TIEMPO EN EL SISTEMA MÍNIMO

ALBERTO VERDEJO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Tiempo en el sistema mínimo

- Tenemos n tareas, cada una de las cuales requiere un tiempo de ejecución t_i.
- Todas están disponibles para ser ejecutadas, por un único procesador, en secuencia.
- Queremos minimizar el *tiempo medio de estancia de una tarea en el sistema*, esto es, el tiempo transcurrido desde el comienzo de todo el proceso hasta que la tarea termina de ejecutarse.

Tiempo en el sistema mínimo

- T_i es el *tiempo en el sistema* de la tarea i, que es la suma de su tiempo de ejecución t_i, más los tiempos de ejecución de las tareas que se ejecutan antes que ella.
- El problema consiste en minimizar el tiempo medio en el sistema

$$TM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i$$

- Pero como n está fijo, esto es equivalente a minimizar el tiempo total

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

Ejemplo

$$n = 3, t_1 = 5, t_2 = 10, t_3 = 3$$

- Si el orden de ejecución es 1, 2, 3:

$$T = 5 + (5 + 10) + (5 + 10 + 3) = 38$$

- Si el orden de ejecución es 1, 3, 2:

$$T = 5 + (5 + 3) + (5 + 3 + 10) = 31$$

- Si el orden de ejecución es 3, 1, 2:

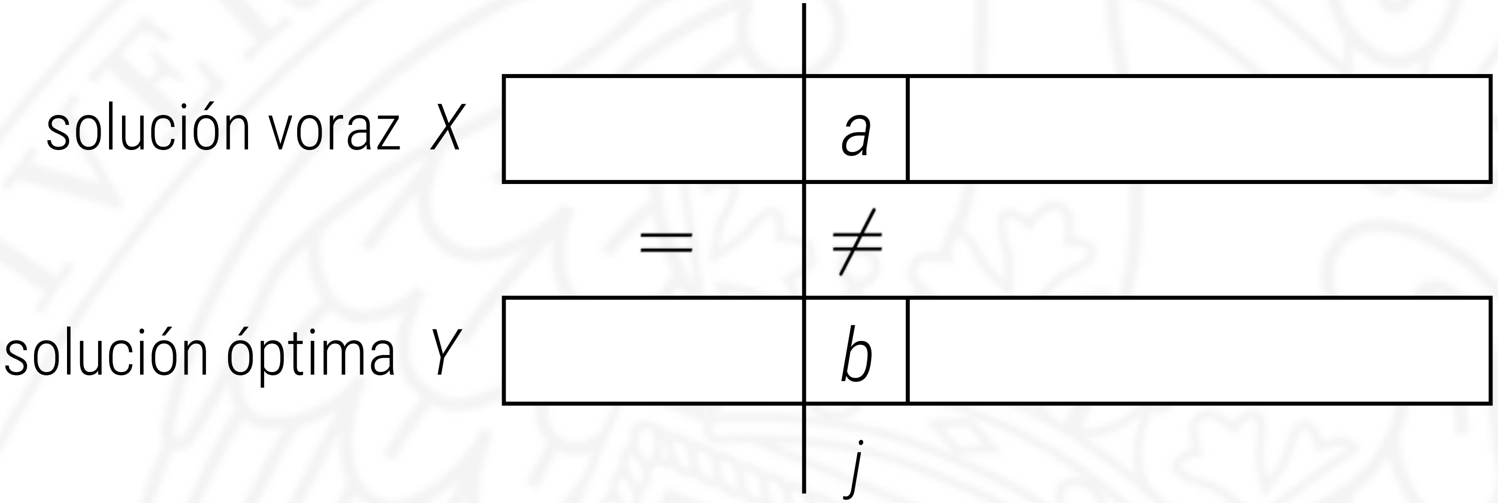
$$T = 3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 10) = 29$$

Planificación óptima

- La planificación óptima consiste en atender a las tareas por *orden creciente de tiempo de ejecución*.
- Sea $I = i_1, i_2, \ldots, i_n$ una permutación cualquiera de los enteros del 1 al n.

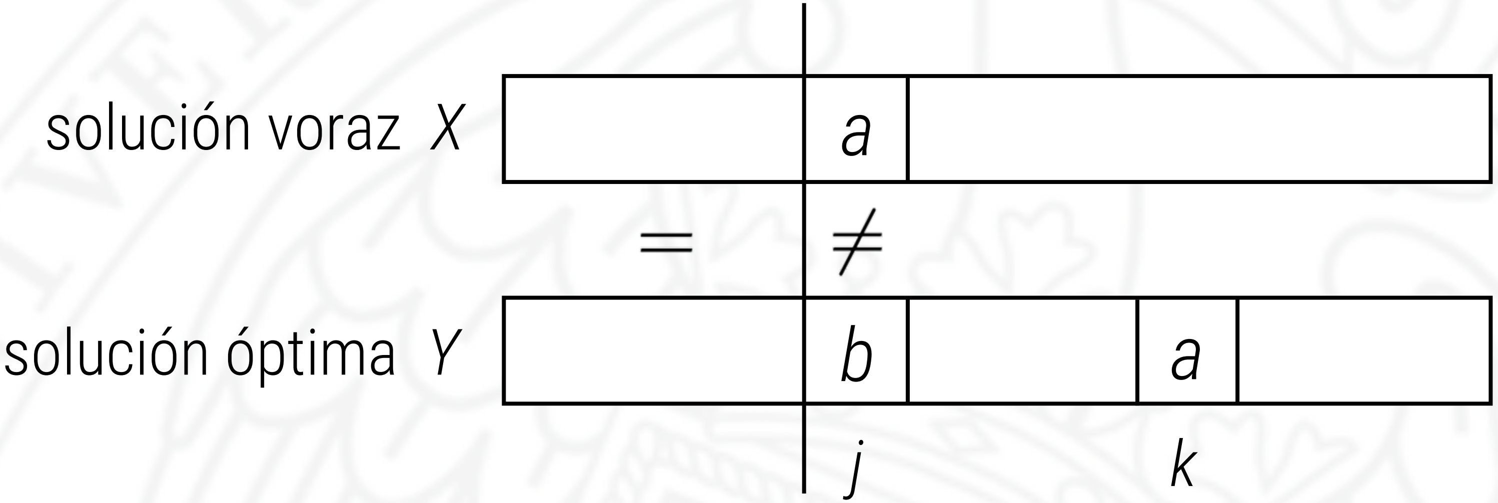
$$
\begin{aligned}
T(I) &= t_{i_1} + (t_{i_1} + t_{i_2}) + (t_{i_1} + t_{i_2} + t_{i_3}) + \cdots + (t_{i_1} + t_{i_2} + \cdots + t_{i_n}) \\
&= n t_{i_1} + (n-1) t_{i_2} + \cdots + 2 t_{i_{n-1}} + t_{i_n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) t_{i_k}
\end{aligned}
$$

Demostración de optimalidad 1



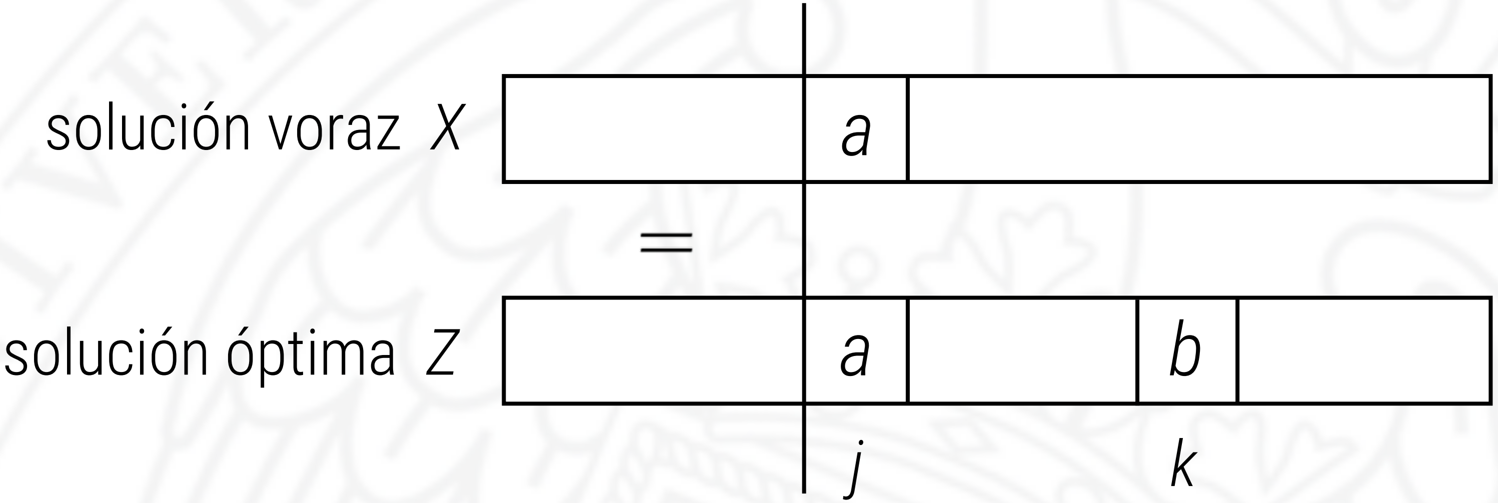
- Sabemos que $t_a \leq t_b$

Demostración de optimalidad 1



- Proponemos intercambiar en Y las tareas a y b, para hacer Y más parecida a X.

Demostración de optimalidad 1



Demostración de optimalidad 1

$$T(Y) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} (n-i+1)t_{y_i} \right) + (n-j+1)t_b + (n-k+1)t_a$$

$$T(Z) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} (n-i+1)t_{z_i} \right) + (n-j+1)t_a + (n-k+1)t_b$$

Demostración de optimalidad 1

$$
\begin{aligned}
T(Y) - T(Z) &= (n-j+1)t_b + (n-k+1)t_a - (n-j+1)t_a - (n-k+1)t_b \\
&= -jt_b + kt_b - kt_a + jt_a \\
&= t_b(k-j) - t_a(k-j) \\
&= (k-j)(t_b - t_a) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Demostración de optimalidad 2

- Cualquier solución $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ que no siga la estrategia voraz se puede mejorar.
- Si Y no está ordenada de forma no decreciente, tiene que existir una posición j tal que $t_{y_j} > t_{y_{j+1}}$.
- Si las intercambiamos, la tarea y_{j+1} no tendrá que esperar a y_j, pero y_j tendrá que esperar a y_{j+1}.
- Tras el intercambio, el tiempo será $T(Y) - t_{y_j} + t_{y_{j+1}} < T(Y)$.