Taller 1 de Noviembre

Jorge Andrés Silva serrano - 2160411 Jeysson Guillermo Gonzalez Rondon - 2210704

November 1, 2024

1 Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio de:

1.1 Una placa semicircular de masa M y radio R que se encuentra sobre una superficie plana

La energía cinética T de la placa está dada por el término rotacional, ya que la placa realiza una rotación alrededor de su centro de masa. El momento de inercia de una placa semicircular de radio R respecto a su centro de masa es:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Para una placa semicircular su inercia I esta dada como:

$$I = \frac{MR^2}{4}$$

Así, la energía cinética será:

$$T = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{4} \omega^2 = \frac{MR^2}{8} \omega^2$$

La energía potencial U de la placa depende de la posición de su centro de masa. Al inclinarse un ángulo θ desde la vertical, el centro de masa se eleva una distancia h, en el caso de la placa semicircular esta esta a una distancia $H = \frac{4R}{R\pi} sen(\theta)$ que para angulos pequeños se puede aproximar a $sen(\theta) = \theta$.

Entonces la energia potencial es:

$$U = MgH = Mg \frac{4R}{R\pi} \theta$$

Una vez obtenidas las Energias formulamos el lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{MR^2}{8} \dot{\theta}^2 - Mg \frac{4R}{R\pi} \theta$$

Usamos la ecuación de Euler-Lagrange:

2. Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

1. Calcular la energía cinética total del cono.
2. Determinar el tiempo requerido para que el cono regrese a su posición original.
3. Calcular las componentes del momento angular del cono.

1.1. Definición de Parámetros

- Masa del cono: m
- Altura del cono: h
- Ángulo de vértice del cono: α
- Ángulo semi-vértice: $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$
- Radio de la base del cono: $R = h \tan\theta$

1.2. Análisis del Movimiento

El cono realiza dos movimientos simultáneos:

1. **Rotación propia**: Rotación alrededor de su propio eje con velocidad angular ω.
2. **Precesión**: Rotación del eje del cono alrededor del eje vertical z con velocidad angular Ω.

Además, el cono rueda sin deslizar, lo que implica una relación entre ω y Ω.

1.3. Relación entre ω y Ω

Para rodadura sin deslizamiento, la velocidad tangencial en el punto de contacto con el plano debe ser cero. Por lo tanto:

$$\omega R = \Omega R \sin\theta \implies \omega = \Omega \sin\theta$$

1.4. Energía Cinética Translacional

El centro de masa del cono se mueve en una trayectoria circular de radio L, donde:

$$L = h \sin\theta$$

La velocidad del centro de masa es:

$$v_{\text{cm}} = \Omega L = \Omega h \sin\theta$$

Entonces, la energía cinética translacional es:

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} m (\Omega h \sin\theta)^2$$

1.5. Energía Cinética Rotacional

Necesitamos calcular los momentos de inercia del cono respecto a sus ejes principales:

- Momento de inercia respecto al eje del cono (z'):

$$I_{z'} = \frac{3}{10} m R^2$$

- Momento de inercia respecto a un eje perpendicular al eje del cono y pasando por el centro de masa (x' o y'):

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{3}{80} m (4h^2 + 3R^2)$$

Componentes de la Velocidad Angular

El vector de velocidad angular total en el sistema de referencia fijo es:

$$\vec{\omega}_{\text{total}} = \omega \hat{e}_{z'} + \Omega \hat{k}$$

Debido a la inclinación del eje del cono, debemos proyectar $\vec{\omega}_{\text{total}}$ en los ejes fijos (x, y, z).

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \omega \sin\theta \cos(\Omega t) \\
\omega_y &= \omega \sin\theta \sin(\Omega t) \\
\omega_z &= \omega \cos\theta + \Omega
\end{aligned}$$

Sustituyendo $\omega = \Omega \sin\theta$:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \Omega \sin^2\theta \cos(\Omega t) \\
\omega_y &= \Omega \sin^2\theta \sin(\Omega t) \\
\omega_z &= \Omega \cos^2\theta + \Omega = \Omega(1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned}$$

Simplificando $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$:

$$\omega_z = \Omega(1 + \cos 2\theta)$$

Cálculo de la Energía Cinética Rotacional

La energía cinética rotacional es:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{x'} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_{z'} \omega_z^2$$

Calculamos $\omega_x^2 + \omega_y^2$:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = (\Omega \sin^2\theta)^2 (\cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t)) = \Omega^2 \sin^4\theta$$

Entonces:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{x'} \Omega^2 \sin^4\theta + \frac{1}{2} I_{z'} [\Omega(1 + \cos 2\theta)]^2$$

1.6. Energía Cinética Total

Sumando ambas contribuciones:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m(\Omega h \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} I_{x'} \Omega^2 \sin^4\theta + \frac{1}{2} I_{z'} \Omega^2 (1 + \cos 2\theta)^2$$

2. Tiempo para Retornar a la Posición Original

El cono regresa a su posición original después de completar una revolución completa alrededor del eje vertical. El tiempo necesario es:

$$T_{\text{vuelta}} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

3. Cálculo de las Componentes del Momento Angular

3.1. Momento Angular Respecto al Centro de Masa

El momento angular es:

$$\vec{L} = I_{x'}\omega_x\hat{\imath} + I_{y'}\omega_y\hat{\jmath} + I_{z'}\omega_z\hat{k}$$

Sustituyendo las expresiones de ω_x, ω_y y ω_z:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{x'}\Omega \sin^2\theta \cos(\Omega t) \\ L_y &= I_{y'}\Omega \sin^2\theta \sin(\Omega t) \\ L_z &= I_{z'}\Omega(1 + \cos 2\theta) \end{aligned}$$