Opdracht

Uitgebreide opdrachtbeschrijving is te vinden in Java Magazine 2014, no. 3. Iemand woont in een straat met opeenvolgende huisnummers. De som van de nummers links en rechts zijn gelijk. Hij is benieuwd naar de andere paren (huisnummer, max nummer) waar dit voor geldt. Samenvatting: vind paren gehele getallen h en m ($h<m$) zodanig dat de som van oplopende getallen van 1 (inclusief) tot h (exclusief) gelijk is aan de som van de getallen van h (exclusief) tot m (inclusief).

Eerste 20 paren, idee 1

In de opgave werd al gehint op de somformule van Gauss. Hiervan gebruik makend weten we dat voor de som van de getallen voor h geldt:

$$(h - 1) * 0.5h$$

Voor het gedeelte na h geldt op vergelijkbare wijze:

$$(m - h) * 0.5(m+h+1)$$

Hieruit volgt dat een geldige oplossing een paar gehele getallen is waarvoor geldt:

$$(h - 1) * 0.5h = (m - h) * 0.5(m+h+1)$$

Deze vergelijking kan herleidt worden als volgt:

$$\begin{aligned}
(h - 1) * 0.5h &= (m - h) * 0.5(m+h+1) \\
0.5h^2 - 0.5h &= 0.5m^2 + 0.5mh + 0.5m - 0.5h^2 - 0.5hm - 0.5h \\
0.5h^2 - 0.5h &= 0.5m^2 + 0.5m - 0.5h^2 - 0.5h \\
h^2 &= 0.5m^2 + 0.5m
\end{aligned}$$

Als de waarde van h als te valideren invoer wordt gebruikt, kunnen we hem beschouwen als constante om via de abc formule te bepalen wat de bijbehorende waarde van m is (om te kijken of dit een geheel getal is). Er geldt dan het volgende:

$$\begin{aligned}
0.5m^2 + 0.5m - h^2 &= 0 \\
m &= (-0.5 +\!- \sqrt{(0.25 + 2h^2)})/1
\end{aligned}$$

Omdat m een geheel positief getal moet zijn, zal de "-" nooit aan de orde zijn en geldt er:

$$m = -0.5 + \sqrt{(0.25 + 2h^2)}$$

Hieruit blijkt dat een oplossing geldig is als de rest na deling door 1 van $\sqrt{(0.25 + 2h^2)}$ gelijk is aan 0.5. Er zijn 2 moeilijkheden met de implementatie hiervan:

- De dichtheid van paren is laag, waardoor $2h^2$ te groot wordt om precies op te slaan in een double en er afrondfouten ontstaan.
- Math.sqrt heeft soms afrondfouten.

Het probleem dat $2h^2$ te groot wordt is te ondervangen door een BigDecimal te gebruiken. Ook met een zeer groot aantal decimalen lost dat probleem 2 niet op. Bovendien moet je een eigen implementatie van de wortelfunctie schrijven, die vele malen trager zal zijn dan de native wortel functie die Math gebruikt. Een andere vertragende factor zal zijn dat er een hoop objecten gecreëerd moeten worden.

Het is mogelijk h en m zo te bepalen dat er geen kwadraat van h of m genomen hoeft te worden:

$$\begin{aligned}
h^2 &= 0.5m^2 + 0.5m \\
h^2 &= 0.5 * m * (m + 1) \\
h &= \sqrt{(0.5 * m * (m + 1))} \\
h &= \sqrt{(0.5m)} * \sqrt{(m+1)}
\end{aligned}$$

Kwadraten zijn hiermee niet nodig. Dan zijn er de afrondfouten van Math.sqrt. Het exact bepalen van de wortel is onmogelijk, maar het is wel mogelijk om een bereik te bepalen waarbinnen de wortel zal liggen. Het resultaat van Math.sqrt zal binnen 1 ULP (kleinst meetbare eenheid) van het correcte antwoord liggen. Het bereik van het product van de 2 wortels loopt van het product van de minimum waarden tot de het product van de maximum waarden. Als deze waarden na afronding naar beneden op een geheel getal, verschillen, bevat het bereik een geheel getal. Mogelijk kan dit gehele getal als waarde voor *h* een correct paar met *m* vormen. Dit wordt getest met behulp van:

$$h^2 = (m^2 + m)/2$$

Deze test maakt gebruik van BigDecimal. Op deze wijze wordt het grootste deel van het rekenwerk gedaan met behulp van primitieve types (snel) en wordt definitief bepaald of een oplossing correct is met behulp van BigDecimal (precies).
Deze implementatie (Solver1) levert correcte resultaten, maar de dichtheid van paren is te laag voor deze implementatie. Elke volgende oplossing kost op deze manier een factor 5 a 6 meer tijd dan de huidige. De eerste 11 oplossingen zijn in 2 seconden gevonden, maar het vinden van oplossing 15 duurt al 35 minuten. Ook met veel snellere hardware is het ondoenlijk op deze manier bij de eerste 20 te komen. Een andere reden waarom deze implementatie, al had je oneindig veel tijd, niet zal werken is dat de waarde van het *m* zo groot wordt dat deze niet meer zonder verlies in een double uitgedrukt kan worden (volgens specificatie “less than 2^N”, waarbij N 53 is).
Uitwerking van een ander idee (Solver2), waarbij je de som kleiner en groter dan *h* vergelijkt en afhankelijk daarvan *h* of *m* verhoogt is ook correct en sneller, maar heeft ook de toename in rekentijd met factor 5 a 6.

Eerste 20 paren, patroon

Enumereren over *h* of *m* is niet te doen. Toch is er hoop, want er lijkt een patroon te zitten in de paren. Zoals genoemd zit er steeds een factor 5 a 6 tussen opeenvolgende waarden en verhoudt de waarde van *h* zich voor elk paar op ongeveer dezelfde wijze tot *m*. Solver1 vond bovendien alle oplossingen met thread 2 en thread 3, waardoor *m* lijkt te voldoen aan $4 + 4k$ of $5+4k$.
Na een avond en wat volgeschreven A4tjes met afleidingen van $2h^2 = m^2+m$ was ik er van overtuigd dat er een voorspelbare verdeling van integer paren (h,m) bestaat die voldoen aan $2h^2 = m^2+m$. Hoe deze verdeling precies is kon ik niet achterhalen.
Volgende stap is dat ik op Match Exchange gevraagd heb naar bovenstaande. Waar ik hoopte op wat namen van relevante verdelingen, kreeg ik meer. Zo is $2h^2 = m^2+m$ de vergelijking van Pell, gaat het om driehoeksgetallen die ook kwadraat zijn. Genoeg informatie om snel de eerste 20 paren te genereren. Een antwoord gaf een Java implementatie die de eerste paren genereert die aan $2h^2 = m^2+m$ voldoen. Solver3 is hierop gebaseerd en heeft een fractie van een seconde nodig voor de eerste 20 oplossingen.
Link naar vraag op Math Exchange:
http://math.stackexchange.com/questions/855300/distribution-of-integer-solution-pairs-x-y-for-2x2-y2-y

Eerste 20 oplossingen:
Solution 1: (6, 8)
Solution 2: (35, 49)
Solution 3: (204, 288)
Solution 4: (1189, 1681)
Solution 5: (6930, 9800)
Solution 6: (40391, 57121)
Solution 7: (235416, 332928)
Solution 8: (1372105, 1940449)

Solution 9: (7997214, 11309768)
Solution 10: (46611179, 65918161)
Solution 11: (271669860, 384199200)
Solution 12: (1583407981, 2239277041)
Solution 13: (9228778026, 13051463048)
Solution 14: (53789260175, 76069501249)
Solution 15: (313506783024, 443365544448)
Solution 16: (1827251437969, 2584123765441)
Solution 17: (10650001844790, 15061377048200)
Solution 18: (62072759630771, 87784138523761)
Solution 19: (361786555939836, 511643454094368)
Solution 20: (2108646576008245, 2982076586042449)

Grootste waarde voor m

Met het inzicht door de antwoorden van Math Exchange zijn de eerste 20 waarden geen probleem meer. Het vinden van de grootste combinatie biedt de uitdagingen van het omgaan met heel grote getallen. De implementatie (SolverMax) is gebaseerd op:

$$h = -((3-2\sqrt{2})\text{^}n-(3+2\sqrt{2})\text{^}n)/(4\sqrt{2})$$
$$m = ((3-2\sqrt{2})\text{^}n+(3+2\sqrt{2})\text{^}n-2)/4$$

Hierbij heeft n gehele waarden van 2 of groter (n = 1 levert (1,1), n=2 levert (6,8)). Voor n geldt in de java implementatie dat hij niet groter mag zijn dan 999999999 (maximum voor BigDecimal.pow(int n)) en dat het product van n met de nauwkeurigheid van de wortels in decimalen de waarde Integer.MAX_VALUE niet mag overstijgen. Die tweede factor is de beperkende. De grootste waarde die ik berekend heb is die voor n = 8124, wat de 8123^{e} oplossing is van het vraagstuk uit de puzzel. Hiervoor had mijn computer 5233 seconden nodig en zijn de wortels tot 3829 decimalen nauwkeurig berekend (2553 decimalen is te weinig). Het resultaat:

Huisnummer:
```
38615386002565129119068537855872898317552469303344649063754264761662525851540936
```

069795351378761144159992342153525758084429295357523064598355490524525256362417754543937372018260634674902995043310073345297218471995381712948367716605627852558163797215178596750166006351064904466582578778960196169928969194023801590708999417582172710990440828511764403084638011771501128348892608894582453641790582555056485954889295517119088293731996151401165501546518003748756085335473984234345289487018426369472358393150905753169358443908428068191298786478642835586793018216193112858602730137688877349330751467164650115606798910463725778344102402167647455476718733959019041828852430256511611900492690317739159969299395005943537815705488295960653220485898626824101543006264434579710339707127819570134105207692424010317876782809364718863168722127816507663252835674893718591417337809264614503287189493590260903801822803380665329676134102189795634434610133673837852081686835484248260359794823509278035689677375112787577914663657207229553348880579487257336962206856821762626654794162291096455630545019983628239497156193087742447036593056463101602328759718519524949405032388265611436933669250662428315770744088241249020528097110669545034761464046469195794790053066402772475412506777105925179192740820421364998536735229290074409637376092181476054371164046837618728584625080323598604577262256273418371550055362606398602313425246616320305414926627167022195048394466927370826923367750177024253974074073337040007242336089389045903276422926094201198157177806278549116638082228583842919586549145327345683325573012087927550715607475495099796336994424415764603284887651715440219018022580465680384568349334795079539237763752989735592730390335901040386446519700955892745502494324117384599740726150529198184792863857180472190144814977619205313151070350779087199270515821613841868423636798550675838067994872628728916416568793289239690875633073291728077068629148873410382351205998839488621278707568599088236447606306802740157174955010402138250489283030189887673929030897386041010663693581507405414991725993068496504360417030126916107493080972311404047070750450758948154762079449767966008043432178761946505764561200518758287687072780392526940817061808746532307064680095111035017965729404351708620783477257000121566423629674367865915940868667619175577952940537649753637460945467853297088680176042434335717665806580326547088236452421758286530157549481450572103011540295595527906890961339777454113193157255791193987132354470597459880526065482467766060861215416298329976941954941340254841563592115896376002770223548304924615300018362172675938681725748086659574357131353203273823320674690760272511727202717865303001754922642750467925457256788293283856439144605209678867168518574672705413065603964152353777025362929555041696546536186604214088475472267311956884752363786037191100213587915990124031500164133857757022965971404935376116668884732303422401656420824004477097247180014109569414023661114694848234065699024639836459673227884843849846120991117997037152701164951565370684947193704071418496441295719697116027976261628473931537133819648322012594712911330742421739884539015043227858758225587755028738589186145006348308074216770312989140173324269598355834201744651556665684688407244645576415340103939481423935075096739512025294242224900112821076236358238173408080311030773343032497534802768943490137857470557931209261564610746006466606983334800698871354601472730317937620165682918286748583150534683809166694696039256737023582026438798480810504051305787446946856842023256875599786176082355135478370521786196863965920588433473022670298111006280594334096828374032390274581239535185279705274987993504744992725981736954370022304969808451828802644745385526745929018733058950428386682849806462517761297792157261282240764066323539572459159439308872028945264595700522029398260175318323602342095672143141768641303181686049010511836438626859441257394116176998510894487334876049318794024724860745509320686363478980581920762088225772075187938224409397899110971864601797941182250815913563059508085644332519980648043673157926827265066776380718223305400420495778376079891897736710305840663862846274460464179280030402105652739742453320509124313111740474753701702635656362956743737802405115727287151030599119731769977671675144633704353019902970381905382734872781048753622148223417596484341030177371808401883340091284020413788091872119263343220

Aantal huizen:
546104026010997817135909235543523993338818110058620250038864829462309933802599813173528376471989435351831421670342590181432183003657102945528202633813186899997265320230566748523043806061900092904167844924681976106792828362374575909883342446081993180458522015764450080606571364750491101249339545575873351966660434620706826493985597137382380274027212822100977417423805597524494860570444932336349933452977581433195797167784100156949824430846066978103078935503302868068553503696531579

5712265973119217046122958093465011917643681419953422401494658123997520174636267 9
6359266791561305415220969862028045452611701759965374188236091975675430487931605 6
8231928697593854159895661978467920802152423585330731525067040134473640896249704 5
3130630605575665448159803675029600066432746032570728578984044590557462448183123 4
7982199265702909751834609300214661812256402230455184632391085410781754857356228 5
4863010366156243019927858288698209534115245263429179634739713942242559106200478 8
5403845636075987294323717426885931278085521523840979080605093593027269398926808 7
1141850341813685300166219712011768667354736996347828363432925369019202656119795 6
2706965185046194980851593814493341556485175182992561708375301935129578945455881 5
3513999526963803617896284388061121578778208673345217408710385196773084244238261 0
5785135995753770315090994376835155260819606663197072348852622171737860555319249 3
8508496125552528969369573646301494753303509554428568723907556154973534080330694 6 7
9162138891609163387257558949842213364182003895163585278243792848065294371286906 4
1702992204425344700957108815389616880426622302286028577223114156942499411376856 3
4641415734582337118767178972024138806683651998792967815600765318245140300582479 6
1249850121297452576056333603302775247426040510259413130718122629395064412246784 2
5169437296028297956567302874463923571605942011543955448536087993611371452077026 2
2005651101791395770168942570255805456498660986254816829111529589119776445277081 4
0407941967928983095760472795763251789778262230404296421065936964017944914731311 0
9518807416371613384096171839018819590456803104074932179510619320257151122797582 5
4207556549888186300198410670985948344459488184178419342354731717868207529881922 0
4160187991095497657207252563870427119102366176264776761193907427870721580144011 2
3939466282217186364975914059355397768046230308522886364155155833206383182869574 2
5041032492796127838118377746114374362354504047189235104445104357225303565044108 7
5838026702728753600672139599815951656502297996272257633094786527713109293540544 3
4242283541736892413341474940559540159905529132790233959972973607917635006472314 5
1191957559394281673876100634808126099652903283471390408200613786696511314979262 7
6017092599588631242845194757446456009504843892165874699381181256256165484964478 5
9084106295375251938191772385240143816033917973369039926421752829175071331467849 5
7164250148071679608158747346267346944955524003902008856088733511124284998478580 0
4353235501690518605557164780426399479262537846366555513708928284131601597547855 5
5746904661196700804818123118209980232963496310454038881250496593421000513659424 6
1351551561061907231186501785038835569401299697984525895120527572164562110077222 4
7204256276450336201986278835847335777758461035031696625304037442123551347093057 4
2302163338916109839582660585358476273530919741373052490068702378883372555985679 0
4472550925348883069355993762615964658430197415191602199635468448699279332430431 8
1976634238741347420520466437844936813428156634285687477872884857481183657292805 8
9046653737736590085997042954912860468474289109797065416045535423276222133742293 8
5771321578916066199276390281818199239234758420278366687334202626705853535897490 4
2282514101744348946963867664423121245178461281571679913539469242160022492265868 1
6964424248006977636235142409222663112421404235534119764241960641384673838829575 4
4685021942493480762879657301267557105977397603204981112516619744491060073681748 4
8962485958124521104725845692869519605929975923059056094049717057696019742035975 1
4039706344472545836862327227357125532894779251307159428998506394676890241092866 4
2083743915019177326311855314416733027102865827034932112537151560423767375343986 8
3760022016664253797619034301751417503935176506074020753262858355275663890607824 1
4931103351984510838877973009837438851539372070042666465448198878665147685721026 1
6704896846637651723191145982164006919228273733252079511042944831029858135451268 4
1615683592985626734822753435651060470380504633383838982897690709778422772974323 1
3554613612580393097032700290581511161801892570414977269066084388521285889832707 7 1
1583345096939500539856765489197763124660374863599197741048649739598597771083892 6
9936766803724545760232271229897316926726194122252034234160709507653525625853494 5
2434305692019465194275055992728214172624626408842410833528585149759882646715276 3
8331322977507089525035721091623634360876472542433132686425451213574805986354910 1
7389788676057091327324571531628907312347034868342658110084248054702416663528922 9
2047531684476028243182495191444190733825752130130519096919642840665876388167071 0
2956788510970575292665543623956033274731234051361046184689703760738040162864657 7
5984640569920334608205339089391398954850068955312516056871911556749335821550035 6
2811193112270488525480613619899131055886102233639547151524720055936070721982357 6
9188110341262142784960908739281101163166683494924224719522711244322071609164531 1
4142533318684931015810529968563649328036831315434132737063887769349054491019013 8
9845464120560520866326843667562928606812705334670479037258525345912218315042486 6

09230794383623721194856434560276795572686196696471325059309174065228690490802094
67505470865369116280377947297939670455011080685740288483025656072885407289351327
18303806810472636676744149184670358739093737668245556497526340675884191064370215
40366737425992803059694392032775164689587543334531767042111784065708127168613499
70308956373405124157281279167173854257012861627951552228163222305439894810421525
08029659264004165061463068711338249345470549905746112206183145408403040351773260
41374949558525520732963258121468554829622361234033413347818538394749843418707265
64188449507637527456611146555407374233818403727088864522961985358107846415124280
62876459813661087731888833568941051475338696978550991236083347863001256077509225
34042526983676854907425684408303633789009671262635109696800