2021 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(二)

(科目代码:302)

一、选择题(1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 连续且取最大值　　(B) 连续且取最小值

(C) 可导且导数等于零　　(D) 可导且导数不为零

(3) 有一圆柱体,底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s,－3 cm/s,当底面半径为 10 cm,高为 5 cm 时,圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为(　　).

(A) $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$　　(B) $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$

(C) $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$　　(D) $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$

(4) 设函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有两个零点,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是(　　).

(A) $(e,+\infty)$　　(B) $(0,e)$

(C) $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

(5) 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$,则(　　).

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{2}$

(C) $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　　(D) $a=0,b=\dfrac{1}{2}$

(6) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$(　　).

(A) $dx+dy$　　(B) $dx-dy$　　(C) dy　　(D) $-dy$

(7) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为(　　).

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

(9) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则(　　).

(A) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解

(C) $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解

(D) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解

(10) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若存在下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别可以取(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题(11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在题中的横线上.)

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

(13) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan 2xy=1$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$ ________.

(14) 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ________.

(15) 微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 ________.

(16) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 ________.

三、解答题(17 ～ 21 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

(18)(本题满分 12 分)

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$,求 $f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 满足$\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+C$,$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\leqslant x\leqslant 9)$,$L$ 的弧长为 s,L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面面积为 A,求 s 与 A.

(20)(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)(x>0)$ 满足微分方程 $xy'-6y=-6$,且满足 $y(\sqrt{3})=10$,

(Ⅰ)求 $y(x)$;

(Ⅱ)设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点,曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_P,为使 I_P 最小,求 P 的坐标.

(21)(本题满分 12 分)

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D,求 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(22)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 $\boldsymbol{A}$ 相似对角于对角矩阵,求常数 a,b 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.