

Program til beregning af overfladestrømning og infiltration

Computer Science, ITU

Mikkel Møllerup



KØBENHAVNS UNIVERSITET
DET BIOVIDENSKABELIGE FAKULTET
INSTITUT FOR JORDBRUGSVIDENSKAB
MILJØ, RESSOURCER OG TEKNOLOGI
TÅSTRUP, 2008

Indhold

1	Introduktion	4
2	Problemformulering	5
2.1	Daisy-snak	5
2.2	Teori	5
2.2.1	Finite Volume Method	7
2.2.2	Mere robust metode	8
2.2.3	Nedbør	9
2.2.4	Infiltration	10
3	Programopbygning	12
3.1	Enheder	12
3.2	Setup-klassen	12
3.3	TimeTable-klassen	12
3.4	ResultTable-klassen	13
3.5	Surface-klassen	13
3.6	Soil-klassen	13
3.7	Resultater	14
4	Brug af programmet	15
4.1	Setupfilen	15
4.2	Eksempel	15
5	Tests	17
5.1	Test af klasser	17
5.1.1	Setup-klassen	17
5.1.2	TimeTable-klassen	17
5.1.3	ResultTable-klassen	18
5.1.4	Surface-klassen	18
5.1.5	Soil-klassen	19
5.2	Test af hovedprogram	20
5.2.1	Test 1	20
5.2.2	Test 2	20
6	Konklusion	24

1 Introduktion

Denne rapport er udarbejdet i forbindelse med et Ph.D. kursus i datalogi ved IT-Universitetet. Rapporten beskriver et simpelt program til beskrivelse af 1-dimensional overfladestrømning. I beregningerne tages hensyn til nedbør såvel som infiltration af vand til den underliggende jord.

Ud over blot at være nok en opgave i programmering, er det tanken at det beskrevne program med tiden skal kunne danne basis for et overflade strømningsmodul i Atmosfære-Plantemodellen Daisy (Abrahamsen og Hansen 2000) eller i det mindste fungere som et forstudie. Nogle af de løsninger i opgaven er således valgt under hensyn til den videre integration med Daisy og ikke med henblik på et stand-alone program som præsenteret her. Der er ikke brugt den store energi på en grafisk brugerflade eller diverse tjek af inputfiler eller resultater.

2 Problemformulering

2.1 Daisy-snak

Daisy1D -> Daisy2D

2.2 Teori

Koblingen mellem overfladestrømningsmodellen og infiltrationsmodellen ønskes foretaget så simpelt som muligt. Jeg forestiller mig en kobling således, at der for hvert tidsskridt først beregnes på infiltrationen for derefter at beregne på overfladestrømning frem for den mere komplicerede løsningsmetode, at løse det hele på een gang.

I opgaven laves en simpel model til beregning af overfladestrømning ned ad jordprofil med konstant hældning. Dybde og hastighed varierer kun i den longitudinale retning. Der tages hensyn til udvekslingen med omgivelserne i form af nedbør og infiltration.

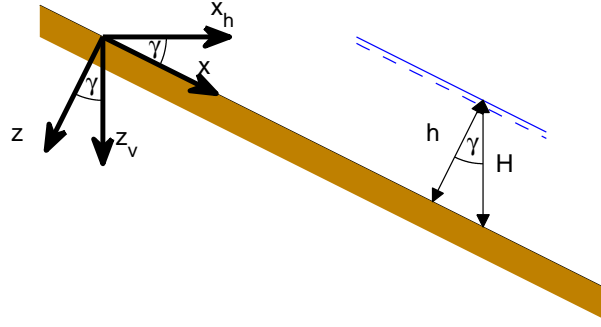
Flowet beskrives med Saint-Venant ligningerne (se f.eks. Chow *et al.* 1988). Første ligning er kontinuitetsligningen (massebevarelse) der for en uendeligt bred kanal lyder

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = p^* - i \quad (2.1)$$

hvor x [m] er flowretningens akse, t [s] tiden, h [m] den vertikale dybde, q [m²/s] er fluxen pr. breddeenhed, p^* [m/s] nedbørsintensiteten vinkelret på fladen og i [m/s] infiltrationsraten.

Den anden St. Venant ligning er impulsligningen der fremkommer ved kombination af Newtons 2. lov og Reynolds transportteorem (se Chow *et al.* 1988):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (2.2)$$



Figur 2.1: xxxxblabre blabre mangler referencexxxxx.

hvor $V = q/h$ [m/s] er flowhastigheden, g [m/s²] er tyngdeaccelerationen, S_0 [m/m] er jordoverfladens hældning og S_f repræsenterer friktionskræfterne.

I mange henseender kan kinematisk bølgeteori anvendes. I kinematisk bølgeteori negligeres alle ledene på venstre side af ligning (2.2), dvs. $S_0 = S_f$ - eller med andre ord, friktions og gravitationkræfterne udbalancerer hinanden. Når $S_0 = S_f$, udtrykkes impulsningen ofte på formen

$$q = \alpha h^m \quad (2.3)$$

α og m afhænger af hældningen, overfladens beskaffenhed og om hvorvidt der forekommer turbulent eller laminær strømning. Ofte benyttes Mannings ligning (turbulent flow) svarende til $m = 5/3$ og $\alpha = \sqrt{S_0}/n$ hvor n er Mannings ruhedskoefficient afhængig af overfladens tilstand.

Ved at kombinere ligning (2.1) og (2.3) opnås en partiel differentialligning med h som den ubekendte:

$$m\alpha h^{m-1} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = p^* - i \quad (2.4)$$

Ligningen skal løses med tilhørende initial- og randbetingelser. Ligning (2.4) løses numerisk med Finite Difference Method (FDM), Finite Volume Method (FVM) eller Finite Element Method (FEM). FDM, FVM og FEM er alle metoder der i vid udstrækning benyttes til at løse partielle differentialligninger inden for fluid dynamik. I denne opgave benyttes FVM.

2.2.1 Finite Volume Method

Jordoverfladen inddeles i en række elementer (voluminer) med længden Δx . For simpelthedsens skyld har alle elementerne samm længde her. Ligning (2.1) der beskriver massebevarelsen integreres over voluminet (som her bare er en længde) af en enkelt celle.

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial q}{\partial x} dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial h}{\partial t} dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}} p^* - i dx \quad (2.5)$$

hvor det første led kan beregnes som

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial q}{\partial x} dx = q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

hvor subscript $i + \frac{1}{2}$ og $i - \frac{1}{2}$ angiver fluxen gennem venstre og højre cellevæg på celle nr i . Det andet led kan approksimeres som

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial h}{\partial t} dx \approx \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} (h_i^{j+1} - h_i^j) \quad (2.7)$$

hvor superscript $j + 1$ og j angiver nyt og gammelt tidsskridt. Endelig kan det sidste led approksimeres som

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{i+\frac{1}{2}} p^* - i dx \approx (p^* - i) \Delta x \quad (2.8)$$

Herved kan ligning (2.5) udtrykkes som:

$$h_i^{j+1} = h_i^j + \Delta t \left[(p^* - i) + \frac{1}{\Delta x} (q_{i-\frac{1}{2}} - q_{i+\frac{1}{2}}) \right] \quad (2.9)$$

For at beregne fluxen ind og ud af celle i , $q_{i-\frac{1}{2}}$ og $q_{i+\frac{1}{2}}$ benyttes det aritmetiske gennemsnit

$$q_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (q_{i-1} + q_i) \quad (2.10)$$

$$q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(q_i + q_{i+1}) \quad (2.11)$$

Ved anvendelse af ligning (2.3) og evaluering til tidsskridt j fås

$$h_i^{j+1} = h_i^j + \Delta t \left[(p^* - i) + \frac{\alpha}{2\Delta x} \left((h_{i-1}^j)^m - (h_{i+1}^j)^m \right) \right] \quad (2.12)$$

Som kan løses iterativt. Beregninger kan startes opstrøms med h_1^{j+1} efterfulgt af h_2^{j+1} osv. Når der startes opstrøms er det muligt at udskifte h_{i-1}^j med den senst udregnede h_{i-1}^{j+1} i ligning (2.12). Ved tests (ikke beskrevet i denne rapport) er der ikke fundet den store forskel i løsning, konvergens eller robusthed.

Randbetingelser

Som opstrøms randbetingelse:

$$h_1^{j+1} = h_1^j + \Delta t \left[(p^* - i) + \frac{1}{\Delta x} \left(q_{\text{up}} - \frac{\alpha}{2} \left((h_1^j)^m + (h_2^j)^m \right) \right) \right] \quad (2.13)$$

Som nedstrøms randbetingelse antages at fluxen ud ad skrænten kan ekstrapoleres ud fra fluxen i de to sidste celler:

$$q_{\text{out}} = q_{n_x+\frac{1}{2}} = q_{n_x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \approx q_{n_x} \frac{q_{n_x} - q_{n_x-1}}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{2} = \frac{3}{2}q_{n_x} - \frac{1}{2}q_{n_x-1} \quad (2.14)$$

hvor n_x angiver antallet af celler. Værdien fra tidsskridt j benyttes hvorved der ved indsættelse i ligning 2.12 fås:

$$h_{n_x}^{j+1} = h_{n_x}^j + \Delta t \left[(p^* - i) + \frac{\alpha}{\Delta x} \left((h_{n_x-1}^j)^m - (h_{n_x}^j)^m \right) \right] \quad (2.15)$$

Eller hvis fluxen ud ad domænet, q_{out} angives fås:

$$h_{n_x}^{j+1} = h_{n_x}^j + \Delta t \left[(p^* - i) + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\alpha}{2} \left((h_{n_x-1}^j)^m + (h_{n_x}^j)^m \right) - q_{\text{out}} \right) \right] \quad (2.16)$$

2.2.2 Mere robust metode

Da der er fundet at førnævnte model har en tendens til at blive ustabil (se testafsnit) er der udviklet en mere robust model. Den nye model synes dog at være knapt så præcis.

Et inden for CFD-verdenen ofte benyttet trick for at sikre stabilitet er at vægte opstrøms værdier for fluxe højere end nedstrøms. Første led i ligning (2.5) kan approksimeres som

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial q}{\partial x} dx \approx q_i - q_{i-1} \quad (2.17)$$

Ved anvendelse af samme teknik som før fås

$$h_i^{j+1} = h_i^j + \Delta t \left[(p^* - i) + \frac{1}{\Delta x} (q_{i-1} - q_i) \right] \quad (2.18)$$

Koefficienten, m er som tidligere nævnt $5/3$ i Mannings model. Hvis Chezys model (også turbulent strømning) benyttes er $m = 3/2$. For laminær strømning er $m = 3$. Altså i alle tilfælde er m større end 1. For i videst muligt omfang at benytte vanddybden fra nuværende tidsskridt samtidigt med at h_i^{j+1} kan udtrykkes eksplicit udtrykkes h_i som

$$(h_i)^m \approx h_i^{j+1} \cdot (h_i^j)^{m-1} \quad (2.19)$$

Ved indsættelse i ligning (2.18) fås:

$$h_i^{j+1} = \frac{h_i^j + \Delta t \left((p^* - i) + \frac{\alpha}{\Delta x} (h_{i-1}^j)^m \right)}{1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} (h_i^j)^{m-1}} \quad (2.20)$$

For endecellerne benyttes værdierne som udledt i sektion 2.2.1.

2.2.3 Nedbør

Den akkumulerede nedbør, P angives i en fil. Nedbørsintensiteten i et tidsskridt, p beregnes ud fra den akkumulerede nedbør i starten og slutningen af tidsskridtet med længden Δt

$$p = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \quad (2.21)$$

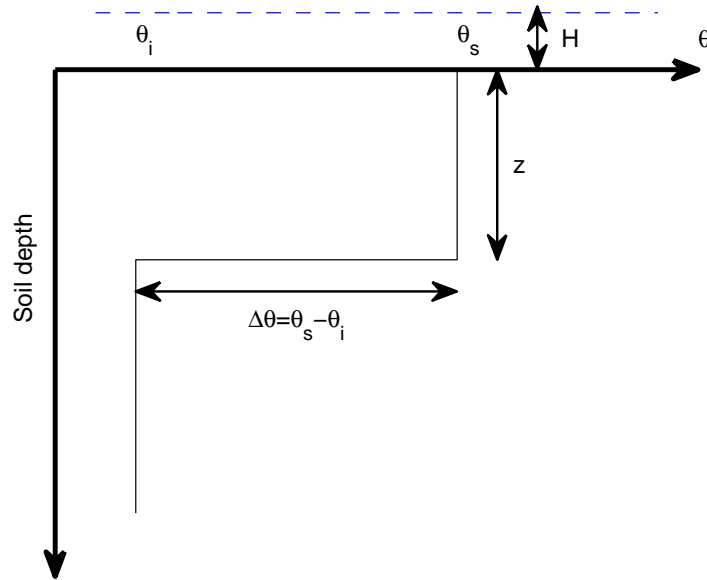
Nedbørsmålinger angives normalt på en plan, vandret flade. Der gælder derfor:

$$p^* = p \cos \gamma \quad (2.22)$$

hvor γ er skræntens hældning.

2.2.4 Infiltration

Til beregning af infiltrationen benyttes Green-Ampt's infiltrationsteori. En forudsætning er at jorddomænet jorden kun består af een jordtype der initielt har samme vandindhold overalt. I Green-Ampt's infiltrationsteori beskrives infiltrationen som en skarp front mellem mættet og ikke-mættet jord som angivet i figur 2.2. Samtidigt foregår strømmingen kun i een dimension, vinkelret på jordoverfladen. I nogle situationer, oprædende i naturen kan der genereres betydelige strømninger i jorden parallelt med overfladen. I sådanne tilfælde er den foreslåede model dårlig. Men det vurderes at princippet kan benyttes i mange situationer. Jordens mættede vandindhold benævnes θ_s . Initielt er jordens vandindhold θ_i . Dybden af infiltrationsfronten benævnes z medens den vertikale dybde af overfladevandet benævnes H . Det bemærkes at $h = H \cos \gamma$.



Figur 2.2: Variable i Green-Ampt infiltrationsmodellen. Den horisontale akse indikerer jordens vandindhold. Den vertikale akse er afstanden fra jordoverfladen.

Infiltrationraten kan beregnes med Darcys ligning der aktuelt lyder:

$$i = -\bar{K}_s \frac{H + z \cdot \cos \gamma - h_f}{z} \quad (2.23)$$

hvor \bar{K}_s er den mættede hydrauliske ledningsevne. h_f er tryk potentialet ved fron-

ten. For umættede jorde er $h_f < 0$. h_f afhænger af jordens initielle vandindhold og er mindst (størst negativ) for tørre jorde.

I et tidskridt med længden Δt er den potentielle ændring i den kummulative infiltration:

$$\Delta I \approx i \cdot \Delta t \quad (2.24)$$

I starten af en infiltrationsevent hvor infiltrationsdybden er lille kan ligning (2.24) baseret på ligning (2.23) ikke benyttes da infiltrationsraten og dermed den potentielle infiltration i et tidskridt, Δt af endelig størrelse er uendelig stor eftersom $z = 0$.

Ved at benytte, at sammenhængen mellem den kumulerede infiltration og infiltrationsdybden er $I = (\theta_s - \theta_i)z$ samt at $i = dI/dt$ kan differentialligningen der beskriver flowsituation for konstant niveau af opstilles

$$\frac{dI}{dt} = \bar{K}_s \left[\cos \gamma + (\theta_s - \theta_i)(H_0 - h_f) \frac{1}{I} \right] \quad (2.25)$$

Hvor H_0 er den initielle vertikale vanddybde. Vanddybden, målt vinkelret på fladen kan beregnes som $H_0 \cdot \cos \gamma$.

I starten af en infiltrationshændelse kan det vises, at den akkumulerede infiltration kan beskrives med ligningen

$$I = S\sqrt{t} + At \quad (2.26)$$

hvor S og A er konstanter der er afhængige af jordparametre, initial- og randbetingelser:

$$S^2 = 2\bar{K}_s(\theta_s - \theta_i)(H_0 - h_f) \quad (2.27)$$

$$A = \frac{2}{3}\bar{K}_s \cos \gamma \quad (2.28)$$

Det skal bemærkes at S forbliver uændret for en flowhændelse med faldende vand-spejl, hvor vandspejlet falder svarende til den mængde der infiltrerer Mollerup og Hansen (2007). For tilstrækkeligt korte tidsrum er det første led i ligning (2.26) der er dominerende. Dvs. at bare man vælger tilstrækkeligt små tidsrum så har ændringer i vandstanden ikke den store betydning for beregningernes nøjagtighed således at H_0 kan erstattes med H i ligning (2.27).

3 Programopbygning

3.1 Enheder

I in- og outputfiler benyttes enheder som normalt kunne tænkes benyttet i en hydrologisk sammenhæng og som man lettere kan forholde sig til end ved stringent at holde sig til SI-enheder. For sammenligningens skyld er der dog benyttet samme enhed for dybden af overfladevand, infiltrationsdybden og akkumuleret nedbør (cm). I selve beregningsdelen af programmet benyttes dog konsekvent SI-enheder. For akkumuleret nedbør benyttes således meter og nedbørsraten får internt i programmet enheden m/s der i normale, ikke-bibelske hydrologiske sammenhænge må anses for lidt voldsomme.

3.2 Setup-klassen

Benyttes til at indlæse setupfilen med data til modellen der ikke er af tid-højde formatet som dækkes af *TimeTable*-klassen. Navnet på setup up angives på skærmen umiddelbart efter start af programmet.

Setupfilen indlæses linjevis. Hver linje skal indeholde en parameter som angives i rækkefølgen angivet i tabel 4.1.

3.3 TimeTable-klassen

Indlæser inputfiler af formatet tid-højde. Et objekt instantieres med et filnavn og dataene indlæses fra filen. Programmet indeholder en metode der ved hjælp af lineær interpolation returnerer en værdi til et givent tidspunkt. Tidsenheden er sekunder. Enheden for højden er i cm, medens SI-enheden meter returneres.

Et eksempel på en instans af klassen er nedbørsdata i form af objektet *precip*. Til et givent tidspunkt ønskes den akkumulerede nedbør bestemt. Solver kalder *TimeTable* objektet *Precip* med tidspunktet hvorefter den akkumulerede nedbør returneres.

Udover instansen *presip* findes i hovedprogrammet (main) også instansen *upstream* der angiver vanddybden opstrøms.

3.4 ResultTable-klassen

Opretter en tekstfil med givet navn hvortil resultater i formatet tid løsningsvektor gemmes. Første tal i hver linje angiver tidspunktet og de næste angiver værdierne af elementerne i løsningsvektoren.

Som et eksempel kan løsningsvektoren fx indeholde dybden af overfladevandet.

3.5 Surface-klassen

Beregner vanddybder og fluxe i et tidsskridt ud fra vanddybderne i start af tidsskridtet, hældningen på overfladen og overfladeruheden.

Private: hældning på overflade, overfladeruhed.

Public: vanddybden.

3.6 Soil-klassen

Beregner infiltrationen i et tidsskridt ud fra vanddybden, dybden af infiltrationsfronten, tidsskridtets længde og en række konstante parametre. Ligeledes beregnes den infiltrerede mængde vand.

Private: hældning på overflade, tryk ved infiltrationsfront, initielt vandindhold.

Public: infiltreret mængde vand, dybden af infiltrationsfronten samt vanddybden. Klassen beregner vand- og infiltrationsdybden og tilhørende mængde infiltreret vand for alle Δx i en løkke.

Alternativt kunne man regne for et Δx ad gangen og dermed oprette en instans af *soil* for hvert enkelt element. Fordelen kunne være at der for hvert element mere elegant kunne være forskellige værdier for jordfysiske data, hældninger etc.

Den helt store ulempe er at man med tiden meget vel kunne tænke sig at erstatte den her beskrevne *soil*-klasse med en todimensionel model (Daisy-2D) til beskrivning af vandstransporten i jorden - og her skal det hele løses på een gang.

Spørgsmål: Infiltrationsdybden og mængden skal ikke nødvendigvis være public, men hvis ikke, skal der være en metode til at udskrive - hvad foretrækkes?

Note: Infiltrationsdybden er noget specifik for denne model så hvorfor ikke holde den private, men dog lave en metode til at udskrive den?. Vel vidende at andre modeller nok skal udskrive noget helt andet.

Solver-klassen

Først indlæses setupfilen med *Setup*, herunder navne på tid-værdi filer. Tid-værdi filerne indlæses ved at instantiere objekter af *TimeTable* klassen.

Inden for et tidsskridt foregår beregningen af overfladestrømningen, infiltration og nedbørens bidrag i følgende rækkefølge

1. Overfladestrømningen beregnes med *Surface*.
2. Nedbøren i tidsskridtet beregnes med instansen *Precipitation* af klassen *TimeTable*.
3. Infiltrationen beregnes med *Infiltration*.

Undervejs udskrives vand- og infiltrationsdybden med passende mellemrum ud til uddatafiler.

3.7 Resultater