2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则(　　)

(A)$a=\frac{1}{2},b=-1$.　　(B)$a=-\frac{1}{2},b=-1$.

(C)$a=\frac{1}{2},b=1$.　　(D)$a=-\frac{1}{2},b=1$.

(2) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A)$f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B)$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C)$f(x)=\cos|x|$.　　(D)$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(3) 设函数$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若$f(x)+g(x)$在 **R** 上连续,则(　　)

(A)$a=3,b=1$.　　(B)$a=3,b=2$.

(C)$a=-3,b=1$.　　(D)$a=-3,b=2$.

(4) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且$\int_0^1 f(x)\,dx=0$,则(　　)

(A) 当$f'(x)<0$时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当$f''(x)<0$时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当$f'(x)>0$时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当$f''(x)>0$时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$,则(　　)

(A)$M>N>K$.　　(B)$M>K>N$.

(C)$K>M>N$.　　(D)$K>N>M$.

(6) $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)\,dy=$(　　)

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{5}{6}$.　　(C) $\frac{7}{3}$.　　(D) $\frac{7}{6}$.

(7) 下列矩阵中,与矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$相似的为(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \max\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}$　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1) - \arctan x] =$ ______.

(10) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是______.

(11) $\int_5^{+\infty} \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x =$ ______.

(12) 曲线$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为______.

(13) 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $\ln z + \mathrm{e}^{z-1} = xy$ 确定,则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})} =$ ______.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$,则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

(16) (本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = ax^2$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上的平均值为 1,求 a 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x + 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18) (本题满分 10 分)

已知常数 $k \geqslant \ln 2 - 1$. 证明：$(x - 1)(x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1) \geqslant 0$.

(19) (本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

(20) (本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geqslant 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率.

(21)(本题满分 11 分)

设数列$\{x_n\}$满足:$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(22)(本题满分 11 分)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数.

(Ⅰ)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解;

(Ⅱ)求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(23)(本题满分 11 分)

已知a是常数,且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求a;

(Ⅱ)求满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.