

Opdracht

Uitgebreide opdrachtbeschrijving is te vinden in Java Magazine 2014, no. 3. Iemand woont in een straat met opeenvolgende huisnummers. De som van de nummers links en rechts zijn gelijk. Hij is benieuwd naar de andere paren (huisnummer, max nummer) waar dit voor geldt. Samenvatting: vind paren gehele getallen h en m ($h < m$) zodanig dat de som van oplopende getallen van 1 (inclusief) tot h (exclusief) gelijk is aan de som van de getallen van h (exclusief) tot m (inclusief).

Eerste 20 paren, idee 1

In de opgave werd al gehint op de somformule van Gauss. Hiervan gebruik makend weten we dat voor de som van de getallen voor h geldt:

$$(h-1) * 0.5h$$

Voor het gedeelte na h geldt op vergelijkbare wijze:

$$(m-h) * 0.5(m+h+1)$$

Hieruit volgt dat een geldige oplossing een paar gehele getallen is waarvoor geldt:

$$(h-1) * 0.5h = (m-h) * 0.5(m+h+1)$$

Deze vergelijking kan herleidt worden als volgt:

$$\begin{aligned}(h-1) * 0.5h &= (m-h) * 0.5(m+h+1) \\ 0.5h^2 - 0.5h &= 0.5m^2 + 0.5mh + 0.5m - 0.5h^2 - 0.5hm - 0.5h \\ 0.5h^2 - 0.5h &= 0.5m^2 + 0.5m - 0.5h^2 - 0.5h \\ h^2 &= 0.5m^2 + 0.5m\end{aligned}$$

Als de waarde van h als te valideren invoer wordt gebruikt, kunnen we hem beschouwen als constante om via de abc formule te bepalen wat de bijbehorende waarde van m is (om te kijken of dit een geheel getal is). Er geldt dan het volgende:

$$\begin{aligned}0.5m^2 + 0.5m - h^2 &= 0 \\ m &= (-0.5 \pm \sqrt{(0.25 + 2h^2)})/1\end{aligned}$$

Omdat m een geheel positief getal moet zijn, zal de “-” nooit aan de orde zijn en geldt er:

$$m = -0.5 + \sqrt{(0.25 + 2h^2)}$$

Hieruit blijkt dat een oplossing geldig is als de rest na deling door 1 van $\sqrt{(0.25 + 2h^2)}$ gelijk is aan 0.5. Er zijn 2 moeilijkheden met de implementatie hiervan:

- De dichtheid van paren is laag, waardoor $2h^2$ te groot wordt om precies op te slaan in een double en er afrondfouten ontstaan.
- Math.sqrt heeft soms afrondfouten.

Het probleem dat $2h^2$ te groot wordt is te ondervangen door een BigDecimal te gebruiken. Ook met een zeer groot aantal decimalen lost dat probleem 2 niet op. Bovendien moet je een eigen implementatie van de wortelfunctie schrijven, die vele malen trager zal zijn dan de native wortel functie die Math gebruikt. Een andere vertragende factor zal zijn dat er een hoop objecten gecreëerd moeten worden.

Het is mogelijk h en m zo te bepalen dat er geen kwadraat van h of m genomen hoeft te worden:

$$\begin{aligned}h^2 &= 0.5m^2 + 0.5m \\ h^2 &= 0.5 * m * (m + 1) \\ h &= \sqrt{0.5 * m * (m + 1)} \\ h &= \sqrt{0.5m} * \sqrt{m+1}\end{aligned}$$

Kwadraten zijn hiermee niet nodig. Dan zijn er de afrondfouten van Math.sqrt. Het exact bepalen van de wortel is onmogelijk, maar het is wel mogelijk om een bereik te bepalen waarbinnen de wortel zal liggen. Het resultaat van Math.sqrt zal binnen 1 ULP (kleinst meetbare eenheid) van het correcte antwoord liggen. Het bereik van het product van de 2

wortels loopt van het product van de minimum waarden tot de het product van de maximum waarden. Als deze waarden na afronding naar beneden op een geheel getal, verschillen, bevat het bereik een geheel getal. Mogelijk kan dit gehele getal als waarde voor h een correct paar met m vormen. Dit wordt getest met behulp van:

$$h^2 = (m^2 + m)/2$$

Deze test maakt gebruik van BigDecimal. Op deze wijze wordt het grootste deel van het rekenwerk gedaan met behulp van primitieve types (snel) en wordt definitief bepaald of een oplossing correct is met behulp van BigDecimal (precies).

Deze implementatie (Solver1) levert correcte resultaten, maar de dichtheid van paren is te laag voor deze implementatie. Elke volgende oplossing kost op deze manier een factor 5 a 6 meer tijd dan de huidige. De eerste 11 oplossingen zijn in 2 seconden gevonden, maar het vinden van oplossing 15 duurt al 35 minuten. Ook met veel snellere hardware is het ondoenlijk op deze manier bij de eerste 20 te komen. Een andere reden waarom deze implementatie, al had je oneindig veel tijd, niet zal werken is dat de waarde van het m zo groot wordt dat deze niet meer zonder verlies in een double uitgedrukt kan worden (volgens specificatie "less than 2^N ", waarbij N 53 is).

Uitwerking van een ander idee (Solver2), waarbij je de som kleiner en groter dan h vergelijkt en afhankelijk daarvan h of m verhoogt is ook correct en sneller, maar heeft ook de toename in rekestijd met factor 5 a 6.

Eerste 20 paren, patroon

Enumereren over h of m is niet te doen. Toch is er hoop, want er lijkt een patroon te zitten in de paren. Zoals genoemd zit er steeds een factor 5 a 6 tussen opeenvolgende waarden en verhoudt de waarde van h zich voor elk paar op ongeveer dezelfde wijze tot m . Solver1 vond bovendien alle oplossingen met thread 2 en thread 3, waardoor m lijkt te voldoen aan $4 + 4k$ of $5 + 4k$.

Na een avond en wat volgeschreven A4tjes met afleidingen van $2h^2 = m^2 + m$ was ik er van overtuigd dat er een voorspelbare verdeling van integer paren (h, m) bestaat die voldoen aan $2h^2 = m^2 + m$. Hoe deze verdeling precies is kon ik niet achterhalen.

Volgende stap is dat ik op Match Exchange gevraagd heb naar bovenstaande. Waar ik hoopte op wat namen van relevante verdelingen, kreeg ik meer. Zo is $2h^2 = m^2 + m$ de vergelijking van Pell, gaat het om driehoeksgetallen die ook kwadraat zijn. Genoeg informatie om snel de eerste 20 paren te genereren. Een antwoord gaf een Java implementatie die de eerste paren gegenereerd die aan $2h^2 = m^2 + m$ voldoen. Solver3 is hierop gebaseerd en heeft een fractie van een seconde nodig voor de eerste 20 oplossingen.

Link naar vraag op Math Exchange:

<http://math.stackexchange.com/questions/855300/distribution-of-integer-solution-pairs-x-y-for-2x2-y2-y>

Eerste 20 oplossingen:

Solution 1: (6, 8)

Solution 2: (35, 49)

Solution 3: (204, 288)

Solution 4: (1189, 1681)

Solution 5: (6930, 9800)

Solution 6: (40391, 57121)

Solution 7: (235416, 332928)

Solution 8: (1372105, 1940449)

Solution 9: (7997214, 11309768)
 Solution 10: (46611179, 65918161)
 Solution 11: (271669860, 384199200)
 Solution 12: (1583407981, 2239277041)
 Solution 13: (9228778026, 13051463048)
 Solution 14: (53789260175, 76069501249)
 Solution 15: (313506783024, 443365544448)
 Solution 16: (1827251437969, 2584123765441)
 Solution 17: (10650001844790, 15061377048200)
 Solution 18: (62072759630771, 87784138523761)
 Solution 19: (361786555939836, 511643454094368)
 Solution 20: (2108646576008245, 2982076586042449)

Grootste waarde voor m

Met het inzicht door de antwoorden van Math Exchange zijn de eerste 20 waarden geen probleem meer. Het vinden van de grootste combinatie biedt de uitdagingen van het omgaan met heel grote getallen. De implementatie (SolverMax) is gebaseerd op:

$$h = -((3-2\sqrt{2})^n - (3+2\sqrt{2})^n) / (4\sqrt{2})$$

$$m = ((3-2\sqrt{2})^n + (3+2\sqrt{2})^n - 2) / 4$$

Hierbij heeft n gehele waarden van 2 of groter (n = 1 levert (1,1), n=2 levert (6,8)). Voor n geldt in de java implementatie dat hij niet groter mag zijn dan 999999999 (maximum voor `BigDecimal.pow(int n)`) en dat het product van n met de nauwkeurigheid van de wortels in decimalen de waarde `Integer.MAX_VALUE` niet mag overstijgen. Die tweede factor is de beperkende. De grootste waarde die ik berekend heb is die voor n = 8124, wat de 8123^e oplossing is van het vraagstuk uit de puzzel. Hiervoor had mijn computer 5233 seconden nodig en zijn de wortels tot 3829 decimalen nauwkeurig berekend (2553 decimalen is te weinig). Het resultaat:

Huisnummer:

38615386002565129119068537855872898317552469303344649063754264761662525851540936
 44178626551976125474734048267816770786301603333536975171411880394185181702618005
 46222033505587500937520543960781925500648319564226167044723675607220034846161837
 83204502342913194798995409627149444603365498970116526041378687638234050544434035
 43677075388215059070865860586967972028939262796156185636432401772051945727967266
 56792812498005334277247105001211295819787574023194564275805826180316605409453278
 38016372669658538597207857927046002949642492040159720518960750211466059990686748
 37123237572468644563526219924494546843205054960332552373369311470425174062700479
 91008377488412933088927568293179394850677780146465765678752963183310577400772778
 79268789813309375363286012938891086894824116898918034702418541206534999082753761
 80577039266768673967090765515345242749135108519884929352504335785356203135949196
 24339547899341039928414342864212999017863747569574579447171517892611473977854801
 68325467775085939714340065845077321217246240966383403146797168266491462375159729
 75092880879713922770853767474154708704082467089877793816395107410424956360025547
 99902375349499314314860082374384699489100602280033785429463024301495698027034310
 44245037068969591364042930595935074650288958233347009004314894274606688553186811
 28211788610364666933407716150239790026747028951081125296940242397873310840119746
 21464736836826646435384893453561208551682505130011548429977628672134726046102609
 19492599976216299957459006160369289325533800777962604598834937911298334293991468
 89172281131290940448966576274544312636780919631654372374361949819895892200375626
 08639134526125444574593836923188999453702295073598606478769919788124109992929865
 86550739697755159599286774392573599414630379502911813237177262684664819681556409
 07398599815513750270722856289522974557330354844274396475506578609678417456819617
 39744461144030142848046919972732029007373140470610503107146602611191284214519737

06979535137876114415999234215352575808442929535752306459835549052452525636241775
45439373720182606346749029950433100733452972184719953817129483677166056278525581
63797215178596750166006351064904466582578778960196169928969194023801590708999417
58217271099044082851176440308463801177150112834889260889458245364179058255505648
59548892955171190882937319961514011655015465180037487560853354739842343452894870
18426369472358393150905753169358443908428068191298786478642835586793018216193112
85860273013768887734933075146716465011560679891046372577834410240216764745547671
87339590190418288524302565116119004926903177391599692993950059435378157054882959
60653220485898626824101543006264434579710339707127819570134105207692424010317876
78280936471886316872212781650766325283567489371859141733780926461450328718949359
02609038018228033806653296761341021897956344346101336738378520816868354842482603
59794823509278035689677375112787577914663657207229553348880579487257336962206856
82176262665479416229109645563054501998362823949715619308774244703659305646310160
23287597185195249494050323882656114369336692506624283157707440882412490205280971
10669545034761464046469195794790053066402772475412506777105925179192740820421364
99853673522929007440963737609218147605437116404683761872858462508032359860457726
22562734183715500553626063986023134252466163203054149266271670221950483944669273
70826923367750177024253974074073337040007242336089389045903276422926094201198157
17780627854911663808222858384291958654914532734568332557301208792755071560747549
50997963369944244157646032848876517154402190180225804656803845683493347950795392
37763752989735592730390335901040386446519700955892745502494324117384599740726150
52919818479286385718047219014481497761920531315107035077908719927051582161384186
84236367985506758380679948726287289164165687932892396908756330732917280770686291
48873410382351205998839488621278707568599088236447606306802740157174955010402138
25048928303018988767392903089738604101066369358150740541499172599306849650436041
70301269161074930809723114040470707504507589481547620794497679660080434321787619
46505764561200518758287687072780392526940817061808746532307064680095111035017965
72940435170862078347725700012156642362967436786591594086866761917557795294053764
97536374609454678532970886801760424343357176658065803265470882364524217582865301
57549481450572103011540295595527906890961339777454113193157255791193987132354470
59745988052606548246776606086121541629832997694195494134025484156359211589637600
27702235483049246153000183621726759386817257480866595743571313532032738233206746
90760272511727202717865303001754922642750467925457256788293283856439144605209678
86716851857467270541306560396415235377702536292955504169654653618660421408847547
22673119568847523637860371911002135879159901240315001641338577570229659714049353
76116668884732303422401656420824004477097247180014109569414023661114694848234065
69902463983645967322788484384984612099111799703715270116495156537068494719370407
14184964412957196971160279762616284739315371338196483220125947129113307424217398
84539015043227858758225587755028738589186145006348308074216770312989140173324269
59835583420174465155666568468840724464557641534010393948142393507509673951202529
42422249001128210762363582381734080803110307733430324975348027689434901378574705
57931209261564610746006466606983334800698871354601472730317937620165682918286748
5831505346838091666946960392567370235820643879848081050405130578744694685684202
32568755997861760823551354783705217861968639659205884334730226702981110062805943
34096828374032390274581239535185279705274987993504744992725981736954370022304969
80845182880264474538552674592901873305895042838668284980646251776129779215726128
22407640663235395724591594393088720289452645957005220293982601753183236023420956
72143141768641303181686049010511836438626859441257394116176998510894487334876049
31879402472486074550932068636347898058192076208822577207518793822440939789911097
18646017979411822508159135630595080856443325199806480436731579268272650667763807
18223305400420495778376079891897736710305840663862846274460464179280030402105652
73974245332050912431311174047475370170263565636295674373780240511572728715103059
91197317699776716751446337043530199029703819053827348727810487536221482234175964
84341030177371808401883340091284020413788091872119263343220

Aantal huizen:

54610402601099781713590923554352399333881811005862025003886482946230993380259981
31735283764719894353518314216703425901814321830036571029455282026338131868999972
65320230566748523043806061900092904167844924681976106792828362374575909883342446
08199318045852201576445008060657136475049110124933954557587335196666043462070682
64939855971373823802740272128221009774174238055975244948605704449323363499334529
77581433195797167784100156949824430846066978103078935503302868068553503696531579

57122659731192170461229580934650119176436814199534224014946581239975201746362679
63592667915613054152209698620280454526117017599653741882360919756754304879316056
82319286975938541598956619784679208021524235853307315250670401344736408962497045
31306306055756654481598036750296000664327460325707285789840445905574624481831234
79821992657029097518346093002146618122564022304551846323910854107817548573562285
48630103661562430199278582886982095341152452634291796347397139422425591062004788
54038456360759872943237174268859312780855215238409790806050935930272693989268087
11418503418136853001662197120117686673547369963478283634329253690192026561197956
27069651850461949808515938144933415564851751829925617083753019351295789454558815
35139995269638036178962843880611215787782086733452174087103851967730842442382610
57851359957537703150909943768351552608196066631970723488526221717378605553192493
85084961255252896936957364630149475330350955442856872390755615497353408033069467
91621388916091633872575589498422133641820038951635852782437928480652943712869064
17029922044253447009571088153896168804266223022860285772231141569424994113768563
46414157345823371187671789720241388066836519987929678156007653182451403005824796
12498501212974525760563336033027752474260405102594131307181226293950644122467842
51694372960282979565673028744639235716059420115439554485360879936113714520770262
20056511017913957701689425702558054564986609862548168291115295891197764452770814
04079419679289830957604727957632517897782622304042964210659369640179449147313110
95188074163716133840961718390188195904568031040749321795106193202571511227975825
42075565498881863001984106709859483444594881841784193423547317178682075298819220
41601879910954976572072525638704271191023661762647767611939074278707215801440112
39394662822171863649759140593553977680462303085228863641551558332063831828695742
50410324927961278381183777461143743623545040471892351044451043572253035650441087
58380267027287536006721395998159516565022979962722576330947865277131092935405443
42422835417368924133414749405595401599055291327902339599729736079176350064723145
11919575593942816738761006348081260996529032834713904082006137866965113149792627
60170925995886312428451947574464560095048438921658746993811812562561654849644785
90841062953752519381917723852401438160339179733690399264217528291750713314678495
71642501480716796081587473462673469449555240039020088560887335111242849984785800
43532355016905186055571647804263994792625378463665555137089282841316015975478555
57469046611967008048181231182099802329634963104540388812504965934210005136594246
13515515610619072311865017850388355694012996979845258951205275721645621100772224
7204256276450336201986278835847335777584610350316966253040374421235513470930574
23021633389161098395826605853584762735309197413730524900687023788833725559856790
44725509253488830693559937626159646584301974151916021996354684486992793324304318
19766342387413474205204664378449368134281566342856874778728848574811836572928058
90466537377365900859970429549128604684742891097970654160455354232762221337422938
57713215789160661992763902818181992392347584202783666873342026267058535358974904
22825141017443489469638676644231212451784612815716799135394692421600224922658681
69644242480069776362351424092226631124214042355341197642419606413846738388295754
46850219424934807628796573012675571059773976032049811125166197444910600736817484
89624859581245211047258456928695196059299759230590560940497170576960197420359751
40397063444725458368623272273571255328947792513071594289985063946768902410928664
20837439150191773263118553144167330271028658270349321125371515604237673753439868
37600220166642537976190343017514175039351765060740207532628583552756638906078241
49311033519845108388779730098374388515393720700426664654481988786651476857210261
67048968466376517231911459821640069192282737332520795110429448310298581354512684
16156835929856267348227534356510604703805046333838389828976907097784227729743231
35546136125803930970327002905815116180189257041497726906608438852128588983270771
15833450969395005398567654891977631246603748635991977410486497395985977710838926
99367668037245457602322712298973169267261941222520342341607095076535256258534945
24343056920194651942750559927282141726246264088424108335285851497598826467152763
83313229775070895250357210916236343608764725424331326864254512135748059863549101
73897886760570913273245715316289073123470348683426581100842480547024166635289229
20475316844760282431824951914441907338257521301305190969196428406658763881670710
29567885109705752926655436239560332747312340513610461846897037607380401628646577
59846405699203346082053390893913989548500689553125160568719115567493358215500356
28111931122704885254806136198991310558861022336395471515247200559360707219823576
91881103412621427849609087392811011631666834949242247195227112443220716091645311
41425333186849310158105299685636493280368313154341327370638877693490544910190138
98454641205605208663268436675629286068127053346704790372585253459122183150424866

09230794383623721194856434560276795572686196696471325059309174065228690490802094
67505470865369116280377947297939670455011080685740288483025656072885407289351327
18303806810472636676744149184670358739093737668245556497526340675884191064370215
40366737425992803059694392032775164689587543334531767042111784065708127168613499
70308956373405124157281279167173854257012861627951552228163222305439894810421525
08029659264004165061463068711338249345470549905746112206183145408403040351773260
41374949558525520732963258121468554829622361234033413347818538394749843418707265
64188449507637527456611146555407374233818403727088864522961985358107846415124280
62876459813661087731888833568941051475338696978550991236083347863001256077509225
34042526983676854907425684408303633789009671262635109696800