2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题 解析

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）

(A) $a=\frac{1}{2},b=-1$　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(C) $a=\frac{1}{2},b=1$　　(D) $a=-\frac{1}{2},b=1$

【答案】B

【解析】由已知有原极限等于 $\lim\limits_{x\to 0}[1+(e^x+ax^2+bx-1)]^{\frac{1}{e^x+ax^2+bx-1}\cdot\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2ax+b)=1+b=0$，即 $b=-1$，

则原极限等于 $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2a}{2}}=e^{\frac{1+2a}{2}}=1$，所以 $\frac{1+2a}{2}=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$.

（2）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】D

【解析】由导数定义可得：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$；

选项 A：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\sin|x|}{x}=0$；选项 B：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=0$；

选项 C：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0$

选项 D：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$ 不存在，故选 D

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-ax, x\le -1\\ x,-1<x<0\\ x-b, x\ge 0\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则（　　）

(A) $a=3,b=1$　　(B) $a=3,b=2$　　(C) $a=-3,b=1$　　(D) $a=-3,b=2$

【答案】D

【解析】 由已知有 $f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, x\le -1\\ x-1, -1<x<0\\ x+1-b, x\ge 0\end{cases}$ 在 R 上连续，

所以 $\lim\limits_{x\to -1^-}(1-ax)=1+a=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2\Rightarrow a=-3$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1-b)=1-b\Rightarrow b=2$.

（4）设函数 $f(x)$ 在[0,1]上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则（　　）

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

【答案】 D

【解析】 取 $f(x)=x-\frac{1}{2}$ 或 $f(x)=\frac{1}{2}-x$，可排除选项 A、C；

由泰勒公式可得：$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2$，

当 $f''(x)>0$ 时，$f(x)>f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$，

两边积分可得：$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left[f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})\right]dx=f(\frac{1}{2})$，故答案为 D.

（5）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

(A) $M>N>K$　(B) $M>K>N$　(C) $K>M>N$　(D) $K>N>M$

【答案】 C

【解析】 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$；

因为 $e^x>1+x$，故 $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$；

又因为 $1+\sqrt{\cos x}>1$，所以 $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$，故 $K>M>N$，答案为 C.

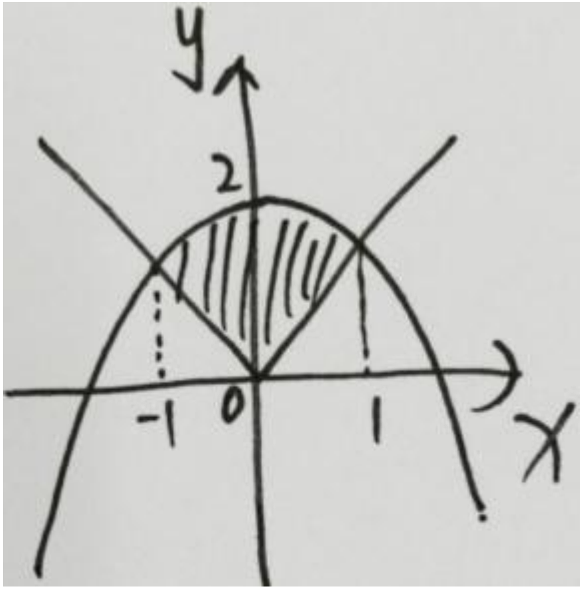
（6）$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$（　　）

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{7}{6}$

【答案】C

【解析】如图所示，由已知可得，积分区域

$$D=\{(x,y)|-1\le x\le 0,-x\le y\le 2-x^2\}\cup\{(x,y)|0\le x\le 1,x\le y\le 2-x^2\},$$



显然被积函数xy关于x为奇函数，1关于x为偶函数，

所以$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy$

$=2\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}1dy=2\int_{0}^{1}(2-x^2-x)dx$

$=2(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{7}{3}$.

（7）下列矩阵中，与矩阵$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$相似的为（ ）

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【答案】A

【解析】令$P=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

故$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，答案为 A.

（8）设A、B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，(X,Y)表示分块矩阵，则（ ）

(A) $r(A,AB)=r(A)$ (B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$ (D) $r(A,B)=r(A^T,B^T)$

【答案】A

【解析】选项 C 明显错误；对于选项 B 举反例：$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$，则 $BA=\begin{pmatrix}0&0\\3&3\end{pmatrix}$，

而 $(A,BA)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&2\end{bmatrix}$，此时有 $r(A,BA)=2,r(A)=1$；

对于选项 D：举反例，$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，

则 $(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，$(A^T,B^T)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $r(A,B)=2,r(A^T,B^T)=1$

对于选项 A：$(A,AB)=A(E,B)$，因为 $r(E,B)=n$，故 $r(A)=r\left[A(E,B)\right]$，所以 $r(A,AB)=r(A)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$__________.

【答案】1

【解析】由拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi\in(x,x+1)$，使得 $\arctan(x+1)-\arctan x=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，

所以原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\xi^2}=1$.

（10）曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是__________.

【答案】$y=4x-3$

【解析】对导可得 $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}$，令 $f''(x)=2-\dfrac{2}{x^2}=0$，有 $x=1$，故曲线的拐点为 $(1,1)$

而 $f'(1)=4$，所以其切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$.

（11）$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=$__________.

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln 2$

【解析】$\int_5^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-4x+3}dx=\dfrac{1}{2}\int_5^{+\infty}(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1})dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_5^{+\infty}=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

（12）曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点处的曲率为__________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\sec^2 t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$，

所以当$t=\dfrac{\pi}{4}$时，$\dfrac{dy}{dx}=-1,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

故$k=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{3}$.

（13）设函数$z=z(x,y)$由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$__________.

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】由已知可得当$x=2,y=\dfrac{1}{2}$时，$z=1$，

令$F(x,y,z)=\ln z+e^{z-1}-xy$，

则$F_x'=-y,F_z'=\dfrac{1}{z}+e^{z-1}$，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{\frac{1}{z}+e^{z-1}},\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{4}$.

（14）设A为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的向量组，若$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则$|A|=$ __________.

【答案】2

【解析】$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故令$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=P$，可得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，

所以$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

【答案】原式$=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^{2x}}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$

$$=\frac{1}{2}[e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(\sqrt{e^x-1})^3+\sqrt{e^x-1}]+C$$

（16）（本题满分 10 分）

已知连续函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（1）求$f(x)$；

（2）若$f(x)$在区间$[0,1]$上的平均值为 1，求a的值.

【答案】（1）$f(x)=2a(1-e^{-x})$；（2）$a=\frac{e}{2}$.

【解析】$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x (x-u)f(u)du=ax^2$

$\Rightarrow\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$

$\Rightarrow f(x)+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=2ax$

$\Rightarrow f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$,

令$F(x)=\int_0^x f(u)du$，则$F'(x)=f(x)$，$F(0)=0$,

所以有$F'(x)+F(x)=2ax$,

则$F(x)=e^{-\int dx}[\int 2axe^{\int dx}dx+C]=2ax-2a+Ce^{-x}$,

又由$F(0)=0$得$C=2a$，即$F(x)=2ax-2a+2ae^{-x}$,

故$f(x)=F'(x)=2a(1-e^{-x})$.

（17）（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$（$0\le t\le 2\pi$）与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$.

【答案】 $3\pi^2+5\pi$.

【解析】 由题目积分区域，原积分可化为

$$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\varphi(x)}(x+2y)dy=\int_0^{2\pi}[x\varphi(x)+\varphi^2(x)]dx,$$

令 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 换元可得，

$$原式=\int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2]d(t-\sin t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=3\pi^2+5\pi.$$

（18）（本题满分 10 分）

已知常数 $k\ge \ln 2-1$.证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$，$x>0$.

【提示】 单调性

【解析】 ①当 $0<x<1$ 时，有 $x-1<0$，只需证 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\le 0$ 即可，

令 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$，所以 $f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}, 0<x<1$，

再令 $g(x)=x-2\ln x+2k, 0<x<1$，则 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}<0$，

所以 $g(x)$ 单调递减，则 $g(x)>g(1)=1+2k\ge 1+2(\ln 2-1)=2\ln 2-1>0$，

故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)\le f(1)=0$，结论成立；

② 当 $x=1$ 时，结论显然成立；

③ 当 $x>1$ 时，有 $x-1>0$，只需证 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\ge 0$ 即可，

令 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$，所以 $f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}, x>1$，

再令 $g(x)=x-2\ln x+2k, x>1$，则 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}\begin{cases} <0, 1<x<2 \\ >0, x>2 \end{cases}$，

所以 $g(x)\ge g(2)=2-2\ln 2+2k\ge 2-2\ln 2+2(\ln 2-1)=0$，

故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)\ge f(1)=0$，结论成立；

综上①②③，结论得证.

（19）（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，问：三个图形的面积和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

【答案】$S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

【解析】设圆、正三角形、正方形的总长度分别为x,y,z，则有$x+y+z=2$，且此时圆的半径为$\dfrac{x}{2\pi}$，正三角形边长为$\dfrac{y}{3}$，正方形边长为$\dfrac{z}{4}$.

此时三个图形的总面积为$S=\pi(\dfrac{x}{2\pi})^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\dfrac{y}{3})^2+(\dfrac{z}{4})^2=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}$

下求$S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}$在条件$x+y+z=2$下的最小值，

构造拉格朗日函数$F=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{\sqrt{3}y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$

$$\begin{cases}F_x'=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ F_y'=\dfrac{y}{6\sqrt{3}}+\lambda=0\\ F_z'=\dfrac{z}{8}+\lambda=0\\ F_\lambda'=x+y+z=0\end{cases}，解得\begin{cases}x=\dfrac{4\pi}{2\pi+8+6\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{12\sqrt{3}}{2\pi+8+6\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{16}{2\pi+8+6\sqrt{3}}\end{cases},$$

则由实际问题的背景可知：$S_{\min}=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

（20）（本题满分 11 分）

已知曲线$L:y=\dfrac{4}{9}x^2(x\ge 0)$，点$O(0,0)$，点$A(0,1)$.设$P$是$L$上的动点，$S$是直线$OA$与直线$AP$及曲线$L$所围成图形的面积.若$P$运动到点$(3,4)$时沿$x$轴正向的速度是 4，求此时$S$关于时间$t$的变化率.

【答案】10.

【解析】这在t时刻，P点坐标为$(x(t),\dfrac{4}{9}x^2(t))$，则

$S(t)=\dfrac{1}{2}[1+\dfrac{4}{9}x^2(t)]x(t)-\int_0^{x(t)}\dfrac{4}{9}u^2du=\dfrac{x(t)}{2}+\dfrac{2}{27}x^3(t)$，

所以$S'(t)=\dfrac{1}{2}x'(t)+\dfrac{2}{9}x^2(t)x'(t)$，

由题可知$x(t)=3$时，$x'(t)=4$，代入可得$S'(t)\big|_{x=3}=10$.

（21）（本题满分 11 分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【答案】 提示：利用单调有界定理证明收敛；

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

【解析】 先证$\{x_n\}$有下界0，

已知$x_1>0$，假设$x_k>0$，由$x>0$时，有$e^x-1>x>0$，可得：$x_{k+1}=\ln\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}>\ln 1=0$，

故数列$\{x_n\}$有下界 0；

而$e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-e^0}{x_n}=e^{\xi}(0<\xi<x_n)$

所以$x_{n+1}=\xi<x_n$，即数列$\{x_n\}$单调递减，故数列$\{x_n\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，对等式$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$两边取极限可得：$Ae^A=e^A-1$，解得：$A=0$.

（22）（本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数.

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

【答案】（1）当$a=2$时，$x=k(2,1,-1)^T,k\in R$；

当$a\neq 2$时，$x_1=x_2=x_3=0$

（2）当$a=2$时，规范形为$y_1^2+y_2^2+y_3^2$；

当$a\neq 2$时，规范形为$y_1^2+y_2^2$

【解析】（1）由$f(x_1,x_2,x_3)=0$可得$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases}$，

则系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$得：

当$a\neq 2$时，$r(A)=3$，此时只有零解即$x_1=x_2=x_3=0$，

当$a=2$时，$r(A)=2$，此时方程有无穷多解，且通解为$x=k(2,1,-1)^T,k\in R$；

（2）由（1）知，当$a\neq 2$时，A可逆，

令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + a x_3 \end{cases}$，即$Y = AX$，则规范形为$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$，

当$a = 2$时，$r(A) = 2$，

此时解$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$得特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 0$，

所以正惯性指数为 2，负惯性指数为 0，此时规范形为$y_1^2 + y_2^2$.

（23）（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求a；

（2）求满足$AP = B$的可逆矩阵P.

【答案】（1）$a = 2$

（2）$P = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$，其中$k_1, k_2, k_3$为实数，且$k_2 \neq k_3$.

【解析】（1）由已知有$r(A) = r(B)$，

而$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 3 & -3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$,

所以$2 - a = 0$，即$a = 2$；

（2）$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以方程$AX = B$的解$X = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$,

且当$\left|X\right| \neq 0$即$k_2 \neq k_3$时，X可逆，

则取$P = \begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$，其中$k_1, k_2, k_3$为任意常数，且$k_2 \neq k_3$，即为所求.