2019考研数学（二）参考答案

一、选择题

(1) A

解 由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，得 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2ax}=\dfrac{1}{2a}=b$.

所以 $ab=\dfrac{1}{2}$.故应选 A.

(2) B

解 由 $f''(x)>0$ 知曲线 $y=f(x)$ 在$[-1,1]$上是凹的，因此当 $f(x)$ 为凹的偶函数时满足题设条件 $f(-1)=f(1)$，此时 $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$，显然可排除选项 C，D；

取 $f(x)=2x^2-1$，则 $f(-1)=f(1)=1, f(0)=-1, f''(x)=4>0$，

且 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}<0$，

于是排除 A，故应选 B.

(3) D

解 取 $x_n=2\pi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2\pi=0$，

但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2\pi\neq 0$，因此选项 A 是错误的；

又取 $x_n=-1$，则

$x_n+\sqrt{|x_n|}=0$；$x_n+x_n^2=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$，

但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1\neq 0$，于是排除 B 及 C；故应选 D.

(4) C

解 由题设条件知特征方程为：

$r^2-4r+8=0$，特征根：$\lambda_1=2+2i$，$\lambda_2=2-2i$.

对于微分方程：$y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}$ 其特解 y_1^* 可设为：

$$y_1^*=A\mathrm{e}^{2x}$$

而微分方程：$y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}\cos 2x$ 的特解 y_2^* 可设为：

$$y_2^*=x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$$

由二阶常系数非齐次线性微分特解的结构知原方程的特解 y^* 为 y_1^* 与 y_2^* 之和，即

$$y^*=y_1^*+y_2^*=A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x).$$

故应选 C.

(5) D

解 因为对于任意的(x,y)都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，所以函数 $z=f(x,y)$ 关于自变量 x 是单

调增函数，从而知

$$f(0,1)<f(1,1) \tag{*}$$

同理由$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，得

$$f(1,1)<f(1,0) \tag{**}$$

由(*)式及(**)式得

$$f(0,1)<f(1,0)$$

故应选 D.

(6) C

解 令$s_1(t)$，$s_2(t)$表示甲，乙两人的路程，由题意，计时开始时，甲在乙前方10m，要想在t_0时刻乙追上甲，应有$s_1(t_0)-s_2(t_0)=-10$.根据题干图中阴影部分面积数值为10，20，3，可得

$t=10$时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10.$

$15<t<20$时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10+\int_{10}^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$

$$>10+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10-20=-10.$$

$t=25$时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$$

$$=10-20=-10.$$

$t>25$时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t+\int_{25}^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$$

$$=-10+\int_{25}^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t>-10.$$

故应选 C.

(7) B

解 由$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，可知，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3$，

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(8) B

解 因为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是上三角矩阵，所以特征值都是1，2，2.

所以，要判别$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$能否相似对角化，只需考察属于2的线性无关的特征向量的个数即可.

对于$\boldsymbol{A}$，属于2的线性无关的特征向量的个数$3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-1=2$.

对于$\boldsymbol{B}$，属于2的线性无关的特征向量的个数$3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=3-2=1$.

所以，$\boldsymbol{A}$可以和$\boldsymbol{C}$相似，但是$\boldsymbol{B}$不能.

故应选 B.

二、填空题

(9) $y=x+2$

解 因为 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{2}{x}=2$$

所以 $y=ax+b=x+2$ 为已知曲线的一条斜渐近线；

当 $x\to-\infty$ 时，同理知斜渐近线仍为 $y=x+2$;

故应填 $y=x+2$.

(10) $-\dfrac{1}{8}$

解 $\because\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)'\cdot\frac{1}{1+e^t}$$

$$=\frac{-\sin t\cdot(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^2}\cdot\frac{1}{1+e^t}$$

$$=\quad\frac{\sin t\cdot(1+e^t)+\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^3}$$

$$=-\frac{\sin t+(\sin t+\cos t)\cdot e^t}{(1+e^t)^3}$$

$\therefore\ \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$，故应填 $-\dfrac{1}{8}$.

(11) 1

解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\ln(1+x)\cdot d\left(\frac{-1}{1+x}\right)$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}+0+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$=-\left.\frac{1}{1+x}\right|_0^{+\infty}=-(0-1)=1$$

故应填 1.

(12) xye^y

解 由题意 $f_x'(x,y)=ye^y$，$f_y'(x,y)=x(1+y)e^y$.

所以有 $f(x,y)=\int f'_x(x,y)\mathrm{d}x=\int y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x=xy\mathrm{e}^y+C(y)$.

$f'_y(x,y)=[xy\mathrm{e}^y+C(y)]'=x(1+y)\mathrm{e}^y+C'(y)=x(1+y)\mathrm{e}^y$

$\therefore C'(y)=0\Rightarrow C(y)=C$.

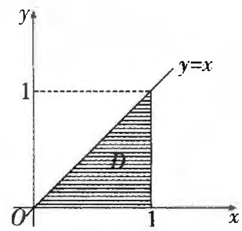
因此 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y+C$，又 $f(0,0)=0$.

所以 $C=0$. 故 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$.

故应填 $xy\mathrm{e}^y$.

(13) $-\ln\cos 1$

解 由已知二次积分的上、下限可得积分区域 D 如右图所示，交换二次积分的积分次序得：



$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\tan x}{x}\cdot y\Big|_0^x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \tan x\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-\ln|\cos x|\Big|_0^1$$

$$=-\ln|\cos 1|=-\ln\cos 1\quad(\because \cos 1>0)$$

故应填 $-\ln\cos 1$.

(14) -1

解 设 $\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，直接解得 $a=-1$.

三、解答题

(15) **解** 令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

(16) **解** 因为 $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\mathrm{e}^x-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\sin x,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\mathrm{e}^x+\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}\mathrm{e}^x-\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\sin x\right)\mathrm{e}^x$$

$$-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cos x-\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}e^x-\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\sin x\right)\sin x.$$

当 $x=0$ 时，$u=e^0=1$，$v=\cos 0=1$，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}+\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial u^2}-\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}.$$

(17) **解**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 x\ln(1+x)dx\\&=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(18) **解** 由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0, \qquad ①$$

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0. \qquad ②$$

在 ① 式中令 $y'=0$ 得 $x=-1$，$x=1$.

当 x 分别取 -1 和 1 时，由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 得 $y(-1)=0$，$y(1)=1$.

将 $x=-1$，$y(-1)=0$ 及 $y'(-1)=0$ 代入 ② 式得 $y''(-1)=2$.

因为 $y'(-1)=0$，$y''(-1)>0$，所以 $y(-1)=0$ 是 $y(x)$ 的极小值.

将 $x=1$，$y(1)=1$ 及 $y'(1)=0$ 代入 ② 式得 $y''(1)=-1$.

因为 $y'(1)=0$，$y''(1)<0$，所以 $y(1)=1$ 是 $y(x)$ 的极大值.

(19) **解** (Ⅰ) 由题设知 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，所以 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 与极限的保号性可知，存在 $a\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{f(a)}{a}<0$，即 $f(a)<0$.

又 $f(1)>0$，所以存在 $b\in(a,1)\subset(0,1)$，使得 $f(b)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $f(0)=f(b)=0$，根据罗尔定理，存在 $c\in(0,b)\subset(0,1)$，使得

$$f'(c)=0.$$

令 $F(x)=f(x)f'(x)$，由题设知 $F(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上可导，且

$$F(0)=0,F(c)=0,F(b)=0.$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)$，$\eta\in(c,b)$，使得 $F'(\xi)=F'(\eta)=0$，即 ξ,η 是方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的两个不同实根.

(20) **解** $\iint\limits_D (x+1)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D (x^2+2x+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

D 的边界曲线在极坐标系下的方程为 $r=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\\ &=4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos2\theta\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos4\theta)\mathrm{d}\theta\\ &\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

又因为 $\iint\limits_D (2x+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0+\pi=\pi$,

所以 $\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5\pi}{4}$.

(21) **解** 曲线 $l: y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

令 $X=0$ 得 $Y_P=y-xy'$.

曲线 $l: y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为

$$y'(Y-y)=-X+x.$$

令 $Y=0$ 得 $X_P=x+yy'$.

由题设知 $x+yy'=y-xy'$,整理得

$$y'=\frac{y-x}{y+x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}.$$

令 $\frac{y}{x}=u$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代人上述方程并分离变量得

$$\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

两边积分得 $\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|x|+C$,

即 $\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$.

因为曲线 l 过点(1,0),所以 $C=0$,于是曲线 l 上点的坐标 (x,y) 满足的方程为

$$\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0.$$

(22) **解** (Ⅰ) 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有 2 个不为零的特征值，从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，故 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解.

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解.

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(23) **解** 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}.$$

由题设知 $|\boldsymbol{A}|=0$. 又 $|\boldsymbol{A}|=6-3a$，于是 $a=2$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$，所以特征值为 $-3,6,0$.

不妨设 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1=-3$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

属于特征值 $\lambda_2=6$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

属于特征值 $\lambda_3=0$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

故所求的一个正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.