PROBLEMAS VIERNES 15 DE AGOSTO

Jorge Andrés Silva Serrano
Código: 2160411

Jeysson Guillermo González Rondon
Código: 2210704

August 17, 2024

1 Punto 1

Las fosas para competencias de clavados, desde plataformas de 10 m de altura, tenían 5 m de profundidad.

1.1 a) Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguirdad de los atletas

Antes de comenzar, según los informes de los antiguos Juegos Olímpicos que se realizaron en Tokio en 2020, los clavadistas llegaban al agua con una velocidad aproximada de 50 km/h. Por lo tanto, se estimó la desaceleración necesaria para que un clavadista, que entrara al agua a 50 km/h, se detuviera de manera segura sin llegar al fondo de la fosa.

Lo primero que se hizo fue convertir esos 50 km/h a unidades más útiles:

$$\frac{50\,\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{13.89\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

El clavadista experimentaría una desaceleración al entrar en el agua debido a la resistencia de ésta. La fórmula de la cinemática para la desaceleración constante fue:

$$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$$

donde:

1. V_f fue la velocidad final, que en este caso fue 0.
2. V_i fue la velocidad inicial, que fueron 13.89 m/s.
3. a fue la desaceleración que experimentó.
4. d fue la distancia que recorrió.

Al despejar d de la ecuación, se encontró la siguiente relación:

$$d = \frac{V_i^2}{2a}$$

El valor de a dependió de las propiedades del cuerpo, su volumen y su superficie al entrar en contacto con el agua.

Suponiendo una forma cilíndrica para el cuerpo humano, se consideró que este podía sufrir una desaceleración de aproximadamente 5 veces la aceleración de la gravedad. Por lo tanto:

$$d = \frac{(13.89)^2}{10g} = 1.97\,\mathrm{m}$$

1.2 b) Suponga que un corcho esférico de $5\ cm$ de diámetro está en el fondo de fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

Para resolver este problema, se tuvo en cuenta que el corcho fue impulsado hacia arriba debido a la fuerza de flotación que le ejercía el agua. Dicha fuerza de flotación estuvo dada por la siguiente fórmula:

$$F_{fl} = \rho_a \cdot V \cdot g$$

donde:

1. F_{fl} fue la fuerza de flotación que ejerció el agua sobre el corcho.
2. ρ_a fue la densidad del agua ($1000\,\mathrm{kg/m^3}$).
3. V fue el volumen del corcho esférico.
4. g fue la gravedad.

Para el volumen del corcho, se aclaró que tenía un diámetro de 5 cm, por lo tanto, su volumen en términos del SI fue:

$$V = \frac{4\pi(0.025)^3}{3} = 6.54 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

Reemplazando los valores en la fórmula de la flotación, se tuvo:

$$F_{fl} = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 6.54 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \times 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 0.641\,\mathrm{N}$$

Se recordó que el corcho también fue atraído hacia la Tierra debido a su peso. Para ello, se calculó la masa del corcho, la cual se pudo obtener utilizando su densidad y su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = V \cdot \rho = 6.54 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \times 240\,\mathrm{kg/m^3} = 0.0157\,\mathrm{kg}$$

Luego, se multiplicó por la aceleración de la gravedad para obtener el peso:

$$W = m \cdot g = 0.0157\,\mathrm{kg} \times 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 0.154\,\mathrm{N}$$

No se tuvo en cuenta la resistencia que el agua ejerció sobre el corcho debido a que fue bastante insignificante debido al volumen del corcho y su forma. Como el corcho estaba siendo impulsado hacia la superficie, al restar las fuerzas, se obtuvo una aceleración del corcho, tal que:

$$m \cdot a = F_{fl} - W$$

$$a = \frac{0.641\,\mathrm{N} - 0.154\,\mathrm{N}}{0.0157\,\mathrm{kg}} = 31.02\,\mathrm{m/s^2}$$

Finalmente, se utilizó la fórmula de cinemática para calcular la velocidad final:

$$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$$

donde:

1. V_f fue la velocidad final del corcho.
2. V_i fue la velocidad inicial, que fue 0.
3. a fue la aceleración que experimentó.
4. d fue la distancia hasta la superficie.

Reemplazando, se obtuvo que:

$$V_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \times 31.02 \times 5} = 17.61\,\mathrm{m/s}$$

La velocidad con la que el corcho esférico de 5 cm de diámetro llegó a la superficie fue aproximadamente 17.61 m/s.

1.3 c) Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superfie

Para calcular la velocidad con la que la burbuja de gas ideal llegó a la superficie, se consideró únicamente la fuerza de flotación, ya que idealmente la burbuja no tiene peso. Además, dado que se trató de un gas ideal, la burbuja expandió su volumen a medida que subió debido a la disminución de la presión.

Se comenzó analizando la presión que sintió la burbuja en el fondo de la fosa, la cual fue la suma de la presión atmosférica y la presión debida a la columna de agua:

$$P_h = P_0 + \rho_a g h$$

donde:

1. P_h fue la presión en el fondo de la fosa.
2. P_0 fue la presión atmosférica.
3. $\rho_a g h$ fue la presión de los 5 metros de la columna de agua.

Sustituyendo los valores:

$$P_h = 101325\,\mathrm{Pa} + 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 9.81\,\mathrm{m/s^2} \times 5\,\mathrm{m}$$

$$P_h \approx 101325\,\mathrm{Pa} + 49050\,\mathrm{Pa} = 150375\,\mathrm{Pa}$$

Luego, se analizó el cambio en el volumen de la burbuja. Asumiendo que la burbuja fue un gas ideal, su volumen se expandió a medida que subió y la presión disminuyó. Para ello, se usó la ley de Boyle:

$$P_h V_h = P_0 V_0$$

Despejando V_h, que fue el volumen de la burbuja al llegar a la superficie:

$$V_h = V_0 \frac{P_0}{P_h}$$

Luego, se calculó la fuerza de flotación en el fondo de la fosa, la cual se describió con la misma fórmula que se utilizó para el corcho:

$$F_{fl} = \rho_a \cdot g \cdot V_0$$

Dado que únicamente la burbuja estaba siendo empujada por la fuerza de flotación, al hacer la sumatoria de fuerzas, esta se igualó a una aceleración:

$$a = \frac{F_{fl}}{m} = \frac{\rho_a \cdot g \cdot V_0}{\rho_a \cdot V_0} = g$$

Finalmente, se utilizó la fórmula de cinemática para calcular la velocidad final:

$$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$$

donde:

1. V_f fue la velocidad final de la burbuja al llegar a la superficie.
2. V_i fue la velocidad inicial, que fue 0.
3. a fue la aceleración que experimentó.
4. d fue la distancia hasta la superficie.

Reemplazando los valores, se obtuvo:

$$V_f = \sqrt{2gd} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 5} = 9.9\,\mathrm{m/s}$$

La velocidad con la que una burbuja de gas ideal llegó a la superficie fue aproximadamente 9.9 m/s.

2 Punto 2

2.1 a) Calcule la trayectoria que da la distancia mas corta entre dos puntos sobre la superficie del cono invertido cuyo ángulo de vértice es α.

Se utilizaron coordenadas cilíndricas (r, θ, z), donde la relación entre r y z estaba dada por $z = r\cot(\alpha)$. La longitud de un arco sobre el cono estaba dada por la métrica inducida en la superficie.

2.2 Función de la Longitud del Arco

La longitud de una curva s en la superficie del cono entre dos puntos P_1 y P_2 fue dada por:

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2} \tag{1}$$

En este caso, se tuvo que $dz = \frac{dr}{\tan(\alpha)}$, lo que simplificó la integral.

Utilizando la identidad trigonométrica $1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$, se reescribió la longitud del arco como:

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 \csc^2(\alpha)\, d\theta^2} \tag{2}$$

2.3 Lagrangiana para el Problema

Para encontrar la trayectoria que minimizara la longitud del arco, se definió la Lagrangiana L como el integrando de la expresión anterior sin la raíz cuadrada:

$$L = dr^2 + r^2 \csc^2(\alpha)\, d\theta^2 \tag{3}$$

2.4 Aplicación de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizaron para encontrar la curva que minimizara la longitud del arco. Estas ecuaciones estaban dadas por:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

donde $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$.

Se calcularon las derivadas parciales de L respecto a r y $\dot{r}$:

- Derivada de L respecto a $\dot{r}$:
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\dot{r}$$
- Derivada de L respecto a r:
$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2r\csc^2(\alpha)$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange, se obtuvo:

$$\frac{d}{d\theta}(2\dot{r}) - 2r\csc^2(\alpha) = 0 \tag{5}$$

Esta fue una ecuación diferencial de segundo orden que describió la geodésica en la superficie del cono.

2.5 Resolución de la Ecuación Diferencial

La ecuación diferencial se simplificó a:

$$\ddot{r} - r\csc^2(\alpha) = 0 \tag{6}$$

2.6 Solución de la Ecuación Diferencial

La ecuación diferencial obtenida fue:

$$\ddot{r} - r\csc^2(\alpha) = 0$$

Donde $\ddot{r}$ fue la segunda derivada de r respecto a θ, y $\csc(\alpha)$ fue la cosecante del ángulo α.

2.6.1 Solución de la Ecuación Característica

Para resolver esta ecuación, se asumió una solución de la forma:

$$r(\theta) = e^{m\theta}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$m^2 e^{m\theta} - \csc^2(\alpha)e^{m\theta} = 0$$

lo que implicó que:

$$m^2 - \csc^2(\alpha) = 0$$

Resolviendo para m:

$$m = \pm\csc(\alpha)$$

2.6.2 Solución General

La solución general de la ecuación diferencial fue:

$$r(\theta) = C_1 e^{\csc(\alpha)\theta} + C_2 e^{-\csc(\alpha)\theta}$$

Donde C_1 y C_2 fueron constantes de integración.

2.7 b) Reproduzca las trayectorias que se muestran en el enlace.

2.8 Ecuaciones del Movimiento

De acuerdo con el artículo y el enlace proporcionados, las ecuaciones del movimiento para una partícula que se deslizó sobre un cono invertido bajo la influencia de la gravedad estuvieron dadas por:

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3 \sin^2(\theta)} - g\cos(\theta) \tag{7}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{h^2}}{r^2 \sin^2(\theta)} \tag{8}$$

2.9 Simulación Numérica

Utilizando Python, se resolvieron estas ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales proporcionadas:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 4, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$x_0 = [r_1, 0, 0]$$

2.10 Código Python Utilizado

El siguiente código en Python fue utilizado para resolver las ecuaciones diferenciales y graficar la trayectoria de la partícula sobre la superficie cónica:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Se definieron los par metros del problema
g = 9.8  # aceleraci n gravitacional
theta = np.pi / 6  #  ngulo  del cono
h2 = 2 * g * 1**2 * 4**2 * np.sin(theta)**2 * np.cos(theta) / (1 + 4)
   # cuadrado del momento angular
r1 = 1  # radio m nimo
r2 = 4  # radio m ximo
t_span = (0, 20)  # intervalo de tiempo

# Condiciones iniciales
x0 = [r1, 0, 0]  # r = r1, dr/dt = 0, phi = 0

# Se defini  el sistema de ecuaciones diferenciales
def equations(t, x):
    r, dr_dt, phi = x
    d2r_dt2 = h2 / (r**3 * np.sin(theta)**2) - g * np.cos(theta)
    dphi_dt = np.sqrt(h2) / (r**2 * np.sin(theta)**2)
    return [dr_dt, d2r_dt2, dphi_dt]

# Resolviendo las ecuaciones diferenciales
sol = solve_ivp(equations, t_span, x0, t_eval=np.linspace(t_span[0],
   t_span[1], 1000))
```

```
# Se extrajeron las soluciones
r = sol.y[0]
phi = sol.y[2]

# Se convirtieron a coordenadas cartesianas para graficar la
    trayectoria en 3D
x = r * np.cos(phi) * np.sin(theta)
y = r * np.sin(phi) * np.sin(theta)
z = r * np.cos(theta)

# Se graficaron la superficie del cono y la trayectoria
fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x, y, z, color='red', label='Trayectoria')

# Superficie c nica
phi_cone = np.linspace(0, 2 * np.pi, 40)
r_cone = np.linspace(0, r2, 40)
phi_cone, r_cone = np.meshgrid(phi_cone, r_cone)
x_cone = r_cone * np.cos(phi_cone) * np.sin(theta)
y_cone = r_cone * sin(phi_cone) * np.sin(theta)
z_cone = r_cone * np.cos(theta)
ax.plot_surface(x_cone, y_cone, z_cone, color='gray', alpha=0.5,
    edgecolor='none')

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_title('Movimiento␣en␣una␣superficie␣c nica')
ax.legend()
plt.show()
```

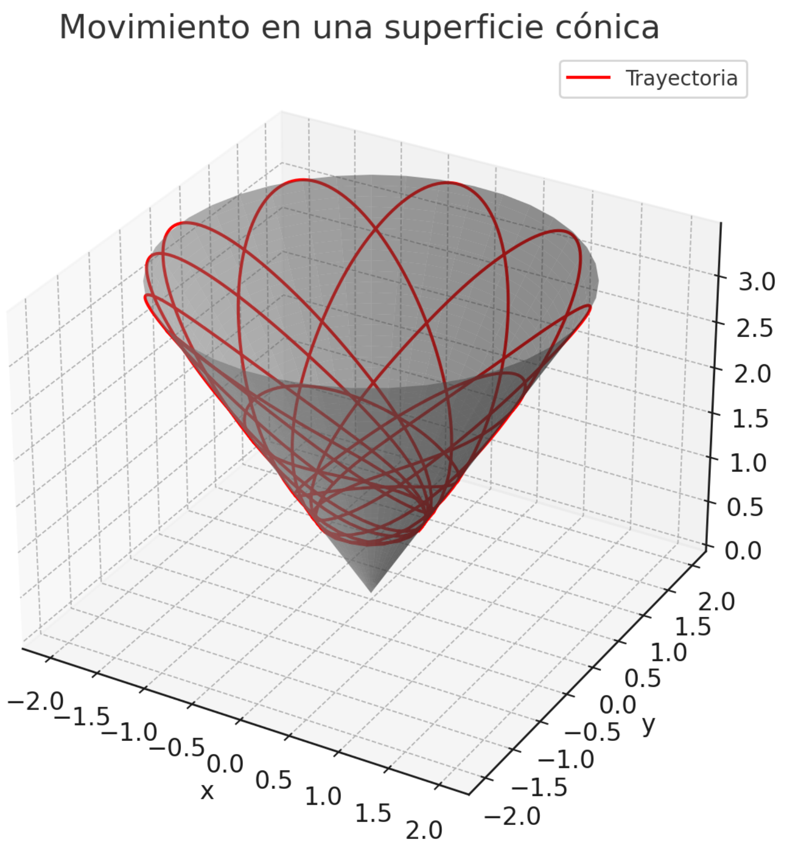

Figure 1: Trayectoria de la partícula sobre la superficie cónica.

La figura 1 mostró la trayectoria de la partícula sobre la superficie cónica, tal como se describió en el problema. Esta trayectoria se obtuvo mediante la solución numérica de las ecuaciones diferenciales presentadas anteriormente.

3 Punto 3

Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial.

En primer lugar, se definió la curva de superficie del cable eléctrico, la cual se podía expresar como ds:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Se tomó como variable independiente la x, y se extrajo de la raíz utilizando el factor común:

$$ds = \sqrt{dx^2 (1 + \frac{dy^2}{dx^2})}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx$$

Una vez obtenido el valor de ds, se aplicó la definición de energía potencial. Suponiendo que el cable era uniforme, con densidad lineal de masa λ bajo la influencia de la gravedad, se tuvo:

$$dU = \lambda g y \, ds$$

Conociendo el equivalente de ds, se integraron ambos lados:

$$U = \int \lambda g y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \, dx$$

Se extrajeron las constantes para obtener el funcional:

$$F[y] = \int y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \, dx$$

A continuación, se utilizó el funcional y se analizó en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'} \left(y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \right) \right] = 0$$

Al derivar, se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y y'}{\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^2}} \right) = 0$$