关于 *Knight's Tour Problem* 的图论解法

吴英，李传文
兰州大学数学与统计学院，甘肃兰州 （730000）

摘 要：本文通过分析欧拉所给出的 *Knight's Tour Problem* 的解法，结合哈密尔顿路和哈密尔顿圈的相关知识，得出其解法对应着二部图中的一条哈密尔顿圈。由此再充分利用 8×8 棋盘所对应的 8×8 表格的对称性及同构图的特性，对欧拉所给出的 *Knight's Tour Problem* 的解法作了进一步的探讨，得出了以欧拉的解法为基础的以任一棋格为骑士周游起点的另外一系列解法。最后，把 *Knight's Tour Problem* 推广到了 $m\times n$ 棋盘上，考虑到移动规则的特殊性，利用图论的相关知识，得到了 3×4、8×16 和 16×16 棋盘上的 *Knight's Tour Problem* 的解法，同时给出了 $8m\times 8n$（$m>2, n>2$）棋盘上 *Knight's Tour Problem* 的猜想。

关键词： *Knight's Tour Problem* 哈密尔顿路 哈密尔顿圈 同构图 图的对称性
中图分类号：O157.6

1 问题的提出及有关理论

Knight's Tour Problem 是由印度棋手在大约公元前 200 年时直观地提出并解决的，该问题用现代语言描述的话，仍是在一个具体的图中找寻哈密尔顿圈的问题。其中，图 G 中的哈密尔顿圈指的是经过图 G 中每个顶点且只经过一次的闭迹；而图 G 中哈密尔顿路指的是经过 G 中每个顶点且只经过一次的开迹。

Knight's Tour Problem：给出一个 8×8 棋盘，用一个棋子代表骑士。一个骑士从当前位置通过向垂直方向移动 2 格，水平方向移动 1 格，或向垂直方向移动 1 格，水平方向移动 2 格的方式移动，那么，是否存在这样的可能： 让骑士能够落在棋盘的每一格上恰好一次，而又不违反规则呢？这样的旅行称为骑士周游（*knight tour*）。还可以要求一个骑士周游具有这样的性质：从最后一格移到第一格时，仍满足一个合法的骑士移动，具有这种性质的骑士周游称为重复周游（*Reentrant*）。

在给出该问题解法之前，我们先介绍如下定义、定理及相关理论[1, 2]。

定义 1 在图 G 中，如果一条边的两端点相同，就称它为环（*loop*）。

定义 2 设 G 是无向图（该图中的每条边都没有方向），$x\in V(G)$的顶点度（*vertex degree*）定义为 G 中与顶点 x 相关联的边的数目（一条环要计算两次）。

定义 3 两个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$称为同构的（*isomorphic*）,记为 $D\cong H$, 如果存在两个双射

$$\theta: V(G)\rightarrow V(H)$$

和

$$\Phi: E(G)\rightarrow E(H)$$

使得对任意 $a\in E(G)$,

$$\psi_G(a)=(x,y)\text{当且仅当 }\psi_H(\Phi(a))=(\theta(x),\theta(y))\in E(H).$$

映射对（θ,Φ）称为 G 和 H 之间的一个同构映射*(isomorphic mapping)*.

定义 4 若无环图的顶点集可以划分为两个非空子集 X 和 Y（其中 $|X|=m$ 和 $|Y|=n$），使得 X 中任何两顶点之间无边相连并且 Y 中任何两顶点之间也无边相连，则称该图为 2 部分图(偶图，*bipartite graph 或 bigraph*),记为 $K^*_{m,n}$, {X,Y}称为 2 部划分(*bipartation*).

定理 1 在 8×8 棋盘中，令 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列公共的棋格（$1\le i,j\le 8$），a_{kl} 表示第 k 行第 l 列公共的棋格（$1\le k,l\le 8$）。由移动法则可知，从 a_{ij} 到 a_{kl} 是合法的移动，当且仅当$|i-k|=1$, $|j-l|=2$ 或者$|i-k|=2$, $|j-l|=1$.

证明：由于 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列公共的棋格，a_{kl} 表示第 k 行第 l 列公共的棋格，如果从 a_{ij} 到

a_{kl} 是合法的移动，则其必然是向垂直方向移动 2 格，水平方向移动 1 格，或向垂直方向移动 1 格，水平方向移动 2 格的方式移动，所以 $|i-k|=1$, $|j-l|=2$ 或者 $|i-k|=2$, $|j-l|=1$。反之，如果 $|i-k|=1$, $|j-l|=2$ 或者 $|i-k|=2$, $|j-l|=1$，则表明从 a_{ij} 到 a_{kl} 必然是向垂直方向移动 2 格，水平方向移动 1 格，或向垂直方向移动 1 格，水平方向移动 2 格的方式移动，显然满足移动法则。 □

另外，当 $|(i+j)-(k+l)|$ 为偶数时，a_{ij} 到 a_{kl} 绝不是合法移动；也就是说，只有当$(i+j)$与$(k+l)$ 奇偶性不同时，a_{ij} 到 a_{kl} 才可能是合法的移动。把每个棋格看作某个图 G 的顶点，并且给每个顶点分别标上对应的标号 a_{ij}，那么只有当$(i+j)$与$(k+l)$奇偶性不同时，顶点 a_{ij} 与 a_{kl} 之间才可能存在一条公共边；也就是说，当$(i+j)$与$(k+l)$奇偶性相同时，顶点 a_{ij} 与 a_{kl} 之间不存在公共边。所以，我们可以根据$(i+j)$的奇偶性把顶点归类为两个不同的顶点子集 M，N，从而在此意义下 8×8 棋盘可被视为二部图，在同构的意义下该二部图是唯一的，记作 $K^*_{32,32}$，其顶点集分别为：$M=\{a_{ij}\mid(i+j)$为偶数，$1\le i,j\le 8\}$， $N=\{a_{kl}\mid(k+l)$为奇数，$1\le k,l\le 8\}$。

棋盘中的棋格看作图 $K^*_{32,32}$ 的顶点，两顶点之间有一条边当且仅当对应棋格之间存在合理的骑士移动。从而一条哈密尔顿路径代表 8×8 棋盘上的一个骑士周游，一个哈密尔顿圈代表一个重复周游（*Reentrant*）。

定理 2 设 G 是一个具有二分划 X， Y的二部图，如果 $|X|\neq|Y|$，则 G 中不存在哈密尔顿圈。

2 欧拉解法及对应图论解法

欧拉对该问题进行了研究，并给出了一种解法[3]。该解法将 8×8 棋盘上的 *Knight's Tour Problem* 转化成为 8×8 表格上能否按一定规则排列数字 1 到 64 的数学问题。欧拉给出的解法满足定理 1 的条件，并且我们将应用定理 1 探索该问题的新解法。欧拉得到的解法由下面的表格给出：

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

表 1 欧拉得出的 8×8 棋盘上 *Knight's Tour Problem* 的解法

其中，棋格中的数码代表骑士到达该棋格的次序。特别地，数码 1 的棋格表示骑士的初始位置。因为从棋格 1 到棋格 64 的移动是一个合法的骑士移动，所以该周游是一个重复周游(*Reentrant*)。并且该解法对应在二部图 $K^*_{32,32}$ 上是一个哈密尔顿圈。我们任取 8×8 棋盘上的某一棋格，按照二部图 $K^*_{32,32}$ 上的哈密尔顿圈上顶点所对应的棋格进行合理移动，就可以顺利完成一次重复周游(*Reentrant*)。结合以上图论知识的分析，另外考虑到该解法的循环性及其 8×8 棋盘的对称性，本文作者得到下述算法，进而可以容易的得到 *Knight's Tour Problem* 的一系列解法。

8×8 棋盘上的每一个棋格都可以作为周游的起始位置。也就是说，在表 1 中的每一个数字都可以变成 1，其余数字均作相应变化，即可得出 *Knight's Tour Problem* 的一种解法。算法表述如下：任取表 1 中的数字 K, 使其变为 $K'=1$, 其余数字 L 均变为 L'：

若 $L\ge K$, 则 $L'=L-(K-1)$;

若 $L<K$，则 $L'=L-(K-1)+64$。

例如，将表 1 中的 17 作为起始位置，则可得一种解法如下表所示：

42	27	44	21	36	25	46	19
33	30	41	26	45	20	37	24
28	43	32	35	22	39	18	47
31	34	29	40	17	48	23	38
6	55	16	49	8	61	2	63
15	50	7	54	3	64	11	60
56	5	52	13	58	9	62	1
51	14	57	4	53	12	59	10

表 2 8×8 棋盘上 *Knight's Tour Problem* 新的解法

因此，在欧拉解法的基础上我们应用上述算法可得另外一系列不同解法。

3 *Knight's Tour Problem* 的拓展及相关猜想

Knight's Tour Problem 能应用在任何 $m\times n$ 的棋盘上，我们将其视为图中哈密尔顿路径的存在性问题。把一个 $m\times n$ 棋盘中的棋格看作 $m\times n$ 阶的二部图 G 的顶点，两个棋格之间有一条边当且仅当这两个棋格间是一个合法的骑士移动。G 中的一条哈密尔顿路代表 $m\times n$ 棋盘上的一个骑士周游，一个哈密尔顿圈代表一个重复周游。我们考虑 m×n 棋盘为黑白相间的棋格，一个合法的骑士移动必然是不同颜色棋格间的移动。如果 m 和 n 都是奇数，则一种颜色的棋格数比另一种颜色的棋格数多 1，因此由定理 2 可知，此时 G 中不存在重复周游。如果 m 和 n 中至少有一个是偶数，则黑白棋格数相同，这才有可能存在重复周游。骑士在 n×n 棋盘上周游，用 1 到 n^2 为棋格标号，引出了一个方阵，1 到 n^2 中的每个数码恰好出现一次。对于 8×8 的棋盘的上述解法对应在二部图 $K^*_{32,\ 32}$ 上是一个哈密尔顿圈，因此，每一个棋格都可以作为骑士的最终位置。也就是说，在表 1 中的每一个数字都可以变成 64，其余数字均作相应变化，即可得出 *Knight's Tour Problem* 的一种解法。具体算法如下：

任取表 1 中的数字 K, K 变成 $K'=64$,其他数字 L 变为 L',若 $L\le K$, 则 $L'=L+(64-K)$；

若 $L>K$, 则 $L'=L-K$.

由此算法可以保证棋盘中最外面的棋格可以为终点，即表 1 中最外面的行列中的数字可以是 64，由此，我们可以得出在 8×16 和 16×16 棋盘上的 *Knight's Tour Problem* 的解法。我们把 16×16 棋盘看作四个 8×8 棋盘拼凑而成，骑士从一个 8×8 棋盘过渡到另一个 8×8 棋盘来完成周游，数字 1 代表起始位置，顺时针方向完成一个 8×8 棋盘上的骑士周游再到另一个 8×8 棋盘，1 和 64 之间都是合法的骑士周游。对应解法如下表所示：

32	17	34	11	26	15	36	9	102	87	104	81	96	85	106	79
23	20	31	16	35	10	27	14	93	90	101	86	105	80	97	84
18	33	22	15	12	29	8	37	88	103	92	95	82	99	78	107
21	24	19	30	7	38	13	28	91	94	89	100	77	108	83	98
60	45	6	39	62	51	56	53	66	105	76	109	68	121	126	123
5	40	61	44	57	54	1	50	75	110	67	114	127	124	71	120
46	59	42	3	48	63	52	55	116	65	112	73	118	69	122	125
41	4	47	58	43	2	49	64	111	74	117	128	113	72	119	70

表 3 *8×16* 棋盘上 *Knight's Tour Problem* 的解法

32	17	34	11	26	15	36	9	38	23	40	17	32	21	42	15
23	20	31	16	35	10	27	14	29	26	37	22	41	16	33	20
18	33	22	25	12	29	8	37	24	39	28	31	18	35	14	43
21	24	19	30	7	38	13	28	27	30	25	36	13	44	19	34
60	45	6	39	62	51	56	53	2	51	12	45	4	57	62	59
5	40	61	44	57	54	1	50	11	46	3	50	63	60	7	56
46	59	42	3	48	63	52	55	52	1	48	9	54	5	58	61
41	4	47	58	43	2	49	64	47	10	53	64	49	8	55	6
38	29	24	27	2	11	52	47	64	55	50	53	28	37	14	9

23	26	39	30	51	46	1	10	49	52	1	56	13	8	27	36
40	37	28	25	12	3	48	53	2	63	54	51	38	29	10	15
17	22	31	36	45	50	9	64	43	48	57	62	7	12	35	26
32	41	18	13	4	63	54	49	58	3	44	39	30	25	16	11
21	16	35	44	57	60	5	8	47	42	61	6	19	22	31	34
42	33	14	19	62	7	58	55	4	59	40	45	24	33	20	17
15	20	43	34	59	56	61	6	41	46	5	60	21	18	23	32

表 4 *16×16* 棋盘上 *Knight's Tour Problem* 的解法

猜想：当 $m>2,n>2$ 时，$8m\times 8n$ 棋盘上的 *Knight's Tour Problem* 不存在合理的骑士周游。

我们可以把 16×16 棋盘看作四个 8×8 棋盘拼凑而成，骑士从一个 8×8 棋盘过渡到另一个 8×8 棋盘时，其起点和终点都集中在 16×16 棋盘中心的 8×8 棋盘中，当 $m>2,n>2$ 时，$8m\times 8n$ 棋盘上的骑士移动再无法合乎法则的向外延伸，故可能不存在合理的骑士周游。

参考文献：

[1]孙惠泉.图论及其应用（第 1 版）[M]. 北京：科学出版社 2004.9. (4—6).

[2]徐俊明.图论及其应用（第 1 版）[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社 1998.1. (8—16).

[3]Richard A.Brualdi. Introductory Combinatones(Fourth Edition.)[M].Beijing: China machine, Press. 2005.3 (454-455).

The solutions of Knight's Tour problem in Graph Theory

Wu Ying,Li Chuanwen

Department of mathematics and satistics of Lanzhou University, Lanzhou, 73000 China

Abstract

According to the analysis of the solution to *Knight's Tour Problem* given by Euler earlier and the knowledge of Hamilton path and Hamilton cycle, we obtain that the solution denotes a Hamilton cycle in the defined bigraph. With the use of the symmetrics of 8-by-8 chess-board and the special properties of isomorphic graphs, we botain a series of solutions of this problem whose each square can be the initial position of the knight from the advanced discussions about the solutions given by Euler. Finally, we take the *Knight's Tour Problem to* m-by-n chess-board. According to the spectral of the precinple to legal moves and some knowledge about Graph theory we can obtain the solutions of *Knight's Tour Problem* on 3-by-4 chess-board

8-by-16 chess-board and 16-by-16 chess-board,and obtain a conjecture to *Knight's Tour Problem* on 8-by-8 chess-board（$m>2,n>2$）.

Keywords：Knight's Tour Problem　Hamilton path　Hamilton cycle　isomorphic graph the symmetrics of graphs

CLC Number：O157.6

作者简介：吴英(1980—)，山东郓城人，硕士研究生，研究方向基础数学。