2021 考研数学试卷答案速查（数学二）

一、选择题

（1）（C）　（2）（D）　（3）（C）　（4）（A）　（5）（D）

（6）（C）　（7）（B）　（8）（B）　（9）（D）　（10）（C）

二、填空题

（11）$\dfrac{1}{\ln 3}$　（12）$\dfrac{2}{3}$　（13）1

（14）$\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$　（15）$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

（16）-5

三、解答题

（17）**【解析】** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$（2 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}\quad（4 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)+1-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}\quad（7 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}e^{x^2}\quad（9 分）$$

$$=\frac{1}{2}\quad（10 分）$$

（18）**【解析】** $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases}$，$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x<0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x>0\end{cases}$.（4 分）

凹区间：$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$；　凸区间：$(-1,0)$（6 分）

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，垂直渐近线：$x=-1$.（7 分）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(1+x)}=1$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-x^2}{1+x}=-1$，(9 分)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{x(1+x)}=-1$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+x+x^2}{1+x}=1$，(11 分)

斜渐近线： $y=x-1$和$y=-x+1$．(12 分)

（19）【解析】等式左右两边对x求导， $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}x-1$， $f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$ (2 分)

长度$s=\int_4^9\sqrt{1+f^2(x)}dx=\int_4^9\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_4^9\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx$ (5 分)

$$=\int_4^9\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left.\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\right|_4^9=\frac{22}{3}.$$ (7 分)

面积$A=\int_4^9 2\pi f(x)\sqrt{1+f^2(x)}dx=\int_4^9 2\pi\left(\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ (10 分)

$$=\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1\right)dx=\pi\left.\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2+x\right)\right|_4^9=\frac{425}{9}\pi.$$ (12 分)

（20）【解析】(1) 求解微分方程： $y'-\dfrac{6}{x}y=-\dfrac{6}{x}$，(1 分)

则： $y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left[\int-\dfrac{6}{x}e^{\int-\frac{6}{x}dx}dx+C\right]=x^6\left[\int-\dfrac{6}{x}\cdot x^{-6}dx+C\right]=Cx^6+1$，(4 分)

且$y\left(\sqrt{3}\right)=10$，故： $y(x)=\dfrac{1}{3}x^6+1$， $(x>0)$ ．(6 分)

(2) 设p点的坐标为： (x,y) ，法线： $Y-y=-\dfrac{1}{y'(x)}(X-x)$，

过p点的法线方程为： $Y-y=-\dfrac{1}{2x^5}(X-x)$，(8 分)

$X=0$时， y轴上的截距： $I_p=Y=\dfrac{1}{2x^4}+y=\dfrac{1}{2x^4}+\dfrac{1}{3}x^6+1$，(9 分)

令$I_p'=-\dfrac{2}{x^5}+2x^5=0$，得驻点： $x=1$，唯一的极值点为最值点，(11 分)

则I_p最小时， p的坐标为$(1,\dfrac{4}{3})$．(12 分)

（21）【解析】$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^3dr$

（6 分）

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta\cdot\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\cdot\cos^2 2\theta d\theta \quad \text{（9 分）}$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\cos 2\theta=-\frac{1}{48}\cos^3 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}. \quad \text{（12 分）}$$

（22）【解析】

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & -a & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)\left[(\lambda-2)^2-1\right]=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0 \quad \text{（2 分）}$$

（1）当 $b=1$ 时， $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$， A 相似于对角矩阵，则 $r(E-A)=1$， $a=1$（4 分）

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.（7 分）

（2）当 $b=3$ 时， $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$， A 相似于对角矩阵，则 $r(3E-A)=1$， $a=-1$（9 分）

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

令可逆矩阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.（12 分）