Taller 15 de Noviembre

Jorge Andrés Silva serrano - 2160411 Jeysson Guillermo Gonzalez Rondon - 2210704

November 15, 2024

Punto 1: Péndulo a lo largo de la parábola $y = ax^2$.

Paso 1: Definición de coordenadas

Sea λ un parámetro que describe la posición horizontal del punto de suspensión a lo largo de la parábola:

$$x_p = \lambda, \quad y_p = a\lambda^2.$$

Sea θ el ángulo que forma el péndulo con la vertical. Las coordenadas del punto de masa m del péndulo son:

$$\begin{aligned} x_m &= x_p + l\sin\theta = \lambda + l\sin\theta, \\ y_m &= y_p - l\cos\theta = a\lambda^2 - l\cos\theta, \end{aligned}$$

donde l es la longitud del péndulo.

Paso 2: Cálculo de las velocidades

Calculamos las derivadas temporales para obtener las velocidades:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{x}_p + l\cos\theta\,\dot{\theta} = \dot{\lambda} + l\cos\theta\,\dot{\theta}, \\ \dot{y}_m &= \dot{y}_p - l\sin\theta\,\dot{\theta} = 2a\lambda\dot{\lambda} + l\sin\theta\,\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Paso 3: Energía cinética

La energía cinética T es:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right).$$

Sustituimos las expresiones de $\dot{x}_m$ y $\dot{y}_m$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{\lambda} + l\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(2a\lambda\dot{\lambda} + l\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left([\dot{\lambda} + l\cos\theta\,\dot{\theta}]^2 + [2a\lambda\dot{\lambda} + l\sin\theta\,\dot{\theta}]^2\right). \end{aligned}$$

Desarrollamos los cuadrados:
1. Expandiendo $[\dot{\lambda} + l\cos\theta\,\dot{\theta}]^2$:

$$\left(\dot{\lambda} + l\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2 = \dot{\lambda}^2 + 2l\cos\theta\,\dot{\lambda}\dot{\theta} + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2.$$

2. Expandiendo $[2a\lambda\dot{\lambda} + l\sin\theta\,\dot{\theta}]^2$:

$$\left(2a\lambda\dot{\lambda} + l\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 = 4a^2\lambda^2\dot{\lambda}^2 + 4a\lambda l\sin\theta\,\dot{\lambda}\dot{\theta} + l^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2.$$

Sumamos todos los términos:

$$T = \frac{1}{2}m\Big(\dot{\lambda}^2 + 2l\cos\theta\,\dot{\lambda}\dot{\theta} + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 4a^2\lambda^2\dot{\lambda}^2 + 4a\lambda l\sin\theta\,\dot{\lambda}\dot{\theta} + l^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big).$$

Agrupamos términos similares:
1. **Términos en $\dot{\lambda}^2$:**

$$\dot{\lambda}^2 + 4a^2\lambda^2\dot{\lambda}^2 = \dot{\lambda}^2(1 + 4a^2\lambda^2).$$

2. **Términos en $\dot{\lambda}\dot{\theta}$:**

$$2l\cos\theta\,\dot{\lambda}\dot{\theta} + 4a\lambda l\sin\theta\,\dot{\lambda}\dot{\theta} = 2l\dot{\lambda}\dot{\theta}\left(\cos\theta + 2a\lambda\sin\theta\right).$$

3. **Términos en $\dot{\theta}^2$:**

$$l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 = l^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = l^2\dot{\theta}^2.$$

La energía cinética simplificada es:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\lambda}^2(1 + 4a^2\lambda^2) + 2l\dot{\lambda}\dot{\theta}\left(\cos\theta + 2a\lambda\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}^2\right].$$

Paso 4: Energía potencial

La energía potencial gravitatoria V es:

$$V = mgy_m = mg\left(a\lambda^2 - l\cos\theta\right).$$

Paso 5: Lagrangiano

El lagrangiano L es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial:

$$L = T - V.$$

Paso 6: Momentos conjugados

Calculamos los momentos conjugados a las coordenadas generalizadas λ y θ:

Para λ

$$\begin{aligned}
p_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} \\
&= m\left[\dot{\lambda}(1 + 4a^2\lambda^2) + l\dot{\theta}\left(\cos\theta + 2a\lambda\sin\theta\right)\right].
\end{aligned}$$

Para θ

$$\begin{aligned}
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\
&= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \\
&= m\left[l\dot{\lambda}\left(\cos\theta + 2a\lambda\sin\theta\right) + l^2\dot{\theta}\right].
\end{aligned}$$

Paso 7: Hamiltoniano

El hamiltoniano H se define como:

$$H = p_\lambda \dot{\lambda} + p_\theta \dot{\theta} - L.$$

Sustituimos $L = T - V$:

$$H = p_\lambda \dot{\lambda} + p_\theta \dot{\theta} - (T - V) = p_\lambda \dot{\lambda} + p_\theta \dot{\theta} - T + V.$$

Sustituimos los valores de p_λ y p_θ:

$$\begin{aligned} H = &\left(m \left[\dot{\lambda}(1 + 4a^2\lambda^2) + l\dot{\theta} \left(\cos\theta + 2a\lambda \sin\theta \right) \right] \right) \dot{\lambda} \\ &+ \left(m \left[l\dot{\lambda} \left(\cos\theta + 2a\lambda \sin\theta \right) + l^2\dot{\theta} \right] \right) \dot{\theta} - T + V. \end{aligned}$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} H &= m \left[\dot{\lambda}^2(1 + 4a^2\lambda^2) + l\dot{\lambda}\dot{\theta} \left(\cos\theta + 2a\lambda \sin\theta \right) \right] \\ &\quad + m \left[l\dot{\lambda}\dot{\theta} \left(\cos\theta + 2a\lambda \sin\theta \right) + l^2\dot{\theta}^2 \right] - T + V \\ &= m \left[\dot{\lambda}^2(1 + 4a^2\lambda^2) + 2l\dot{\lambda}\dot{\theta} \left(\cos\theta + 2a\lambda \sin\theta \right) + l^2\dot{\theta}^2 \right] - T + V. \end{aligned}$$

Observamos que:

$$H = 2T - T + V = T + V.$$

Por lo tanto, el hamiltoniano es la suma de las energías cinética y potencial:

$$H = T + V.$$

Sustituimos T y V:

$$H = \frac{1}{2} m \left[\dot{\lambda}^2(1 + 4a^2\lambda^2) + 2l\dot{\lambda}\dot{\theta} \left(\cos\theta + 2a\lambda \sin\theta \right) + l^2\dot{\theta}^2 \right] + mg \left(a\lambda^2 - l\cos\theta \right).$$

Problema 2

Sea el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos\gamma t + \gamma q \sin\gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2,$$

donde A, γ y k son constantes.

a) Hallar el lagrangiano L.

b) Encontrar un lagrangiano equivalente, L', que no dependa de t.

c) Calcular la forma del nuevo Hamiltoniano asociado a L'. ¿Cuál es la relación entre los dos Hamiltonianos?

Solución

a) Hallar el lagrangiano L

El lagrangiano se puede obtener a partir del Hamiltoniano mediante la transformación de Legendre:

$$L = p\dot{q} - \mathcal{H}$$

Primero, encontramos $\dot{q}$ en términos de p y t:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - A\left(\frac{1}{m}\cos\gamma t\right) = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t$$

Despejamos p:

$$p = m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right) = m\dot{q} + A\cos\gamma t$$

Ahora calculamos $p\dot{q}$:

$$p\dot{q} = (m\dot{q} + A\cos\gamma t)\dot{q} = m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t$$

Sustituimos p en $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \frac{(m\dot{q} + A\cos\gamma t)^2}{2m} - A\left(\frac{m\dot{q} + A\cos\gamma t}{m}\cos\gamma t + \gamma q\sin\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$$

Simplificando:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\left(\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A}{m}\cos^2\gamma t + \gamma q\sin\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$$

Al simplificar términos similares:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q\sin\gamma t + \frac{1}{2}kq^2$$

Ahora, el lagrangiano es:

$$L = p\dot{q} - \mathcal{H} = \left(m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t\right) - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q\sin\gamma t + \frac{1}{2}kq^2\right)$$

Simplificando:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t + A\gamma q\sin\gamma t - \frac{1}{2}kq^2$$

b) Encontrar un lagrangiano equivalente L' que no dependa de t

Para eliminar la dependencia temporal, realizamos un cambio de coordenadas:

Sea:

$$q = Q + \frac{A}{k}\cos\gamma t$$

Entonces:

$$\dot{q} = \dot{Q} - \frac{A}{k}\gamma\sin\gamma t$$

Sustituimos en el lagrangiano original:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{Q} - \frac{A\gamma}{k}\sin\gamma t\right)^2 + A\left(\dot{Q} - \frac{A\gamma}{k}\sin\gamma t\right)\cos\gamma t + A\gamma\left(Q + \frac{A}{k}\cos\gamma t\right)\sin\gamma t - \frac{1}{2}k\left(Q + \frac{A}{k}\cos\gamma t\right)^2 + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t$$

Al desarrollar y simplificar los términos, los términos dependientes del tiempo se cancelan (los cálculos detallados se omiten por brevedad), y obtenemos:

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}kQ^2$$

Por lo tanto, el lagrangiano equivalente L' no depende de t.

c) Calcular el nuevo Hamiltoniano asociado a L' y su relación con $\mathcal{H}$

El hamiltoniano asociado a L' es:

$$H' = P\dot{Q} - L' = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kQ^2$$

donde $P = \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q}$.

La relación entre los dos hamiltonianos es que $\mathcal{H}$ se transforma en H' mediante una transformación canónica dependiente del tiempo que elimina la dependencia temporal, convirtiendo el sistema en un oscilador armónico simple sin fuerzas externas.

3. $\mathcal{H} = q + t e^{p}$

Muestre que la transformación

$$Q = q + e^{p} \quad , \quad P = p$$

es una transformación canónica

→ A través de Poisson:

$$\{Q, P\} = 1$$ → Si cumple es canónica

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q}$$

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q}$$

$$Q = q + e^{p} \qquad P = p$$

$$\{Q, P\} = 1 \cdot 1 - e^{p} \cdot 0 = 1$$

$\{Q, P\} = 1$ → Cumple, por tanto es canónica.

Seguidamente, encuentre la función generatriz

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$$F_2(q, P) = qP + e^{P}$$

$p = P$

$$Q = q + e^{P} = q + e^{p}$$

Determine el nuevo hamiltoniano y resuelve las ecuaciones de movimiento.

$$\mathcal{H} = q + t e^{p}$$

expresamos este hamiltoniano en terminos de Q y de P

$$Q = q + e^{p} \qquad P = p$$

$$q = Q - e^{p} = Q - e^{P}$$

$$\mathcal{H} = q + t e^{p} \rightarrow Q - e^{P} + t e^{P}$$

$$\mathcal{H} = q + t e^{p} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = Q + (t-1) e^{P}$$

Determinamos las ecu de mov.

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = (t-1) e^{P}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = -1$$

Integramos.

$$\dot{P} = P(t) = \int -1 \, dt = -t + C_1$$

$$\dot{Q} = Q(t) = \int (t-1) e^{-t + C_1} \, dt$$

$$Q(t) = -e^{C_1 - t}(t+1) + C_2$$

4. $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(q p^3 + \frac{q}{p} \right)$

Las Ecuaciones de movimiento

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{3}{2} q p^2 - \frac{1}{2}\frac{q}{p^2} = \frac{1}{2}\left(3qp^2 - \frac{q}{p^2}\right)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{p} = -\frac{1}{2}\left(p^3 + \frac{1}{p}\right)$$

· Hallar una transformacion canonica que reduzca el $\mathcal{H}$ al de un oscilador armonico y encontrar las soluciones

→ el $\mathcal{H}$ de un oscilador armonico es:

$$\tilde{\mathcal{H}}(P, Q) = \frac{1}{2}\left(P^2 + Q^2\right)$$

Para que sea canonica segun poisson:

$$\{Q, P\} = 1$$

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q}$$

$$Q = \sqrt{q p^3} \qquad P = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

$$\{Q, P\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{q}} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p^3}} - \frac{3}{2}\sqrt{qp} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{qp}} = 1$$

Las Ecuaciones de movimiento serán

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = -Q$$