2022 全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只 有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

1.【解析】选 C.

(1)若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$

由 $\alpha(x)\sim\beta(x)\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=1$，故 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$ 成立；

(2) 若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$ ，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

反例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{-x}\right)^2}{\left(-e^{-x}\right)^2}=1$，但 $e^{-x}=-e^{-x}$；

(3) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$

由 $\alpha(x)\sim\beta(x)\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0$

所以 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$

(4)若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

2.【解析】选 D

$$\int_0^2 dy\int_y^2\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx\int_0^x ydy=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx^3=\frac{2}{3}.$$

3.【解析】选 B

因为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 2 阶导数，即

$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 存在，故可得 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$.

当$f'(x_0)>0$时，由极限局部保号性知，存在$\delta>0$，当$x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta)$时，有$f'(x)>0$，故$f(x)$在$x=x_0$的某个邻域内单调增加.

4.【解析】选C

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt，则 F(x,y)=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)dt-\int_0^{x-y}tf(t)dt$$

$$F_x'(x,y)=\int_0^{x-y}f(t)dt, F_y'(x,y)=-\int_0^{x-y}f(t)dt$$

$$F_x''(x,y)=f(x-y), F_y''(x,y)=f(x-y)$$

故$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.故选C.

5.【解析】选A.

原式$=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$

对于$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$，$x$=0为瑕点. 若$\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\dfrac{\ln x}{x^p}=A$，$(0<\alpha<1)$，则收敛.

所以$\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-p}x=A$，故$\alpha-p>0$，又$0<\alpha<1$，所以$0<p<1$

对于$\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$，$x=1$为瑕点. 若$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\beta}\dfrac{\ln x}{(1-x)^p}=B$，$(0<\beta<1)$，则收敛.

即$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\beta}\dfrac{\ln(1+x-1)}{(1-x)^{1-p}}=-\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\beta+p}=B$

要使极限存在，则只需

$\beta+p>0$，又$0<\beta<1$，所以$-1<p<0$

当p=0时，原式$=\int_0^1\dfrac{\ln x}{1-x}dx<\int_0^1\dfrac{x}{1-x}dx$收敛，

所以p的范围为$(-1,1)$，故选A

6.【解析】选D.

令$x_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos[\sin(-1)^n]=\cos(\sin 1)$存在，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin[\cos(-1)^n]=\sin(\cos 1)$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在；也不存在，故A,B,C排除.

当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)=A$，则$-1\le A\le 1$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin[\sin(\cos x_n)]=\arcsin A$存在，

故当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在时， $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在；

7.【解析】选 A.

因为 $I_2 - I_1 = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{2}}{1+\cos x}dx$，令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{2}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}>0 \quad (x\in[0,1])$，故 $f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上有 $f(x)>0$，即 $I_2>I_1$；

令 $I_3 - I_1 = \int_0^1 \dfrac{2x}{1+\sin x}-\dfrac{x}{2(1+\cos x)}dx$，

因为 $\dfrac{2x}{1+\sin x}-\dfrac{x}{2(1+\cos x)}=\dfrac{2x}{1+\sin 2x}-\dfrac{2x}{4+2\cos x}>0$，所以 $I_3>I_1$ ；

令 $I_3 - I_2 = \int_0^1 \dfrac{2x}{1+\sin x}-\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，

因为 $\dfrac{2x}{1+\sin x}-\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}>\dfrac{2x}{1+\sin x}-\dfrac{x}{1+\cos x}=\dfrac{2x}{1+\sin x}-\dfrac{2x}{2+2\cos x}>0$，所以

$I_3>I_2$.综上，$I_3>I_2>I_1$

8.【解析】选 B

由题知，矩阵的特征值无重根，故该矩阵可相似对角化；

又因为若存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，则矩阵 A 可相似对角化，即 $A=P\Lambda P^{-1}$.

故选 B.

9.【解析】选 D

因为 $(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a^2-1&1\\0&b-1&b^2-1&3\end{pmatrix}$

（1）当 $a=1$ 或 $b=1$ 时，无解；

（2）当 $a=-1,b\neq\pm1$ 或，$a\neq\pm1,b=-1$ 时，方程有唯一解.

10.【解析】选 C

$I:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \leftrightarrow II:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

向量组 (I) 与 (II) 等价 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(I)=\mathrm{r}(II)=\mathrm{r}(I,II)$，

$$(\mathrm{I}\vdots\mathrm{II})=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&\vdots&\lambda&1&1\\1&\lambda&1&\vdots&1&\lambda&\lambda\\1&1&\lambda&\vdots&1&1&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1&1&\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda&0&\lambda-1&\lambda(1-\lambda)\\0&0&(1-\lambda)(2+\lambda)&0&0&(1-\lambda)(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$$

所以 $\lambda=1$ 时，$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I,II})=1$，

$\lambda \neq 1$时，$\lambda \neq -1$且$\lambda \neq -2$时，$r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II}) = r(\mathrm{I,II})=3$，

所以$\{\lambda |\ \lambda \in R, \lambda \neq -1且\lambda \neq -2\}$.

二、填空题（本题共6小题,每小题5分,共30分.请将答案写在答题纸指定位置上.）

11.【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\tan x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}$

12.【答案】$-\dfrac{31}{32}$

【解析】对$x^2+xy+y^3=3$两边同时求导得：$2x+y+xy'+3y^2y'=0$

当$x=1$时，$y^3+y-2=0$，解得$y=1$，代入上式得$3+4y'(1)=0, y'(1)=-\dfrac{3}{4}$

$2+2y'+xy''+6yy'^2+3y^2y''=0$

当$x=1, y=1, y'(1)=-\dfrac{3}{4}$时，$2+2\times(-\dfrac{3}{4})+y''(1)+6\times(-\dfrac{3}{4})^2+3y''(1)=0$

解得$y''(1)=-\dfrac{31}{32}$.

13.【答案】$\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}$

【解析】

$$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+4\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=4\int_0^1\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=4\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}.$$

14.答案】$y(x)=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$

【解析】

$y'''-2y''+5y'=0$的特征方程为$r^3-2r^2+5r=0$，解得$r_1=0, r_2=1+2i, r_3=1-2i$，

所以微分方程的通解为$y(x)=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$，$C_1, C_2, C_3$为任意常数.

15.【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 6\theta}{2}d\theta=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 6\theta d\theta)=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{24}\sin 6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}.$$

16.【答案】-1

【解析】

设$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$P_1AP_2=B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，

$\because A=P_1^{-1}BP_2^{-1},\therefore A^{-1}=P_2B^{-1}P_1$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$\therefore tr(A)=-1$

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写 出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$ 得

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)\right]=-2f(1)=0$，$f(1)=0$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[f\left(e^{x^2}\right)-f(1)\right]-3[f(1+\sin^2 x)-f(1)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f\left(e^{x^2}-f(1)\right.}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-3\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]$$

$$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)=2$$

故$f'(1)=-1$

18.【解析】由$2xy'-4y=2\ln x-1$得：$y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{2\ln x-1}{2x}$

$$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{2\ln x-1}{2x}\cdot e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{2\ln x}\left(\int\frac{2\ln x-1}{2x}\cdot e^{-2\ln x}dx+C\right)$$

$$=x^2\left(\int\frac{2\ln x-1}{2x}\cdot\frac{1}{x^2}dx+C\right)$$

$$=x^2\left(\int\frac{2\ln x-1}{2x^3}dx+C\right)$$

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\int\ln x\cdot x^{-3}dx=-\frac{1}{2}\int\ln xdx-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2}-\int x^{-2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}dx$$

所以 $y=x^2\left(\int\frac{\ln x}{x^3}dx-\int\frac{1}{2x^3}dx+c\right)=x^2\left(-\frac{\ln x}{2x^2}+C\right)=Cx^2-\frac{1}{2}\ln x$

由 $y(1)=\frac{1}{4}$ 得 $C=\frac{1}{4}$，故 $y(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$

从而 $S=\int_i^e\sqrt{1+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$

$$=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}}dx=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2}}dx=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

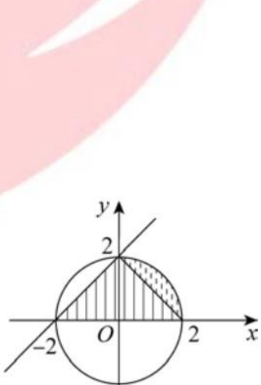
$$=\int_1^e\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{2}xdx+\int_1^e\frac{1}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)+\frac{1}{2}(\ln e-\ln 1)$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

19.【解析】根据题意可得积分区域如图所示，设

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},0\le r\le 2,$$



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\frac{r^2(\cos\theta-\sin\theta)^2}{r^2}rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}\frac{r^2(\cos\theta-\sin\theta)^2}{r^2}rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)^2d\theta\int_0^2rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta-\sin\theta)^2\frac{2}{(\sin\theta-\cos\theta)^2}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2d\theta$$

$$=2(\frac{\pi}{2}-1)+2\times\frac{\pi}{2}=2\pi-2$$

20.【答案】(1) $\frac{\partial g}{\partial x}=2e^{-y}(2x-y)$; (2) $f(u,v)=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$，极小值 $f(0,0)=0$.

【解析】(1)由 $g(x,y)=f(x,y-x)$ 得 $\frac{\partial g}{\partial x}=f_1'(x,y-x)-f_2'(x,y-x)$

又 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)e^{-(u+v)}$ 即 $f_1'(x,y)-f_2'(x,y)=2(x-y)e^{-(x+y)}$

将 y 换为 $y-x$ 得 $\frac{\partial g}{\partial x}=2e^{-y}(2x-y)$.

(2) 由 $f(u,0)=u^2e^{-u}$ 及 $g(u,v)=f(u,v-u)$ 得 $g(u,u)=f(u,0)=u^2e^{-u}$，

对 $\frac{\partial g}{\partial x}=2e^{-y}(2x-y)$ 两边关于 x 积分得 $g(x,y)=2e^{-y}(x^2-xy)=f(x,y-x)$，

令 $\begin{cases}u=x\\ v=y-x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=u\\ y=u+v\end{cases}$ 代入上式得 $f(u,v)=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$；

$\begin{cases}f_u'=(2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)}=0\\ f_v'=(2v-u^2-v^2)e^{-(u+v)}=0\end{cases}$ 解得驻点 $(0,0)$, $(1,1)$，

又 $f_{uu}''=(2-4u+u^2+v^2)e^{-(u+v)}$， $f_{uv}''=(u^2+v^2-2u-2v)e^{-(u+v)}$，

$f_{vv}''=(2-4v+u^2+v^2)e^{-(u+v)}$

对 $(0,0)$ 点，$A=2,B=0,C=2,AC-B^2=4>0,A>0,$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值 $f(0,0)=0$；

对 $(1,1)$ 点，$A=0,B=-2e^{-2},C=0,AC-B^2<0,$ 故 $(1,1)$ 不是极值点.

21. 【证明】必要性：根据泰勒公式可得

$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$ ，因为 $f''(x)>0$，

所以 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx+\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$ ，

所以 $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

充分性：假设存在 m，使得 $f''(m)<0$ ，则存在 m 的某邻域 (x_1,x_2) 有 $f''(x)<0$，所以，令 $F(x)=\int_{x_1}^{x} f(t)dt-(x-x_1)f(\frac{x+x_1}{2})$，则

$$F'(x)=f(x)-f(\frac{x+x_1}{2})-\frac{1}{2}(x-x_1)f'(\frac{x+x_1}{2})=\frac{1}{2}(x-x_1)[f'(\xi)-f'(\frac{x+x_1}{2})]$$

$$=\frac{1}{2}(x-x_1)(\xi-\frac{x+x_1}{2})f''(\eta)<0$$

所以 $F(x)$ 递减，故 $F(x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt-(x_2-x_1)f(\frac{x_2+x_1}{2})<F(x_1)=0$，即

$$\frac{1}{(x_2-x_1)}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt<f(\frac{x_2+x_1}{2}),$$

这与题设条件 $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 矛盾，假设不成立，所以

当 $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 时 $f''(x)>0$

22.【解析】 (1)二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2)=0$$

所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=4$,解 $(4E-A)X=0$ 得 A 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=4$ 的特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=2$ 时,解 $(2E-A)X=0$ 得 A 对应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

因为 α_1，α_2，α_3 已经两两正交，只需将其正交化，得

$$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,做正交变换 $X=QY$,化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型为 $f(x_1,x_2,x_3)\underline{\underline{X=QY}}4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.

（2） $f(x_1,x_2,x_3)\underline{\underline{X=QY}}4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2\geq 2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$

因为 $X=QY$ 为正交变换，所以 $\|X\|=\|Y\|$,

所以 $\min\limits_{X\neq 0}\dfrac{f(X)}{X^TX}=2$.