

2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,共32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$ ()
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (2) 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi \right)$ 的拐点坐标为()
(A) $(0, 2)$. (B) $(\pi, -2)$. (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (D) $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$.
- (3) 下列反常积分发散的是()
(A) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$. (B) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$. (C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$. (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.
- (4) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为()
(A) 1, 0, 1. (B) 1, 0, 2. (C) 2, 1, 3. (D) 2, 1, 4.
- (5) 已知平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 则()
(A) $I_3 < I_2 < I_1$. (B) $I_2 < I_1 < I_3$.
(C) $I_1 < I_2 < I_3$. (D) $I_2 < I_3 < I_1$.
- (6) 已知 $f(x), g(x)$ 2 阶可导且 2 阶导函数在 $x = a$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = 0$ 是曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切且曲率相等的()
(A) 充分非必要条件. (B) 充分必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分又非必要条件.
- (7) 设 A 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有 2 个向量, 则 $r(A^*) =$ ()
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (8) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为()
(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} =$ _____.
- (10) 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为 _____.

(11) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(12) 曲线 $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为_____.

(13) 已知函数 $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

(14) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i, j) 元的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(18) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设 n 为正整数, 记 S_n 为曲线 $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积, 求 S_n , 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

(20) (本题满分 11 分)

已知函数 $u(x, y)$ 满足 $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 求 a, b 的值, 使得在变换 $u(x, y) = v(x, y) e^{ax+by}$ 下, 上述等式可化为 $v(x, y)$ 不含一阶偏导数的等式.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(II) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

(22) (本题满分 11 分)

已知向量组 I : $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$ 与 II : $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a + 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 - a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$. 若向量组 I 与 II 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.