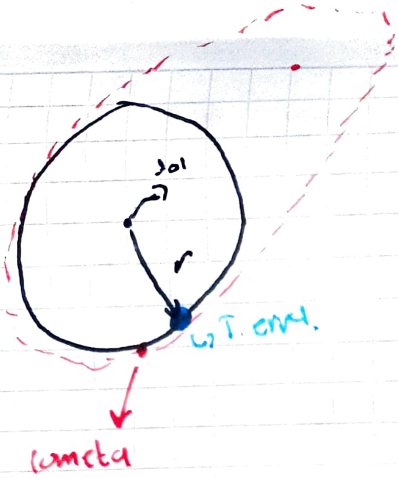
1)



Lagrangiano coordenadas polares.

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$V = -\frac{GMm}{r}$$ $G, M =$ ctes gravitatorias

$m =$ masa cometa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{GMm}{r}$$

La coordenada φ no aparece explícitamente en $\mathcal{L}$; el momento angular del cometa es constante.

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

Como el momento angular es cte:

$$\cancel{m} r^2 \dot{\varphi} = \cancel{m} h$$

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$$, $h =$ momento angular por unidad de masa.

Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \dfrac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - \dfrac{GMm}{r^2} \end{array}\right\} \quad \cancel{m}\ddot{r} = \cancel{m} r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM\cancel{m}}{r^2}$$

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$$

$$\ddot{r} = r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 - \frac{GM}{r^2}$$

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

Órbita parabólica.

$$r(\varphi) = \frac{h^2}{GM(1+\cos\varphi_1)}$$

Ecuación De Barker.

$$t - t_p = \frac{h^3}{(GM)^2}\left(\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\varphi}{2}\right)$$

t_p es el tiempo en el Perihelio. θ = Anomalía verdadera.

cuando $r = R$ es cuando el cometa cruza la órbita terrestre.

$$R = \frac{h^2}{GM(1+\cos\theta_1)}$$, despejando φ: $\cos\theta_1 = \frac{h^2}{GMR} - 1$

$$\varphi_1 = \text{ArcCos}\left(\frac{h^2}{GMR} - 1\right)$$

El tiempo total que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre es dos veces lo que tarda de ir de $\varphi = \theta_1$ a $\theta = \theta_1$,

$$\Delta t = 2(t(\varphi_1) - t_p)$$

$$\Delta t = \frac{2h^3}{(GM)^2}\left(\tan\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

$$\theta_1 = \text{ArcCos}\left(\frac{h^2}{GMR} - 1\right)$$

Mecanica Clasica Problemas 13/09

2) Una particula se mueve en el potencial

$V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$

Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$

- Se define una energia potencial efectiva

$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

- La energia total sera

$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = cte$

- Los puntos de retorno estan dados por la condicion $\dot{r} = 0$

$E = V_{ef}(r) \Rightarrow \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$

$\Rightarrow E r^2 - V(r) r^2 - \frac{L^2}{2\mu} = 0$

$\Rightarrow E r^2 - a r + b - \frac{L^2}{2\mu} = 0$

Tomando el límite $r \to 0$

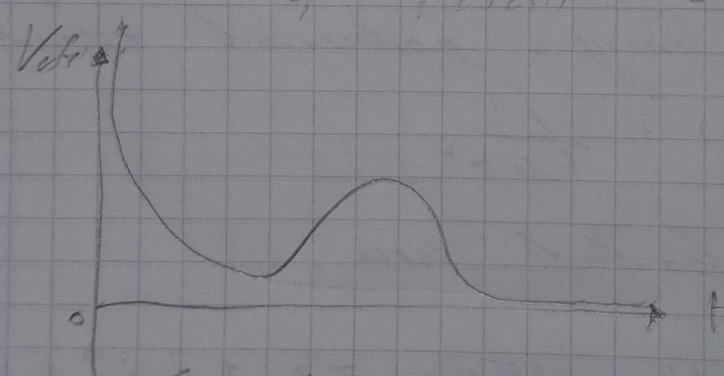
$$\lim_{r \to 0} \left[V(r)\, r^2 \right] < -\frac{L^2}{2\mu}$$

$$V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

$$V_{efec}(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

→ Para las gráficas hay varios casos

Cuando $r \to 0$ el $V_{efec}(r) \to \infty$;



Cuando $r \to \infty$ el $V_{efec} \to 0$

3) Potencial: $V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a}$

a)

Potencial efectivo: $V_{ef}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$ → momento angular, → masa.

La condición de equilibrio es cuando $\frac{d}{dr} V_{ef} = 0$.

$$\frac{d}{dr}\left(-\frac{k}{r} e^{-r/a}\right) = \frac{k}{r^2} e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = \frac{-L^2}{mr^3}$$

$$\frac{k}{r^2} e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right) = \frac{L^2}{mr^3}$$

La condición de estabilidad la da la segunda derivada.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{k}{r^2} e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{mr^3}\right)$$

$$\frac{k}{r^3} e^{-r/a}\left(2+\frac{3r}{a}+\frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{3L^2}{mr^2} = \frac{d\, V_{ef}^2}{dr^2} \quad //$$

Si la segunda derivada es mayor a cero, es equilibrio.

$r > 0$, $e^{-r/a} > 0$, $L^2 > 0$; Todo es mayor a cero.

b)

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m} \left.\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2}\right|_{r=r_0} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_r}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{k}{r_0^3} e^{-r_0/a}\left(2+\frac{3r_0}{a}+\frac{r_0^2}{a^2}\right) + \frac{3L^2}{mr_0^4}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{k}{r_0^3} e^{-r_0/a}\left(2+\frac{3r_0}{a}+\frac{r_0^2}{a^2}\right) + \frac{3L^2}{mr_0^4}\right)}} \quad //$$

4. Una partícula con momento angular L describe la órbita $r = a(1+\cos(\theta))$

a) Encuentre la fuerza central que produce esta órbita

$$r = a(1+\cos(\theta))$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\dot{r} = -a\sin(\theta)$$

$$\ddot{r} = -a\cos(\theta)$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + r = -\frac{f(r)}{m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\rightarrow \quad \cancel{-a\cos(\theta)} + a + \cancel{a\cos(\theta)} = -\frac{f(r)r^4}{\mu L^2}$$

$$f(r) = -\frac{a\mu L^2}{r^4}$$

$$r = a + a\cos(\theta)$$

$$f(r) = \frac{\mu L^2}{a^3(1+\cos(\theta))^4}$$

b) Calcule el periodo.

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(a(1+\cos(\theta)))^2}{L} d\theta$$

$$T = \frac{\mu a^2}{2L} \cdot 3 \cdot 2\pi$$

$$T = \frac{3\mu a^2 \pi}{L}$$

c) La energía mínima para escapar es:

$$E_{min} = E_{pot} - E_{infini}$$

$$\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{L^2}{3\mu r^2} = \frac{L^2}{6\mu r^2}$$

5. Colisión.

Como la colisión es inelástica, las masas se combinan.

masa total: $M_{total} = M_t + \frac{m_t}{8} = \frac{9M_t}{8}$

Conservación del momento lineal:

$$M_t v_t + \frac{M_t}{8}(-5v_t) = \frac{9m_t}{8} v_f$$

$$v_f = \frac{v_t}{3}$$

Semieje mayor a después de la colisión.

$$E_{después} = \frac{1}{2}\left(\frac{9m_t}{8}\right)\left(\frac{v_t}{3}\right)^2 - \frac{6\left(\frac{9m_t}{8}\right)M_o}{12} = -\frac{6\left(\frac{9m_t}{8}\right)M_o}{2a}$$

$$\vdots$$

$$a = \frac{9R}{17}$$

Afelio y Perihelio.

$r_a = a(1+e)$ // , $r_p = a(1-e)$ //

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{6^2 M_t^2 M_o^2}} \qquad L_{después} = \frac{3M_t v_t R}{8}$$

$$\vdots$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{17}{2R}}$$ //