta, ya que los pasos ya empiezan a ser mucho más pequeños desde el primer tamaño elegido. Si continuamos con el estudio analítico, vemos que definitivamente va a tener una complejidad más baja. Por lo tanto, no nos sorprendemos cuando vemos que la MT de una cinta tiene una complejidad cuadrática, mientras que la de dos cintas tiene una complejidad lineal. Esto tiene sentido, ya que la primera realiza muchos más pasos porque tiene que recorrer toda la cinta hasta el final, trasladar el último uno de la derecha hasta la izquierda del todo y así sucesivamente hasta borrar el dólar.