



---

# Guía Experiencia 1:

## Nociones básicas de programación en MATLAB-SIMULINK para el estudio de sistemas dinámicos

---

Guía preparada por los profesores:

Francisco J. Vargas

Daniel Erraz

Juan C. Agüero,

para la asignatura *Laboratorio de Control Automático* (ELO-271)

31 Agosto 2020

---

## CONTENTS

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Trabajo Previo</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Fundamentos y conceptos asociados a la experiencia</b>	<b>4</b>
3.1	Simulación de sistemas dinámicos de tiempo continuo . . . . .	4
3.2	Método de mínimos cuadrados . . . . .	9
3.3	Interacción sistema de tiempo continuo - sistema de tiempo discreto . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Trabajo de Laboratorio</b>	<b>16</b>
4.1	Sesión 1: Algoritmo de mínimos cuadrados . . . . .	16
4.2	Sesión 2: Simulación de sistemas dinámicos . . . . .	18
4.3	Sesión 3: Muestreo de señales . . . . .	20
4.4	Actividad 1: Reconstrucción de señales muestreadas . . . . .	20
4.5	Actividad 2: Efecto del muestreo en un sistema dinámico . . . . .	21



# 1 INTRODUCCIÓN

La presente experiencia tiene por objetivo introducir el software de programación MATLAB, y su entorno de simulación SIMULINK. Este software se utilizará durante todas las experiencias restantes del curso, sin embargo, dada la versatilidad que este posee, su dominio le será útil para el estudio de muchos otros tópicos relacionados con ingeniería.

En esta experiencia se proponen algunas actividades de desarrollo simple para su implementación en MATLAB/SIMULINK. Las actividades planteadas servirán para refrescar su conocimiento respecto a *sistemas lineales de tiempo continuo*, pero además servirán para introducir nuevas herramientas como la llamada *aproximación de Euler*, o el *algoritmo de mínimos cuadrados*. Note que este documento no es un tutorial de Matlab, por lo que **se espera que usted estudie previamente** los conceptos básicos (entorno de programación, sintaxis, comandos básicos, etc).

## 2 TRABAJO PREVIO

El software Matlab es ampliamente utilizado en la academia, por lo que existen muchos tutoriales en internet que usted puede usar para aproximarse a Matlab (revise el apéndice de la guía para sugerencias). El objetivo no es que usted se convierta en un experto, si no que se familiarice con los comandos básicos y con los comandos útiles para el desarrollo de nuestro trabajo. A continuación se presenta una lista de comandos y tareas que deberían ser familiares para usted una vez haya estudiado el (o los) tutorial (es) que haya escogido.

- Entornos de Matlab: workspace, command windows, history, current folder.
- Búsqueda de ayuda: help, lookfor
- Tipos de variables: arrays, cell, struct, sym
- Definición de vectores, matrices, y trabajo con índices (min, max, find, reshape, etc).
- Funciones básicas: sin, cos, exp, log, ^ (potencias).
- Operaciones básicas de matrices: suma, resta, multiplicación de matrices (\*), multiplicación por componente (.\*), inversa, transpuesta.
- Generación de figuras: plot, stem, bar, hold on, grid on, legend, axis, xlabel, ylabel, title, subplot, semilogx, linspace, logspace.
- Editar figuras, guardar en formatos específicos.
- Desarrollo de scripts en MATLAB .
- Bucles y condiciones: for, end, while, if, else,
- Guardar, cargar y ver variables en el *workspace*: save, load, whos.
- Limpieza: clc, clear, close all
- Representación de sistemas dinámicos en MATLAB : tf, zpk, ss.
- Análisis de sistemas dinámicos en MATLAB : pole, zero, step, impulse, bode, freqresp.
- Simulaciones de sistemas dinámicos en SIMULINK .

El trabajo con estos comandos y entornos **forma parte del trabajo previo de la experiencia 1**, y se espera que usted llegue a la sesión en laboratorio con dichos comandos y tareas estudiadas.

Se asumirá que usted maneja los conceptos asociados a sistemas lineales tales como la respuesta a entrada escalón y sinusoidal de sistemas de primer y segundo orden, y respuesta en frecuencia. Si no es el caso, el estudio de estos conceptos se considerará parte del trabajo previo a desarrollar.

## 3 FUNDAMENTOS Y CONCEPTOS ASOCIADOS A LA EXPERIENCIA

### 3.1 SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS DE TIEMPO CONTINUO

En el curso de Análisis de Sistemas Lineales usted estudió la representación de sistemas lineales invariantes en el tiempo y su respuesta a ciertas entradas. Para el caso de sistemas de tiempo continuo, si usted conoce una función analítica para describir la señal de entrada, entonces puede obtener una función analítica para la salida resolviendo la ecuación diferencial asociada. Es por ello que usted ya conoce la respuesta (analítica) de un sistema lineal a entrada escalón, impulso, sinusoidal, etc.

Ahora, imagine usted que por algún motivo no puede calcular analíticamente la solución de la ecuación diferencial asociada (por ejemplo, si la señal de entrada es difícil de describir analíticamente, o si solo la conoce a medida que llega al sistema y no previamente). Para aquellos casos se pueden emplear métodos numéricos para obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial relacionada. En particular en esta experiencia introduciremos el método de Euler (pero sepa que existen muchos más).

#### Aproximación de Euler

Dada una señal  $y(t)$ , su derivada (con respecto al tiempo) está definida como

$$\dot{y}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta) - y(t)}{\Delta} \quad (3.1)$$

Si relajamos el requerimiento  $\Delta \rightarrow 0$ , podemos obtener una aproximación de  $\dot{y}(t)$  para un tiempo determinado. Esta idea es explotada en la *aproximación de Euler*, que tiene la forma

$$\dot{y}(t)|_{t=n\Delta} \approx \frac{y(n\Delta + \Delta) - y(n\Delta)}{\Delta} \quad (3.2)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y  $\Delta$  es un intervalo de tiempo pequeño. Note que esta aproximación se hace para instantes discretos de tiempo, espaciados un intervalo constante  $\Delta$ , por lo que las señales involucradas en la aproximación pueden interpretarse como señales de tiempo discreto.

*Qué relación tiene esta aproximación con la simulación de sistemas dinámicos?*

Si deseamos simular el comportamiento de un sistema continuo mediante un computador, debemos tener claro que lo que realmente se simula es una aproximación discreta del modelo del sistema continuo real. Esto ya que un computador trabaja con señales digitales (de tiempo discreto), y por lo tanto no pueden representar con resolución infinita la dinámica de señales de tiempo continuo. En MATLAB/Simulink, los sistemas de tiempo continuo pueden *representarse* de diversas formas (por ejemplo usando el comando `tf`, `ss`, etc), pero el *cálculo de la respuesta* de dicho sistema a una determinada señal de entrada requiere una aproximación como la indicada anteriormente.

#### Método de Euler para aproximar sistemas continuos

Considere un sistema lineal  $G_c$ , con condición inicial cero, representado en función de transferencia de Laplace por

$$G_c(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (3.3)$$

Podemos utilizar el método de Euler para aproximar el sistema lineal continuo descrito por  $G_c(s)$  a través de una función de transferencia de un sistema de tiempo discreto de muestreo  $\Delta$  (lineal e invariante en el

tiempo) simplemente reemplazando  $s$  por  $\frac{z-1}{\Delta}$  en  $G_c(s)$  (por qué?)

Así, el sistema de tiempo discreto queda descrito por la función de transferencia

$$G_d(z) = \frac{b_n \left(\frac{z-1}{\Delta}\right)^n + b_{n-1} \left(\frac{z-1}{\Delta}\right)^{n-1} + \dots + b_0}{a_n \left(\frac{z-1}{\Delta}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{z-1}{\Delta}\right)^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (3.4)$$

A continuación se presentan, de forma ilustrativa, las aproximaciones de sistemas de tiempo continuo de primer y segundo orden.

### Sistema de primer orden.

Considere el siguiente sistema lineal de primer orden:

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t), \quad (3.5)$$

con  $\tau$  la constante de tiempo y  $K$  la ganancia a continua del sistema<sup>1</sup>. La función de transferencia correspondiente viene dada por

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (3.6)$$

El sistema discreto obtenido al aplicar el método de Euler para este sistema esta dado por

$$G_d(z) = \frac{K}{\tau \frac{z-1}{\Delta} + 1}. \quad (3.7)$$

Dado que  $Y_d(z) = G_d(z)U_d(z)$ , podemos usar la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa para obtener la ecuación

$$\tau \frac{y(n\Delta + \Delta) - y(n\Delta)}{\Delta} + y(n\Delta) = Ku(n\Delta), \quad (3.8)$$

resultado que es equivalente a aproximar la primera derivada de  $y(t)$  al instante  $t = n\Delta$  en (3.5). Note que esta ecuación puede ser re-escrita como

$$y(n\Delta + \Delta) = \frac{\Delta}{\tau} (Ku(n\Delta) - y(n\Delta)) + y(n\Delta), \quad (3.9)$$

o equivalentemente como una ecuación de diferencia (o recursiva) en términos del tiempo  $k$  como

$$y[k+1] = \frac{\Delta}{\tau} (Ku[k] - y[k]) + y[k] = \frac{\Delta}{\tau} Ku[k] + \frac{\tau - \Delta}{\tau} y[k], \quad (3.10)$$

donde  $k = 1, 2, \dots$  es el índice temporal normalizado, y por lo tanto no representa el tiempo absoluto sino que el tiempo relativo asociado a un tiempo de muestreo  $\Delta$ .

### Sistema de segundo orden.

Considere un sistema lineal de tiempo-continuo de segundo orden descrito por

$$G_c(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.11)$$

Utilizando el método de Euler, el sistema puede aproximarse a través de:

$$\begin{aligned} a_2 \frac{y(n\Delta + 2\Delta) - 2y(n\Delta + \Delta) + y(n\Delta)}{\Delta^2} + a_1 \frac{y(n\Delta + \Delta) - y(n\Delta)}{\Delta} + a_0 y(n\Delta) \\ = b_1 \frac{u(n\Delta + \Delta) - u(n\Delta)}{\Delta} + b_0 u(n\Delta), \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Recuerde que  $4\tau$  sirve como criterio para considerar que la respuesta del sistema paso su estado transiente.

o equivalentemente en términos del tiempo  $k$ :

$$a_2 \frac{y[k+2] - 2y[k+1] + y[k]}{\Delta^2} + a_1 \frac{y[k+1] - y[k]}{\Delta} + a_0 y[k] = b_1 \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} + b_0 u[k].$$

Reordenando se puede obtener la ecuación de recurrencia de un sistema de segundo orden (complete usted los detalles). Note que, dado que el resultante es un sistema lineal e invariante en el tiempo, se puede hacer un desplazamiento en el tiempo para que el término  $y[k+2]$  corresponda al término “actual”, y los demás instantes correspondan al pasado. Esto último se puede hacer si las condiciones iniciales originales se desplazan también en el tiempo. En esta experiencia de laboratorio supondremos que las condiciones iniciales de los sistemas son nulas.

### Simulación de sistemas dinámicos usando Simulink

En Simulink, es posible simular sistemas de tiempo continuo especificando el método numérico para aproximarlos. Para ello, debe abrir un nuevo modelo de Simulink, ir a preferences/configuration parameters/solver, donde podrá configurar en la sección *solver option* el método numérico que prefiera (la ventana mostrada en Figura 3.1). Existen métodos más sofisticados para resolver ecuaciones diferenciales e integrales numéricamente que el método de Euler. Muchos de ellos consideran un valor  $\Delta$  variable en vez de fijo como lo descrito en la sección anterior.

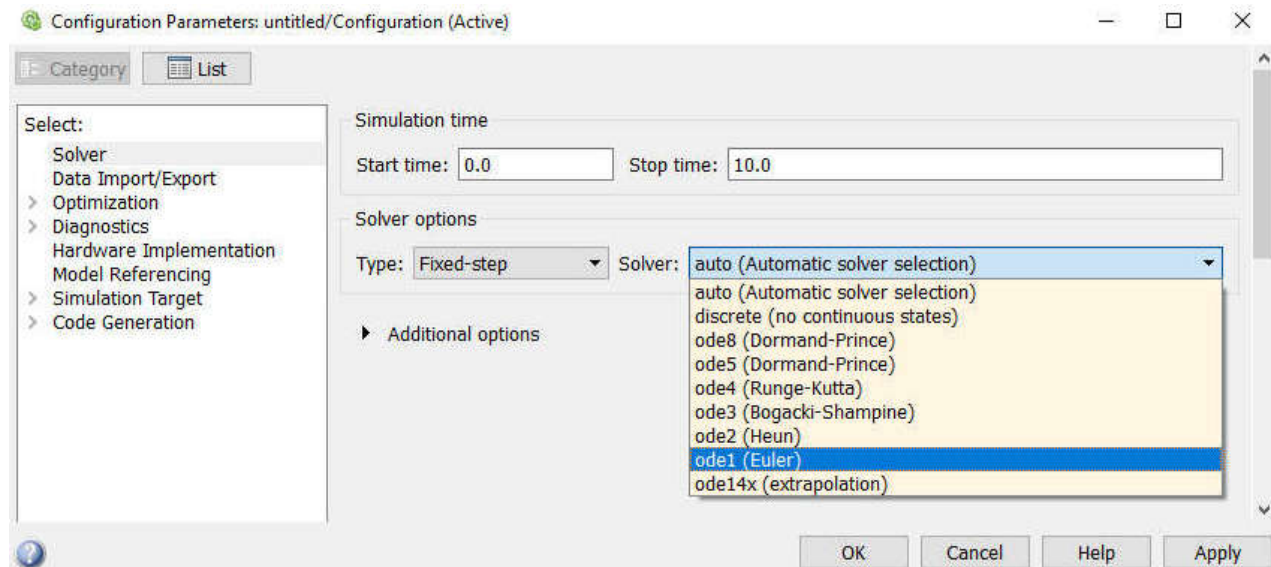


Figure 3.1: Pestaña *Configuration Parameters*

Para configurar el método de Euler, debe escoger *Fixed-Step* en vez de *Variable-Step* en el apartado Type, y luego escoger la opción *ode1* en el apartado *Solver* (ver Figura 3.1). En el apartado *additional options* usted puede escoger el valor  $\Delta$  que desee.

Para simular un sistema dinámico en Matlab usted puede implementar la ecuación diferencial asociada o puede hacerlo con un bloque que representa la función de transferencia del sistema (para el caso lineal). Para ello vaya al Simulink Library Browser, y a la pestaña Simulink, donde encontrará varias pestañas que contienen diversos bloques con distintos propósitos (vea Figura 3.2).

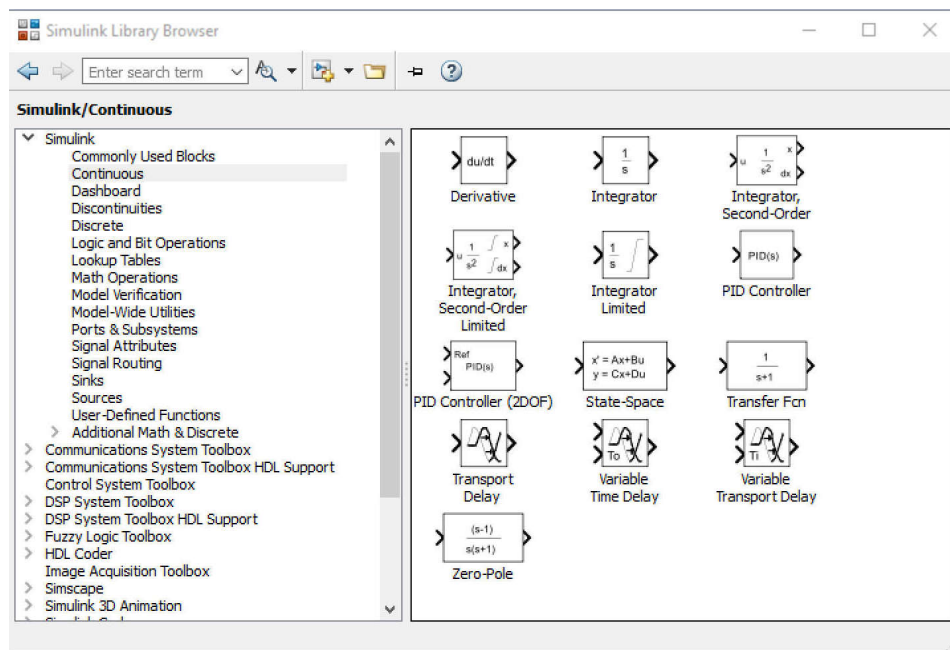


Figure 3.2: Library Browser: Contenido pestaña *continuous*

Por ejemplo, si desea obtener de forma simulada la respuesta a escalón del sistema lineal descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t),$$

usted puede obtenerla implementando el esquema de la Figura 3.3, donde se han especificado las pestaña donde encontrar los elementos correspondientes. Si desea hacerlo usando la función de transferencia del sistema, puede implementar el modelo de la Figura 3.4.

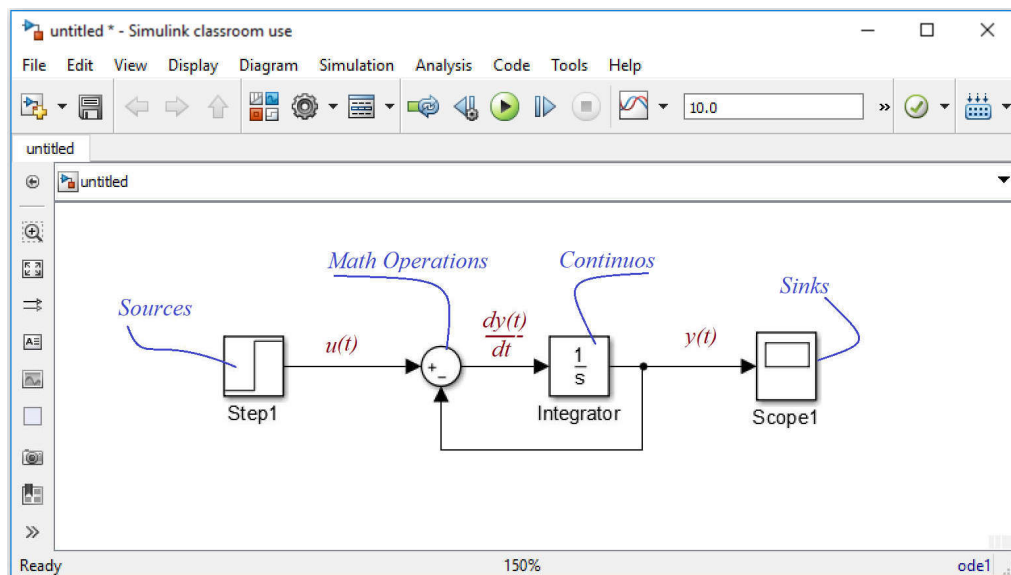


Figure 3.3: Simulación sistema de primer orden usando la ecuación diferencial

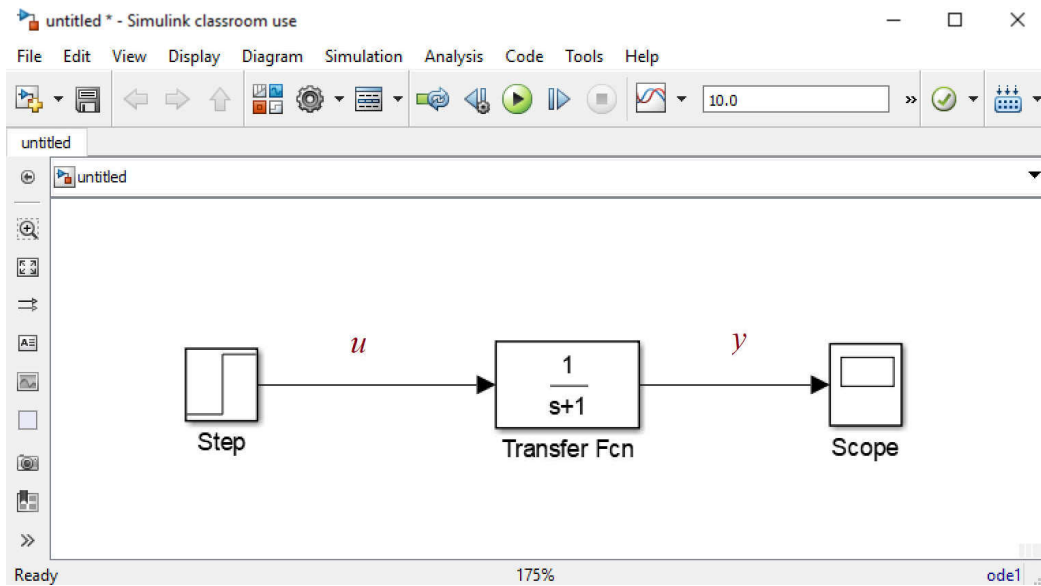


Figure 3.4: Simulación sistema de primer orden usando función de transferencia

Ambos esquemas simulan lo mismo, teniendo ambos como respuesta lo mostrado por el osciloscopio (scope) en la Figura 3.5. Es importante indicar que los osciloscopios entregan por defecto una imagen con fondo negro. **En las imágenes de los informes usted debe cambiar dicho fondo negro** por uno blanco (similar a lo hecho en la Figura 3.5), para así apreciar de forma clara las curvas (y para que también se pueda imprimir el informe -si es necesario- sin gastar tinta innecesariamente).

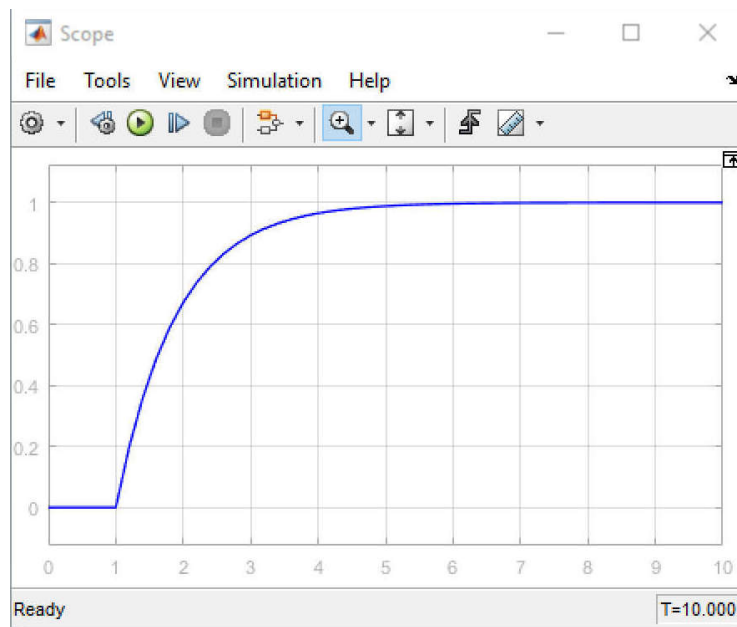


Figure 3.5: Respuesta a escalón del sistema de primer orden



### 3.2 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

En esta sección introduciremos un algoritmo, muy usado en problemas de ingeniería, que permite estimar parámetros desconocidos a partir de mediciones. Este algoritmo debe su nombre al hecho que es el resultado de un problema de optimización que busca minimizar el cuadrado de una función de costo que representa el error de estimación.

En esta experiencia, nuestro propósito es usar Matlab para implementar dicho algoritmo, sin embargo en una futura experiencia, este algoritmo será de utilidad para estimar características de los sistemas reales con los que trabajará.

Para introducir el método de mínimos cuadrados, consideraremos un problema donde usted tiene un conjunto de datos experimentales, graficados en la Figura 3.6 (donde  $x$  e  $y$  representan variables asociadas al experimento), y desea obtener una función analítica que se aproxime a los datos medidos.

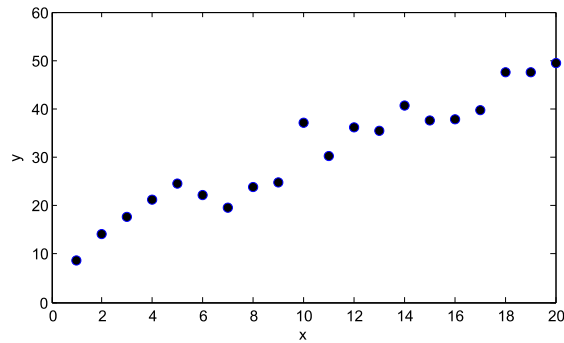


Figure 3.6: Gráfica de datos experimentales

Podríamos, por ejemplo, buscar la recta que mejor se adecúe a los datos experimentales obtenidos, como se ilustra en la Figura 3.7. El problema entonces se transforma en encontrar los parámetros  $a$  y  $b$  tal que la recta descrita por  $y = ax + b$  (la curva roja en la Figura 3.7) sea lo más cercana posible a los datos experimentales disponibles.

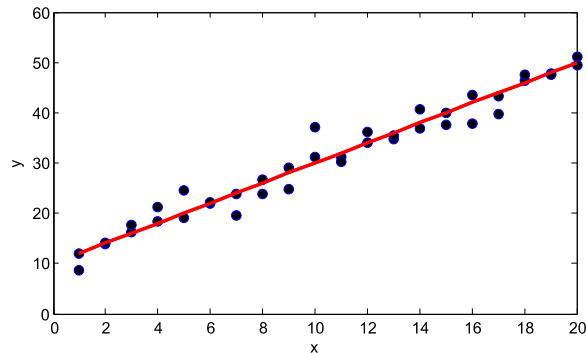


Figure 3.7: Recta que se aproxima a los datos experimentales

Para presentar la solución, considere que los datos experimentales se ordenan de a pares denotados

por  $(y_i, x_i)$ , y defina

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Note que si los datos experimentales describieran una recta exacta, existiría un vector  $\hat{\theta}$  tal que  $Y = \Phi\hat{\theta}$ , sin embargo esto no sucederá en general pues existe una diferencia entre los datos reales y la recta propuesta.

El método de mínimos cuadrados nos dice que los parámetros se pueden aproximar como

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad (3.13)$$

donde  $(\cdot)^T$  denota la transpuesta del argumento. (La demostración del resultado anterior no es parte de los contenidos de este curso, sin embargo puede consultar la bibliografía correspondiente si desea saber más.)

El resultado anterior se puede generalizar para estudiar curvas de orden superior. También estos resultados se pueden asociar a la estimación de parámetros de sistemas dinámicos. Para ello, considere una señal escalar en tiempo discreto  $y[k]$  la cual ha sido generada por la siguiente relación:

$$y[k] = \sum_{i=1}^n \varphi_i[k] \theta_i + w[k], \quad (3.14)$$

donde  $\varphi_i[k]$  son señales conocidas,  $\theta_i$  son parámetros desconocidos y  $w[k]$  es una señal de ruido de medición. En este caso nos interesa encontrar el vector  $\hat{\theta}$  que mejor se aproxime al vector  $\theta$  definido como

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

El estimador de mínimos cuadrados,  $\hat{\theta}$  se obtiene a partir de la colección de datos  $y[k]$  y  $\varphi_i[k]$  para  $k = 1 \dots N$ , tiene la misma forma anterior, es decir,

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad (3.16)$$

pero con la consideración que

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1[1] & \cdots & \varphi_n[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1[N] & \cdots & \varphi_n[N] \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

### 3.3 INTERACCIÓN SISTEMA DE TIEMPO CONTINUO - SISTEMA DE TIEMPO DISCRETO

Cuando se desea comunicar un sistema de tiempo continuo con uno de tiempo discreto debemos garantizar la existencia de una interfaz adecuada para ello, que opere en tiempo real. Esta interfaz suele ser un dispositivo llamado conversor análogo-digital / digital-análogo, que transforma señales de tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa (ver Figura 3.8). El nombre se debe a que las señales análogas son de tiempo continuo, mientras que las digitales son de tiempo discreto. En realidad el concepto de *señal digital* no es sinónimo de *señal de tiempo discreto*, pues la primera es más bien una representación aproximada (expresada en bits) de la segunda, sin embargo, para propósitos de este curso supondremos que ambas son exactamente la misma señal de tiempo discreto.

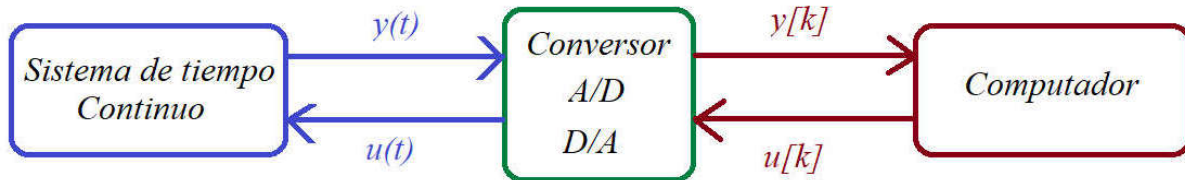


Figure 3.8: Interfaz entre sistema de tiempo continuo y sistema de tiempo discreto

A continuación detallaremos los procesos de conversión mencionados anteriormente.

#### Conversión análogo a digital

Considere una señal  $y(t)$  de tiempo continuo. Si se desea tener una versión de tiempo discreto de ella es necesario someterla a un proceso de conversión análogo a digital, en donde se procede a tomar muestras de la señal continua cada cierto intervalo de tiempo  $T_s$ . Este proceso se llama muestreo. Luego, esta señal se transforma en una señal digital luego de los procesos de cuantización y codificación para obtener una señal digital (binaria). Este proceso se muestra en la Figura 3.9 (entiéndase *codificación* en este contexto como el paso de un valor real a su expresión equivalente en bits). Como se mencionó anteriormente, nosotros supondremos que la señal digital y la señal de tiempo discreto son iguales, por lo que el dispositivo encargado de la cuantización y codificación podría quitarse, sin embargo hemos decidido dejarlo para que usted esté consciente que son procesos que existen en la conversión análogo digital. Note la convención en la notación en la Figura 3.9: paréntesis  $()$  para señales de tiempo continuo y corchetes  $[]$  para denotar señales de tiempo discreto.

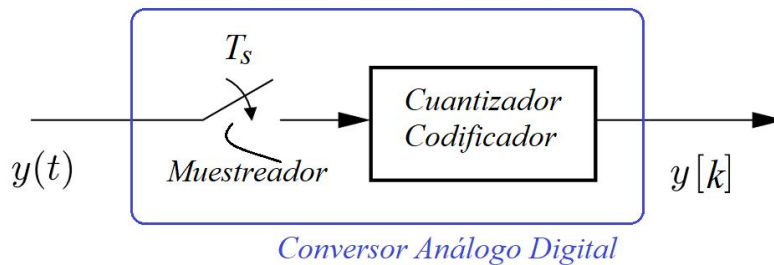


Figure 3.9: Representación matemática del proceso de muestreo de una señal continua

Para ilustrar el proceso anterior se muestra la Figura 3.10, en donde se hace una representación matemática del proceso de conversión. En la gráfica *a)*, se muestra la señal original  $y(t)$  que se desea convertir a señal discreta. Para ello se define una señal de tiempo continuo,  $m_{T_s}(t)$ , correspondiente a un tren de impulsos unitarios (deltas de Dirac) espaciados un intervalo de tiempo constante  $T_s$ , la cual se muestra en la gráfica *b)*. Estas señales se multiplican, como se muestra esquemáticamente en la gráfica *c)*, para generar  $y_{T_s}(t)$ , que es una señal de tiempo continuo cuyo valor es cero en casi todo el dominio del tiempo, excepto en los instantes múltiplos de  $T_s$ , en donde se obtiene el valor de la señal original. Esta señal resultante, formada también por impulsos de tiempo continuo, es mostrada en la gráfica *d)*. Finalmente, al “reemplazar” los impulsos de tiempo continuo por impulsos de tiempo discreto (Deltas de Kronecker), se obtiene la señal de tiempo discreto  $y[k]$  representada en la gráfica *e)*. Note que en dicha gráfica el tiempo pasa de forma discreta en términos del índice  $k \in \mathbb{Z}$ .

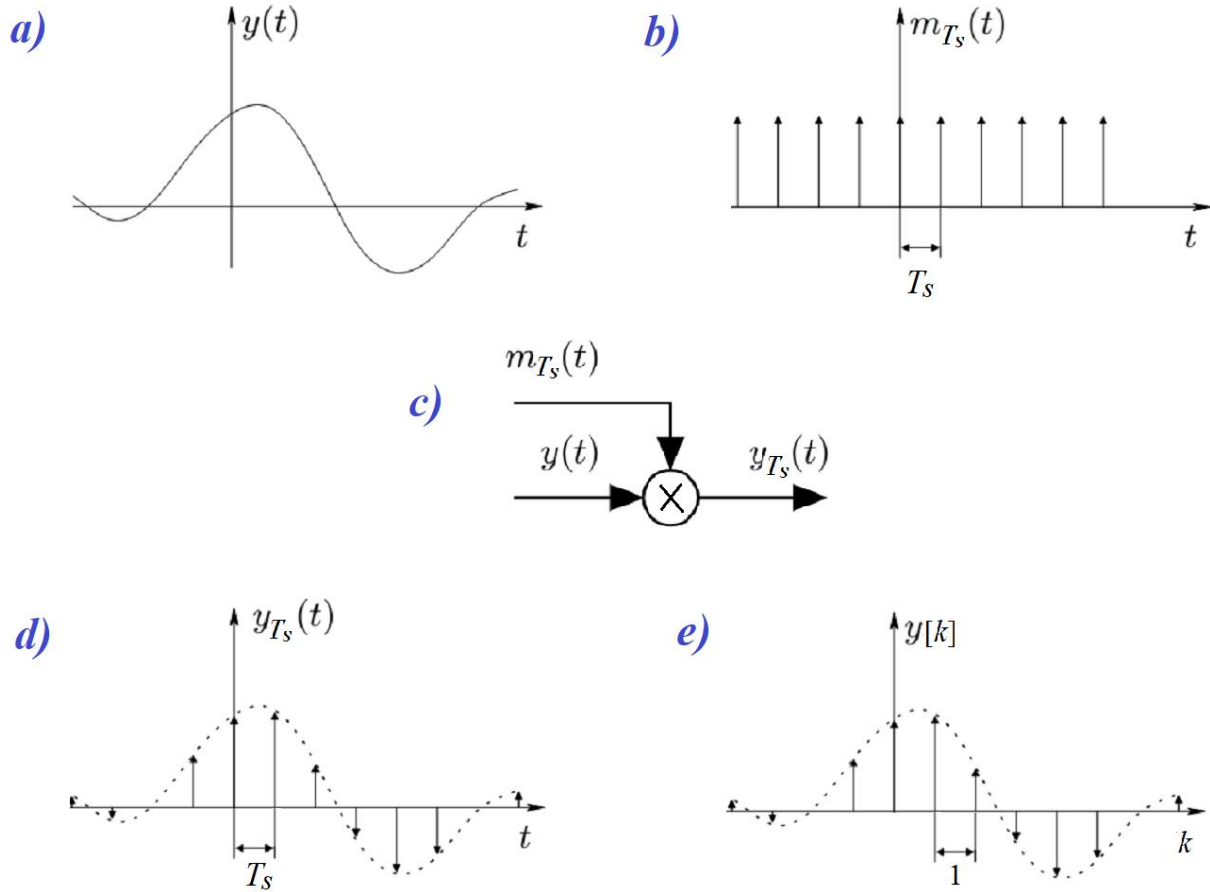


Figure 3.10: Representación matemática del proceso de muestreo de una señal continua

Es importante recalcar que el proceso descrito en la Figura 3.10 es sólo una representación teórica del proceso de muestreo, que permite hacer análisis matemáticos de dicho proceso. Nosotros no profundizaremos en ello en este curso. En el dispositivo real, en cambio, no se implementan los pasos descritos en la Figura 3.10 pues recuerde que las funciones delta de Dirac no existen en la práctica.

### Cómo escoger el tiempo de muestreo $T_s$ ?

Al convertir una señal a tiempo discreto debemos escoger de forma adecuada el tiempo de muestreo  $T_s$ , que corresponde al intervalo de tiempo entre muestras de la señal continua.

Para ilustrar lo crítico que es la elección de  $T_s$ , presentaremos 3 casos. En la Figura 3.11 vemos el caso de una señal sinusoidal amortiguada de tiempo continuo  $y(t)$  y la señal discreta  $y[k]$ , usando como tiempo de muestreo  $T_s = 0.2$ . En dicha figura se aprecia que la señal de tiempo discreto, si bien no es tan parecida visualmente a la señal de tiempo continuo, aún es capaz de describir sus principales características razonablemente. En la Figura 3.12 vemos el mismo caso anterior pero ahora usando como tiempo de muestreo  $T_s = 0.5$ . En este caso notamos claramente que la elección de  $T_s = 0.5$  nos permite “ver”, en  $y[k]$ , solo los peaks y valles de la señal sinusoidal amortiguada, quedándonos con una idea pobre de cómo es la señal de tiempo continuo original. En la Figura 3.13 vemos el caso con  $T_s = 1$ , en donde se aprecia que en  $y[k]$  solo se observan los valles de la señal sinusoidal amortiguada, lo que conducirá a una conclusión errónea de sobre cómo era la señal original.

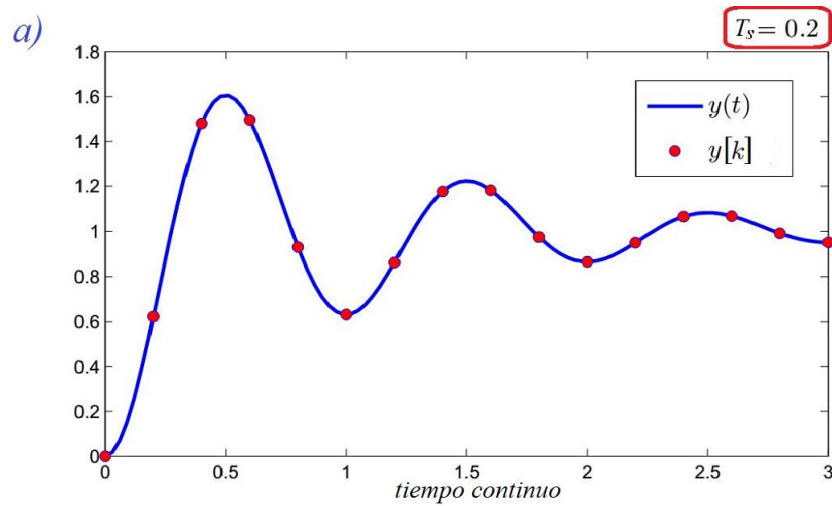


Figure 3.11: Muestreo de una señal a tiempo de muestreo  $T_s = 0.2$

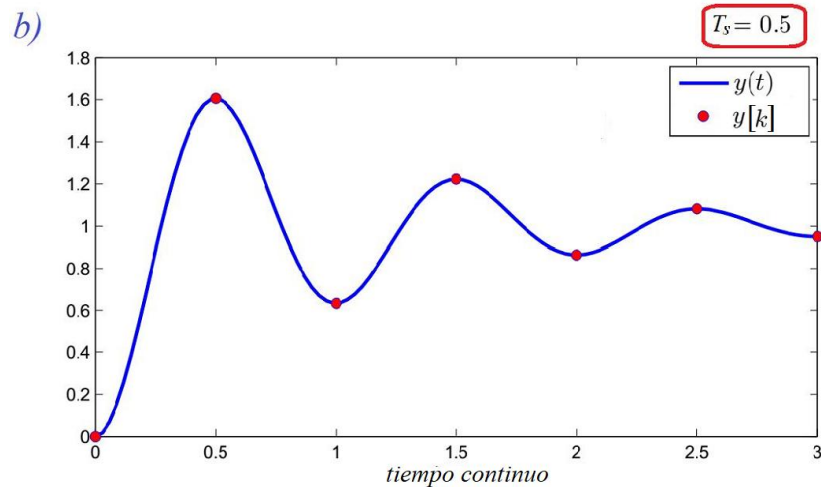


Figure 3.12: Muestreo de una señal a tiempo de muestreo  $T_s = 0.5$

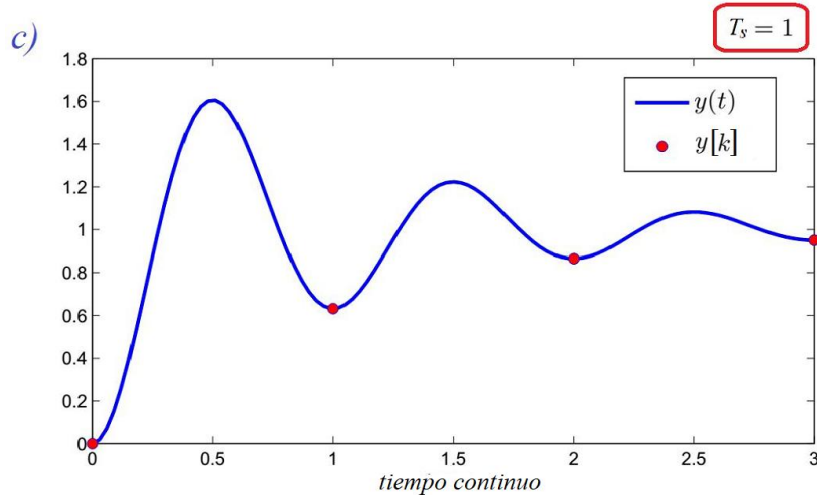


Figure 3.13: Muestreo de una señal a tiempo de muestreo  $T_s = 1$

Los ejemplos anteriores indican que se debe escoger un tiempo  $T_s$  lo suficientemente pequeño. Ahora bien, para tener un criterio más concreto, podemos recordar que al aplicar la transformada de Fourier de tiempo continuo en cualquier señal acotada de tiempo continuo  $y(t)$ , podemos conocer su contenido en frecuencias (espectro). Es sensato entonces suponer que se debe escoger  $T_s$  de tal forma que se puedan representar las frecuencias más altas asociadas a la señal  $y(t)$ . Esta idea es formalizada en el siguiente Teorema.

**Teorema de reconstrucción de Shannon:** Una señal  $y(t)$  cuyo espectro es distinto de cero solo en el rango  $(-\omega_c, \omega_c)$ , puede ser reconstruida de forma exacta a partir de las muestras de la señal, si estas son obtenidas a una frecuencia de muestreo  $\omega_m \geq 2\omega_c$ , donde  $\omega_m = 2\pi/T_s$ .

En el Teorema anterior,  $\omega_m$  se conoce como la **tasa de Nyquist**, mientras que  $\omega_c$  se conoce como la **frecuencia de Nyquist**. Este Teorema establece que, si  $\omega_c$  es la frecuencia más alta asociada a una señal, entonces existe una función matemática que permite reconstruir la señal continua original de forma exacta a partir de las muestras. Este resultado establece un criterio claro para la elección de  $T_s$ , sin embargo, existen restricciones prácticas importantes por lo que no es recomendable muestrear a la frecuencia  $\omega_m$ . Dentro de estas restricciones está el hecho que la función que permite reconstruir de forma exacta es una función no lineal, y no causal. Otra limitante es que las señales provenientes de sistemas reales no suelen tener un espectro como el descrito en el Teorema, y por lo tanto no se puede establecer un valor para  $\omega_c$  con claridad.

Ahora bien, si la señal continua corresponde a la salida de un sistema continuo (lo que es muy común), es claro que la frecuencia más alta de la señal estará limitada por el ancho de banda de dicho sistema. Así, un criterio usual para diseñar  $\omega_m = 2\pi/\Delta$  es considerar  $\omega_m$  mayor a 5 o 10 veces el ancho de banda del sistema correspondiente. Qué desventaja cree usted que tendría muestrear a una tasa muy mayor (por ejemplo, 100 veces el ancho de banda?)

## Conversión digital a análogo

En esta sección se describirá el proceso en el cual una señal digital se transforma en una señal de tiempo continuo. Dicho proceso es representado en la Figura 3.14, en donde se muestra que la señal digital pasa por un bloque decodificador, que transforma la señal digital a la señal de tiempo discreto (este bloque puede omitirse en nuestro análisis) y luego se pasa por un dispositivo *retentor* que transforma la señal de tiempo discreto en una señal de tiempo continuo. La forma en que opera el dispositivo retentor es bastante sencilla, pues este lee un valor de la señal discreta y congela dicho valor hasta que lee el siguiente

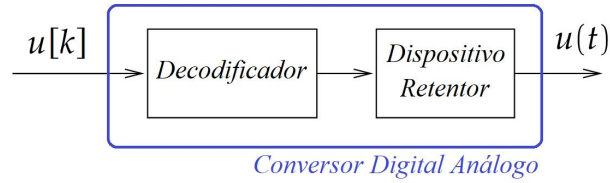


Figure 3.14: Esquema de conversión digital-análogo con retentor

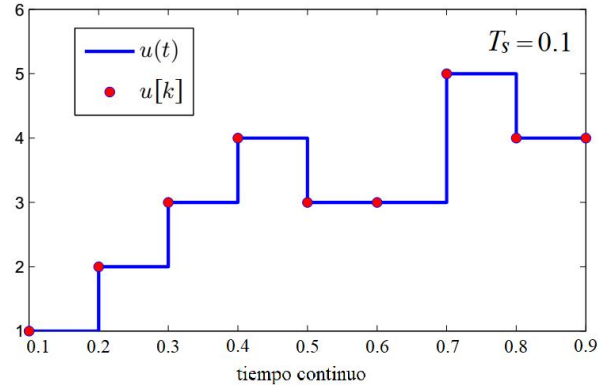


Figure 3.15: Reconstrucción con retentor de orden cero (zoh)

valor de la señal discreta, repitiendo el proceso. Esto es descrito gráficamente en la Figura 3.15.

El dispositivo retentor previamente descrito se conoce como retentor de orden cero (de sigla *zoh*, proveniente del inglés *zero order hold*), y entrega señales continuas tipo escalera. Este dispositivo entonces se puede representar matemáticamente a través de la función de transferencia

$$R(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \quad (3.18)$$

Note que la función de transferencia del retentor  $R(s)$  está descrita en términos de Laplace (tiempo continuo), sin embargo la señal de entrada  $u[k]$  es de tiempo discreto, y por lo tanto incompatibles. Para evitar esta inconsistencia matemática, primero debemos recordar que una señal de tiempo discreto se puede representar como un tren de impulsos (deltas de Kronecker) con distintas ponderaciones. Así, podemos entonces considerar que la señal de entrada al retentor es la señal continua que se obtiene al reemplazar los deltas de Kronecker en los instante  $k = 0, 1, 2, \dots$  por deltas de Dirac en los instantes  $t = kT_s$ .

Usted seguramente piensa (y estaría en lo correcto) que la señal de tiempo continuo proveniente del retentor de orden cero podría mejorarse si se usa otro dispositivo, por ejemplo, que use rectas con distintas pendientes para construir la señal continua. De hecho, existen otro tipos de dispositivo que tienen métodos más sofisticados para la construcción de la señal continua a partir de la señal discreta (en particular, el descrito anteriormente que entrega rectas con distintas pendientes corresponde a un *retentor de orden uno* (foh)). Sin embargo, el retentor de orden cero es uno de lo más usados por su simpleza y por que, si  $T_s$  es suficientemente pequeño, la señal continua tipo escalera obtenida funcionará sin problemas en muchos problemas prácticos.

Es importante indicar que hemos presentado la conversión D/A basados en que la señal de tiempo discreto está definida cada  $T_s$  segundos (el mismo tiempo de muestreo en la sección anterior). Sin embargo, este tiempo  $T_s$  podría ser distinto en ambos casos. Es decir, el conversor puede hacer la conversión A/D con un tiempo de muestreo  $T_{s_1}$  para ser enviada al computador, y recibir posteriormente una señal de tiempo discreto desde el computador cada  $T_{s_2}$  [s] para su conversión D/A. Nosotros supondremos que  $T_{s_1} = T_{s_2} = T_s$ .

## 4 TRABAJO DE LABORATORIO

La presente sección indica el trabajo que debe realizar en las dos sesiones de laboratorio. Esta consta de dos partes: la primera busca practicar las operaciones básicas de Matlab a través de la implementación del algoritmo de mínimos cuadrados, mientras que la segunda busca estudiar la simulación y análisis de sistemas dinámicos (incluida la aproximación de Euler). Note que debe analizar los resultados obtenidos, por ejemplo, para la segunda parte debe hacer las actividades que se piden pero también discutir sus resultados (que características del sistema influyen en las distintas respuestas que observará (polos, ceros, factor de amortiguamiento, etc.).

Recuerde que el informe que usted redacte debe incluir todos los códigos de MATLAB , SIMULINK que utilizó. Se puede entregar en tanto el informe como los códigos de MATLAB y SIMULINK en formato digital (recuerde que el informe debe ser en formato pdf).

### 4.1 SESIÓN 1: ALGORITMO DE MÍNIMOS CUADRADOS

En esta experiencia se implementará el método de mínimos cuadrados para dos casos, y luego se evaluará el efecto de usar otro método numerico distinto al de Euler.

#### Actividad 1: Datos de un plano

1. Implemente en SIMULINK el siguiente sistema

$$y(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + w(t) \quad (4.1)$$

donde  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $u_1(t)$  es un escalón en  $t = 1$ ,  $u_2(t)$  es una senoide de amplitud 1 y frecuencia  $\omega_0 = 10$ , y  $w(t)$  es una señal de ruido blanco Gaussiano de varianza 0.1 (pregúntele a su profesor qué es el ruido Gaussiano si no está familiarizado con él).

2. Simule de  $t = 0$  hasta  $t = 10[s]$ , utilizando el método de Euler con  $\Delta = 10^{-1}[s]$  y tome datos cada  $0.5[s]$ . Denote como  $y[k]$ ,  $u_1[k]$ ,  $u_2[k]$  para  $(k = 1 \dots N$ , índice temporal normalizado) los datos que ha recolectado.
3. Desarrolle un programa de MATLAB para estimar los valores de  $a_1$  y  $a_2$  utilizando el método de mínimos cuadrados. Note que en este caso se tiene que la matriz  $\Phi$  esta dada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_1[1] & u_2[1] \\ u_1[2] & u_2[2] \\ \vdots & \vdots \\ u_1[N] & u_2[N] \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

#### Actividad 2: Datos de una función cuadrática

1. Implemente en SIMULINK el siguiente sistema Considere la misma configuración de la actividad anterior, con las mismas entradas y ruido, pero ahora suponga que los datos obedecen la ecuación

$$y(t) = a_0 + a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)^2 + w(t) \quad (4.3)$$

donde  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $u_1(t)$  es un escalón en  $t = 1$ ,  $u_2(t)$  es una senoide de amplitud 1 y frecuencia  $\omega_0 = 10$ , y  $w(t)$  es una señal de ruido blanco Gaussiano de varianza 0.1.

2. Simule de  $t = 0$  hasta  $t = 10[s]$ , utilizando el método de Euler con  $\Delta = 10^{-1}[s]$  y tome datos cada  $0.5[s]$ . Denote como  $y[k]$ ,  $u_1[k]$ ,  $u_2[k]$  para  $(k = 1 \dots N$ , índice temporal normalizado) los datos que ha recolectado.



3. Desarrolle un programa de MATLAB para estimar los valores de  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  utilizando el método de mínimos cuadrados. Note que en este caso se tiene que la matriz  $\Phi$  esta dada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & u_1[1] & u_2[1]^2 \\ 1 & u_1[2] & u_2[2]^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_1[N] & u_2[N]^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

### Actividad 3: Efecto del método numérico:

Considere los sistemas

$$y(t) = a_1 u_1(t) + a_2 \sqrt{u_2(t)} \quad (4.5)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_1 u_1(t) + a_2 \sqrt{u_2(t)}, \quad y(0^-) = 0 \quad (4.6)$$

donde  $a_i$  son parámetros constantes,  $u_i$  corresponden a entradas conocidas al sistema e  $y$  corresponde a la salida.

1. Discuta qué tipo de sistemas son los descritos en (4.5) y (4.6) (dinámico o algebraico, lineal o no lineal, invariante o variante en el tiempo, causal o no causal.)
2. Considere  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $u_1(t) = \sin(100t)$ ,  $u_2(t) = (1.5 \sin(10t) + 2)\mu(t)$ . Simule utilizando SIMULINK ambos sistemas (4.5) y (4.6) considerando el método de Euler con  $\Delta = 10^{-2}$ , y tiempo de simulación de 10 segundos. Exporte a Workspace las salidas de ambos sistemas.
3. Repita el punto anterior pero ahora considerando otro método numérico, por ejemplo el método de Heun (ode2), conservando  $\Delta = 10^{-2}$ . Exporte a Workspace las salidas de ambos sistemas (use nombres distintos al punto anterior para no sobrescribir los datos).
4. Escriba un código que compare la salida del sistema (4.5) usando Euler y usando el otro método. Son iguales las salidas? Haga la misma comparación pero ahora considerando la salida del sistema (4.6). Comente.
5. Considerando lo observado en el punto anterior, cree que hubiesen cambiado las estimaciones hechas en las actividades anteriores si se hubiese usado otro método numérico en vez del método de Euler? Justifique.

## 4.2 SESIÓN 2: SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

El trabajo que debe desarrollar en esta sección consiste en **simular y analizar** la respuesta de sistemas dinámicos cuando son excitados por distintas entradas. Durante el desarrollo se aplicará el método de Euler con  $\Delta = 10^{-3}$ .

### Actividad 1: Sistema de primer orden.

Considere el sistema en tiempo-continuo representado en función de transferencia como

$$G_c(s) = \frac{b}{s + a} \quad (4.7)$$

donde los parámetros para  $a$  y  $b$  tienen 3 posibles valores cada uno, descritos en la Tabla 4.1

Caso	a	b
(I)	1	1
(II)	10	10
(III)	100	100

Table 4.1: Valores para los parámetros del sistema de primer orden

### Respuesta escalón

Desarrolle lo siguiente para todos los casos descritos anteriormente:

1. Obtenga una expresión analítica para la respuesta a escalón (use las tablas al final del documento). Considere un escalón dado por:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Use la expresión analítica para graficar la respuesta a escalón usando el comando *plot* hasta un tiempo  $t = t_{final} = 10$ . Para ello construya un vector de tiempo espaciado cada  $\Delta = 10^{-3}$  segundos. Guarde los datos.

2. Determine la ecuación de recurrencia que se utilizaría para simular los sistemas dinámicos de primer orden cuando se utiliza el método de Euler para  $\Delta$  general.
3. Utilice SIMULINK para obtener la respuesta a escalón y exporte los resultados al workspace de MATLAB. Para ello implemente la ecuación diferencial correspondiente y también la función de transferencia, y verifique que ambos esquemas entregan la misma respuesta. Utilice el método de Euler con  $\Delta = 10^{-3}$ .
4. Compare gráficamente usando el comando *plot* y *hold on* los resultados obtenidos por el método Euler (datos guardados desde Simulink) con la respuesta exacta (analítica). Mida además el error cuadrático medio, dado por

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y_{exacta}(n\Delta) - y_{Euler}(n\Delta))^2 \quad (4.9)$$

donde  $(N - 1)\Delta = t_{final}$ .

## Actividad 2: Sistema de segundo orden.

Considere un segundo sistema descrito por

$$G_c(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4.10)$$

donde  $\xi$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

Supondremos distintos casos según los valores definidos en la Tabla 4.2

Caso	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$
(I)	$2*0.7*1$	1	0	1
(II)	$2*0.3*1$	1	0	1
(III)	$2*0.7*10$	100	0	1
(IV)	$2*0.3*10$	100	0	1
(V)	$2*0.7*1$	1	-1	1

Table 4.2: Valores para los parámetros del sistema de segundo orden

### Respuesta Impulso y Escalón

Desarrolle lo siguiente para todos los casos descritos anteriormente:

1. Determine los polos y ceros del sistema usando los comandos `pole` y `zero`.
2. Compare gráficamente y analice, usando el comando `plot` y `hold on`, la respuesta impulso (use *impulse*) de los sistemas en los casos I-II, y a parte los casos III-IV (use el mismo tiempo de simulación para comparar).
3. Compare gráficamente y analice, usando el comando `subplot`, la respuesta a escalón de todos los casos (use `step`, use el mismo tiempo de simulación por defecto dado por el comando).
4. Guarde los datos obtenidos usando el comando `step`. Determine, usando indexación (acceder a los elementos de las variables usando cierto criterio): la salida estacionaria, el sobrepaso máximo (overshoot), el tiempo de peak, la máxima contrarrespuesta (undershoot) y el tiempo valle, según corresponda.

### Respuesta en Frecuencia

En esta sección considere sólo el sistema de segundo orden Caso (I) (en la tabla 4.2) y las señales de entrada dadas por

$$u_1(t) = 10\sin(3t)\mu(t) \quad (4.11)$$

$$u_2(t) = 10(1 + \sin(3t))\mu(t) \quad (4.12)$$

$$u_3(t) = 10\sin(10t)\mu(t) \quad (4.13)$$

donde  $\mu(t)$  es la señal escalón unitario.

Desarrolle lo siguiente:

1. Grafique el diagrama de Bode del sistema utilizando MATLAB .
2. Cuál es la respuesta en estado estacionario para las entradas  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  y  $u_3(t)$ ? Explique cómo se puede obtener respuesta a estado estacionario usando el diagrama de Bode, y usando el comando `freqresp`.
3. Utilice SIMULINK para obtener la respuesta del sistema para las entradas  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  y  $u_3(t)$ . Exporte los resultados al workspace de MATLAB y compare gráficamente. Para la simulación utilice el método de Euler con  $\Delta = 10^{-3}$  seg. Use un tiempo de simulación de 30s.
4. Repita las simulaciones del punto anterior pero ahora considere  $\Delta = 0.5$  seg. y compare gráficamente (en Matlab) con los resultados obtenidos para  $\Delta = 10^{-3}$  seg.

### 4.3 SESIÓN 3: MUESTREO DE SEÑALES

Para el trabajo de esta sesión se considerará como paso de integración numérica  $\Delta = 0.001$ , y se supondrá que dicha tasa es suficientemente rápida como para considerar que las señales asociadas a esa tasa representan señales de tiempo continuo. No confundir  $\Delta$  con el tiempo de muestreo  $T_s$ .

#### 4.4 ACTIVIDAD 1: RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES MUESTREADAS

##### Reconstrucción no causal usando la función Sinc

1. En simulink configure el método de Euler con paso  $\Delta = 0.001$ . Implemente en SIMULINK una señal sinusoidal de frecuencia 1Hz, y configure un tiempo total de simulación,  $T_{sim}$ , de 3 segundos.
2. Use el bloque To Workspace para muestrear y enviar los datos muestreados al workspace. Envíe ambos, datos y tiempo. El tiempo de muestreo  $T_s$  se configura directamente en el bloque. Haga esto para los siguientes valores de  $T_s$  (sugerencia: use varios bloques to workspace y simule una sola vez)
  - (a)  $T_s = \Delta$  (esto simula la medición de la señal real de tiempo continuo)
  - (b)  $T_s = 0.51$  (muestreo ligeramente menor que 2 veces la frecuencia más alta de la señal)
  - (c)  $T_s = 0.5$  (muestreo igual a 2 veces la frecuencia más alta de la señal)
  - (d)  $T_s = 0.49$  (muestreo ligeramente mayor que 2 veces la frecuencia más alta de la señal)
  - (e)  $T_s = 0.1$  (muestreo holgadamente mayor que 2 veces la frecuencia más alta de la señal)
3. Use la función *reconstruccion*, que le será otorgada, para calcular la señal reconstruida,  $y_r$ , en cada caso. Recuerde que los datos del caso *a*) corresponden a medición de la señal original continua con la cual contrastar los otros casos, que sí corresponden a señales muestreadas. Note que usted deberá familiarizarse con la sintaxis asociada al uso de funciones en Matlab y analizar el código que se le entregará.
4. Grafique usando subplot la reconstrucción para los 4 casos anteriores (recuerde que el caso *a*) no cuenta). En cada subgráfica grafique usando hold on, la señal original, la señal muestreada (use el comando stem) y la señal reconstruida. Haga acercamientos a las gráficas cuando corresponda para apreciar mejor la calidad de la reconstrucción. Compare y analice los resultados.
5. Repita los puntos anteriores pero ahora considerando un tiempo de simulación de Simulink  $T_{sim} = 30$ , y luego  $T_{sim} = 300$ . Compare y analice los resultados.

##### Reconstrucción causal usando retentores.

1. En simulink configure el método de Euler con paso  $\Delta = 0.001$ . Implemente en SIMULINK una señal sinusoidal de frecuencia 1Hz, y configure un tiempo total de simulación,  $T_{sim}$ , de 3 segundos.
2. Use el bloque Zero-order hold para muestrear y retener, y así reconstruir aproximadamente la función sinusoidal. El tiempo de muestreo  $T_s$  se configura directamente en el bloque. Haga esto para los siguientes valores de  $T_s$  (sugerencia: use varios bloques zero-order hold y simule una sola vez)
  - (a)  $T_s = 0.75$
  - (b)  $T_s = 0.5$
  - (c)  $T_s = 0.2$
  - (d)  $T_s = 0.1$
  - (e)  $T_s = 0.05$
  - (f)  $T_s = 0.01$
3. Use el bloque To Workspace para enviar la señal real y las reconstruidas al workspace. Envíe ambos, datos y tiempo.

4. Grafique usando subplot la reconstrucción para los 6 casos anteriores. En cada subgráfica grafique usando hold on, la señal original y la señal reconstruida. Compare y analice los resultados.
5. Repita los puntos anteriores pero ahora considerando el bloque first-order hold en vez del zero order hold. Compare y analice los resultados.

#### 4.5 ACTIVIDAD 2: EFECTO DEL MUESTREO EN UN SISTEMA DINÁMICO

En esta actividad supondremos que el circuito RC implementado en Simulink es de un sistema real de tiempo continuo.

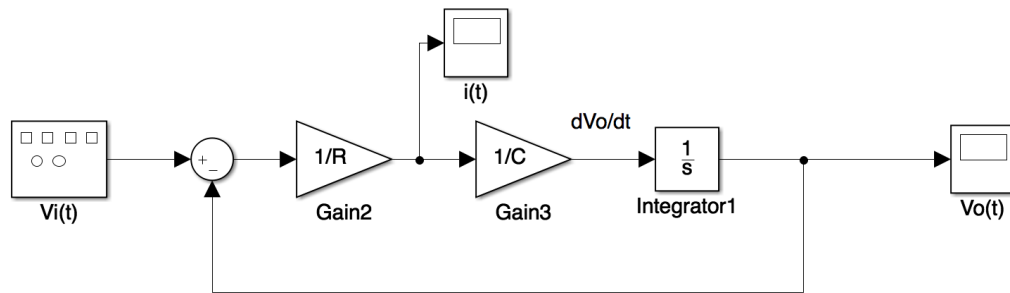


Figure 4.1: Circuito RC simulado

1. Implemente en SIMULINK un circuito RC como la Figura 4.1. Considere  $R = 10\text{ K}\Omega$ , y  $C = 18\text{ }\mu\text{F}$ . (use el método de Euler con  $\Delta = 1e-3$ , y tiempo de simulación de 10).
2. Agregue bloques para almacenar los datos de entrada y salida en workspace.
3. Genere una señal sinusoidal de Amplitud 2.5[V](o 5[V] peak-to-peak), y de Frecuencia 1[Hz], vea el voltaje  $V_o(t)$ . Envíe al workspace tanto la entrada como la salida. Este caso representaría el caso en que el generador, el osciloscopio y el sistema son de tiempo continuo.
4. Considere el mismo caso anterior pero ahora suponga que el generador de funciones está implementado de forma digital, y por lo tanto para interactuar con el circuito RC debe agregar un conversor D/A. Agregue entonces en Simulink el retentor de orden cero a la salida del generador, y también un bloque para almacenar en workspace la información luego del retentor.
5. Use los mismos tiempos de muestreo  $T_s$  del retentor de orden cero de la actividad anterior, y mida el voltaje  $V_o$  en cada caso (almacene los datos). Sugerencia: puede crear un solo circuito RC y copiarlo multiples veces en un mismo modelo de Simulink, y variar en cada caso el tiempo de muestreo, y el nombre de las variables almacenadas en workspace.
6. Grafique los datos almacenados en workspace para las señales de interés, y compare los resultados. Discuta el efecto del retentor de orden cero en el comportamiento del sistema dinámico.

Observación: El osciloscopio también podría suponerse digital, y por lo tanto las observaciones dependerán del muestreo de la señal continua asociada.

## 5 COMENTARIOS ANEXOS

- Existen diversos tutoriales en internet sobre MATLAB/Simulink. A la fecha, se pueden encontrar en línea los siguientes tutoriales en español:

- [https://www.youtube.com/channel/UCzLFVTOkvComY\\_eApFUfrTA](https://www.youtube.com/channel/UCzLFVTOkvComY_eApFUfrTA)
- <https://www.youtube.com/watch?v=UawhvugB9qs>
- <https://www.youtube.com/watch?v=j4rRvelnxso>

- Más información de métodos numéricos y su aplicación a la simulación de sistemas dinámicos se puede encontrar en la siguientes libros (entre otros):

[1] R. L. Burden. Análisis Numérico. Thomson Editores, 2002.

[2] J. C. Butcher. Numerical methods for ordinary differential equations. Wiley, 2nd edition, 2008.

[3] S. Nakamura. Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB. Pearson, 1997.

- El algoritmo de mínimos cuadrados es ampliamente utilizado en el área de identificación de sistemas dinámicos y tiene aplicación en sistemas de control avanzado (adaptativo) y procesamiento de señales. Algunos libros que tratan estos temas son los siguientes:

[4] L. Ljung. System Identification: Theory for the user. Prentice Hall, 2nd edition, 1999.

[5] T. Söderström and P. Stoica. System Identification. Prentice-Hall International, 1989.

[6] G. C. Goodwin and R. Payne. Dynamic System Identification: Experiment design and data analysis. Academic Press, 1977.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Descripción
$\sum_{i=1}^l a_i y_i(t)$	$\sum_{i=1}^l a_i Y_i(s)$	Linealidad
$y(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} Y\left(\frac{s}{a}\right)$	Escalamiento
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s) - y(0^-)$	Derivada en $t$
$\frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (k \in \mathbb{N})$	$s^k Y(s) - \sum_{\ell=1}^k s^{k-\ell} \left. \frac{d^{\ell-1} y}{dt^{\ell-1}} \right _{t=0^-}$	Derivada en $t$ de orden superior
$\int_{0^-}^t y(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} Y(s)$	Integral definida
$t y(t)$	$-\frac{dY(s)}{ds}$	Derivada en $s$
$t^k y(t) \quad (k \in \mathbb{N})$	$(-1)^k \frac{d^k Y(s)}{ds^k}$	Derivada en $s$ de orden superior
$y(t - \tau) \mu(t - \tau)$	$e^{-s\tau} Y(s)$	Desplazamiento en el tiempo $t$
$e^{at} y(t)$	$Y(s - a)$	Desplazamiento en la variable $s$
$\int_{0^-}^t y_1(\tau) y_2(t - \tau) d\tau$	$Y_1(s) Y_2(s)$	Convolución de funciones causales
$y_1(t) y_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s - \zeta) d\zeta$	Producto en el tiempo
$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$	Teorema del Valor Final
$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$	Teorema del Valor Inicial

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Región de convergencia
$\delta(t)$	1	$\forall s \in \mathbb{C}$
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$\mu(t - \tau) \quad (\tau > 0)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t^n \mu(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{\alpha t} \mu(t) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{s - \alpha}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$t e^{\alpha t} \mu(t) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$\cos(\omega_o t) \mu(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\text{sen}(\omega_o t) \mu(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{\alpha t} \cos(\omega_o t) \mu(t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$e^{\alpha t} \text{sen}(\omega_o t) \mu(t)$	$\frac{\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$t \text{sen}(\omega_o t) \mu(t)$	$\frac{2\omega_o s}{(s^2 + \omega_o^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \cos(\omega_o t) \mu(t)$	$\frac{s^2 - \omega_o^2}{(s^2 + \omega_o^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\mu(t) - \mu(t - \tau)$	$\frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$	$\forall s \in \mathbb{C}$



$y[k]$	$Y[z] = \mathcal{Z}\{y[k]\}$	Descripción
$\sum_{i=1}^l a_i y_i[k]$	$\sum_{i=1}^l a_i Y_i[z]$	Linealidad
$\alpha^k y[k] \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$Y\left[\frac{z}{\alpha}\right]$	Escalamiento en $z$
$y^*[k]$	$Y^*[z^*]$	Conjugación
$\sum_{\ell=0}^k y[\ell]$	$\frac{z}{z-1} Y[z]$	Suma acumulada
$y[k-k_0] \quad (k_0 \in \mathbb{N})$	$z^{-k_0} \left( Y[z] + \sum_{\ell=1}^{k_0} y[-\ell] z^\ell \right)$	Retardo en $k$
$y[k+k_0] \quad (k_0 \in \mathbb{N})$	$z^{k_0} \left( Y[z] - \sum_{\ell=0}^{k_0-1} y[\ell] z^{-\ell} \right)$	Adelanto en $k$
$y[k-k_0] \mu[k-k_0]$	$z^{-k_0} Y[z]$	Retardo secuencia causal
$ky[k]$	$-z \frac{dY[z]}{dz}$	Derivada en $z$
$k^2 y[k]$	$z^2 \frac{d^2 Y[z]}{dz^2} + z \frac{dY[z]}{dz}$	Derivada de segundo orden en $z$
$\sum_{l=0}^k y_1[l] y_2[k-l]$	$Y_1[z] Y_2[z]$	Convolución de funciones causales
$y_1[k] y_2[k]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1[\xi] Y_2\left[\frac{z}{\xi}\right] \xi^{-1} d\xi$	Producto en el tiempo
$y[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} Y[z]$	Teorema del Valor Inicial
$\lim_{k \rightarrow \infty} y[k]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y[z]$	Teorema del Valor Final

$y[k] \quad (k \in \mathbb{Z}_0^+)$	$Y[z] = \mathcal{Z} \{y[k]\}$	Región de Convergencia
$\delta[k]$	1	$ z  > 0$
$\mu[k]$	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$\mu[k-k_0] \quad (k_0 \in \mathbb{N})$	$\frac{z^{-k_0+1}}{z-1}$	$ z  > 1$
$k\mu[k]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$
$\alpha^k \mu[k] \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z  >  \alpha $
$k\alpha^k \mu[k] \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$ z  >  \alpha $
$e^{j\theta_0 k} \mu[k]$	$\frac{z}{z-e^{j\theta_0}}$	$ z  > 1$
$\cos(\theta_0 k) \mu[k]$	$\frac{z(z-\cos\theta_0)}{z^2-2z\cos\theta_0+1}$	$ z  > 1$
$\text{sen}(\theta_0 k) \mu[k]$	$\frac{z\text{sen}\theta_0}{z^2-2z\cos\theta_0+1}$	$ z  > 1$
$\alpha^k \cos(\theta_0 k) \mu[k]$	$\frac{z(z-\alpha\cos\theta_0)}{z^2-2z\alpha\cos\theta_0+\alpha^2}$	$ z  >  \alpha $
$\alpha^k \text{sen}(\theta_0 k) \mu[k]$	$\frac{z\alpha\text{sen}\theta_0}{z^2-2z\alpha\cos\theta_0+\alpha^2}$	$ z  >  \alpha $
$\cos(\theta_0 k + \phi) \mu[k]$	$\frac{z^2 \cos\phi - z \cos\phi \cos\theta_0 + \text{sen}\phi \text{sen}\theta_0}{z^2-2z\cos\theta_0+1}$	$ z  > 1$
$\alpha^k(\mu[k]-\mu[k-N])$	$\frac{1-(\alpha z^{-1})^N}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  > 0$