

**Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.**

### Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (08h00 → 10h00).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.

### Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Le soin de la copie sera prise en compte (-1 point en cas de manque de soin).
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Ne rendre que la feuille de réponses.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (zone grisée avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse.
- Les 7 parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.

## Sujet

### Partie 1 : Lemme de l'itération (3 points)

**Question 1 (3 points)** Démontrer que  $\{u \cdot b^{|u|} \mid u \in \{a, b, c\}^*\}$  est non régulier.

### Partie 2 : Questions diverses et de cours (5 points)

Pour rappel :

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un  $\epsilon$ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec  $\epsilon$ -transitions.



(.1) Pas OK.



(.2) Pas OK.

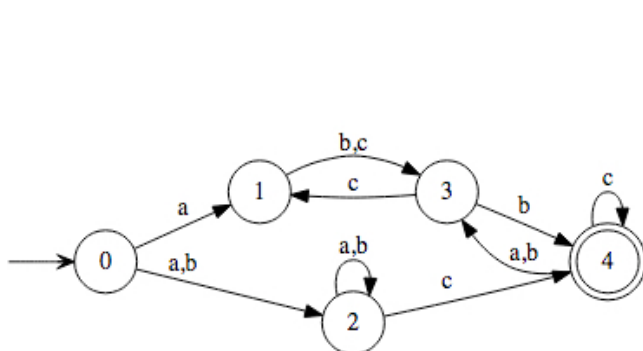


(.3) Pas OK.



(.4) OK.

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

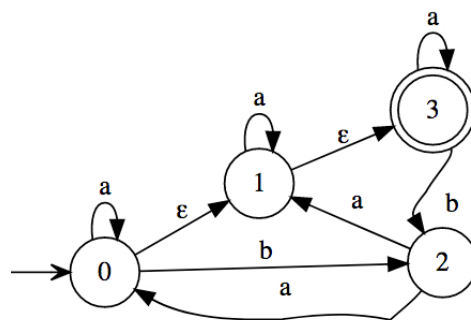
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des  $\epsilon$ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

**Question 2 ♣ (0,5 points)** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages réguliers sur un alphabet  $\Sigma$ .

- ☐ a  $L_1 \cup L_2$  est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si  $L_1 \cup L_2$  est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si  $L_1 \cap L_2$  est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si  $L_1 \cap L_2$  est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e  $L_1 \cap L_2$  est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si  $L_1 \cup L_2$  est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

**Question 3 (0,25 points)** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages non réguliers sur un alphabet  $\Sigma$ .

- ☐ a  $L_1 \cap L_2$  est un langage non régulier.
- ☐ b  $L_1 \cap L_2$  est un langage régulier.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si  $L_1 \cap L_2$  est régulier ou non.

**Question 4 (0,25 points)** Soient  $L_1$  un langage régulier et  $L_2$  un langage non régulier sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$  tels que  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ .

- ☐ a  $L_1 \cup L_2$  est un langage régulier.
- ☐ b  $L_1 \cup L_2$  est un langage non régulier.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si  $L_1 \cup L_2$  est régulier ou non.

**Question 5 (0,25 points)** Soient  $L_1$  un langage et  $L_2$  un langage non régulier sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$  tels que  $L_1 \cap L((a \cdot b)^*) = L_2$ .

- ☐ a  $L_1$  est un langage régulier.
- ☐ b  $L_1$  est un langage non régulier.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si  $L_1$  est régulier ou non.

**Question 6 ♣ (0,5 points)** Soit  $G$  une grammaire et  $L$  le langage engendré par cette grammaire.

- ☐ a S'il existe un automate qui reconnaît  $L$  alors celui-ci est nécessairement un AENFD et on ne peut trouver d'AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ b S'il existe un automate qui reconnaît  $L$  alors celui-ci est nécessairement non minimal.
- ☐ c S'il existe un automate qui reconnaît  $L$  alors celui-ci est nécessairement un  $\epsilon$ -AENFD et on ne peut trouver d'AEFND qui reconnaît  $L$ .
- ☐ d Si  $G$  est linéaire, alors on peut toujours trouver un automate qui reconnaît  $L$ .
- ☐ e Aucune des affirmations n'est correcte.

**Question 7 (0,25 points)**

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.  
Le résultat (intermédiaire ou non) est représenté par le tableau ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.  
☐ b Cet automate est minimal.  
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

**Question 8 (0,25 points)** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages non réguliers sur un alphabet  $\Sigma$ .

- ☐ a  $L_1 \cup L_2$  est un langage non régulier. ☐ b  $L_1 \cup L_2$  est un langage régulier.  
☐ c Il manque des données pour déterminer si  $L_1 \cup L_2$  est régulier ou non.

**Question 9 (0,25 points)**

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.  
Le résultat (intermédiaire ou non) est représenté par le tableau ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	3	3
3	2	2
4	4	4

- ☐ a Cet automate est minimal.  
☐ b Cet automate est non minimal.  
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

**Question 10 ♣ (0,5 points)** Considérons un automate dont les états sont numérotés de 1 à  $n$  (l'état 1 est l'état initial), avec  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , les états accepteurs sont dans l'ensemble  $F$  et  $R_{i,j}^k$  est une expression régulière dénotant l'ensemble des mots permettant d'aller de l'état  $i$  à l'état  $j$  en ne passant que par des états dont le numéro est inférieur ou égal à  $k$ .

- ☐ a  $R_{i,j}^k = R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}$ . ☐ e  $R_{i,j}^k = R_{i,j}^{k-1} + R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}$ .  
☐ b Une expression régulière dénotant le langage reconnu par l'automate est  $\sum_{f \in F} R_{1,f}^k$ . ☐ f Une expression régulière dénotant le langage reconnu par l'automate est  $\sum_{k \in [1,n]} R_{1,n}^k$ .  
☐ c  $R_{i,j}^k = R_{i,j}^{k-1} + R_{i,k}^{k-1} \cdot R_{k,k}^{k-1} \cdot R_{k,j}^{k-1}$ . ☐ g Une expression régulière dénotant le langage reconnu par l'automate est  $\sum_{f \in F} R_{1,f}^n$ .  
☐ d  $R_{i,j}^k = R_{i,k}^{k-1} \cdot R_{k,k}^{k-1} \cdot R_{k,j}^{k-1}$ . ☐ h Aucune des affirmations n'est correcte.

**Question 11 ♣ (0,25 points)** Soit  $L$  un langage régulier sur un alphabet  $\Sigma$ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.  
☐ b Il est toujours possible de trouver un  $\epsilon$ -AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.  
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.  
☐ d Aucune des affirmations concernant  $L$  n'est correcte.

**Question 12 ♣ (0.75 points)** Le langage d'une expression régulière  $r$  est dénoté par  $L(r)$ . Soient  $e$  et  $f$  deux expressions régulières.

- ☐ a  $L(e \cdot \emptyset) = L(\emptyset \cdot e) = L(e)$ . ☐ g  $L((e + \epsilon) \cdot e^+) = L(e^*)$ .  
☐ b  $L((e + f)^*) = L((f + e)^*)$ . ☐ h  $L(e + f) = L(f + e)$ .  
☐ c  $L((e \cdot f)^*) = L((e + f)^*)$ . ☐ i  $L((e + \epsilon)^*) = L(e^*)$ .  
☐ d si  $\epsilon \in L(e)$ , alors  $L(e^+) = L(e^*)$ . ☐ j  $L((e + f)^*) = L(e^*) + L(f^*)$ .  
☐ e  $L(e + \emptyset) = L(\emptyset + e) = L(e)$ . ☐ k  $L((e + f)^* \cdot e) = L((e^* \cdot f)^*)$ .  
☐ f  $L(e \cdot f) = L(f \cdot e)$ . ☐ l Aucune des affirmations n'est correcte.

**Question 13 ♣ (0,5 points)** Soit  $G$  une grammaire et  $L$  le langage engendré par cette grammaire.

- ☐ a Si  $G$  est linéaire à gauche, alors on peut toujours trouver un AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ b Si  $G$  est linéaire, alors on peut toujours trouver un AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ c Si  $G$  est sous-contexte, alors on peut toujours trouver un AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ d Si  $G$  est hors-contexte, alors on peut toujours trouver un AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ e Si  $G$  est une grammaire générale, alors on peut toujours trouver un AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ f Si  $G$  est linéaire à droite, alors on peut toujours trouver un AEFD qui reconnaît  $L$ .
- ☐ g Aucune des affirmations n'est correcte.

**Question 14 (0,25 points)** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages non réguliers sur un alphabet  $\Sigma$  tels que  $L_1 \subseteq L_2$ .

- ☐ a  $L_1 \cup L_2$  est un langage non régulier.
- ☐ b  $L_1 \cup L_2$  est un langage régulier.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si  $L_1 \cup L_2$  est régulier ou non.

**Question 15 ♣ (0,25 points)** Soit  $L$  un langage quelconque sur un alphabet  $\Sigma$ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît ce langage.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un  $\epsilon$ -AEFND qui reconnaît ce langage.
- ☐ d Aucune des affirmations concernant  $L$  n'est correcte.

### Partie 3 : Détermination d'automates (2 points)

**Question 16 ♣ (2 points)**

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Nous appliquons l'algorithme de détermination sur cet automate. Nous ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.3.
- ☐ b Celui de la Figure III.2.
- ☐ c Celui de la Figure III.1.
- ☐ d Celui de la Figure III.4.
- ☐ e Aucun des automates.

### Partie 4 : Élimination des $\epsilon$ -transitions (2 points)

**Question 17 ♣ (2 points)**

Considérons l' $\epsilon$ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . Le/les AEFND(s) résultant de l'algorithme de suppression des  $\epsilon$ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.3.
- ☐ b Celui de la Figure IV.4.
- ☐ c Celui de la Figure IV.1.
- ☐ d Celui de la Figure IV.2.
- ☐ e Aucun des automates.

### Partie 5 : Grammaires régulières (3 points)

**Question 18 (2 points)**

Considérons la grammaire définie par  $(\{a, b, c\}, \{S, A, B, T\}, S, P)$  avec  $P = \{S \rightarrow aB \mid cT \mid bA, A \rightarrow aB \mid cS, B \rightarrow bA \mid cS \mid b, T \rightarrow cc\}$ . Nous considérons les automates dans la Figure V. L'AEFD qui reconnaît le langage généré par cette grammaire est :

- ☐ a Celui de la Figure V.2.
- ☐ b Celui de la Figure V.4.
- ☐ c Celui de la Figure V.6.
- ☐ d Celui de la Figure V.5.
- ☐ e Celui de la Figure V.3.
- ☐ f Celui de la Figure V.1.
- ☐ g Aucun des automates.

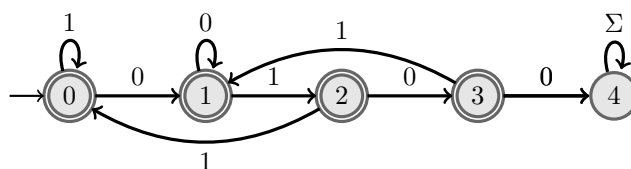
**Question 19 ♣ (1 points)**

Considérons le langage non-régulier défini par  $\{a^{2 \times n} b^n \in \{a, b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- ☐ a Ce langage est généré par une grammaire linéaire.
- ☐ b Ce langage est généré par la grammaire  $(\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, \{S \rightarrow AASB \mid \epsilon, A \rightarrow a, B \rightarrow b\})$ .
- ☐ c Ce langage est généré par la grammaire  $(\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, \{S \rightarrow AASB, A \rightarrow a, B \rightarrow b\})$ .
- ☐ d Ce langage est généré par une grammaire linéaire à gauche.
- ☐ e Ce langage est généré par une grammaire linéaire à droite.
- ☐ f Ce langage est généré par la grammaire  $(\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aaSb \mid \epsilon\})$ .
- ☐ g Ce langage est généré par la grammaire  $(\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow aaSb\})$ .
- ☐ h Aucune des affirmations concernant ce langage n'est correcte.

**Partie 6 : Automate vers expression régulière (2,5 points)****Question 20 ♣ (2,5 points)**

Nous considérons l'AEFD ci-contre. Nous nous intéressons à la méthode permettant de calculer une expression régulière en utilisant la méthode associant des équations aux états. Lors de l'application de cette méthode, nous pouvons trouver les équations suivantes (où  $X_i$  est l'équation associée à l'état  $i$ ) :



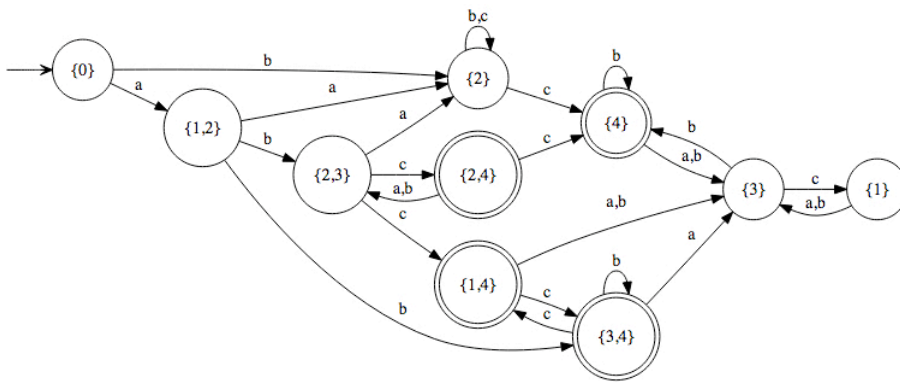
- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a $X_2 = 10X_1 + 0 + 1X_0 + \epsilon$            | <input type="checkbox"/> f $X_4 = \epsilon$ .                             |
| <input type="checkbox"/> b $X_1 = (0 + 01)^*(100 + 11X_0 + 1 + \epsilon)$ | <input type="checkbox"/> g $X_3 = 1X_1 + \epsilon$ .                      |
| <input type="checkbox"/> c $X_2 = 01X_1 + 0 + 1X_0 + \epsilon$ .          | <input type="checkbox"/> h $X_1 = (0 + 101)^*(10 + 11X_0 + 1 + \epsilon)$ |
| <input type="checkbox"/> d $X_2 = 0X_3 + 1X_0 + \epsilon$ .               | <input type="checkbox"/> i Aucune des équations n'est correcte.           |
| <input type="checkbox"/> e $X_4 = \emptyset$ .                            |   |

**Partie 7 : Constante d'itération minimale (2,5 points)**

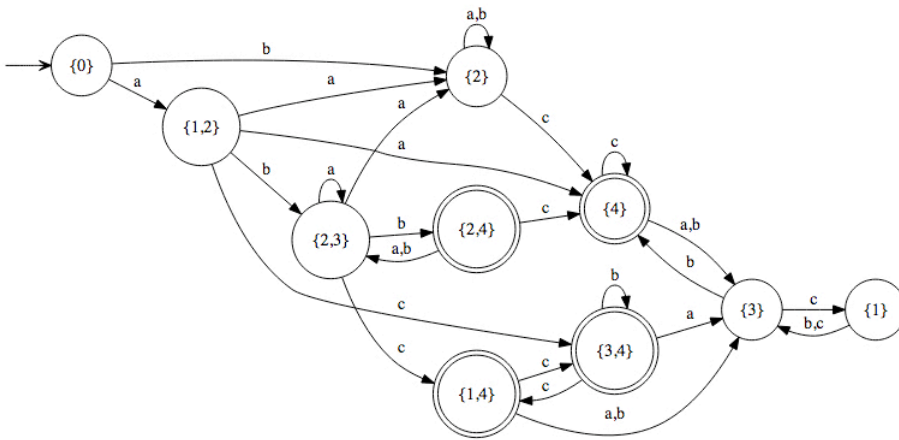
**Question 21 (2,5 points)** Donner la constante minimale d'itération du langage décrit par l'expression régulière  $1^*0101^*$ . Démontrer votre résultat, c'est-à-dire que vous devez montrer que la constante que vous aurez identifiée est bien une constante d'itération et qu'il n'y en a pas de plus petite.

**Champ Libre**

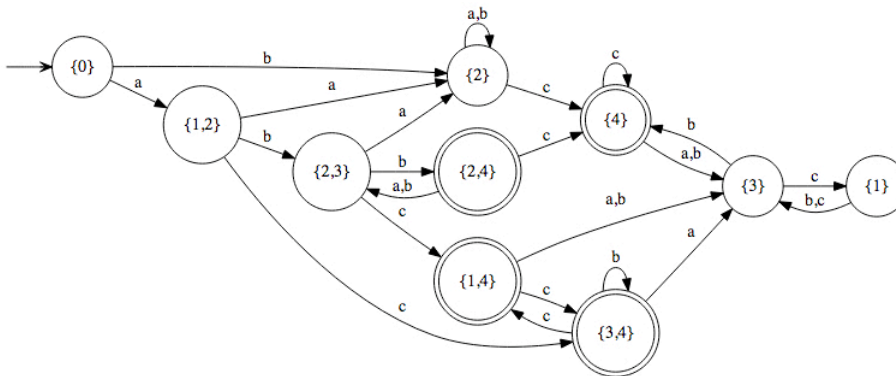
**Question 22** Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



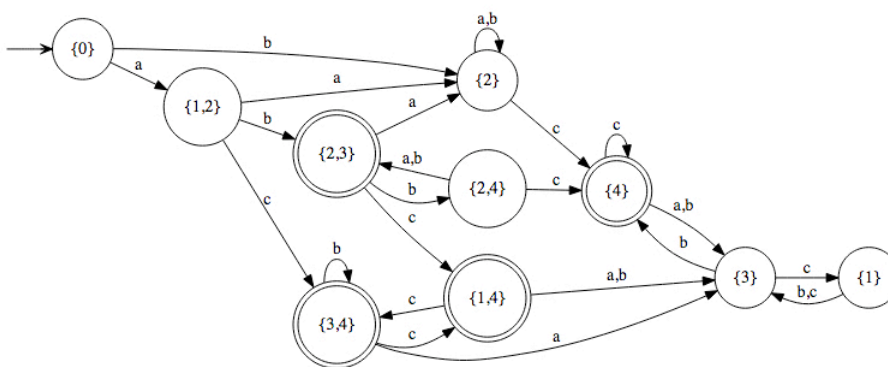
(.1)



(.2)

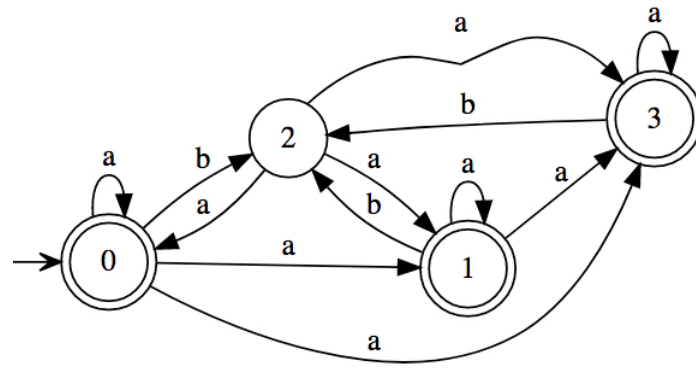


(.3)

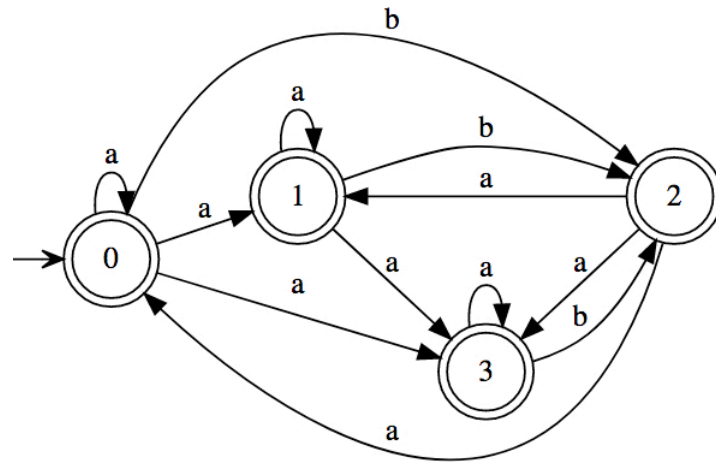


(.4)

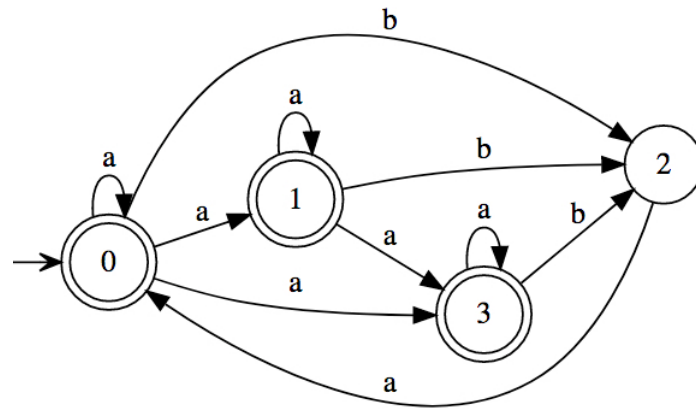
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



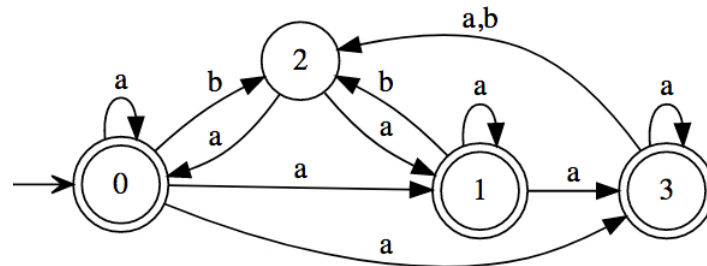
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des  $\epsilon$ -transitions.

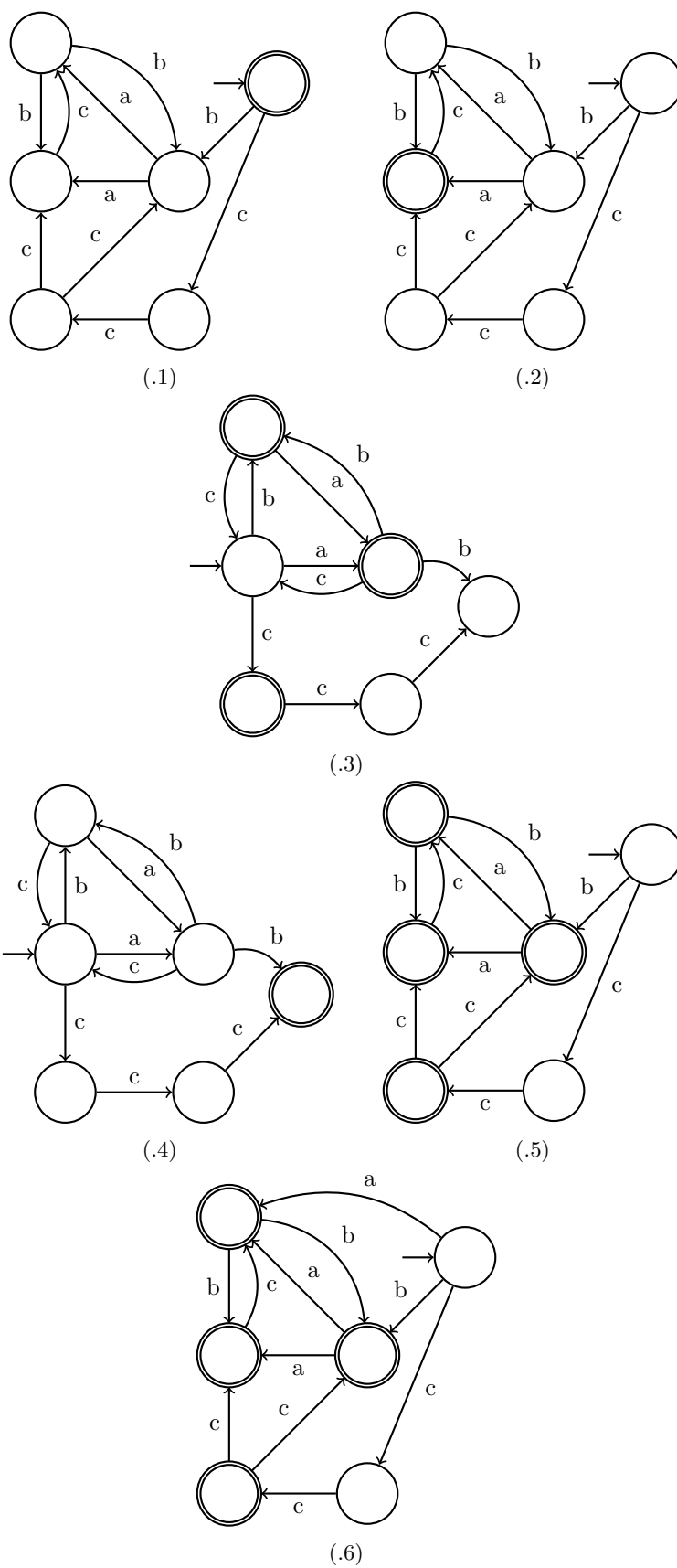
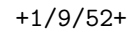


FIGURE V – Des automates pour l'exercice « Grammaire vers automate »





INF 302 : Langages et Automates  
Année académique 2017/2018

[illegible]

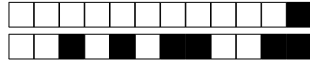
Numéro d'anonymat

.....

**f pf p j** *Réservé enseignant*



Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c



Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l

Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

Question 16 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 18 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 19 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 20 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 21 :

☐ f ☐ p ☐ v ☐ j *Réservé enseignant*

Question 22 :

☐ a *Réservé enseignant*

.....

.....