SEGUNDA ASIGNACION MECANICA CLASICA

Jeysson Guillermo Gonzalez Rondon - 2210704 Jorge Andrés Silva Serano - 2160411

October 25, 2024

1 Deduzca las ecuaciones clásicas de trayectoria para ambos potenciales.

1.1 Potencial de coulomb

Tenemos los dos potenciales, entonces analizaremos en primer lugar el potencial de coulomb

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

Para analizar las trayectorias empezaremos encontrando la energia, como es una fuerza centran esta consta de la energia cinetica y la potencial unicamente tal que:

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + V(r)$$

reemplazando en coordenada polares obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$

Dado que es una fuerza central el momento angular es contante y esta dado por:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$
$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Sustituimos en la ecuacion de la energia para obtener finalmente:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}$$

De esta formula obtendremos la ecuacion de la posicion, tomaremos u = 1/r para simplificarla y obtener en terminos de u, de esta manera, obtenemos la ecuacion general de la trayectoria:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(r)}{L^2}$$

donde

$$F(r) = -\frac{V(r)}{dr}$$

En este caso nuestra F(r) es

$$F(r) = -ku^2$$

Por lo que nuestra ecuacion general es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{ku^2}{L^2}$$

Al resolver esta ecuacion diferencial obtener nuestra ecuacion de trayectoria

$$u(\theta) = Acos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{L^2}$$

Recordemos la sustitucion que habiamos realizado previamente u=1/r, por lo que nuestra ecuacion de la trayectoria es:

$$r(\theta) = \frac{1}{Acos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{L^2}}$$

1.2 Potencial de yukawa

$$V(r) = \frac{k}{r}e^{-\alpha r}$$

De la misma manera que con el potencial de coulomb comenzamos encontrando la energia, como es una fuerza central esta se reduce a:

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + V(r)$$

reemplazando en coordenada polares obtenemos:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}e^{-\alpha r}$$

Dado que es una fuerza central el momento angular es contante y esta dado por:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Sustituimos en la ecuacion de la energia para obtener finalmente:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}e^{-\alpha r}$$

Calculamos F(r):

$$F(r) = -\frac{V(r)}{dr}$$

En este caso nuestra F(r) es

$$F(r) = -\frac{d}{dr}(\frac{k}{r}e^{-\alpha r})$$

$$F(r) = -[-\frac{k}{r^2}e^{-\alpha r} - \frac{k}{r}\alpha e^{-\alpha r}]$$

$$F(r) = \frac{k}{r^2}e^{-\alpha r} + \frac{k}{r}\alpha e^{-\alpha r}$$

Realizamos la sustitucion u=1/r lo que nos da como resultado:

$$F(U) = ku^2 e^{-\frac{\alpha}{u}} + \alpha k u e^{-\frac{\alpha}{u}}$$

Por lo que nuestra ecuacion general es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{ku^2 e^{-\frac{\alpha}{u}} + \alpha k u e^{-\frac{\alpha}{u}}}{L^2}$$

Al resolver esta ecuacion diferencial mediante integracion numerica obtenemos la ecuacion de la trayectoria.

1.3 Integración numérica del potencial de Yukawa

Para realizar la integración numérica del potencial de Yukawa, $V(r) = \frac{k}{r}e^{-\alpha r}$, se planteó la siguiente ecuación diferencial para la trayectoria de la partícula en términos de $u(\theta) = \frac{1}{r}$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{L^2}\left(u^2 e^{-\alpha/u} + \alpha u e^{-\alpha/u}\right),$$

donde:

- $u(\theta) = \frac{1}{r}$ es la variable de la trayectoria.
- L es el momento angular de la partícula.
- α es el parámetro de apantallamiento que ajusta la intensidad del apantallamiento.
- k es la constante del potencial.

Las condiciones iniciales usadas fueron $u(0) = 0.2$ y $\frac{du}{d\theta}(0) = 0$, para evitar problemas numéricos relacionados con el desbordamiento de la función exponencial.

La solución numérica se realizó utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK45), implementado en Python. A continuación se muestra el código utilizado para la integración numérica:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Parámetros del problema
k = 1.0      # Constante del potencial (ajustable)
alpha = 0.05 # Parámetro de apantallamiento (ajustable)
L = 1.0      # Momento angular (ajustable)

# Ecuación diferencial en términos de u y su derivada
def yukawa_eq_adjusted(theta, y):
    u, dudtheta = y
    # Evitar desbordamiento ajustando la evaluación de la exponencial
    if u <= 0:
        F_u = 0  # Evitar problemas cuando u es negativo o cero
    else:
        F_u = -k * (u**2 * np.exp(-alpha/u) + alpha * u * np.exp(-alpha/u)) / L**2
    d2udtheta2 = -u + F_u
    return [dudtheta, d2udtheta2]

# Condiciones iniciales
u0 = 0.2   # 1/r inicial
dudtheta0 = 0  # Partícula inicia con velocidad angular cero
y0 = [u0, dudtheta0]

# Rango de theta para la integración
theta_span = (0, 2 * np.pi)  # Integraremos de 0 a 2
theta_eval = np.linspace(0, 2 * np.pi, 1000)  # Puntos de evaluación para theta

# Solución numérica usando solve_ivp (RK45)
solution_adjusted = solve_ivp(yukawa_eq_adjusted, theta_span, y0, t_eval=theta_eval, method='RK45')

# Convertir la solución de u() a r() para graficar
u_solution_adjusted = solution_adjusted.y[0]
r_solution_adjusted = 1 / u_solution_adjusted

# Gráfica de la trayectoria ajustada
```

```
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.polar(theta_eval[:len(r_solution_adjusted)], r_solution_adjusted)
plt.title("Trayectoria ajustada de una partícula en el potencial de Yukawa")
plt.show()
```

1.4 Gráfica de la trayectoria

La gráfica obtenida de la integración numérica puede observarse en la Figura 1. En esta gráfica se muestra la trayectoria ajustada de una partícula bajo el potencial de Yukawa con apantallamiento, donde el valor del parámetro α fue ajustado a 0.05 para evitar problemas numéricos. La trayectoria muestra cómo el potencial se reduce a medida que la partícula se aleja del centro de la interacción, debido a la naturaleza exponencial del apantallamiento.

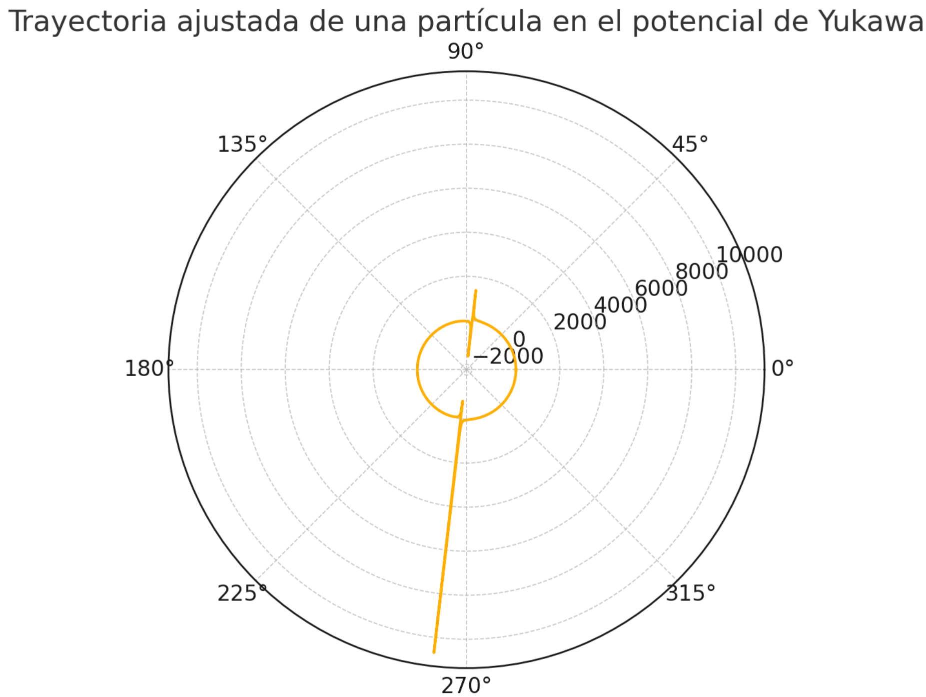

Figure 1: Trayectoria ajustada de una partícula en el potencial de Yukawa con apantallamiento $\alpha = 0.05$.

2 Calcule la sección transversal diferencial para el potencial apantallado para diferentes valores de α y comente los resultados.

2.1 Derivación clásica para la dispersión de Rutherford (Potencial Coulombiano)

Para el caso de Coulomb puro (cuando α=0), la sección transversal diferencial de Rutherford está dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = (\frac{k}{2E})^2 \cdot \frac{1}{sen^2(\frac{\theta}{2})})$$

Esta fórmula muestra que para el potencial de Coulomb, la sección transversal es muy grande para ángulos pequeños θ, y decae rápidamente para ángulos grandes.

2.2 Potencial apantallado (Yukawa) y corrección a la sección transversal

Para el potencial apantallado de Yukawa, las correcciones aparecen debido a la presencia de α, lo que modifica el comportamiento de la interacción a largas distancias. El apantallamiento reduce la fuerza a medida que la distancia aumenta, lo que afecta principalmente los ángulos grandes de dispersión.

En este caso, la sección transversal diferencial modificada se puede escribir en términos de la sección de Rutherford con un factor de corrección

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = (\frac{k}{2E})^2 \cdot \frac{1}{sen^2(\frac{\theta}{2}}) \cdot f(\alpha, \theta)$$

Donde el factor de correccion $f(\alpha, \theta)$ es:

$$f(\alpha, \theta) = (1 + \frac{2E\alpha sen(\frac{\theta}{2})}{k})^{-2}$$

2.3 Cálculos para diferentes valores de α

2.3.1 Cuando $\alpha = 0$

Para α=0 el factor de correccion es igual a 1, y la sección transversal diferencial es la de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = (\frac{k}{2E})^2 \cdot \frac{1}{sen^2(\frac{\theta}{2})})$$

2.3.2 Cuando α es pequeño

Para valores pequeños de α, la sección transversal para ángulos pequeños sigue siendo cercana a la de Rutherford, pero en ángulos grandes la corrección reduce el valor de la sección transversal. Esto se debe a que el apantallamiento suaviza la interacción a grandes distancias, disminuyendo la probabilidad de dispersión a ángulos grandes.

2.3.3 Cuando α es grande

Para un valor grande de α, el apantallamiento es fuerte y el rango efectivo de la interacción se acorta. En este caso, el factor de corrección reduce significativamente la sección transversal diferencial, especialmente en ángulos grandes.

3 Analice cómo cambia el ángulo de dispersión para distintos valores de la energía, parámetros de impacto y de apantallamiento.

3.1 Variacion con las energias

3.1.1 Para bajas energias

A bajas energías, las partículas se mueven lentamente y permanecen más tiempo bajo la influencia del potencial. Esto significa que, incluso a mayores distancias, pueden experimentar la fuerza del potencial, lo que tiende a producir ángulos de dispersión más grandes.

- Para el potencial de Coulomb (sin apantallamiento), la dispersión tiende a ser grande, ya que la fuerza decrece como $\frac{1}{r^2}$ y actúa incluso a grandes distancias.
- Con apantallamiento débil (αpequeño), el ángulo de dispersión sigue siendo significativo, pero se reduce en comparación con el caso de Coulomb porque el potencial decae exponencialmente a largas distancias, y las partículas ya no sienten la fuerza tan fuertemente a grandes distancias.
- Con apantallamiento fuerte (αgrande), la interacción es de muy corto alcance, y la dispersión es menor, ya que la partícula debe acercarse mucho para sentir la fuerza.

3.1.2 Para altas energias

A altas energías, las partículas se mueven rápidamente, lo que significa que pasan menos tiempo bajo la influencia del potencial.

- Sin apantallamiento, el ángulo de dispersión se reduce a medida que aumenta la energía, ya que la interacción gravitacional o electromagnética se debilita a distancias mayores, y las partículas no se ven fuertemente desviadas.
- Con apantallamiento débil, el efecto de la energía es similar al caso de Coulomb, pero un poco más moderado. Las partículas de alta energía tienden a seguir trayectorias más rectas y experimentan menor desviación.
- Con apantallamiento fuerte, el ángulo de dispersión es muy pequeño, ya que las partículas de alta energía solo interactúan en distancias muy cortas, y su alta energía las hace menos susceptibles a ser desviadas por el potencial apantallado.

3.2 Parametros de impacto

3.2.1 Trayectorias cercanas

Cuando b es pequeño, la partícula se acerca mucho al centro de la interacción, lo que significa que experimenta una fuerza más intensa y es más probable que se disperse en un ángulo grande. Esto es cierto tanto para el potencial de Coulomb como para el potencial apantallado.

- Para el potencial de Coulomb (sin apantallamiento), el ángulo de dispersión es muy grande para valores pequeños de b, ya que la partícula puede acercarse bastante y sentir una fuerza significativa.
- Con apantallamiento débil, el ángulo de dispersión sigue siendo grande para trayectorias cercanas, pero el apantallamiento suaviza el impacto de la fuerza a distancias mayores, lo que reduce ligeramente el ángulo en comparación con el caso de Coulomb.
- Con apantallamiento fuerte, la interacción es más suave incluso a distancias pequeñas, por lo que aunque el ángulo de dispersión sigue siendo grande, será menor que en los otros dos casos.

3.2.2 Trayectorias lejanas

Cuando b es grande, la partícula pasa lejos del centro de la interacción y, por lo tanto, la fuerza que siente es pequeña. En este caso, el ángulo de dispersión será pequeño.

- Para el potencial de Coulomb, la dispersión es muy pequeña cuando b es grande, ya que la fuerza decrece con $\frac{1}{r^2}$ y la partícula apenas se desvía.
- Con apantallamiento débil, la dispersión es aún menor que en el caso de Coulomb para grandes valores de b, ya que el apantallamiento reduce la interacción a largas distancias.
- Con apantallamiento fuerte, la interacción es tan corta que para trayectorias alejadas (b grande), prácticamente no hay dispersión.

3.3 Parametro de apantallamiento

El parámetro de apantallamiento α afecta el rango efectivo de interacción del potencial de Yukawa. A medida que α aumenta, la interacción se vuelve más de corto alcance, lo que reduce el ángulo de dispersión.

- Con α=0 (sin apantallamiento), el ángulo de dispersión sigue la ley de Coulomb, con una fuerte dependencia del parámetro de impacto y de la energía. Para trayectorias cercanas, la dispersión es muy grande.

- Con α pequeño (apantallamiento débil), el rango efectivo es grande, y el ángulo de dispersión es similar al caso de Coulomb, aunque ligeramente reducido en ángulos grandes debido al decaimiento exponencial del potencial.
- Con α grande (apantallamiento fuerte), la interacción solo ocurre a distancias muy cortas. Esto significa que, a menos que la partícula pase muy cerca del centro de la interacción, el ángulo de dispersión será pequeño o incluso nulo para trayectorias alejadas. En este caso, solo las partículas con un parámetro de impacto muy pequeño experimentarán dispersión significativa.

El ángulo de dispersión en un potencial apantallado es menor en general que en el caso de Coulomb, y esta reducción es más pronunciada cuanto mayor es α, cuanto mayor es la energía y cuanto mayor es el parámetro de impacto.

References