1. a) $f(q_1, p_1)$ es constante si

$\{f, \mathcal{H}\} = 0$

$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}$

$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} = 0$

b) $V = \frac{a \cdot r}{r^3}$ $\quad \vec{a} = a_z \hat{z}$ es un vector constante

Construimos el hamiltoniano

$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{a \cdot r}{r^3} =$

$\Rightarrow \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + \frac{a_z r \cos(\theta)}{r^3}$

$\phi$ es cíclica y $p_\phi$ es constante

por tanto

$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)} + 2ma\cos(\theta)\right)}_{f(\theta, p_\theta)}$

es decir

$f(\theta, p_\theta) = Cte$

2. Sistema unidimensional con hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2q^2}$$

a) $$f_1 = pq - 2\mathcal{H}t$$

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{d(pq)}{dt} - 2\frac{d(\mathcal{H}t)}{dt} = 0$$

$$\frac{df_1}{dt} = \dot{p}q + p\dot{q} - \left(2t\frac{d\mathcal{H}}{dt} + 2\mathcal{H}\frac{dt}{dt}\right)$$

0 (no depende del tiempo)

$$\frac{df_1}{dt} = \dot{p}q + p\dot{q} - 2\left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2q^2}\right)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{1}{q^3}$$

$$\frac{df_1}{dt} = \cancel{\frac{1}{q^2}} + \cancel{p^2} - \cancel{p^2} - \cancel{\frac{1}{q^2}} = 0$$

Como $\frac{df_1}{dt} = 0$ significa que es una cantidad conservada

$$f_1 = cte$$

b) $Q = \lambda q$ $\quad P = \lambda^{-1} p$

Para demostrar que es canonica

$$\{Q, P\} = 1$$

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

$$\{Q, P\} = \lambda \cdot \lambda^{-1} - 0 \cdot 0 = 1$$

Por tanto es canonica

$\rightarrow$ Generador Infinitesimal

# Punto 2

Jorge Andrés Silva serrano - 2160411 Jeysson Guillermo Gonzalez Rondon - 2210704

22 de noviembre de 2024

## (a) Calcular $\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\}$

Dado el potencial $V(\vec{r}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$ y el hamiltoniano $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$, necesitamos calcular el corchete de Poisson $\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\}$.

El corchete de Poisson está definido como:

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Observamos que $\vec{r}\cdot\vec{p} = \sum_i x_i p_i$.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial x_j} = p_j, \quad \frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_j} = x_j.$$

Las derivadas del hamiltoniano $H$ son:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{p_j}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial V}{\partial x_j} = (\nabla V(\vec{r}))_j\,.$$

Entonces, el corchete de Poisson es:

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\} = \sum_j \left( p_j \frac{p_j}{m} - x_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) = \frac{p^2}{m} - \vec{r}\cdot\nabla V(\vec{r}).$$

Ahora, calculamos $\vec{r}\cdot\nabla V(\vec{r})$. Dado que $V(\vec{r}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$:

$$\nabla V(\vec{r}) = -3\frac{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} + \frac{\vec{a}}{r^3}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\cdot\nabla V(\vec{r}) &= \vec{r}\cdot\left( -3\frac{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} + \frac{\vec{a}}{r^3} \right) \\
&= -3\frac{(\vec{a}\cdot\vec{r})r^2}{r^5} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \\
&= -3\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \\
&= -2\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}.
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\vec{r}\cdot\nabla V(\vec{r}) = -2V(\vec{r}).$$

Sustituyendo en el corchete de Poisson:

$$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\} = \frac{p^2}{m} + 2V(\vec{r}).$$

**Respuesta al apartado (a):**

$$\boxed{\{\vec{r}\cdot\vec{p}, H\} = \frac{p^2}{m} + 2V(\vec{r})}$$

## (b) Encontrar una cantidad conservada y las transformaciones infinitesimales asociadas

Del resultado anterior, consideramos el operador $D = \frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{p}$. Entonces:

$$\{D, H\} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + 2V(\vec{r})\right) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = H.$$

Esto implica que:

$$\{D, H\} = H \implies \frac{dD}{dt} = \{D, H\} = H.$$

Para encontrar una cantidad conservada, definimos:

$$K = tH - D.$$

Calculamos su derivada temporal:

$$\frac{dK}{dt} = H + t\frac{dH}{dt} - \frac{dD}{dt} = H - H = 0,$$

ya que $\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0$ (el hamiltoniano es conservado).
**Por lo tanto, $K$ es una cantidad conservada:**

$$\boxed{K = tH - \frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{p}}$$

Las transformaciones infinitesimales generadas por $D$ son dilataciones:

$$\delta\vec{r} = \epsilon\{\vec{r}, D\} = \epsilon\vec{r}, \quad \delta\vec{p} = \epsilon\{\vec{p}, D\} = -\epsilon\vec{p}.$$

Estas transformaciones corresponden a una simetría de escala, y la conservación de $K$ es consecuencia directa de esta simetría.

**Respuesta al apartado (b):**

- **Cantidad conservada:**
$$\boxed{K = tH - \frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{p}}$$

- **Transformaciones infinitesimales asociadas:**
$$\delta\vec{r} = \epsilon\vec{r}, \quad \delta\vec{p} = -\epsilon\vec{p}.$$