2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1)$, $\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$, $\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to0^+$ 时,以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.　(B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$.　(C) $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$.　(D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

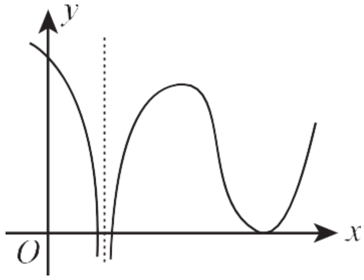
(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3) 反常积分 ①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$,②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为(　　)

(A) ① 收敛,② 收敛.　(B) ① 收敛,② 发散.

(C) ① 发散,② 收敛.　(D) ① 发散,② 发散.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则(　　)



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(5) 设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数,且 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$. 若两条曲线 $y=f_i(x)$ $(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$,且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率,则在 x_0 的某个邻域内,有(　　)

(A) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.　(B) $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$.

(C) $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$.　(D) $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$.

(6) 已知函数 $f(x,y)=\frac{e^x}{x-y}$,则(　　)

(A) $f_x'-f_y'=0$.　(B) $f_x'+f_y'=0$.　(C) $f_x'-f_y'=f$.　(D) $f_x'+f_y'=f$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(　　)

(A) $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ 相似.　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2,则(　　)

(A) $a>1$.　(B) $a<-2$.　(C) $-2<a<1$.　(D) $a=1$ 或 $a=-2$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

(9) 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为______.

(10) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ______.

(11) 以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为______.

(12) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\,dt$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$f^{(n)}(0)$ $=$ ______.

(13) 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是______.

(14) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$ ______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\,dt\ (x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

(17)（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y=1$, $y=x$, $y=-x$ 围成的有界区域,计算二重积分 $\iint\limits_{D}\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$, $y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解. 若 $u(-1)=\mathrm{e}$, $u(0)=-1$,求 $u(x)$,并写出该微分方程的通解.

(20)(本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x - 3\pi}$ 的一个原函数,且 $f(0) = 0$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 无解.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.