1.Introduction

機器學習與深度學習簡介

什麼是機器學習？

- 機器學習本質上是在「尋找一個函數」(Looking for a Function)。
- 這個函數可以根據輸入（input）產生特定的輸出（output）。

範例：

- **語音辨識 (Speech Recognition)**：$f(\text{聲音}) ='' \text{How are you}''$
- **圖像辨識 (Image Recognition)**：$f(\text{圖片}) ='' \text{Cat}''$
- **圍棋 (Playing Go)**：$f(\text{棋盤狀態}) ='' 5-5''$(下一步棋)

不同類型的函數

1. 迴歸 (Regression)

- 函數的輸出是一個**純量 (scalar)**。
- **範例**：根據今天的 PM2.5、氣溫等數據，預測明天的 PM2.5 值。

2. 分類 (Classification)

- 函數的輸出是從給定的選項 (classes) 中選擇一個正確的。
- **範例**：垃圾郵件過濾器 $f(EMAIL) = Yes/No$。
- 在圍棋中，函數的輸出是 19x19 個格子中的一個，因此有 19×19 個 classes。

3. 結構化學習 (Structured Learning)

- 函數的輸出是具有特定結構的內容，例如圖像或文件。
- 結構化學習可以看作是迴歸和分類的綜合應用。

如何尋找一個函數？

尋找函數的過程可以分為三個主要步驟：

Step 1: 定義一個帶有未知參數的函數 (Model)

- 我們需要根據領域知識 (domain knowledge) 來定義一個函數模型。
- **範例**：預測 YouTube 觀看次數
    - 假設模型為線性函數：y=b+wx1
        - y: 2/26 的觀看次數 (number of views on 2/26)
        - x_1: 2/25 的觀看次數 (number of views on 2/25)
        - b 和 w 是從數據中學習的未知參數，其中 w 稱為 **weight (權重)**，b 稱為 **bias (偏差)**。

Step 2: 定義損失函數 (Loss Function)

- **損失 (Loss)** 是用來評估一組參數的好壞。
- **損失函數** L(b,w) 是參數的函數，用來衡量模型預測值與真實值之間的差距。
- **常見的損失函數**：
    - **均方誤差 (Mean Square Error, MSE)**：$L = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$
    - **平均絕對誤差 (Mean Absolute Error, MAE)**：$L = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|$
    - **交叉熵 (Cross-entropy)**：當 y 和 $\hat{y}$ 都是機率分布時使用。
- 我們的目標是找到一組參數，使得損失函數的值最小。

Step 3: 最佳化 (Optimization)

- 最佳化的目標是找到一組能使損失函數達到最小值的參數 w^* 和 b*。
- $w^*, b^* = arg\, \underset{w,b}{min} L$
- **梯度下降 (Gradient Descent)** 是一種常見的優化方法：
    1. **隨機初始化**：隨機選擇一組初始參數 w^0 和 b^0。
    2. **計算梯度**：計算損失函數對參數的偏微分 $\frac{\partial w}{\partial L}$ 和 $\frac{\partial b}{\partial L}$，這代表了在參數空間中損失函數的「坡度」。
    3. **更新參數**：
        - $w_1 \leftarrow w_0 - \ \eta \frac{\partial w}{\partial L}\Big|_{w=w^0}$
        - $b_1 \leftarrow b_0 - \eta \frac{\partial b}{\partial L}\Big|_{b=b_0}$
        - η (eta) 稱為 **learning rate (學習率)**，是一個超參數 (hyperparameter)，控制每次更新的步長。
    4. **疊代更新**：重複步驟 2 和 3，直到損失函數的值不再顯著下降。

- **批次梯度下降 (Batch Gradient Descent)**：將訓練數據分成多個批次 (batch) 進行更新，而非一次性處理所有數據。一個 **epoch** 代表所有批次都被訓練過一次。

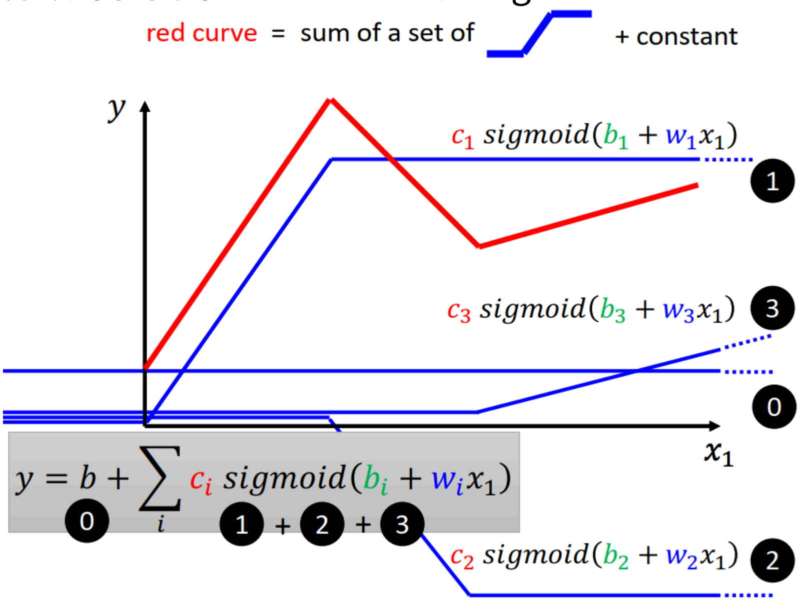
模型的限制與進階

簡單的線性模型有其局限性，當資料的關係不是線性的時候，它的表現會很差。因此，我們需要更複雜、更具彈性的模型。

- **超越線性模型**：
  - **Sigmoid 函數**：

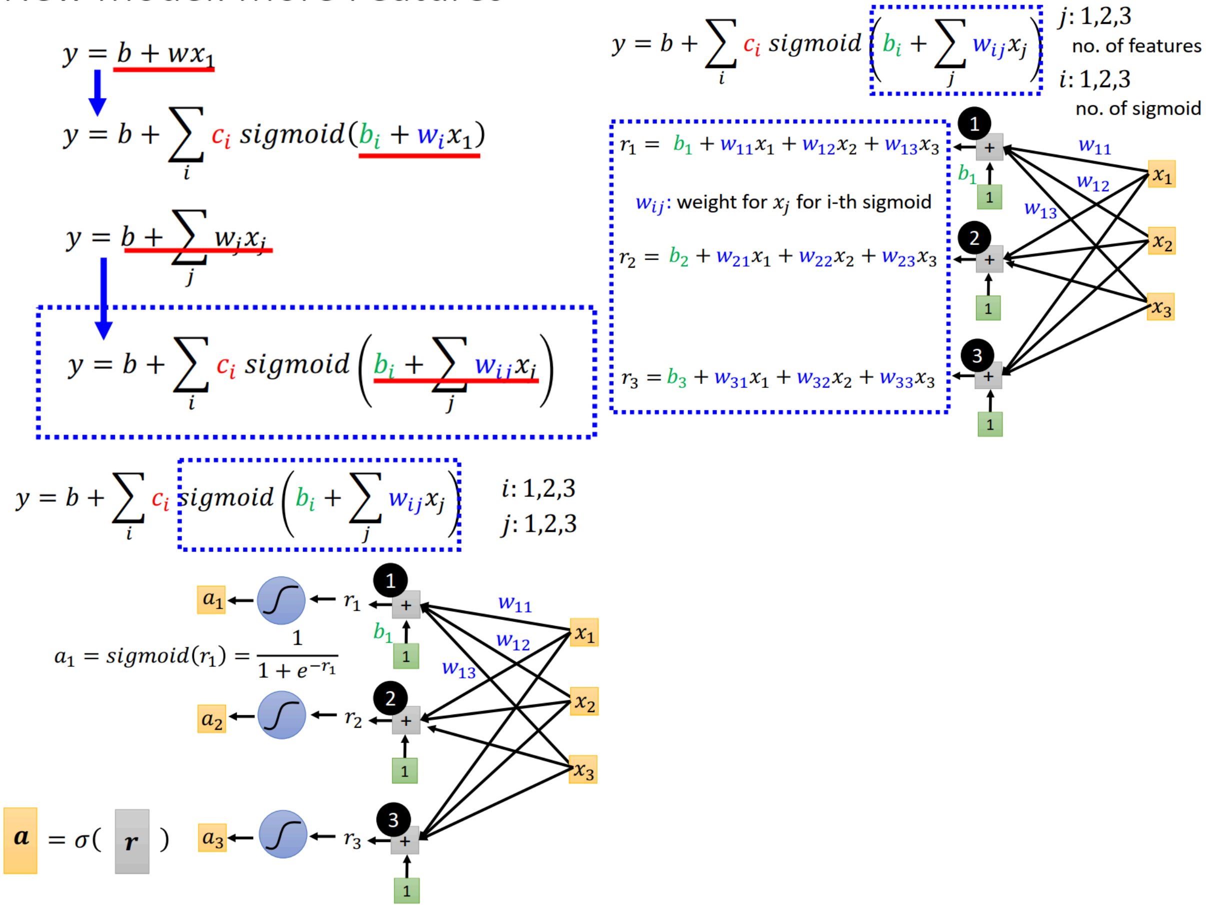
$$
\begin{aligned}
y &= c \cdot \frac{1}{1 + e^{-(b+wx_1)}} \\
&= c \cdot sigmoid(b + wx_1)
\end{aligned}
$$

- **分段線性曲線**：可以通過多個 Sigmoid 函數的組合來近似任意連續曲線。



$$
y = b + \sum_i c_i \cdot sigmoid(b_i + w_i x_1)
$$

- **從單一特徵到多個特徵：**
  New Model: More Features

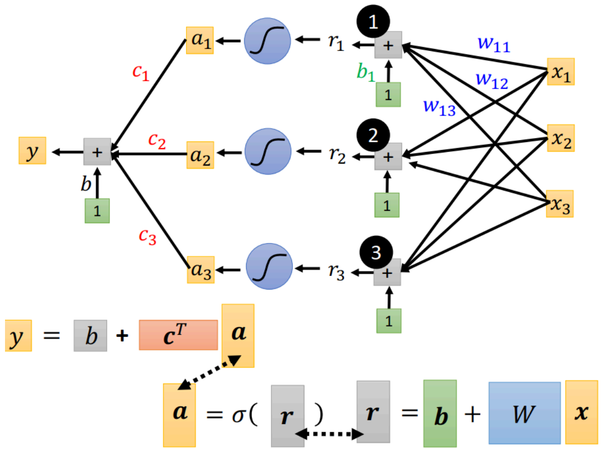


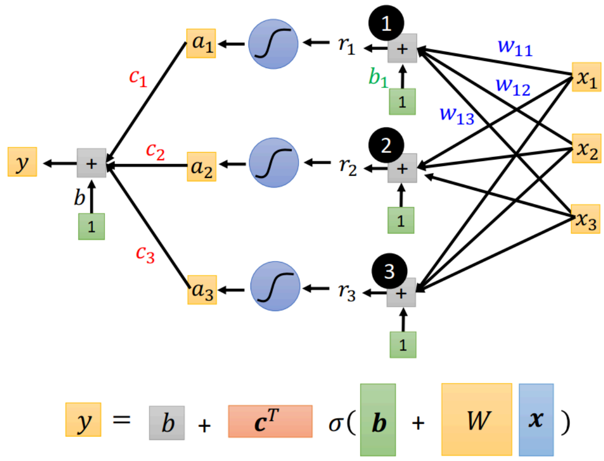
  - 將模型擴展到多個輸入特徵 $x1, x2, \dots, xj$。
  - $y = b + \sum_i c_i \cdot sigmoid(b_i + \sum_j w_{ij} x_i))$

深度網路的運作原理

- 深度網路的每一層都由多個神經元組成。
- 每個神經元會對輸入數據進行加權和 (weighted sum) 並加上偏差 (bias)，然後通過**激活函數 (Activation function)** 進行非線性轉換。
- 這些隱藏層的輸出會作為下一層的輸入，最終層的輸出即為模型的預測值。
- **範例：**
  - $r_i = b_i + \sum_j w_{ij} x_j$
  - $a_i = \sigma(r_i)$ (其中 σ 是 Sigmoid 或 ReLU 等激活函數)

- $r_i = b_i + \sum_i c_i a_i$





- **神經網路 (Neural Network)**：
  - 上述模型正是單層神經網路的數學表示。
  - **輸入層**：輸入特徵 x_j。
  - **隱藏層**：Sigmoid 函數組成的層。
  - **輸出層**：輸出 y。
  - 整個網絡的未知參數 (包括所有的 w, b, c) 可以用一個向量 θ 來表示，並同樣使用梯度下降進行最佳化。
- **新模型的最佳化**：

```
- 對於更複雜的模型（例如神經網路），損失函數 $\large L$ 是關於所有參數（weights 和 biases）的函數。

- **梯度下降的更新公式**：
  - 假設模型有參數集合 $θ=[w11,w12,⋯,b1,b2,⋯,c1,c2,⋯]=[θ_1,θ_2,θ_3...]$ 。
  - Gradient  $g$
```

$$g = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \vdots \end{pmatrix}$$
$$= \nabla L(\theta^0)$$

- 其中，$\nabla L(\theta)$ 是梯度向量，包含損失函數對每個參數的偏導數：

$$\nabla L(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial w11} \\ \frac{\partial L}{\partial w12} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial b1} \\ \frac{\partial L}{\partial b2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \theta_2^0 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \eta \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \vdots \end{bmatrix}$$
$$= \theta^1 = \theta^0 - \eta g$$

- 更新公式為：

$$\begin{aligned} Compute\ gradient\ g &= \nabla L^1(\theta^0) \\ \theta^1 &= \theta^0 - \eta g \\ Compute\ gradient\ g &= \nabla L^2(\theta^1) \\ \theta^2 &= \theta^1 - \eta g \\ Compute\ gradient\ g &= \nabla L^3(\theta^2) \\ \theta^3 &= \theta^2 - \eta g \end{aligned}$$

- **ReLU (Rectified Linear Unit) 函數：**

- 一種比 Sigmoid 更為常見的**激活函數 (Activation Function)**，其定義為： ReLU(x)=max(0,x)
- ReLU 函數的組合同樣可以近似任意連續曲線，且在實踐中往往表現更好。