Técnicas de Integración

Fernando José Garavito Ovando 18071
Juan Fernando Meléndez 18127
Fernando José De León Borrayo 19713

Sustitución o Cambio de Variable

Cuando se utiliza: Cuando necesitamos un reemplazo de variables adecuado que permita convertir el integrando en algo sencillo con una integral o antiderivada simple.

Fórmula:

$$\int f'(u) \cdot u' \, dx = F(u) + C$$

Estrategia:

- Se hace el cambio de variable y se diferencia en los dos términos.
- Si la integral resultante es más sencilla, integramos.
- Se vuelve a la variable inicial.

Ejemplo

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}}\,dx$$

$$x = \ln(s)$$
$$dx = \frac{1}{s}\,ds$$

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}}\,dx = \int \frac{(e^{x})^{3}+1}{(e^{x})^{2}}\,dx =$$

$$\int \frac{s^{3}+1}{s^{2}} \cdot \frac{1}{s}\,ds$$

$$\int \frac{s^{3}+1}{s^{2}} \cdot \frac{1}{s}\,ds =$$

$$\int \frac{s^{3}+1}{s^{3}}\,ds =$$

$$\int 1\,ds + \int s^{-3}\,ds = \int \left(1 + \frac{1}{s^{3}}\right) ds =$$

$$s - \frac{1}{2s^{2}} + K = s - \frac{1}{2s^{2}} = e^{x} - \frac{1}{2e^{2x}}$$

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}}\,dx = e^{x} - \frac{1}{2e^{2x}} + K$$

Razón

Sucede que en la integral anterior es mucho más sencillo utilizar el método de sustitución debido a que tenemos una función donde se repiten términos. En otras palabras, colocar la “u” como alguna función en el integrando cuya diferencial también esté presente.

Por Partes

Cuando se utiliza: Cuando queremos hacer la integral de un producto de funciones.

Fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Estrategia:

- Tenemos que derivar u e integrar v', por lo que será conveniente que la integral de v' sea inmediata.
- Las funciones polinómicas, logarítmicas y arcotangente se eligen como u.
- Las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como v'.

Ejemplo

Integración por partes

$$\int x \cdot \ln(x)\,dx$$

- identificar u y dv

$$u = \ln(x)$$
$$dv = x\,dx$$

- Calcular du y v

u: $u = \ln(x)$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

dv: $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

- Aplicar y resolver formulas

$$\int x \cdot \ln(x) = \int u \cdot dv =$$
$$u \cdot v - \int v \cdot du$$
$$\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

- Calcular integral $\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

- Colocar $+C$ $\int x \cdot \ln(x) = \ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + C$$

Razón

En la integral por partes anterior, se resolvió con este método ya que contiene dos funciones donde podemos obtener “u” y “v’ ”.

Fracciones Parciales

Cuando se utiliza: Cuando el numerador y denominador son funciones racionales enteras, en otras palabras son funciones en la que la variable no está afectada de exponentes negativos o fraccionarios, en el numerador el grado de la función es igual o mayor al del denominador, en este caso la fracción puede reducirse a una expresión mixta dividiendo el numerador por el denominador.

Fórmulas y Estrategias

Primer Caso: Factores Lineales Distintos donde a cada factor lineal ax + b, del denominador de una fracción racional propia le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{A}{ax+b}$$

Segundo Caso: Factores Lineales Iguales donde a cada factor lineal, ax + b, que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Tercer Caso: Factores Cuadráticos Distintos donde a cada factor cuadrático reducible, que figure el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Cuarto Caso: Factores Cuadráticos Iguales donde a cada factor cuadrático irreducible, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

Ejemplo

Fracciones Parciales

$$\int \frac{3}{x^2+3x}\,dx$$

- Factorización

$$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A(x-3)+Bx}{x(x+3)}$$

- Resolver para A

$$3 = A(x+3) + Bx$$
$$3 = A(0+3) + B(0)$$
$$3 = A(3) + 0$$
$$3 = 3A$$
$$\underline{A = 1}$$

- Resolver B

$$3 = A(x+3) + B(x)$$
$$3 = A(-3+3) + B-(3)$$
$$3 = -3B$$
$$B = -\frac{3}{3}$$
$$\underline{B = -1}$$

$$\int \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$\underline{\ln|x| - \ln|x+3| + C}$$

Razón

En las integral anterior se tiene una fracción reducible donde es posible aplicarle sustitución después de sacar la constante y así aplicar “u”.

Integración Directa

Cuando se utiliza: Cuando se necesita conocer una función F(x) que sea el resultado de la antiderivada de f(x).

Fórmula:

TIPO DE FUNCIÓN PRIMITIVA	PRIMITIVA SIMPLE
Función potencial $a \neq -1$	$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
Función exponencial	$\int e^x \, dx = e^x + C$
	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Función logarítmica	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
Función seno	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
Función coseno	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
Función tangente	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$
Función cotangente	$\int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
Función arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$
Función arco tangente	$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$

Estrategia:

- Entender si son simples o compuestas.
- En las simples tiene para tener la misma forma se debe aplicar la fórmula.
- En las compuestas tienen la misma forma de la compuesta, pero aparece una funcion con mas de un termino y multiplicacion por su derivada.

Ejemplo

Integrales directas

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

$$\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}$$

$$3\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{3} + C$$

Razón

En la integral anterior es realiza de manera directa debido a que tiene una función primitiva.

Trigonométricas

Fórmulas:

Función seno	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
Función coseno	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
Función tangente	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$

Función cotangente	$\int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
Función arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$
Función arco tangente	$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$

Estrategia:

- Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los factores restantes a cosenos. Entonces, desarrollar e integrar.
- Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los factores restantes a senos. Entonces, desarrollar e integrar
- Si las potencias de ambas son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades para convertir el integrando a potencias impares de coseno. Entonces procédase como en la estrategia 2.

Ejemplo

$$\int sen^5 x \cos^2 x \, dx$$

$$\int sen^4 x \cos^2 x \, sen\, x \, dx$$

$$\int [sen^2 x]^2 \cos^2 x \, sen\, x \, dx$$

$$\int [1 - \cos^2 x]^2 \cos^2 x \, sen\, x \, dx$$

$u = \cos x \qquad du = sen\, x \, dx$

$$-\int (1-u^2)^2 u^2 \, du$$

$$-\int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 \, du$$

$$-\int u^2 - 2u^4 + u^6 \, du$$

$$-\frac{1}{3} u^3 + \frac{2}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7$$

$$-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

Razón

En la integral anterior se debe usar trigonométricas debido al seno y coseno, pero sucede que más adelante se puede usar una sustitución debido a que el coseno puede tener integración inmediata y ya después obtener la integral más sencilla de expresar.

Referencias

https://katyagm.weebly.com/home/integracion-por-fracciones-parciales

http://ieszaframagon.com/matematicas/matematicas2/integral/11_integrales_inmediatas.html