

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL  
IMD1001 - Cálculo diferencial e Integral I  
2025.2 - Trabalho - 15/12/2025  
Turma 3

Nome: \_\_\_\_\_ Mat.: \_\_\_\_\_

### Instruções básicas

- Esta atividade consiste em utilizar métodos de integração numérica para resolver problemas típicos de probabilidade e estatística. Nestes cursos, é comum o uso de uma substituição algébrica e uma consulta em tabelas para extrair o valor destas integrais. Neste exercício, calcularemos estas integrais numericamente.
- Escolha a linguagem de programação que quiser para fazer os cálculos.
- Aos menos experientes em linguagens de programação, o anexo deste trabalho possui um modelo para te orientar na programação.

## 1 Distribuição normal

A distribuição normal é um dos modelos de probabilidades mais utilizado para modelar fenômenos. De forma simples, a distribuição normal descreve fenômenos em que os resultados mais prováveis estão centralizados ao redor de uma média.

Em uma distribuição normal utilizando uma variável  $x$  contínua, a probabilidade de ocorrer um valor de  $x$  entre  $a$  e  $b$  é dado pela integral:

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

em que  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  e  $\mu$  são o desvio padrão, variância (medidas de dispersão) e a média do fenômeno, respectivamente.

Utilizando esta integral, resolva o seguinte exercícios:

1. Os dados de uma pesquisa mostram algumas informações sobre o tempo de um certo tipo de cirurgia. A partir dos dados foram calculados, o tempo médio de 129 minutos com um desvio padrão de 14 minutos.
  - a) Qual a probabilidade de uma cirurgia ser realizada entre 1 e duas horas?
  - b) Qual é a probabilidade de uma cirurgia ser completada em menos de 100 minutos?
  - c) Qual é a probabilidade de uma cirurgia requerer um tempo maior do que dois desvios-padrão acima da média?
  - d) Em qual tempo a probabilidade de uma cirurgia já ter sido completa é igual a 95%?

## 2 Distribuição exponencial

De forma simples, a distribuição exponencial é um modelo de probabilidades usado para modelar eventos independentes que acontecem a uma taxa média constante (Processo de Poisson). Por exemplo: Um chuveiro com um pequeno vazamento pinga uma gota d'água a uma taxa média de uma gota a cada 10 segundos (ou seja,  $\frac{1}{10}$  gotas por segundo). Como determinar a probabilidade de cair uma gota em menos de 8 segundos após a última gota cair?

Neste tipo de problemas, a probabilidade do evento ocorrer em até  $a$  segundos (ou outra unidade de medida de acordo com o problema) a partir de qualquer instante 0 é dado pela integral:

$$P(0 \leq t \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$$

em que  $\lambda$  é a taxa média a qual o fenômeno ocorre. Utilizando esta integral, resolva a seguinte exercício:

1. Considere o problema de gotejamento enunciado anteriormente.

- a) Resolva o problema proposto utilizando o método dos trapézios com  $n = 20$  pontos.
- b) Resolva o problema proposto utilizando o método de Simpson com  $n = 20$  pontos.
- c) Esta integral pode ser calculada utilizando o método de integração por partes. Calcule o resultado exato desta probabilidade.
- d) Compare o resultado exato com os obtidos pelo método dos trapézios e o método de Simpson.

### 3 Distribuição gama

A distribuição gama é uma generalização da distribuição exponencial para estudar processos de Poisson consecutivos. Ela é uma das distribuições contínuas mais importantes da estatística e da teoria das probabilidades. Ela aparece naturalmente em diversos contextos ligados a tempos de espera, modelagem de duração, confiabilidade, hidrologia, entre muitas outras aplicações.

A distribuição Gama possui dois parâmetros  $r$  (forma) e  $\lambda$  (taxa). O parâmetro de forma controla o número de eventos de distribuição exponencial devem ocorrer (Ex: utilize  $r = 5$  no exercício anterior para modelar a probabilidade de 5 gotas caírem até o tempo  $t = a$ ). Já o parâmetro  $\lambda$ , assim como a distribuição exponencial, controla a taxa média de eventos por unidade de tempo.

Para encontrar a probabilidade de um evento (dado como processo de Poisson) com taxa média de  $\lambda$  ocorrências por unidade de tempo , ocorrer  $r$  vezes em até  $a$  unidades de tempo é dado pela integral:

$$P(r, 0 \leq x \leq a) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^a x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

em que a função gama é calculada como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Além disso, observe que se  $r = 1$ , obtemos a distribuição exponencial (com outras escolhas de  $r$ , também podemos obter as distribuições qui-quadrado). Utilizando esta integral, resolva o seguinte exercício:

1. Suponha que pacotes chegam a um roteador segundo um processo de Poisson com taxa 80 pacotes por segundo.
  - a) Calcule a probabilidade de que o tempo até o 10º pacote seja menor que 0,2 segundos.
  - b) Calcule a probabilidade do pacote de número 300 ter sido recebido em até 3,5 segundos.