

# Asignación 1

**Jorge Silva - Jeysson Gonzalez**  
*Universidad Industrial De Santander*  
*Carrera 27 Calle 9*

29/08/24

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>1</b>
<b>3. El experimento y los resultados</b>	<b>2</b>
<b>4. Conclusiones</b>	<b>20</b>

## Resumen

### 1. Introducción

Este trabajo se enfoca en el estudio de la dinámica de un sistema compuesto por dos péndulos acoplados mediante un resorte con constante elástica  $k$ . A lo largo del análisis, se utilizará el formalismo Lagrangiano para derivar las ecuaciones de movimiento del sistema, explorando en profundidad cómo estas ecuaciones se ven afectadas por factores como las condiciones iniciales, los grados de libertad, y la presencia de no linealidades. Además, se evaluará el comportamiento del sistema bajo la suposición de oscilaciones pequeñas, comparándolo con el escenario general. Este enfoque permitirá identificar y entender las diferencias entre un régimen de comportamiento lineal y uno caótico, proporcionando una visión integral sobre la complejidad inherente a sistemas acoplados. El objetivo final es adquirir un conocimiento más sólido sobre cómo la variabilidad de parámetros y condiciones iniciales puede influir en la evolución temporal de sistemas dinámicos.

### 2. Metodología

El análisis del sistema de dos péndulos acoplados mediante un resorte se llevó a cabo siguiendo varios pasos clave. Primero, se modeló matemáticamente el sistema, considerando dos péndulos

de masa  $m$  y longitud  $l$ , conectados por un resorte con constante elástica  $k$ . Las coordenadas generalizadas utilizadas fueron los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , que describen los desplazamientos angulares de cada péndulo respecto a la vertical. A partir de estas coordenadas, se derivaron las expresiones de la energía cinética y potencial, que luego se utilizaron para formular el Lagrangiano  $L$ , definido como la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial total del sistema.

A continuación, se aplicaron las ecuaciones de Euler-Lagrange al Lagrangiano para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. Estas ecuaciones, de segundo orden y no lineales en el caso general, fueron derivadas tanto para el escenario completo como para el caso de oscilaciones pequeñas, donde se utilizó la aproximación  $\sin(\theta) \approx \theta$  para simplificar las ecuaciones.

Debido a la complejidad del sistema en el caso general, se procedió a resolver las ecuaciones de movimiento mediante integración numérica. Se implementó un algoritmo basado en el método de Runge-Kutta de cuarto orden, utilizando la función `solve_ivp` de la librería `scipy` en Python. Los parámetros del sistema se fijaron en valores estándar:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 1,0 \text{ m}$ ,  $m = 1,0 \text{ kg}$ , y  $k = 0,5 \text{ N/m}$ . Las condiciones iniciales se establecieron como  $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\omega_1(0) = 0$ ,  $\theta_2(0) = \frac{\pi}{6}$ , y  $\omega_2(0) = 0$ . La simulación se llevó a cabo en el intervalo de tiempo  $t \in [0, 100]$  segundos.

Posteriormente, se analizaron los resultados numéricos obtenidos, evaluando la evolución temporal de los ángulos  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , y se exploró cómo las variaciones en los parámetros del sistema, como la constante elástica  $k$ , la relación de masas  $m_1/m_2$ , y las longitudes  $l_1/l_2$ , afectan la dinámica del sistema. Además, se investigó el impacto de la posición del resorte, considerando su conexión directa a las masas y su conexión a media altura de las varillas.

Adicionalmente, se discutió el comportamiento caótico del sistema, identificando las condiciones iniciales y parámetros bajo los cuales el sistema exhibe sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, típica de un sistema caótico. Se contrastó este comportamiento con el régimen de pequeñas oscilaciones, donde el sistema es lineal y no muestra caos.

Finalmente, se realizó un análisis espectral mediante la transformada de Fourier, tanto para el régimen de pequeñas oscilaciones como para grandes oscilaciones. Este análisis permitió identificar la presencia de armónicos y modulaciones de frecuencia, características del comportamiento no lineal del sistema en el caso de grandes oscilaciones. También se generaron espectrogramas para visualizar cómo varía el contenido en frecuencia de las señales a lo largo del tiempo.

### 3. El experimento y los resultados

#### 1. Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema

##### Coordenadas Generalizadas

Se consideró un sistema de dos péndulos acoplados, cada uno de masa  $m$  y longitud  $l$ , conectados por un resorte con constante elástica  $k$ . Se seleccionaron como coordenadas generalizadas los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , que representan los desplazamientos angulares de cada péndulo con respecto a la vertical.

## Energía Cinética

La energía cinética de cada péndulo se calculó usando la expresión:

$$T_i = \frac{1}{2}mv_i^2$$

donde  $v_i$  es la velocidad tangencial de la masa del péndulo  $i$ . Dado que  $v_i = l\dot{\theta}_i$ , se obtuvo:

$$T_i = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_i)^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_i^2$$

Para el sistema completo, la energía cinética total se expresó como la suma de las energías cinéticas de ambos péndulos:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

Finalmente, la energía cinética total se simplificó a:

$$T = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

## Energía Potencial

La energía potencial del sistema incluyó dos contribuciones: la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica del resorte.

### Energía Potencial Gravitacional

La energía potencial gravitacional para un péndulo fue expresada como:

$$U_{\text{gravitacional}} = mgh$$

donde  $h$  es la altura de la masa respecto a una referencia. Para un péndulo desplazado un ángulo  $\theta_i$ , se determinó que la altura  $h$  se calcula como:

$$h_i = l(1 - \cos(\theta_i))$$

Por lo tanto, la energía potencial gravitacional para cada péndulo fue:

$$U_i = mgl(1 - \cos(\theta_i))$$

Así, la energía potencial gravitacional total fue:

$$U_{\text{grav}} = mgl(1 - \cos(\theta_1)) + mgl(1 - \cos(\theta_2))$$

### Energía Potencial del Resorte

La energía potencial almacenada en el resorte se modeló como:

$$U_{\text{resorte}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

donde  $\Delta x$  es la elongación del resorte. En este caso, la elongación  $\Delta x$  fue la diferencia en las posiciones angulares de los dos péndulos multiplicada por la longitud  $l$ :

$$\Delta x = l(\theta_2 - \theta_1)$$

Por lo tanto, la energía potencial del resorte fue:

$$U_{\text{resorte}} = \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2$$

### Energía Potencial Total

Sumando las contribuciones de la energía potencial gravitacional y la energía potencial del resorte, la energía potencial total del sistema se expresó como:

$$U = mgl(1 - \cos(\theta_1)) + mgl(1 - \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2$$

### Lagrangiano

El Lagrangiano del sistema, definido como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, se escribió como:

$$\mathcal{L} = T - U$$

Sustituyendo las expresiones de  $T$  y  $U$ , se obtuvo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \left[ mgl(1 - \cos(\theta_1)) + mgl(1 - \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \right]$$

### Ecuaciones de Movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento, se aplicaron las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2$$

### Ecuación de Movimiento para $\theta_1$

Se calculó la derivada del Lagrangiano con respecto a  $\dot{\theta}_1$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = ml^2\dot{\theta}_1$$

La derivada temporal de este término fue:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = ml^2 \ddot{\theta}_1$$

Luego, se calculó la derivada del Lagrangiano con respecto a  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -mgl \sin(\theta_1) + kl^2(\theta_1 - \theta_2)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Euler-Lagrange, se obtuvo la ecuación de movimiento para  $\theta_1$ :

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 + mgl \sin(\theta_1) - kl^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Dividiendo por  $ml^2$ , se simplificó a:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

### Ecuación de Movimiento para $\theta_2$

De manera similar, se calcularon las derivadas para  $\theta_2$ . Primero, la derivada del Lagrangiano con respecto a  $\dot{\theta}_2$  fue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2 \dot{\theta}_2$$

La derivada temporal de este término fue:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = ml^2 \ddot{\theta}_2$$

Luego, la derivada del Lagrangiano con respecto a  $\theta_2$  fue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -mgl \sin(\theta_2) - kl^2(\theta_2 - \theta_1)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Euler-Lagrange, se obtuvo la ecuación de movimiento para  $\theta_2$ :

$$ml^2 \ddot{\theta}_2 + mgl \sin(\theta_2) - kl^2(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Dividiendo por  $ml^2$ , se simplificó a:

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

### Ecuaciones de Movimiento Finales

Finalmente, las ecuaciones de movimiento obtenidas para el sistema fueron las siguientes:

Para  $\theta_1$ :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Para  $\theta_2$ :

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

## 2. Integración Numérica y Análisis de Parámetros

### Reescritura del Sistema de Ecuaciones

Se reescribió el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden obtenido previamente en un sistema de ecuaciones de primer orden para facilitar la integración numérica. Se definieron las nuevas variables:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2$$

Las ecuaciones diferenciales resultantes fueron:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_1) + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\theta_2) + \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2)$$

### Integración Numérica

Se implementó la integración numérica utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden a través de la función `solve_ivp` de la librería `scipy` en Python. Los parámetros del sistema se eligieron como:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2, \quad l = 1,0 \text{ m}, \quad m = 1,0 \text{ kg}, \quad k = 0,5 \text{ N/m}$$

Las condiciones iniciales se fijaron en:

$$\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \omega_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \omega_2(0) = 0$$

El sistema fue integrado en el intervalo de tiempo  $t \in [0, 10] \text{ s}$ .

### Identificación de Parámetros que Condicionan el Sistema

Se identificaron los siguientes parámetros clave que condicionan el comportamiento del sistema:

- **g**: Aceleración gravitacional, que influye en la frecuencia natural de oscilación de los péndulos.
- **l**: Longitud del péndulo, que también afecta la frecuencia de oscilación.
- **k**: Constante elástica del resorte, que determina la fuerza de acoplamiento entre los péndulos.
- **m**: Masa de los péndulos, que afecta la dinámica del sistema.

La simulación numérica permitió observar la evolución temporal de los ángulos de los péndulos, y cómo los parámetros  $g$ ,  $l$ ,  $k$ , y  $m$  influyen en la dinámica del sistema.

El código Python utilizado para la integración numérica se muestra a continuación:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros del sistema
g = 9.81 # aceleracion gravitacional en m/s^2
l = 1.0 # longitud del pendulo en metros
m = 1.0 # masa del pendulo en kg
k = 0.5 # constante del resorte en N/m

# Definir el sistema de ecuaciones diferenciales
def sistema(t, y):
    theta1, omega1, theta2, omega2 = y
    dtheta1_dt = omega1
    dtheta2_dt = omega2
    domega1_dt = - (g / l) * np.sin(theta1) + (k / m) * (theta2 - theta1)
    domega2_dt = - (g / l) * np.sin(theta2) + (k / m) * (theta1 - theta2)
    return [dtheta1_dt, domega1_dt, dtheta2_dt, domega2_dt]

# Condiciones iniciales
theta1_0 = np.pi / 4 # 45 grados
omega1_0 = 0.0
theta2_0 = np.pi / 6 # 30 grados
omega2_0 = 0.0

# Tiempo de integracion
t_span = (0, 100)
t_eval = np.linspace(0, 100, 10000)

# Integrar el sistema
sol = solve_ivp(sistema, t_span,
[theta1_0, omega1_0, theta2_0, omega2_0], t_eval=t_eval, method='RK45')

# Verificar si hubo algun error en la integracion
if not sol.success:
    print("Error en la integracion:", sol.message)

# Graficar los resultados
plt.plot(sol.t, sol.y[0], label=r'$\theta_1(t)$')
plt.plot(sol.t, sol.y[2], label=r'$\theta_2(t)$')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Angulo (rad)')
plt.title('Evolucion de los angulos del sistema de pendulos acoplados')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

La figura 1 muestran los resultados obtenidos.

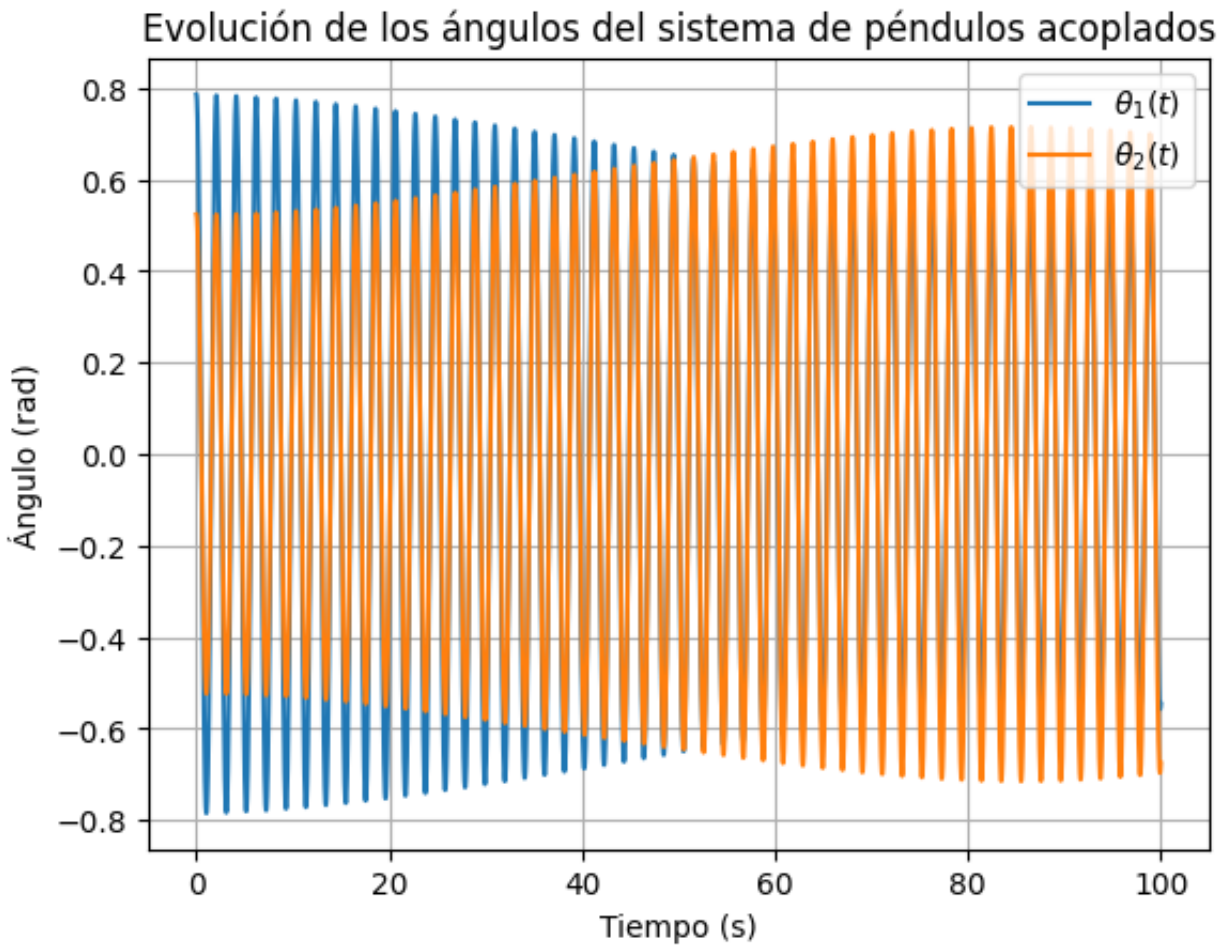


Figura 1: Ángulos oscilaciones grandes

La gráfica muestra la evolución temporal de los ángulos de los dos péndulos acoplados, representados como  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , en función del tiempo (en segundos). Los ángulos  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  presentan oscilaciones periódicas a lo largo del tiempo, lo que indica que ambos péndulos están oscilando de manera acoplada. Esto es característico de sistemas acoplados, donde la energía se transfiere entre los dos péndulos a través del resorte.

Se puede observar que la amplitud de las oscilaciones varía con el tiempo. Específicamente, hay una modulación en la amplitud de las oscilaciones, donde uno de los péndulos (representado en azul,  $\theta_1(t)$ ) aumenta su amplitud mientras que el otro (en naranja,  $\theta_2(t)$ ) disminuye, y viceversa. Este comportamiento es indicativo de un fenómeno conocido como intercambio de energía entre los péndulos, donde la energía cinética y potencial se transfiere periódicamente entre los dos.



Ambos ángulos parecen oscilar con frecuencias similares, pero con una diferencia de fase que varía con el tiempo. La diferencia de fase sugiere que los péndulos no están oscilando de manera sincronizada todo el tiempo, lo que podría ser un resultado del acoplamiento a través del resorte.

A lo largo del tiempo, la gráfica muestra que las oscilaciones se mantienen regulares, sin signos evidentes de caos o comportamiento no lineal extremo. Esto sugiere que el sistema podría estar operando en un régimen donde las oscilaciones se mantienen dentro de un rango relativamente estable.

Aunque las amplitudes de  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  son diferentes en diferentes intervalos de tiempo, hay una simetría aproximada en cómo varían estas amplitudes, lo que indica un equilibrio dinámico en el intercambio de energía.

**3. ¿Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas? ¿cómo influye la relación  $m_1/m_2$  si consideramos que las masas son diferentes? ¿cómo influye la relación  $l_1/l_2$  si consideramos que el largo de las varillas es diferente?**

### Resorte conectado a las varillas

Cuando el resorte conecta directamente las masas de los dos péndulos, está actuando para modificar la interacción entre las masas. En este caso, el resorte puede transferir energía entre los dos péndulos cuando uno se mueve, afectando cómo las masas responden a sus propias fuerzas gravitacionales y a la fuerza del resorte.

Si el resorte está atado a media altura de las varillas, está creando una conexión más indirecta entre las masas. En este caso, el resorte influye en el movimiento de los péndulos de una manera diferente. Las fuerzas que actúan sobre las masas se transmiten a través de las varillas y el punto de conexión del resorte, lo que puede introducir dinámicas adicionales en el sistema, el resorte en esta posición puede introducir modos de vibración adicionales y cambiar la frecuencia de oscilación de manera diferente en comparación con la conexión directa entre las masas.

### Diferencia entre las masas

La relación entre las masas influye en cómo el sistema responde a las perturbaciones; Si las masas son diferentes, la diferencia en masa provoca que las frecuencias naturales de oscilación de los péndulos sean diferentes. El resorte, al estar acoplado entre las masas o en media altura, introducirá una frecuencia de acoplamiento que dependerá de la masa de cada péndulo. La dinámica del sistema se verá afectada por estas diferencias, y las frecuencias de oscilación acopladas no serán simples combinaciones lineales de las frecuencias individuales de los péndulos.

### Relacion entre las varillas

La relación entre las longitudes de las varillas afecta las frecuencias de oscilación individuales de cada péndulo y, por lo tanto, la dinámica del sistema acoplado; Si las longitudes son diferentes: Cada

péndulo tendrá una frecuencia de oscilación propia que depende de su longitud. La relación 11/12 influye en cómo se combinan las frecuencias de oscilación de los dos péndulos y cómo el resorte acopla estos movimientos. Las diferencias en longitud alterarán las frecuencias naturales de oscilación y también afectarán la forma en que el resorte transfiere energía entre los péndulos.

#### **4. ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico.**

##### **Condiciones para un sistema caótico**

El comportamiento caótico en sistemas físicos ocurre cuando el sistema exhibe una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que significa que pequeñas diferencias en el estado inicial del sistema pueden llevar a grandes diferencias en el comportamiento a largo plazo.

##### **No linealidad**

El caos a menudo se relaciona con la no linealidad en las ecuaciones del movimiento, en el caso de los péndulos acoplados por un resorte, el sistema es lineal para oscilaciones pequeñas, pero para ángulos grandes, la no linealidad de la función  $\sin(\theta)$  introduce términos no lineales; Para ángulos pequeños,  $\sin(\theta) \sim \theta$ , y el sistema es aproximadamente lineal, pero cuando los ángulos son grandes, la aproximación lineal ya no es válida, y el comportamiento puede volverse no lineal, lo que puede introducir caos.

##### **Grados de Libertad**

El caos es más probable en sistemas con dos o más grados de libertad. En el caso de los dos péndulos acoplados, el sistema tiene dos grados de libertad, lo cual es suficiente para que se puedan presentar comportamientos caóticos bajo ciertas condiciones.

##### **Parametros del sistema**

El caos en un sistema de péndulos acoplados puede depender de los parámetros específicos del sistema, como la constante del resorte  $k$ , la masa  $m$ , y la longitud de las varillas  $l$ . Los parámetros deben ser tales que se genere suficiente no linealidad y acoplamiento entre los péndulos para que surjan comportamientos caóticos.

Valor del Parámetro de Acoplamiento: El valor de  $k$  puede influir significativamente en el comportamiento del sistema. Valores de  $k$  que sean demasiado grandes o demasiado pequeños pueden llevar a comportamientos distintos. El caos es más probable cuando el acoplamiento introduce suficiente no linealidad y complejidad en el sistema.

### Condiciones iniciales

El comportamiento caótico también depende de las condiciones iniciales del sistema. Dado que los sistemas caóticos muestran alta sensibilidad a las condiciones iniciales, pequeñas diferencias en la posición o velocidad inicial de los péndulos pueden llevar a trayectorias completamente diferentes en el espacio de fases.

## 5. Análisis Matemático del Comportamiento de la Señal mediante Fourier

### Ecuaciones de Movimiento

Recordemos las ecuaciones de movimiento para los péndulos acoplados:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

### Análisis para Pequeñas Amplitudes

Para pequeñas amplitudes, podemos hacer la aproximación  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Esto convierte las ecuaciones de movimiento en un sistema lineal:

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \theta_1 - \frac{k}{m} \theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \theta_2 - \frac{k}{m} \theta_1 = 0$$

Suponiendo soluciones del tipo:

$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad \theta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia natural del sistema, podemos expresar las soluciones en términos de sus componentes de Fourier.

La transformada de Fourier de una función  $\theta_i(t)$  es:

$$\mathcal{F}\{\theta_i(t)\} = \Theta_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_i(t) e^{-i\omega t} dt$$

Para una señal sinusoidal pura como  $\theta_1(t)$ , el espectro de Fourier  $\Theta_1(\omega)$  consistirá en un par de picos en  $\omega = \pm\omega_0$ , donde  $\omega_0$  es la frecuencia de la oscilación:

$$\Theta_1(\omega) = A_1 \delta(\omega - \omega_0) + A_1 \delta(\omega + \omega_0)$$

Esto significa que toda la energía de la señal está concentrada en la frecuencia fundamental  $\omega_0$ .

## Análisis para Grandes Amplitudes

Para grandes amplitudes, debemos considerar la serie de Taylor completa de  $\sin(\theta)$ , que incluye términos cúbicos:

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^5)$$

Las ecuaciones de movimiento entonces se vuelven no lineales:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \left( \theta_1 - \frac{\theta_1^3}{6} \right) - \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \left( \theta_2 - \frac{\theta_2^3}{6} \right) - \frac{k}{m} (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

El término  $\frac{\theta_1^3}{6}$  genera armónicos en la señal. Para entender esto, consideremos la transformada de Fourier de  $\theta_1^3(t)$ :

$$\mathcal{F}\{\theta_1^3(t)\} = \mathcal{F}\{(\theta_1(t))^3\}$$

Utilizando la propiedad de convolución de Fourier:

$$\mathcal{F}\{(\theta_1(t))^3\} = \Theta_1(\omega) * \Theta_1(\omega) * \Theta_1(\omega)$$

Esto implica que el espectro resultante  $\Theta_1(\omega)$  incluirá no solo picos en  $\omega_0$ , sino también en  $3\omega_0$ ,  $5\omega_0$ , etc., debido a los productos cruzados de las frecuencias presentes en la señal.

El espectro de Fourier para grandes amplitudes será entonces:

$$\Theta_1(\omega) = A_1\delta(\omega - \omega_0) + A_3\delta(\omega - 3\omega_0) + A_5\delta(\omega - 5\omega_0) + \dots$$

Esto refleja la generación de armónicos debido a las no linealidades en la señal.

## Espectrograma y Modulación de Frecuencia

Cuando se consideran grandes amplitudes, las interacciones no lineales también pueden inducir modulación de frecuencia. La frecuencia instantánea  $\omega(t)$  de la señal puede variar con el tiempo, lo que se refleja en un espectrograma más complejo.

El espectrograma, que muestra cómo el contenido en frecuencia cambia con el tiempo, se calcula usando la Transformada de Fourier de Ventana (STFT):

$$S(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t') w(t' - t) e^{-i\omega t'} dt'$$

donde  $w(t)$  es una función ventana. Para grandes amplitudes, el espectrograma  $S(t, \omega)$  puede mostrar variaciones en la frecuencia dominante, indicando la presencia de modulación de frecuencia y la aparición de armónicos adicionales en diferentes tiempos.

## Código de señales de Fourier y espectrograma

El código Python utilizado se muestra a continuación:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.fft import fft, fftfreq
from scipy.signal import spectrogram
import matplotlib.pyplot as plt

# Definicion del sistema de ecuaciones diferenciales
def sistema(t, y, g=9.81, l=1.0, m=1.0, k=0.5):
    theta1, omega1, theta2, omega2 = y
    dtheta1_dt = omega1
    dtheta2_dt = omega2
    domega1_dt = - (g / l) * np.sin(theta1) + (k / m) * (theta2 - theta1)
    domega2_dt = - (g / l) * np.sin(theta2) + (k / m) * (theta1 - theta2)
    return [dtheta1_dt, domega1_dt, dtheta2_dt, domega2_dt]

# Condiciones iniciales
theta1_0 = np.pi / 4 # 45 grados
omega1_0 = 0.0
theta2_0 = np.pi / 6 # 30 grados
omega2_0 = 0.0

# Tiempo de integracion
t_span = (0, 100) # Integramos por 100 segundos
t_eval = np.linspace(0, 100, 10000) # 10000 puntos de tiempo

# Integrar el sistema
sol = solve_ivp(sistema, t_span, [theta1_0, omega1_0, theta2_0, omega2_0],
t_eval=t_eval, method='RK45')

# Extraer las senales theta1 y theta2
theta1 = sol.y[0]
theta2 = sol.y[2]

# Transformada de Fourier de theta1
yf = fft(theta1)
xf = fftfreq(len(t_eval), t_eval[1] - t_eval[0])

# Graficar Espectro de Fourier
plt.figure()
plt.plot(xf, np.abs(yf))
plt.title("Espectro de Potencias de Fourier de  $\Theta_1(t)$ ")
plt.xlabel("Frecuencia (Hz)")
plt.ylabel("Amplitud")
plt.xlim(-2, 2) # Limitar el rango de frecuencias mostradas
plt.grid()
```

```
plt.show()

# Calcular el espectrograma
f, t_spec, Sxx = spectrogram(theta1, fs=1/(t_eval[1] - t_eval[0]),
                             nperseg=256)

# Graficar el espectrograma
plt.figure()
plt.pcolormesh(t_spec, f, 10 * np.log10(Sxx), shading='gouraud')
plt.title("Espectrograma de  $\Theta_1(t)$ ")
plt.ylabel("Frecuencia [Hz]")
plt.xlabel("Tiempo [s]")
plt.colorbar(label="Intensidad [dB]")
plt.show()
```

## Conclusiones Matemáticas

### Espectro de Potencias de Fourier

Para comparar el comportamiento de la señal bajo diferentes amplitudes, se calcularon los espectros de potencias de Fourier para ambas condiciones. Las figuras 2 y 3 muestran los resultados obtenidos.

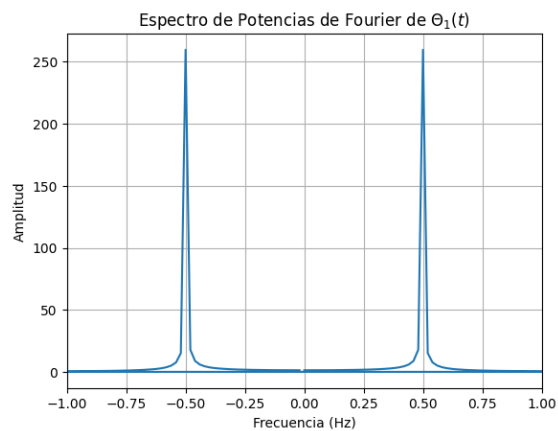


Figura 2: Espectro de Potencias de Fourier para Pequeñas Amplitudes

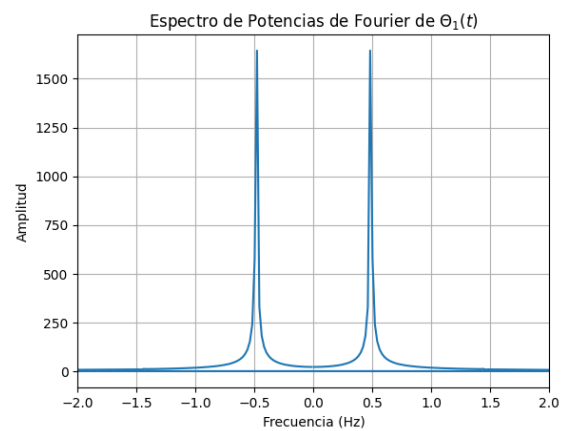


Figura 3: Espectro de Potencias de Fourier para Grandes Amplitudes

### Pequeñas Amplitudes

En el espectro de potencias de Fourier correspondiente a pequeñas amplitudes, se observaron los siguientes aspectos:

- **Picos Principales:** Se identificaron dos picos bien definidos en aproximadamente  $\pm 0,5$  Hz, que correspondieron a las frecuencias naturales del sistema.
- **Nitidez de los Picos:** Los picos fueron extremadamente nítidos, indicando que la señal fue predominantemente armónica, y la mayor parte de la energía estuvo concentrada en estas frecuencias específicas.
- **Ausencia de Armónicos:** No se observaron armónicos adicionales, lo que reforzó la idea de que el sistema operó en un régimen lineal donde las no linealidades fueron despreciables.

### Grandes Amplitudes

El espectro de potencias de Fourier para grandes amplitudes mostró un comportamiento diferente:

- **Picos en las Frecuencias Naturales:** Los picos principales en  $\pm 0,5$  Hz aún estuvieron presentes, lo que indicó que las frecuencias naturales dominaron el comportamiento del sistema.
- **Presencia de Armónicos:** A diferencia del caso de pequeñas amplitudes, se observaron armónicos adicionales en frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental (por ejemplo, alrededor de  $\pm 1,5$  Hz). Estos armónicos fueron producto de las no linealidades presentes en el sistema debido a las grandes amplitudes de oscilación.
- **Mayor Dispersión de Energía:** La energía ya no estuvo completamente concentrada en las frecuencias naturales, sino que se distribuyó entre los armónicos, indicando un comportamiento no lineal.

### Espectrograma

Para analizar cómo varió el contenido frecuencial de la señal con el tiempo, se generaron espectrogramas para ambas condiciones, como se muestra en las figuras 4 y 5.

### Pequeñas Amplitudes

El espectrograma para pequeñas amplitudes reveló:

- **Banda de Frecuencia Constante:** La banda de frecuencia alrededor de 0.5 Hz fue constante en el tiempo, lo que indicó que la frecuencia de oscilación no varió y la señal fue estable.
- **Estabilidad en la Amplitud:** La intensidad de la banda fue uniforme, reflejando una oscilación con amplitud constante a lo largo del tiempo.
- **Ausencia de Modulación:** No se observaron variaciones en la frecuencia ni modulaciones, lo que fue consistente con un régimen armónico puro y lineal.

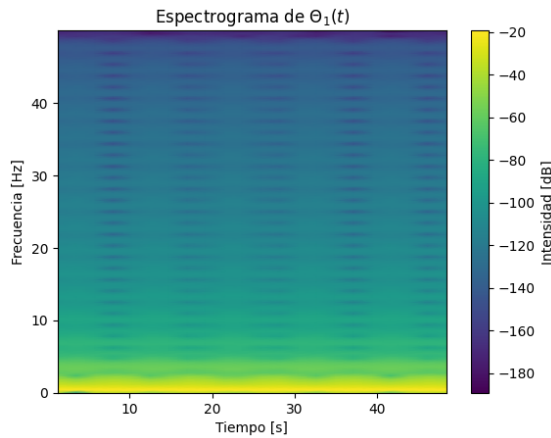


Figura 4: Espectrograma para Pequeñas Amplitudes

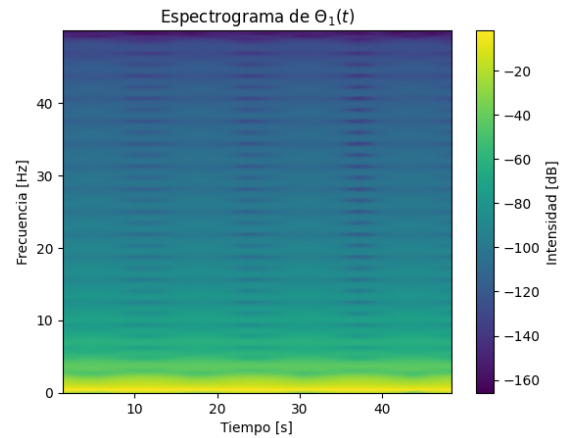


Figura 5: Espectrograma para Grandes Amplitudes

### Grandes Amplitudes

En el caso de grandes amplitudes, el espectrograma mostró:

- **Variación de la Frecuencia:** Se observaron ligeras variaciones en la frecuencia dominante a lo largo del tiempo, lo que sugirió la presencia de modulaciones de frecuencia inducidas por las no linealidades.
- **Generación de Armónicos:** El espectrograma reveló la aparición de armónicos adicionales en diferentes tiempos, reflejando un comportamiento más complejo y no lineal.
- **Inestabilidad:** La intensidad de la señal varió, lo que indicó fluctuaciones en la amplitud de la oscilación, características de un sistema que no estuvo en un régimen puramente lineal.

## 6. Simplifique las ecuaciones suponiendo pequeñas oscilaciones.

### Proceso Completo de Simplificación e Integración Numérica

#### Planteamiento del Problema

Se comenzó con el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que describe el movimiento de dos péndulos acoplados por un resorte. Las ecuaciones originales son:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) &= 0\end{aligned}$$



Estas ecuaciones reflejan el movimiento angular de los péndulos ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) bajo la influencia de la gravedad y la interacción elástica proporcionada por el resorte.

### Simplificación para Pequeñas Oscilaciones

Dado que se asumieron pequeñas oscilaciones ( $\theta_1 \ll 1$  y  $\theta_2 \ll 1$ ), se realizaron las siguientes aproximaciones:

$$\sin(\theta_1) \approx \theta_1, \quad \sin(\theta_2) \approx \theta_2$$

Con estas aproximaciones, las ecuaciones de movimiento se simplificaron a:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son ahora lineales y describen el comportamiento del sistema bajo la suposición de oscilaciones pequeñas.

### Reescritura del Sistema de Ecuaciones en Primer Orden

Para facilitar la integración numérica, se reescribió el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden. Para ello, se introdujeron las siguientes variables auxiliares:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2$$

Utilizando estas nuevas variables, las ecuaciones originales se transformaron en:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \end{aligned}$$

Además, las ecuaciones de aceleración angular se reescribieron como:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{g}{l}\theta_1 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{g}{l}\theta_2 + \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones de segundo orden se convirtió en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden, lo cual es más adecuado para ser resuelto numéricamente.

## Establecimiento de las Condiciones Iniciales

Las condiciones iniciales del sistema se establecieron como sigue:

- **Ángulo inicial del péndulo 1:**  $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}$  (45 grados).
- **Velocidad angular inicial del péndulo 1:**  $\omega_1(0) = 0$ .
- **Ángulo inicial del péndulo 2:**  $\theta_2(0) = \frac{\pi}{6}$  (30 grados).
- **Velocidad angular inicial del péndulo 2:**  $\omega_2(0) = 0$ .

Estas condiciones determinan el estado inicial de los péndulos al comienzo de la simulación.

## Integración Numérica

Se eligió el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para realizar la integración numérica del sistema de ecuaciones. Este método es conocido por su alta precisión y estabilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El intervalo de tiempo para la integración fue  $t \in [0, 50]$  segundos, dividido en 5000 puntos de tiempo. Esto permitió una alta resolución temporal en la simulación.

La integración numérica se realizó iterativamente, evaluando las ecuaciones en cada paso de tiempo para calcular los valores de  $\theta_1(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ , y  $\omega_2(t)$  a lo largo del intervalo de tiempo definido.

## Cambios Realizados en el Código

Para adaptar el código original al análisis bajo la suposición de pequeñas oscilaciones, se realizaron las siguientes modificaciones:

- **Simplificación de las ecuaciones:** En lugar de resolver las ecuaciones diferenciales originales, que incluían términos no lineales como  $\sin(\theta_1)$  y  $\sin(\theta_2)$ , se simplificaron estas funciones trigonométricas a sus aproximaciones lineales, es decir,  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Esto convirtió el sistema de ecuaciones en uno lineal.
- **Redefinición del sistema de ecuaciones:** El sistema de ecuaciones fue reescrito utilizando las versiones simplificadas, que ahora son ecuaciones lineales. Esto implicó modificar la función que representaba el sistema de ecuaciones en el código.
- **Mantenimiento de las condiciones iniciales:** Las condiciones iniciales de los ángulos y las velocidades angulares se mantuvieron sin cambios, ya que son válidas tanto para las ecuaciones originales como para las simplificadas.
- **Aplicación del método de Runge-Kutta:** El método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) se mantuvo para la integración numérica, pero ahora se aplicó a las ecuaciones lineales simplificadas. Esto permitió una integración más eficiente y estable.

Los resultados obtenidos de la integración numérica permitieron analizar detalladamente el comportamiento dinámico del sistema bajo la condición de pequeñas oscilaciones.

Las figuras 6 y 1 muestran la comparación entre oscilaciones pequeñas y grandes.

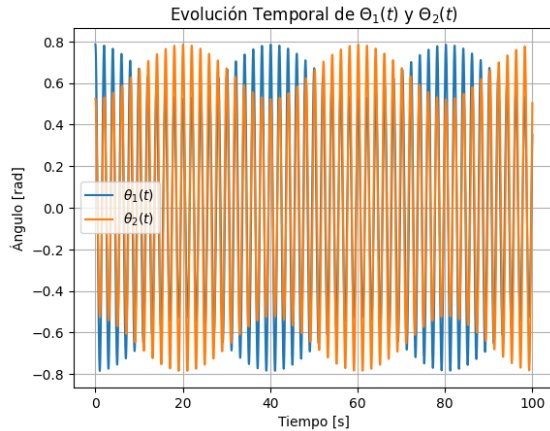


Figura 6: Oscilaciones pequeñas

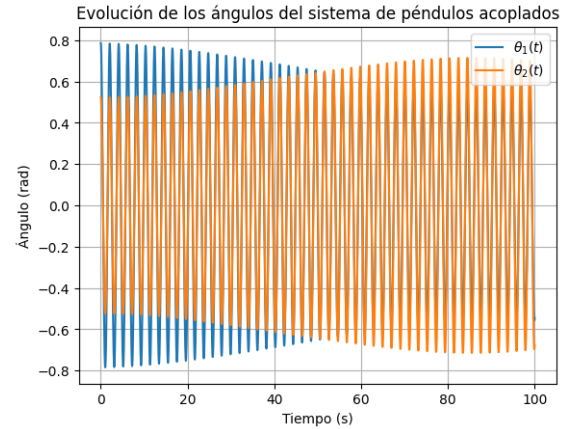


Figura 7: Espectrograma para Grandes Amplitudes

La principal diferencia entre la gráfica de oscilaciones pequeñas presentada y la gráfica correspondiente a oscilaciones grandes radica en la mayor compresión de las curvas en la primera. Esta compresión sugiere una modulación más frecuente en las amplitudes de los ángulos  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , lo cual es característico de un régimen de oscilaciones pequeñas.

**¿ Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas? ¿cómo influye la relación  $m_1/m_2$  si consideramos que las masas son diferentes? ¿ cómo influye la relación  $l_1/l_2$  si consideramos que el largo de las varillas es diferente?**

### Resorte entre las Masas

Debido a las pequeñas oscilaciones el sistema es lineal y las ecuaciones tienen una forma directa; Las frecuencias de oscilación dependen de la constante del resorte, las masas y las longitudes.

### Resorte a Media Altura:

La dinámica es más compleja debido al efecto del resorte en la tensión de las varillas. Puede haber efectos adicionales, pero en el caso de pequeñas oscilaciones, el comportamiento general será similar al caso con el resorte entre las masas.

## Relación de Masas

Diferencias en las masas cambian las frecuencias de oscilación. El sistema puede tener modos de oscilación diferentes basados en la relación de las masas.

## Relación de Longitudes

Diferencias en las longitudes afectan las frecuencias de oscilación. Los péndulos tendrán frecuencias naturales distintas, lo que afecta el comportamiento acoplado del sistema.

En conclusión, tanto la configuración del resorte como las relaciones de masas y longitudes afectan las frecuencias de oscilación del sistema de péndulos. Para pequeñas oscilaciones, el sistema es lineal y predecible, con el comportamiento determinado principalmente por las frecuencias naturales calculadas a partir de las ecuaciones del movimiento.

## ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico

Para el sistema de péndulos acoplados, cuando se asume que las oscilaciones son pequeñas ( $\sin(\theta) \approx \theta$ ), el sistema se describe por ecuaciones lineales que conducen a oscilaciones regulares con frecuencias determinadas por los parámetros del sistema. En este caso, no se observa comportamiento caótico. El caos aparece típicamente cuando se introducen términos no lineales y el sistema exhibe alta sensibilidad a las condiciones iniciales, lo cual no ocurre en el régimen de pequeñas oscilaciones.

## 4. Conclusiones

El estudio del sistema de dos péndulos acoplados por un resorte ha evidenciado la complejidad inherente a sistemas dinámicos con múltiples grados de libertad y no linealidades. Las ecuaciones de movimiento obtenidas muestran que el sistema es altamente sensible a variaciones en las condiciones iniciales, lo que puede conducir a un comportamiento caótico en determinadas circunstancias. Este tipo de comportamiento resalta la naturaleza no integrable del sistema cuando se considera en su forma completa, donde la no linealidad imposibilita la aplicación del principio de superposición, requiriendo soluciones a través de métodos de integración numérica.

No obstante, al restringir el análisis a oscilaciones pequeñas, el sistema adopta un comportamiento mucho más predecible, ya que las ecuaciones de movimiento se simplifican a formas lineales. En este contexto, es posible aplicar el principio de superposición y obtener soluciones precisas mediante métodos analíticos y numéricos. Este contraste entre el régimen lineal y no lineal subraya la importancia de las condiciones iniciales y los parámetros del sistema en la determinación de su dinámica.