

## 2023 年考研数学二

### 一、选择题, 1 ~ 10 题, 每题 5 分, 共 50 分.

1. 曲线  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)$  的斜渐近线方程为 ( )  
A.  $y = x + e$       B.  $y = x + \frac{1}{e}$       C.  $y = x$       D.  $y = x - \frac{1}{e}$
2. 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x, & x > 0 \end{cases}$  的一个原函数为 ( )  
A.  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$       B.  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}-x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$   
C.  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$       D.  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$
3. 已知  $\{x_n\}, \{y_n\}$  满足:  $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = y_n^2 (n = 1, 2, \dots)$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时, ( )  
A.  $x_n$  是  $y_n$  的高阶无穷小      B.  $y_n$  是  $x_n$  的高阶无穷小  
C.  $x_n$  与  $y_n$  是等价无穷小      D.  $x_n$  与  $y_n$  是同阶但不等价的无穷小
4. 若微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的解在  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 则 ( )  
A.  $a < 0, b > 0$       B.  $a > 0, b > 0$       C.  $a = 0, b > 0$       D.  $a = 0, b < 0$
5. 设函数  $y = f(x)$  由  $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ t = |t| \sin t \end{cases}$  确定, 则 ( )  
A.  $f(x)$  连续,  $f'(0)$  不存在      B.  $f'(0)$  存在,  $f'(x)$  在  $x = 0$  处不连续  
C.  $f'(x)$  连续,  $f''(0)$  不存在      D.  $f''(0)$  存在,  $f''(x)$  在  $x = 0$  处不连续
6. 若函数  $f(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}$  在  $\alpha = \alpha_0$  处取得最小值, 则  $\alpha_0 =$  ( )  
A.  $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$       B.  $-\ln(\ln 2)$       C.  $\frac{1}{\ln 2}$       D.  $\ln 2$
7. 设函数  $f(x) = (x^2 + a)e^x$ , 若  $f(x)$  没有极值点, 但曲线  $y = f(x)$  有拐点, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $[0, 1)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $[1, 2)$       D.  $[2, +\infty)$

8. 设  $A, B$  为  $n$  阶可逆矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵,  $M^*$  为矩阵  $M$  的伴随矩阵, 则  $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* = ( )$

A.  $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

9. 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$  的规范形为 ( )

A.  $y_1^2 + y_2^2$

B.  $y_1^2 - y_2^2$

C.  $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$

D.  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

10. 已知向量  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . 若  $\gamma$  既可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 也可由  $\beta_1, \beta_2$  线性表示, 则  $\gamma =$  ( )

A.  $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

B.  $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

C.  $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

D.  $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

## 二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 5 分, 共 30 分.

11. 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$  与  $g(x) = e^{x^2} - \cos x$  是等价无穷小, 则  $ab =$ \_\_\_\_\_.

12. 曲线  $y = \int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^3} dt$  的弧长为\_\_\_\_\_.

13. 设函数  $z = z(x, y)$  由  $e^z + xz = 2x - y$  确定, 则  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(1,1)} =$ \_\_\_\_\_.

14. 曲线  $3x^3 = y^5 + 2y^3$  在  $x = 1$  对应点处的法线斜率为\_\_\_\_\_.

15. 设连续函数  $f(x)$  满足:  $f(x+2) - f(x) = x, \int_0^2 f(x) dx = 0$ , 则  $\int_1^3 f(x) dx =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知线性方程组  $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$  有解, 其中  $a, b$  为常数. 若  $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$ , 则  $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题, 17 ~ 22 题, 共 70 分.

17. (本题满分 10 分)

设曲线  $L: y = y(x) (x > e)$  经过点  $(e^2, 0)$ ,  $L$  上任一点  $P(x, y)$  到  $y$  轴的距离等于该点处的切线在  $y$  轴上的截距.

(1) 求  $y(x)$ ;

(2) 在  $L$  上求一点, 是该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小, 并求此最小面积.

18. ( 本题满分 12 分 )

求函数  $f(x, y) = x e^{\cos y} + \frac{x^2}{2}$  的极值.

19. ( 本题满分 12 分 )

已知平面区域  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right\}$ .

(1) 求  $D$  的面积;

(2) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转所成旋转体的体积.

20. ( 本题满分 12 分 )

设平面有界区域  $D$  位于第一象限, 由曲线  $x^2 + y^2 - xy = 1, x^2 + y^2 - xy = 2$  与直线  $y = \sqrt{3}x, y = 0$  围成, 计算  $\iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} dx dy$ .

21. ( 本题满分 12 分 )

设函数  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上具有 2 阶连续导数. 证明:

(1) 若  $f(0) = 0$ , 则存在  $\xi \in (-a, a)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$ .

(2) 若  $f(x)$  在  $(-a, a)$  内取得极值, 则存在  $\eta \in (-a, a)$ , 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2}|f(a) - f(-a)|.$$

22. ( 本题满分 12 分 )

设矩阵  $A$  满足: 对任意  $x_1, x_2, x_3$  均有  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 求可逆矩阵  $P$  与对角矩阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ .