

5 Rekenen met vierkantswortels

5.1 Rekenregels voor vierkantswortels

INSTAP

Bereken.

1 Zijn beide uitdrukkingen gelijk? Vul de derde kolom in met = of ≠.

a $\sqrt{16 \cdot 9} =$ _____ $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} =$ _____ $\sqrt{16 \cdot 9} =$ _____ $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ _____

b $\sqrt{\frac{64}{4}} =$ _____ $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} =$ _____ $\sqrt{\frac{64}{4}} =$ _____ $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$ _____

c $\sqrt{4^3} =$ _____ $(\sqrt{4})^3 =$ _____ $\sqrt{4^3} =$ _____ $(\sqrt{4})^3$ _____

d $\sqrt{16+9} =$ _____ $\sqrt{16} + \sqrt{9} =$ _____ $\sqrt{16+9} =$ _____ $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ _____

e $\sqrt{16-9} =$ _____ $\sqrt{16} - \sqrt{9} =$ _____ $\sqrt{16-9} =$ _____ $\sqrt{16} - \sqrt{9}$ _____

f $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} =$ _____ $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} =$ _____ $\sqrt{(-4) \cdot (-9)} =$ _____ $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$ _____

Rekenregels voor vierkantswortels

► Product van vierkantswortels

De vierkantswortel van een product van twee positieve getallen is gelijk aan het product van de vierkantswortels van deze getallen.

In symbolen $\forall a, b \in \mathbb{R}^+: \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Voorbeelden

$$\sqrt{160000} = \sqrt{16 \cdot 10000} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10000} = 4 \cdot 100 = 400$$

$$\sqrt{75} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{75 \cdot 3} = \sqrt{225} = 15$$

► Quotiënt van vierkantswortels

De vierkantswortel van een quotiënt van twee positieve getallen is gelijk aan het quotiënt van de vierkantswortels van deze getallen.

In symbolen

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+: \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Voorbeelden

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$$

► Macht van vierkantswortels

De macht van de vierkantswortel van een positief getal is gelijk aan de vierkantswortel van de macht van dit getal.

In symbolen

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}: (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$$

Voorbeelden

$$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4} = \sqrt{625} = 25$$

$$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

► Opmerking

- Vierkantswortels met hetzelfde grondtal kun je herleiden.

Voorbeelden

$$4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{5} - 4\sqrt{2} = -5\sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$\sqrt{3} + \sqrt{5}$ kun je niet herleiden

- Som van vierkantswortels

De vierkantswortel van de som van twee strikt positieve getallen is niet gelijk aan de som van de vierkantswortels van deze getallen.

In symbolen

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+: \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Voorbeeld

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8+6=14 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36}$$

OEFEN

- 2** Werk uit en vereenvoudig.

- a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ _____
- b $\sqrt{\frac{49}{4}}$ _____
- c $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$ _____
- d $\sqrt{5^2 - 4^2}$ _____
- e $(-\sqrt{4^2})^{-1}$ _____
- f $\sqrt{25+144}$ _____

3 Werk uit en vereenvoudig.

- a $\sqrt{\frac{125}{20}}$ _____
- e $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$ _____
- b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{8}$ _____
- f $(-3\sqrt{3^2})^{-1}$ _____
- c $\sqrt{10^2 - 8^2}$ _____
- g $\sqrt{4 + 36}$ _____
- d $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{5}\sqrt{3}$ _____
- h $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{125}}$ _____

4 Bewijs: $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.



5.2 Vierkantswortels vereenvoudigen

INSTAP

5 a Vul aan.

- $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{\underline{\quad}} \cdot \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
- Noteer het grondtal in $\sqrt{200}$ als een product van een volkomen kwadraat en een natuurlijk getal.
 $\sqrt{200} = \sqrt{\underline{\quad}} \cdot \underline{\quad}$

gebruik de rekenregel voor het product van vierkantswortels
reken verder uit

b Herschrijf $\sqrt{18}$ op dezelfde manier als $\sqrt{200}$.

c Bereken.

$\sqrt{200} + \sqrt{18}$ _____

Vierkantswortels vereenvoudigen

► Wortelvormen vereenvoudigen

- Om een vierkantswortel te vereenvoudigen, ontbind je het grondtal in factoren. Factoren die een volkomen kwadraat zijn, breng je buiten het wortelteken.

Voorbeelden

$\forall a, x \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{7a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = a\sqrt{7}$$

$$\sqrt{5x^3} = \sqrt{5 \cdot x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{5x} = x\sqrt{5x}$$

- Als je geen volkomen kwadraten herkent, kun je het grondtal ontbinden in priemfactoren.

Werkwijze

Vereenvoudig $\sqrt{48x^6y^3}$

1 Ontbind 48 in priemfactoren

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

2 Letterfactoren met oneven exponent schrijf je als het product van twee factoren, zodat de exponent van een van de factoren 1 is.

$$\sqrt{48x^6y^3} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot x^6 \cdot y^2 \cdot y}$$

3 Breng de volkomen kwadraten voor het wortelteken en deel hierbij de exponent door twee.

$$= 2^2 \cdot x^3 \cdot y \sqrt{3 \cdot y}$$

4 Reken verder uit.

$$= 4x^3y\sqrt{3y}$$

Voorbeelden

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{12a^9b^6} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot a^8 \cdot a \cdot b^6} = 2a^4b^3\sqrt{3a}$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

► Noemer wortelvrij maken

Je kunt breuken vereenvoudigen door de noemer wortelvrij te maken.

Om de noemer wortelvrij te maken, vermenigvuldig je de teller en de noemer met een gepaste factor.

Werkwijze

$$\frac{2}{\sqrt{27}}$$

1 Vereenvoudig de vierkantswortel in de noemer.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{27}} &= \frac{2}{\sqrt{9 \cdot 3}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2 Vermenigvuldig de teller en de noemer met de vierkantswortel uit de noemer.

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

3 Reken verder uit.

$$\begin{aligned}&= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

Voorbeeld 1

$$\frac{9}{\sqrt{3}}$$

vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{3}$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{3}$$

kwadraat van een vierkantswortel

$$= 3\sqrt{3}$$

vereenvoudig de breuk

Voorbeeld 2

$$\sqrt{\frac{7}{18}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9 \cdot 2}}$$

vereenvoudig de noemer

$$= \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{2}$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3 \cdot 2}$$

kwadraat van een vierkantswortel

$$= \frac{\sqrt{14}}{6}$$

OEFEN

6 Vereenvoudig de vierkantswortels.

a $\sqrt{50} =$ _____

c $\sqrt{192} =$ _____

b $\sqrt{24} =$ _____

d $\sqrt{125} =$ _____

7 Vereenvoudig de vierkantswortels.

✓ $\forall a, x, y \in \mathbb{R}^+$

a $\sqrt{12a^3} =$ _____

d $\sqrt{160x^{11}y^{100}} =$ _____

= _____

= _____

b $\sqrt{54x^{10}y} =$ _____

= _____

e $\sqrt{(-3a^6)^2 \cdot a^8} =$ _____

= _____

c $\sqrt{32a^{16}} =$ _____

= _____

f $\sqrt{\sqrt{x^{60}}} =$ _____

= _____

8 Vereenvoudig en maak de noemer wortelvrij.

✓ a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} =$ _____

= _____

d $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} =$ _____

= _____

b $\frac{4}{\sqrt{32}} =$ _____

= _____

e $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} =$ _____

= _____

c $\frac{-2}{\sqrt{24}} =$ _____

= _____

f $\frac{6}{\sqrt{44}} =$ _____

= _____

9 Bereken en vereenvoudig.



a $\sqrt{3} + \sqrt{27} - 2\sqrt{3}$ = _____

= _____

= _____

= _____

e $(-1 + \sqrt{8})^2$ = _____

= _____

= _____

= _____

b $(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$ = _____

= _____

= _____

= _____

f $\sqrt{3}(\sqrt{27} - 5\sqrt{2})$ = _____

= _____

= _____

= _____

c $2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ = _____

= _____

= _____

= _____

g $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{5}$ = _____

= _____

= _____

= _____

d $(4 - 2\sqrt{6})(\sqrt{24} + \sqrt{54})$ = _____

= _____

= _____

= _____

h $\frac{24\sqrt{49}}{32\sqrt{7}}$ = _____

= _____

= _____

= _____

OPDRACHTEN

2 Rekenen met vierkantswortels

 reeks 1

- 10** Verbind de vierkantswortels met de vereenvoudigde vorm.

- | | |
|----------------|----------------|
| • $\sqrt{24}$ | • $7\sqrt{2}$ |
| • $\sqrt{28}$ | • $11\sqrt{2}$ |
| • $\sqrt{44}$ | • $7\sqrt{3}$ |
| • $\sqrt{54}$ | • $2\sqrt{6}$ |
| • $\sqrt{98}$ | • $3\sqrt{6}$ |
| • $\sqrt{147}$ | • $4\sqrt{6}$ |
| • $\sqrt{242}$ | • $2\sqrt{7}$ |
| | • $3\sqrt{7}$ |
| | • $2\sqrt{11}$ |

- 11** Vereenvoudig.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+$$

- a $\sqrt{500}$ _____
- b $\sqrt{20x^2}$ _____
- c $\sqrt{27x^4}$ _____
- d $\sqrt{8x^{20}}$ _____
- e $\sqrt{25+144}$ _____

- 12** Maak de noemer wortelvrij.

- a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ _____
- b $\frac{7}{\sqrt{7}}$ _____
- c $\frac{25}{\sqrt{10}}$ _____
- d $\frac{4}{\sqrt{6}}$ _____

13 Werk uit.

a $4\sqrt{11} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{11}$

b $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

c $\sqrt{10} + 2\sqrt{90}$

d $3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + \sqrt{98}$

14 Werk uit en vereenvoudig.

a $\sqrt{4} \cdot \sqrt{32}$

b $5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot (-4\sqrt{3})$

c $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{5})$

d $(4\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{2} - 3\sqrt{5})$

15 Vereenvoudig.

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+$$

a $\sqrt{8a^7b}$

b $\sqrt{\frac{45a^3}{b^2}}$

c $\sqrt{16 + 25 + 49}$

d $\sqrt{25a^9 - 16a^9}$

16 Maak de noemer wortelvrij en vereenvoudig.

a $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ _____

b $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ _____

c $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$ _____

d $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{125}}$ _____

17 Werk uit en vereenvoudig.

a $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{54}}$ _____

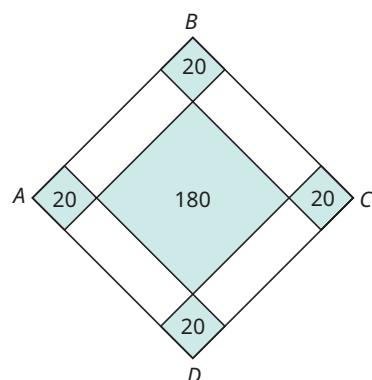
c $(-3\sqrt{2^3})^4$ _____

b $2\sqrt{5} - 3\sqrt{7} - (4\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$ _____

d $\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ _____

18 In het vierkant $ABCD$ zijn vijf kleinere vierkanten getekend waarvan de oppervlakte gegeven is.

a Bereken de omtrek van de gekleurde figuur.



b Bereken de oppervlakte van het vierkant $ABCD$.

19 Welke uitspraak is waar? Kruis aan.

$(\sqrt{8})^8$ is de tweede macht van 2^2 .

$(\sqrt{8})^8$ is de derde macht van 2^2 .

$(\sqrt{8})^8$ is de zesde macht van 2^2 .

$(\sqrt{8})^8$ is de achtste macht van 2^2 .

$(\sqrt{8})^8$ is de zestiende macht van 2^2 .

20 Werk uit en vereenvoudig. Maak indien nodig de noemer wortelvrij.

a $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150}$

b $\sqrt{\frac{1}{7}} + \sqrt{7}$

c $(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$

d $3\sqrt{45} - 2\sqrt{\frac{1}{5}}$

e $\frac{\sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3^5}}{\sqrt{3^7}}$

f $-\sqrt{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

g $(\sqrt{5} + \sqrt{125} + \sqrt{80})^2$

h $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

21 Werk uit en vereenvoudig.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{R}_0^+$$

a $\sqrt{125b^3} + \sqrt{500b^3}$

b $(2\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + 2\sqrt{a}) - \sqrt{16a^2}$

c $(4\sqrt{\pi} - 2\sqrt{3\pi})^2$

d $\left(\frac{-\sqrt{z}}{\sqrt{z^5}}\right)^{-6}$

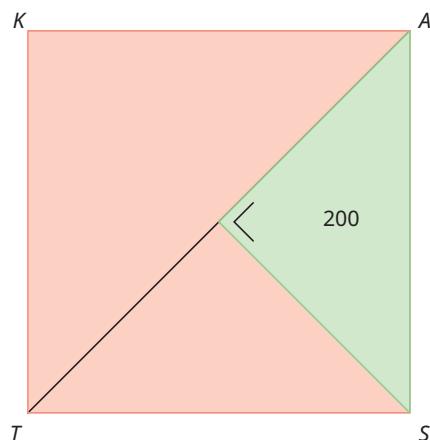
e $3\sqrt{18} - a\sqrt{27a} + \sqrt{108a^3}$

f $(-3\sqrt{a^3})^3$

g $2\sqrt{8a^3} \cdot 5\sqrt{27a^2}$

h $\sqrt{162ab^6} - b^3\sqrt{2a}$

- 22 Gegeven is het vierkant $KAST$. De oppervlakte van de groene rechthoekige driehoek is 200 cm^2 . Bereken de omtrek van het vierkant op 1 millimeter nauwkeurig.
-
-
-
-
-
-
-



23 Werk uit en vereenvoudig.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+$$

a $3\sqrt{3a^2b^3} + ab\sqrt{27b} - b\sqrt{12a^2b}$

b $2\sqrt{8a} (\sqrt{32a^3} - 2\sqrt{2a})$

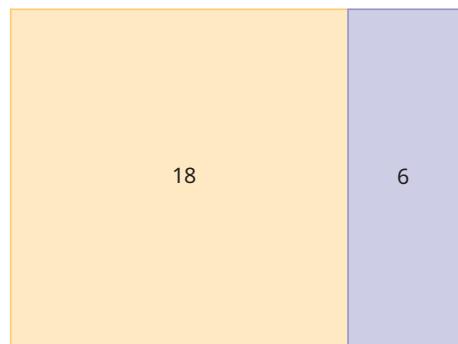
c $(\sqrt{7b} - 2\sqrt{a})(3\sqrt{b} - \sqrt{a})$

d $\frac{(-2x\sqrt{y^3})^5}{-2y\sqrt{x^3}}$

- 24** In een tovervierkant is de som van de getallen horizontaal, verticaal of diagonaal steeds dezelfde.
Vul het tovervierkant in.

$-\sqrt{3}$		$\sqrt{27}$
	$\sqrt{12}$	
$\sqrt{3}$		

- 25** Een stuk bosgrond heeft de vorm van een vierkant met een oppervlakte van 18 are. Ernaast ligt een rechthoekig stuk bos met één gemeenschappelijke zijde. De oppervlakte van dit tweede stuk is 6 are. Bosbeheer wil de beide gronden samenvoegen. Bereken de exacte breedte en lengte van het nieuwe bos in meter als je weet dat één are overeenkomt met 100 m^2 .



- 26** Een gelijkbenige rechthoekige driehoek heeft een oppervlakte van 72. Bereken de lengte van de schuine zijde. Noteer je antwoord in wortelvorm.

- 27** De diagonaal van een rechthoek met oppervlakte $8\sqrt{3}$ cm² is dubbel zo lang als een van de zijden. Bereken de lengten van de zijden van deze rechthoek. Noteer je antwoord in wortelvorm.

28 Gegeven zijn de eigenschappen van bewerkingen van reële getallen:

- De optelling en de vermenigvuldiging in \mathbb{R} zijn commutatief.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- De optelling en de vermenigvuldiging in \mathbb{R} zijn associatief.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- 0 is het neutraal element voor de optelling in \mathbb{R} .

$$\forall a \in \mathbb{R}: 0 = a = 0 + a$$

- 1 is het neutraal element voor de vermenigvuldiging in \mathbb{R} .

$$\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$$

- 0 is het opslorpend element voor de vermenigvuldiging in \mathbb{R} .

$$\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

- De vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling in \mathbb{R} .

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot c$$

Noteer de eigenschappen voor bewerkingen met reële getallen.

a $\sqrt{8} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{8}$

b $\sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$

c $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

d $\sqrt{27} + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{27}$

e $(\pi \cdot 3) \cdot 10 = \pi \cdot (3 \cdot 10)$

f $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{0} \cdot (-\sqrt{15}) =$

29 Vereenvoudig. Maak de noemer wortelvrij.

a $\frac{\sqrt{27} - 6\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}$

b $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

c $\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{125}}{4\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{24} - \sqrt{54}}{\sqrt{5}}$$

30 Bereken.

$$\frac{(\sqrt{6})^{12}}{(\sqrt{24})^6}$$

31 Bereken met $x \in \mathbb{R}^+$ en $y \in \mathbb{R}^-$.

$$\mathbf{a} \quad \sqrt{y^2}$$

b $\sqrt{x^2 \cdot y^4}$

= _____

c $\sqrt{-9x^2y^5}$

$$\mathbf{d} \quad \sqrt{\frac{-y^3}{27}}$$

32 Bewijs dat in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden

\sqrt{a} en \sqrt{b} geldt $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ als $a > 0$ en $b > 0$.

33 Vul het bewijs van de rekenregel van macht van vierkantswortels aan.

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z} : (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$$

• $m = 0:$ $\underbrace{(\sqrt{a})^0 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ en } \sqrt{a^0} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}}_{(\sqrt{a})^0 = \sqrt{a^0}}$

• $m = 1:$ $\underbrace{(\sqrt{a})^1 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ en } \sqrt{a^1} = \underline{\hspace{2cm}}}_{(\sqrt{a})^1 = \sqrt{a^1}}$

• $m > 1:$ $(\sqrt{a})^m = \underline{\hspace{4cm}} \quad \text{definitie macht}$

$$= \underline{\hspace{4cm}} \quad \text{product van vierkantswortels}$$

$$= \underline{\hspace{4cm}} \quad \text{definitie macht}$$

• $m = -1:$ $\underline{\hspace{4cm}}$

• $m < -1:$ $\underline{\hspace{4cm}}$

$$\underline{\hspace{4cm}}$$

$$\underline{\hspace{4cm}}$$

$$\underline{\hspace{4cm}}$$



Maak online nog extra oefeningen over deze paragraaf.