

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (07h30 → 09h30).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Documents du cours et du TD autorisés.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ prévu à cet effet.
- Pour marquer une case, il est demandé de **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner le carré).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse.
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Reservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les 5 parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.

Sujet

Partie 1 : Compréhension du cours (4 points)

Question 1 (0,5 points) Soit A un automate complet sur un alphabet Σ .

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) A reconnaît le langage universel. | <input type="checkbox"/> e) Aucune des affirmations concernant A n'est correcte. |
| <input type="checkbox"/> b) A est tel que tous ses états sont accepteurs. | <input type="checkbox"/> f) Toutes les affirmations concernant A sont correctes. |
| <input type="checkbox"/> c) A est tel que son exécution est définie pour chaque mot de Σ^* . | <input type="checkbox"/> g) L'énoncé de la question est absurde. |
| <input type="checkbox"/> d) A reconnaît un langage complet. | <input type="checkbox"/> h) Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question. |



(a) KO (b) KO (c) KO (d) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Question 2 ♣ (0,5 points) Nous considérons la méthode de Floyd que nous souhaitons appliquer pour prouver qu'un automate étendu avec deux états terminaux est partiellement correct par rapport à une spécification (P, Q) .

- ☐ a La post-condition est la condition Q .
- ☐ b La post-condition doit être impliquée par la condition de chacun des états terminaux.
- ☐ c La post-condition doit être impliquée par la condition d'un seul état terminal.
- ☐ d Aucune des affirmations concernant post-condition n'est correcte.
- ☐ e Toutes les affirmations concernant post-condition sont correctes.
- ☐ f L'énoncé de la question est absurde.
- ☐ g Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Question 3 ♣ (0,5 points) Nous nous intéressons à la méthode permettant de passer d'un automate vers une expression régulière en associant un *système d'équations aux chemins* à l'automate.

- ☐ a Cette méthode peut être appliquée sur les automates non-déterministes et sans ϵ -transitions.
- ☐ b Cette méthode peut être appliquée sur les automates non-déterministes et avec ϵ -transitions.
- ☐ c Cette méthode peut être appliquée sur les automates déterministes.
- ☐ d Toutes les affirmations concernant la méthode sont correctes.
- ☐ e L'énoncé de la question est absurde.
- ☐ f Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Question 4 (0,5 points) Nous considérons l'affirmation "Tous les langages réguliers satisfont le lemme de l'itération".

- ☐ a Cette affirmation est vraie.
- ☐ b Cette affirmation est fausse.
- ☐ c L'affirmation est absurde.
- ☐ d Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Question 5 (0,5 points) Soit L un langage complet sur un alphabet Σ .

- ☐ a L reconnaît un langage déterministe.
- ☐ b L a tous ses états accepteurs.
- ☐ c L'exécution de L est définie pour chaque mot de Σ^* .
- ☐ d L est le langage universel.
- ☐ e Aucune des affirmations concernant L n'est correcte.
- ☐ f Toutes les affirmations concernant L sont correctes.
- ☐ g L'énoncé de la question est absurde.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soit L un langage régulier quelconque. Rappel : $L \subset L'$ ssi $L \subseteq L'$ et $L \neq L'$.

- ☐ a On peut utiliser le lemme de l'itération sur L .
- ☐ b On peut trouver deux langages réguliers L_1 et L_2 tels que $L_1 \subset L \subset L_2$.
- ☐ c On peut trouver un automate d'états fini déterministe qui reconnaît L .
- ☐ d On peut trouver un automate d'états fini non déterministe qui reconnaît L .
- ☐ e Aucune des affirmations concernant L n'est correcte.
- ☐ f Toutes les affirmations concernant L sont correctes.
- ☐ g L'énoncé de la question est absurde.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soit L un langage obtenu par la différence entre deux langages réguliers L_1 et L_2 quelconques ($L = L_1 \setminus L_2$). Rappel : $|L|$ dénote le cardinal du langage L .

- ☐ a $|L| < |L_1|$.
- ☐ b L est un langage irrégulier.
- ☐ c L contient le langage vide.
- ☐ d L est un langage régulier.
- ☐ e Aucune des affirmations concernant L n'est correcte.
- ☐ f Toutes les affirmations concernant L sont correctes.
- ☐ g L'énoncé de la question est absurde.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Question 8 ♣ (0,5 points) Nous nous intéressons à la méthode permettant de passer d'un automate vers une expression régulière en associant un *système d'équations aux états* à l'automate.

- ☐ a Cette méthode peut être appliquée sur les automates non-déterministes et avec ϵ -transitions, après avoir appliqué possiblement l'algorithme de suppression des ϵ -transitions.
- ☐ b Cette méthode peut être appliquée sur les automates non-déterministes et sans ϵ -transitions.
- ☐ c Cette méthode peut être appliquée sur les automates déterministes.
- ☐ d Toutes les affirmations concernant la méthode sont correctes.
- ☐ e L'énoncé de la question est absurde.
- ☐ f Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir répondre à la question.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (3 points)

Question 9 (1,5 points) Nous considérons les automates dans la Figure 3. L'automate dans la Figure 3a est non-déterministe et avec ϵ -transitions. Nous considérons également les autres automates qui sont déterministes et sans ϵ -transitions et leur équivalence par rapport à l'automate dans la Figure 3a.

- ☐ a Aucun des automates n'est équivalent.
- ☐ b Les automates dans les Figures 3b, 3c, 3d, 3e sont tous équivalents à l'automate dans la Figure 3a.
- ☐ c L'automate représenté dans la Figure 3d est équivalent.
- ☐ d L'automate représenté dans la Figure 3e est équivalent.
- ☐ e Il est absurde de parler d'équivalence entre automates.
- ☐ f L'automate représenté dans la Figure 3b est équivalent.
- ☐ g Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer l'équivalence entre ces automates.
- ☐ h L'automate représenté dans la Figure 3c est équivalent.

Question 10 (1,5 points) Nous considérons les automates représentés dans la Figure 2. L'automate dans la Figure 2a est non-déterministe et avec ϵ -transitions. Nous nous intéressons à l'algorithme de suppression des ϵ -transition et l'automate en résultant.

- ☐ a L'automate résultant est représenté dans la Figure 2b.
- ☐ b Tous les automates proposés sont résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions.
- ☐ c L'automate résultant est représenté dans la Figure 2e.
- ☐ d L'automate résultant est représenté dans la Figure 2c.
- ☐ e Il manque des données dans l'énoncé pour pouvoir déterminer s'il y a un automate résultant.
- ☐ f L'automate résultant est représenté dans la Figure 2d.
- ☐ g Il est absurde de parler de suppression des ϵ -transitions pour un automate.
- ☐ h Aucun des automates proposés ne peut résulter de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions.

Partie 3 : Automates vers expressions régulières (4 points)

Dans cette partie, nous nous intéressons à la méthode associant des équations aux états.

Question 11 (1 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 4a. Nous nous intéressons aux systèmes d'équations possiblement correspondant à cet automate dans la Figure 4.

- ☐ a) Celui de la Figure 4e correspond.
- ☐ b) Celui de la Figure 4c correspond.
- ☐ c) Celui de la Figure 4b correspond.
- ☐ d) Celui de la Figure 4d correspond.
- ☐ e) Aucun des systèmes d'équations proposés ne correspond.
- ☐ f) Les systèmes d'équations dans les Figures 4b, 4c, 4d, 4e correspondent tous.
- ☐ g) Il est absurde d'associer un système d'équations à un automate.
- ☐ h) Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer si un système d'équations correspond à cet automate.

Question 12 ♣ (1 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 6. Nous nous intéressons aux étapes intermédiaires de calcul lors de l'application de la méthode associant des équations aux états.

- ☐ a) Durant le calcul, nous pouvons trouver $X_2 = (b + ab + ab^*a)X_2 + \epsilon$.
- ☐ b) L'expression régulière associée à cet automate est $(ab^*a + b)X_2$ où la variable X_2 est remplacée par son expression régulière correcte.
- ☐ c) Durant le calcul, nous pouvons trouver l'équation $X_1 = b^*aX_2$.
- ☐ d) Durant le calcul, nous pouvons trouver l'équation $X_0 = (ab^* + b)X_2$.
- ☐ e) Durant le calcul, nous pouvons trouver l'équation $X_0 = (ab^*a + b)X_2$.
- ☐ f) Durant le calcul, nous pouvons trouver l'équation $X_1 = ab^*aX_2$.
- ☐ g) Durant le calcul, nous pouvons trouver l'équation $X_2 = (b + ab + aab^*a)X_2 + \epsilon$.
- ☐ h) Aucune des équations données n'est correcte.
- ☐ i) Tous les équations données sont correctes.
- ☐ j) Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer si les équations données sont correctes.

Question 13 (1 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2a. Nous nous intéressons à des systèmes d'équations correspondants possiblement à cet automate.

- ☐ a) Celui de la Figure 5a correspond.
- ☐ b) Celui de la Figure 5b correspond.
- ☐ c) Celui de la Figure 5c correspond.
- ☐ d) Aucun des systèmes d'équations proposés ne correspond.
- ☐ e) Tous les systèmes d'équations correspondent.
- ☐ f) Il est absurde d'associer un système d'équations à un automate car cela n'est pas possible d'associer un système d'équation à un automate non-déterministe avec ϵ -transitions.
- ☐ g) Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer si un système d'équations correspond à cet automate.

Question 14 ♣ (1 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 6. Nous nous intéressons au résultat final obtenu par l'application de la méthode associant des équations aux états.

- ☐ a) L'expression régulière associée à cet automate est $((ab^*ab^* + b^+)a)^*(ab^*ab^* + b^+)$.
- ☐ b) L'expression régulière associée à cet automate est $X_0 = (ab^*a + b)X_2$ où la variable X_2 est remplacée par son expression régulière correcte.
- ☐ c) L'expression régulière associée à cet automate est $X_2 = (aab^*a + b + ab)X_2$.
- ☐ d) Aucune des expressions régulières données n'est correcte.
- ☐ e) Tous les expressions régulières données sont correctes.
- ☐ f) Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer si les expressions régulières données sont correctes.

Partie 4 : Minimisation d'automates (3 points)

Les questions de cette partie font référence à l'algorithme de minimisation vu en cours et utilise la représentation de l'exécution sous forme de tableau vue en cours.

Question 15 (1,5 points) Considérons l'automate A représenté sous forme tabulaire ci-dessous.

	1*	2*	3*	4*	5*	6
a	2	2	3	3	6	6
b	3	3	4	4	6	6
c	6	5	3	3	5	6

Nous souhaitons minimiser cet automate. Pour cela, nous appliquons l'algorithme de minimisation et la représentation de son exécution sous forme de tableau, comme vu en cours/td.

- ☐ a Figure 7c correspond à la minimisation de A .
- ☐ b Figure 7a correspond à la minimisation de A .
- ☐ c Figure 7b correspond à la minimisation de A .
- ☐ d Figure 7d correspond à la minimisation de A .
- ☐ e Aucune des représentations proposées ne correspond à la minimisation de A .
- ☐ f Toutes les représentations proposées correspondent à la minimisation de A .
- ☐ g Il est absurde/impossible de minimiser un tel automate.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer s'il est possible de minimiser cet automate.

Question 16 ♣ (0,5 points) Nous considérons l'exécution de l'algorithme de minimisation représentée dans la Figure 8c. Cette exécution est réalisée sur un certain automate, non donné dans l'énoncé.

- ☐ a L'automate résultant de la minimisation aura le même nombre d'états.
- ☐ b L'automate de départ n'était pas minimal.
- ☐ c Il n'est pas nécessaire de calculer \equiv_3 .
- ☐ d L'automate de départ était minimal.
- ☐ e L'exécution de l'algorithme n'est pas finie.
- ☐ f Aucune des affirmations concernant le résultat de l'algorithme de minimisation, l'algorithme de minimisation ou l'automate de départ n'est correcte.
- ☐ g Toutes les affirmations concernant le résultat de l'algorithme de minimisation, l'algorithme de minimisation et l'automate de départ sont correctes.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour répondre à la question.

Question 17 ♣ (0,5 points) Nous considérons l'exécution de l'algorithme de minimisation représentée dans la Figure 8a. Cette exécution est réalisée sur un certain automate, non donné dans l'énoncé.

- ☐ a Il n'est pas nécessaire de calculer \equiv_3 .
- ☐ b L'automate résultant de la minimisation aura le même nombre d'états.
- ☐ c L'automate de départ n'était pas minimal.
- ☐ d L'automate de départ était minimal.
- ☐ e L'exécution de l'algorithme n'est pas finie.
- ☐ f Aucune des affirmations concernant le résultat de l'algorithme de minimisation ou l'automate de départ n'est correcte.
- ☐ g Toutes les affirmations concernant le résultat de l'algorithme de minimisation, l'algorithme de minimisation et l'automate de départ sont correctes.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour répondre à la question.

Question 18 ♣ (0,5 points) Nous considérons l'exécution de l'algorithme de minimisation représentée dans la Figure 8b. Cette exécution est réalisée sur un certain automate, non donné dans l'énoncé.

- ☐ a L'automate de départ n'était pas minimal.
- ☐ b L'automate de départ était minimal.
- ☐ c Il n'est pas nécessaire de calculer \equiv_3 .
- ☐ d L'automate résultant de la minimisation aura le même nombre d'états.
- ☐ e L'exécution de l'algorithme n'est pas finie.
- ☐ f Aucune des affirmations concernant le résultat de l'algorithme de minimisation, l'algorithme de minimisation ou l'automate de départ n'est correcte.
- ☐ g Toutes les affirmations concernant le résultat de l'algorithme de minimisation, l'algorithme de minimisation et l'automate de départ sont correctes.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour répondre à la question.

Partie 5 : Lemme de l'itération (6 points)

Nous considérons

- le langage $L_1 = \{a^{2 \times m} \cdot b^{2 \times n} \in \{a, b\}^* \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ et } m \text{ est un diviseur de } n\}$,
- le langage régulier $L_2 = \{\epsilon, 0, 1\}$ et
- le langage L_3 défini par l'expression régulière $(aaa)^*aa$, le langage des mots contenant un nombre de a dont le reste par la division euclidienne par 3 est 2.

Dans cette partie, nous utilisons les deux abréviations suivantes : ci pour constante d'itération et cim pour constante d'itération minimale.

Question 19 ♣ (1 points) Nous considérons L_2 .

- ☐ a La cim de L_2 est 3.
- ☐ b La cim de L_2 est 1.
- ☐ c 1 est une ci pour L_2 .
- ☐ d La cim de L_2 est 2.
- ☐ e 10 est une ci pour L_2 .
- ☐ f La cim de L_2 est 0.
- ☐ g Aucune des ci données n'est correcte.
- ☐ h Toutes les ci données sont correctes.
- ☐ i Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer la cim de L_2 .

Question 20 ♣ (1 points) Nous considérons le langage L_3 .

- ☐ a 10 est une ci pour L_3 .
- ☐ b La cim de L_3 est 4.
- ☐ c La cim de L_3 est 5.
- ☐ d La cim de L_3 est 3.
- ☐ e 3 est une ci pour L_3 .
- ☐ f Aucune des ci données n'est correcte.
- ☐ g Toutes les ci données sont correctes.
- ☐ h Il manque des données dans l'énoncé pour déterminer la cim de L_3 .

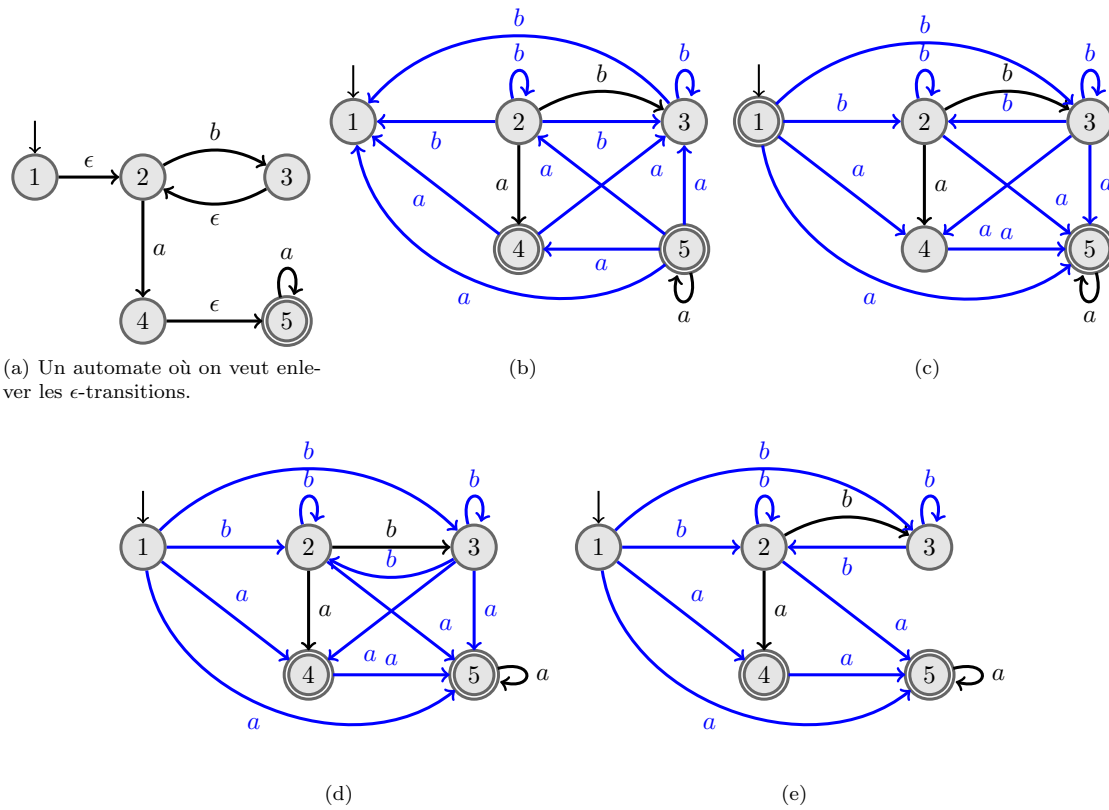
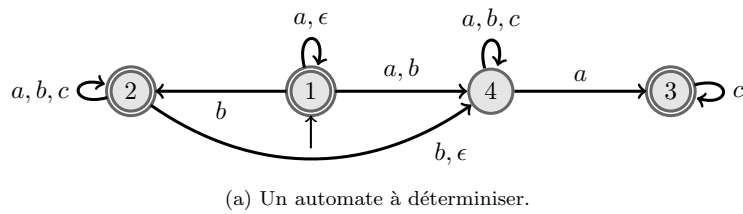
Question 21 (0.5 points) Donner un mot dans L_1 .

Question 22 (3 points) Démontrer que L_1 est non régulier.

Question 23 (0.5 points) Donner un mot dans $\{a, b\}^* \setminus L_1$.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte associé à cette question sur la feuille de réponse comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.

FIGURE 2 – Des automates pour la suppression des ϵ -transitions.

	1*	14*	24*	134*	234*	34*	4
a	14	14	234	14	234	34	34
b	24	24	234	24	24	4	4
c		4	24	34	234	4	4

(b)

	1*	14*	24*	134*	234*	34*	4
a	14	134	234	14	234	34	34
b	24	24	24	24	24	4	4
c		4	4	34	234	34	4

(c)

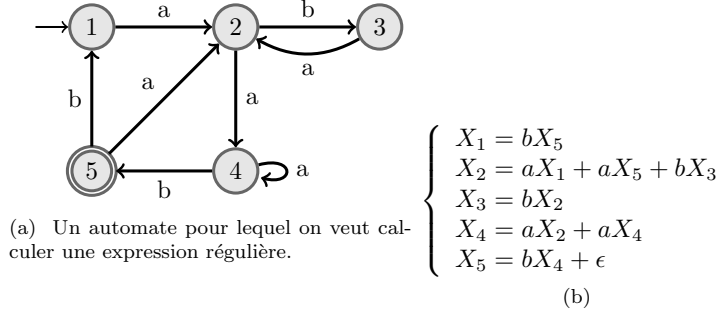
	1*	14*	24*	134*	234*	34*	4
a	14	134	234	134	234	34	34
b	24	24	24	24	24	4	4
c		4	24	34	234	34	4

(d)

	1*	14*	24*	134*	234*	34*	4
a	14	134	234	14	234	34	34
b	24	24	234	24	24	4	4
c		4	4	34	234	4	4

(e)

FIGURE 3 – Des automates pour la détermination. Dans la représentation tabulaire, les états sont en colonnes, les symboles en lignes, les étoiles marquent les états accepteurs.



(c)
$$\begin{cases} X_1 = bX_5 \\ X_2 = aX_1 + aX_5 + bX_3 \\ X_3 = bX_2 \\ X_4 = aX_2 + aX_4 + \epsilon \\ X_5 = bX_4 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} X_1 = aX_2 \\ X_2 = bX_3 + aX_4 \\ X_3 = aX_2 \\ X_4 = aX_4 + bX_5 + \epsilon \\ X_5 = bX_1 + aX_2 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} X_1 = aX_2 \\ X_2 = bX_3 + aX_4 \\ X_3 = aX_2 \\ X_4 = aX_4 + bX_5 \\ X_5 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \end{cases}$$

FIGURE 4 – Un automate et des équations aux états.

(a)
$$\begin{cases} X_1 = \epsilon X_2 \\ X_2 = bX_3 + aX_4 + bX_3 \\ X_3 = bX_2 \\ X_4 = \epsilon X_5 + a \\ X_5 = a + \epsilon \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} X_1 = \epsilon \\ X_2 = X_1\epsilon + X_3\epsilon + bX_3 + aX_4 \\ X_3 = X_2 \\ X_4 = X_5\epsilon \\ X_5 = a + \epsilon \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} X_1 = \epsilon X_2 \\ X_2 = bX_3 + aX_4 \\ X_3 = X_2 \\ X_4 = X_5 \\ X_5 = a \end{cases}$$

FIGURE 5 – Des systèmes d'équations possiblement correspondant avec l'automate dans la Figure 2a.

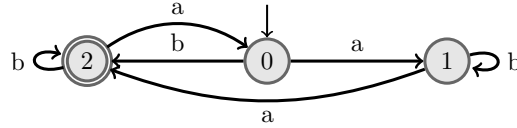


FIGURE 6 – Automate pour calcul d'expression régulière (avec la méthode des équations aux états).

\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2	\equiv_3	\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2	\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2	\equiv_3	\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

(a) (b) (c) (d)

FIGURE 7 – Des représentations de l'exécution de l'algorithme de minimisation.

\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2	\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2	\equiv_0	\equiv_1	\equiv_2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6

(a) (b) (c)

FIGURE 8 – Des exécutions de l'algorithme de minimisation sur des automates (non fournis).



Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h

Question 2 : a b c d e f g

Question 3 : a b c d e f

Question 4 : a b c d

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h

Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h

Question 12 : a b c d e f g h i j

Question 13 : a b c d e f g

Question 14 : a b c d e f

Question 15 : a b c d e f g h

Question 16 : a b c d e f g h

Question 17 : a b c d e f g h

Question 18 : a b c d e f g h

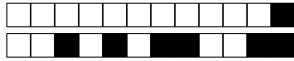
Question 19 : a b c d e f g h i

Question 20 : a b c d e f g h

Question 21 :

donner ex f j *Reservé enseignant*

.....



Question 22 :

☐ f ☐ pf ☐ D ☐ J *Reservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Question 23 :

donner c ex ☐ f ☐ J *Reservé enseignant*

.....

Question 24 :

☐ a *Reservé enseignant*

.....

.....

.....