2022考研数学二真题（完整版）

一、选择题

1.当 $x\to 0$ 时， $\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

①若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$

②若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

③若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$

④若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

其中所有的序号是（　　）.

（A）①②　　（B）①④　　（C）①③④　　（D）②③④

2. $\int_0^2 dy\int_y^2\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx=$（　　）.

（A） $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　（B） $\frac{1}{3}$　　（C） $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（D） $\frac{2}{3}$

3.设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有2阶导数，则（　　）.

（A）当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时， $f'(x_0)>0$

（B）当 $f'(x_0)>0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

（C）当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时， $f''(x_0)>0$

（D）当 $f''(x_0)>0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

4.设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$，则（　　）.

（A） $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　（B） $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

（C） $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　（D） $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

5.设p为常数，若反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$ 收敛，则p的取值范围是（　　）.

（A）(-1,1)　　（B）(-1，2)　　（C）(-∞，1)　　（D）(-∞，2)

6.已知数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 满足 $-\frac{\pi}{2}\le x_n\le\frac{\pi}{2}$，则（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

7.已知 $I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_2<I_1<I_3$　(C) $I_1<I_3<I_2$　(D) $I_3<I_2<I_1$

8.设 A 为3阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是（　　）.

（A）存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\Lambda Q$

（B）存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$

（C）存在正交矩阵 Q，使得 $A=Q\Lambda Q^{-1}$

（D）存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{\mathrm{T}}$

9.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $Ax=b$ 解的情况为（　　）.

（A）无解　（B）有解

（C）有无穷多解或无解　（D）有唯一解或无解

10.设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价，则λ的取值范围是（　　）.

（A）$\{0,1\}$　（B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

（C）$\{\lambda|\ \lambda\in R,\ \lambda\neq-1,\ \lambda\neq-2\}$　（D）$\{\lambda|\ \lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$ __________.

12.已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定，则 $y''(1)=$ __________.

13. $\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$ __________.

14.微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解 $y(x)=$ __________.

15.已知曲线L的极坐标方程为$r=\sin 3\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\right)$,则$L$围成有界区域的面积为__________.

16.设A为3阶矩阵，交换A的第2行和第3行，再将第2列的-1倍加到第1列，得到矩阵$\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，则$A^{-1}$的迹$\operatorname{tr}(A^{-1})$=_________.

三、解答题

17.已知函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求$f'(1)$.

18.设函数$y(x)$是微分方程$2xy'-4y=2\ln x-1$满足条件$y(1)=\dfrac{1}{4}$的解，求曲线$y=y(x)(1\le x\le e)$的弧长.

19.已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le2\right\}$，计算$I=\iint\limits_D\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

20.已知可微函数$f(u,v)$满足$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)e^{-(u+v)}$，且$f(u,0)=u^2e^{-u}$.

（1）记$g(x,y)=f(x,y-x)$，求$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求$f(u,v)$的表达式和极值.

21.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶连续导数，证明：$f''(x)\ge0$的充分必要条件是：对不同的实数a,b，有$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

22.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

（1）求正交变换$X=QY$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型；

（2）证明：$\min\limits_{x\ne0}\dfrac{f(x)}{x^{\mathrm{T}}x}=2$.