Jorge Silvaredonda

249030.

Ejercicio 1

1) Sea A una matriz real 2x2 que verifica:

$$A^2 = 16\,Id$$

donde Id es la matriz identidad 2x2.

a) ¿Cuales son los posibles valores determinante de A?
Dar ejemplos de cada posible valor y concluir que A es invertible.

$A \in M_{2x2}$ $\quad A^2 = 16 . Id$

$A^2 = 16 . Id.$

prop: $\det(A^n) = \det(A)^n$

$\det(A^2) = \det(16 . Id)$ $\quad$ prop: $\det(k.A) = k^n . \det(A)$ $\quad A \in M_{nxn}$

$\det(A) . \det(A) = 16^2 . \underbrace{\det(Id)}_{1}$

$\det(A) . \det(A) = 16^2$

$\det(A) . \det(A) = 16 . 16 \Rightarrow \boxed{\det(A) = 16}$

y como la $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ A es invertible

b) Sin usar los posibles valores del determinante de A.
probar que A es invertible y su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{16} . A$

$A \in M_{2x2}$ $\quad A^2 = 16 . Id$

$A^{-1} A^2 = A^{-1} . 16 . Id$

$A = A^{-1} . 16$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{16} . A = A^{-1}}$

(2) Sea B una matriz real 2x2 que verifica:

$$B^2 = 17 . Id$$

donde Id es la matriz identidad 2x2

Probar que $B - 4Id$ y $B + 4Id$ son invertibles.

¿Cuales son las inversas de cada una?

$B \in M_{2x2}$ $\quad B - 4Id$

$$(B - 4Id) . C = Id$$

↳ siendo C la matriz inversa de $(B - 4Id)$

$$B^2 = 17 . Id$$

aplico el prod notable $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

$$B^2 - 16 Id = 17 . Id - 16 Id$$

$$\boxed{B^2 - 16 Id} = Id$$

$$(B + 4Id)(B - 4Id) = Id$$

=> podemos decir que tanto $(B+4Id)$ como $(B-4Id)$ son invertibles.

(3) Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Probar que $C^2 = 17 Id$

b) Escribir matricialmente y resolver matricialmente el siguiente sistema de ecuaciones:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1.1+4.4 & 0 \\ 0 & 4.4+(-1).(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} = 17 . Id}$$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 = 5F_2 - 4F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$5x + 4(-1) = 1$$

$$5x - 4 = 1$$

$$5x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Ejercicio 2

Un video club esta especializado en peliculas de tres tipos: infantiles, accion y terror.

Se sabe que:

- el 60% de las peliculas infantiles mas el 60% de accion representan el 50% del total de peliculas.
- el 20% de las infantiles más el 60% de las de acción mas el 60% de las de terror representan el 40% del total de las peliculas
- hay 100 peliculas más de accion que de terror.

Determinar la cantidad de peliculas de cada tipo de este video club

x = infantiles y = accion z = terror a = totales

$$\begin{cases} 0,60x + 0,60y + 0 - 0,5a = 0 \\ 0,20x + 0,60y + 0,60z - 0,40a = 0 \\ 0 + y - z + 0 = 100 \\ x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones escalonando:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0,6 & 0,6 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,6 & -0,4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) F4 \leftrightarrow F1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,6 & -0,4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0,6 & 0,6 & 0 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F2 - 0,2F1 \\ \\ F4 - 0,6F1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,1 & 0 \end{array}\right) 0,4F3 - F2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,2 & 40 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,1 & 0 \end{array}\right) 0,8F4 - 0,6F3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,2 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -0,04 & -24 \end{array}\right)$$

$$-0,04a = -24$$

$$a = \frac{-24}{-0,04}$$

$$a = 600$$

$$-0,8z + 0,2(600) = 40$$

$$-0,8z + 120 = 40$$

$$z = \frac{-80}{-0,8}$$

$$z = 100$$

$$y - z = 100$$

$$y - 100 = 100$$

$$y = 200$$

$$x + y + z - a = 0$$

$$x + 200 + 100 - 600 = 0$$

$$\boxed{x = 300}$$

Entonces hay:

300 infantiles

200 de accion.

100 de terror

y 600 totales

EJERCICIO 3

1) $x + y + z = 15$

Siendo x = ganados

y = empatados

z = perdidos

$3x + y = 27$

porque cada partido ganado suma 3 puntos, cada empatado suma 1 y los perdidos no suman.

Escalerizo las 2 ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 3 & 1 & 0 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

No se puede escalerizar mas, porque tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas

Nos queda $2x + 0 - z = 12$

$= \boxed{1x + 0 - 1/2\, z = 6}$ → dividí todo por 2.

de esta ecuacion podemos notar que si el equipo tuviese un numero impar de partidos, quedaria con un numero de partidos perdidos decimal, lo cual es imposible ya que z esta multiplicado por $-1/2$

2) $x + 0 - \frac{1}{2} z = 6$

¿ $x = 3z$?

<u>Lo verificamos:</u>

$(3z) + 0 - \frac{1}{2} z = 6$

$\frac{5}{2} z = 6$

$z = \frac{6}{5/2} = \boxed{\frac{12}{5} = z}$

Negativo!

los partidos ganados No pueden ser 3 veces la cantidad de partidos perdidos

Scanned with CamScanner

3 ¿ $z = 8$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & -1 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x+y+z = 15. \\ 2x+0-z = 12 \end{cases}$$

$$= x + 0 - \tfrac{1}{2}z = 6$$

Verifiquemos:

- Utilizare la ecuación $x + 0 - 1/2\,z = 6$

sustituimos: $x + 0 - 1/2\,(8) = 6$

$$x - 4 = 6$$

$$\boxed{x = 10}$$

- sustituyamos las variables en la ecuacion $x + y + z = 15$ para verificar si cumple: $\boxed{x=10}$ y $\boxed{z=8}$

$x + y + z = 15.$

$10 + y + 8 \neq 15$

NO CUMPLE, por lo tanto 8 NO pudo ser el número de partidos perdidos.

4 a) ¿ $z = 4$?

- Verifiquemos usando la ecuacion: $x + 0 - 1/2 = 6$

$x + 0 - 1/2\, z = 6$

$x + 0 - 1/2\,(4) = 6$

$x - 2 = 6 \Rightarrow \boxed{x = 8}$

Sustituyamos en la primer ecuación: $x + y + z = 15$

$x + y + z = 15$

$(8) + y + (4) = 15$

$y + 12 = 15$

$\boxed{y = 3}$ ✓ sí, pueden haber perdido 4 partidos.

Compruebo si cumple:

$3x + y = 27$

$3(8) + 3 = 27$

$\boxed{27 = 27}$ ✓

b) ¿ $z = 6$?

- Hacemos lo mismo:

$x + 0 - 1/2\, z = 6$

$x + 0 - 1/2\,(6) = 6$

$x + -3 = 6$

$\boxed{x = 9}$

Sustituimos: $x + y + z = 15$

$x + y + z = 15$

$(9) + y + (6) = 15$

$y + 15 = 15$

$\boxed{y = 0}$

Compruebo si cumple:

$3x + y = 27$

$3(9) + 0 = 27$

$\boxed{27 = 27}$

En efecto, 6 también puede haber sido el número de partidos perdidos