2020年全国硕士研究生招生考试

数 学 (二)

(科目代码:302)

一、选择题(1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶的是(　　).

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$　　(B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$　　(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

(2) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(3) $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$(　　).

(A) $\dfrac{\pi^2}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi^2}{8}$　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

(4) 设 $f(x)=x^2\ln(1-x)$,当 $n\geqslant 3$ 时,$f^{(n)}(0)=$(　　).

(A) $-\dfrac{n!}{n-2}$　　(B) $\dfrac{n!}{n-2}$

(C) $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　　(D) $\dfrac{(n-2)!}{n}$

(5) 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0, \\ x, & y=0, \\ y, & x=0, \end{cases}$ 给出如下结论

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$;

② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$;

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$;

④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

其中正确的个数是(　　).

(A)4　　(B)3　　(C)2　　(D)1

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x) > f(x) > 0$，则(　　).

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)} > 1$　　(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)} > \mathrm{e}$

(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} < \mathrm{e}^2$　　(D) $\dfrac{f(2)}{f(-1)} < \mathrm{e}^3$

(7) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解为(　　).

(A) $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

(B) $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

(C) $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

(D) $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为(　　).

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$　　(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

二、填空题(9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在题中的横线上.)

(9) 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$ ________.

(10) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z\,|_{(0,\pi)}=$ ________.

(12) 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉入水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为 g，水密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为________.

(13) 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0, y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x=$ ________.

(14) 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$ ________.

三、解答题(15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线方程.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(17)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x)$，$y=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

(19)（本题满分 10 分）

平面区域 D 由直线 $x=1$，$x=2$，$y=x$ 与 x 轴围成，计算$\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(20)（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$.

（Ⅰ）证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（Ⅱ）证明：存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

(21)（本题满分 11 分）

设曲线 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 经过坐标原点 O，其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T，又 MP 垂直 x 轴于点 P，已知由曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 $\triangle MTP$ 的面积之比恒为 3∶2，求满足上述条件的曲线方程.

(22)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（Ⅰ）证明：$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.