INF 302 : Langages & Automates

Chapitre 2 : Automates à états finis déterministes - définitions

Yliès Falcone

ylies.falcone@univ-grenoble-alpes.fr — www.ylies.fr

Univ. Grenoble-Alpes, Inria

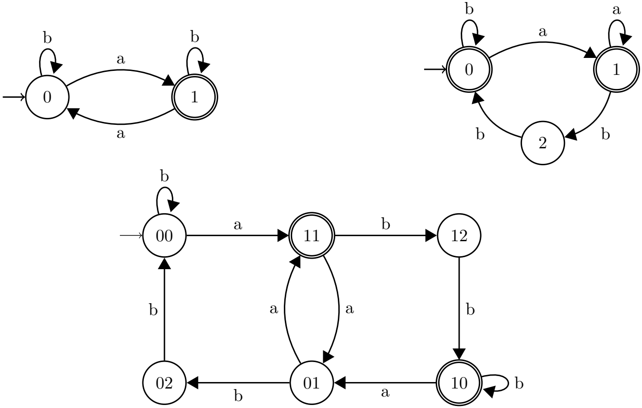
-

Laboratoire d'Informatique de Grenoble - www.liglab.fr

Équipe de recherche LIG-Inria, Corse - team.inria.fr/corse/

Année Académique 2018 - 2019

Intuition et objectifs



- Ingrédients de base : états (accepteurs), symboles, transitions — *syntaxe*.
- Exécution, mot accepté, langage accepté — *sémantique*.

À propos des automates à états finis déterministes

Définition formelle des automates à états finis déterministes.

Dans les automates à états finis déterministes :

- *déterministe* réfère au fait que pour un mot d'entrée, l'automate est dans un état unique
- *fini* réfère au fait que l'automate à un nombre fini d'états

Dans les prochains cours, nous étudierons les automates *non-déterministes*.

Automate à états fini déterministe

◁ Ingrédients de la définition d'un automate

Définition (Automate à états fini déterministe)

Un automate à états fini déterministe (abrégé AEFD) est donné par un 5-tuple

$$(Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$$

tel que :

- Q est un ensemble non-vide dont les éléments sont appelés états ;
- Σ est l'alphabet de l'automate ;
- $q_{\text{init}} \in Q$ est l'état initial ;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition de l'automate ; elle peut être partielle ;
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états états accepteurs (terminaux).

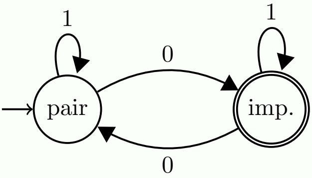
Un AEFD est dit complet, si sa fonction de transition est *totale*.

Automate à états fini déterministe : exemples

Considérons les mots dans $\{0, 1\}^*$

Exemple (Nombre *impair* de 0's – représentation graphique)

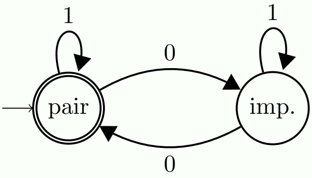
Un AEFD (complet) qui reconnaît les mots avec un nombre impair de 0's



- $Q = \{\text{pair}, \text{imp.}\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $q_{\text{init}} = \text{pair}$
- $\delta = \{(\text{pair}, 0, \text{imp.}), (\text{pair}, 1, \text{pair}),$ $(imp., 0, pair), (imp., 1, imp.)\}$
- $F = \{imp.\}$

Exemple (Nombre *pair* de 0's – représentation graphique)

Un AEFD (complet) qui reconnaît les mots avec un nombre pair de 0's



Automate à états fini déterministe : représentation tabulaire

Exemple (Nombre *impair* de 0's)

	↓ pair	imp.*
0	imp.	pair
1	pair	imp.

Exemple (Nombre *pair* de 0's)

	↓ pair*	imp.
0	imp.	pair
1	pair	imp.

D'autres représentations (équivalentes) existent :

- inversion lignes et colonnes,
- différents marquages des états finaux et de l'état initial.

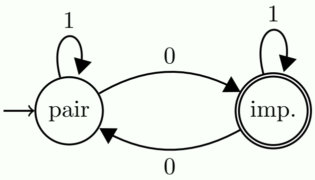
Configurations d'un automate à états fini déterministe

Soit $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ un AEFD.

Définition (Configuration)

Une configuration de l'automate A est un couple (q, u) où $q \in Q$ et $u \in \Sigma^*$.

Exemple (Configuration)



- $(\text{pair}, 10)$
- (pair, ϵ)
- $(\text{imp.}, \epsilon)$
- $(\text{imp.}, 000)$

Exécution d'un automate à états fini déterministe

Définition (Relation de dérivation)

La relation $\rightarrow$ de dérivation entre configurations est définie comme suit :

$$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^* : (q, a \cdot u) \rightarrow (q', u) \text{ ssi } \delta(q, a) = q'.$$

Définition (Exécution)

Une exécution de l'automate A est une séquence de configurations

$$(q_0, u_0) \cdots (q_n, u_n)$$

telle que :

- $q_0 = q_{\mathrm{init}}$,
- $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : (q_i, u_i) \rightarrow (q_{i+1}, u_{i+1})$.

Exécution d'un mot

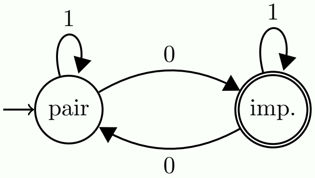
L'exécution de l'automate A sur un mot u est l'exécution avec le mot u placé dans la configuration initiale.

Configurations et exécutions : exemple

Considérons l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

Exemple (Nombre impair de 0's)

Un AEFD complet qui reconnaît les mots avec un nombre impair de 0's :



- Exécution de cet automate sur 10101011.

◁ Exécution de l'automate

Langage reconnu par un automate

Définition (Acceptation d'un mot par un automate)

Un mot $u \in \Sigma^*$ est accepté par A, s'il existe une exécution de u sur A

$$(q_0, u_0) \cdots (q_n, u_n)$$

de A telle que

- $u_0 = u$,
- $u_n = \epsilon$,
- $q_n \in F$.

Définition (Langage reconnu par un automate)

Le langage reconnu par A, qu'on note par $L(A)$, est l'ensemble

$$\{u \in \Sigma^* \mid u \text{ est accepté par } A\}.$$

Définition (Langage à états)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est appelé langage à états, s'il existe un automate à états fini déterministe qui reconnaît L.

La classe des langages à états est dénotée EF.

Fonction de transition étendue aux mots

Soit $A = (Q, \Sigma, q_{\mathrm{init}}, \delta, F)$ un AEFD.

Définition (Fonction de transition étendue aux mots)

À partir de δ, on définit la **fonction de transition étendue aux mots** δ^* :

$$\forall w \in \Sigma^*, \forall q \in Q : w = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \Rightarrow \delta^*(q, w) = \delta\Big(\ldots \delta\big(\delta(q, a_1), a_2\big) \ldots, a_n\Big).$$

En utilisant la définition inductive des mots.

Définition (Fonction de transition étendue aux mots - définition inductive)

À partir de δ, on définit la **fonction de transition étendue aux mots** δ^* :

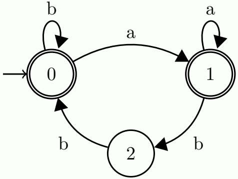
- $\delta^*(q, \epsilon)$, pour tout état $q \in Q$,
- $\delta^*(q, w \cdot a) = \delta(\delta^*(q, w), a)$, pour tout état $q \in Q$, mot $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

Fonction de transition étendue aux mots

Exemple

Soit $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ un AEFD.

Exemple (Fonction de transition étendue aux mots)



- $\delta^*(0, a) = 1$
- $\delta^*(0, a \cdot b) = 2$
- $\delta^*(0, a \cdot a \cdot b) = 2$
- $\delta^*(0, b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b) = 0$

Remarque $\delta^*(0, b \cdot a \cdot a \cdot b \cdot a)$ est non défini car $\delta(2, a)$ est non défini. □

Langage reconnu par un automate : exemples/exercices

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$.

Exercice : donner un automate qui reconnaît un langage

- Donner un automate qui accepte tous les mots qui contiennent un nombre de 0 multiple de 3.
- Donner une exécution de cet automate sur 1101010.

Soit $\Sigma = \{a, b\}$.

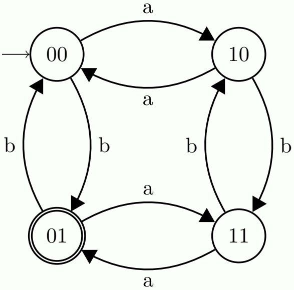
Questions

- L'ensemble des mots dans lesquels b ne précède jamais a est-il un langage à états ?
- L'ensemble des mots dans lesquels a est toujours immédiatement suivi de b est-il un langage à états ?
- L'ensemble des mots qui contiennent autant de a que de b est-il un langage à états ?

Langage reconnu par un automate : plus d'ex./exercices

Exercice : langage reconnu par un automate

Quel est le langage reconnu par l'automate suivant :



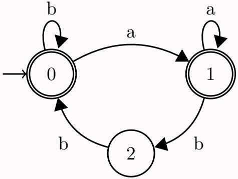
Exercice : langage à états ou non ?

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit L_k l'ensemble des mots u tel que $|u| < k$ et u contient le même nombre de a et de b.

- L_k est-il un langage à états ?
- $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$ est-il un langage à états ?

Résumé du chapitre : Automates à États Finis Déterministes

Automate à États Fini Déterministe



- définition : **ensemble d'états, état initial, alphabet, fonction de transition, états accepteurs** ;
- **configuration** : couple formé par un état et un mot (à lire) ;
- **relation de dérivation** : relation entre configurations (suivant la fonction de transition) ;
- **exécution (acceptée)** : séquence de configurations (telle que la dernière configuration est formée par un état accepteur et le mot vide) obtenue en consommant le mot ;
- **langage reconnu** : ensemble des mots dont l'exécution est acceptée ;
- **langage à états** : langage qui peut être défini comme le langage reconnu d'un automate.