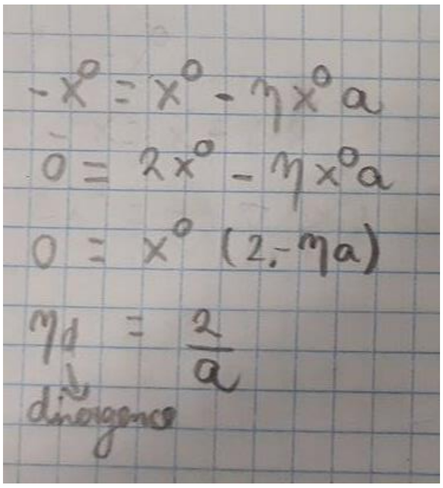
## 1.1)

| $\eta$ | a=0.5 | a=1 | a=2 | a=5 |
|---|---|---|---|---|
| .001 | >1000 | >1000 | >1000 | 990 |
| .01 | 760 | 414 | 223 | 97 |
| .03 | 252 | 137 | 73 | 31 |
| .1 | 65 | 40 | 21 | 8 |
| .3 | 24 | 12 | 5 | 8 |
| 1 | 6 | 1 | DT | Div |
| 3 | 6 | div | Div | div |
| Fastest | 2 | 1 | 0.5 | 0.25 |
| Divergence threshold | 4 | 2 | 1 | 0.5 |

## 1.2)

Como se pode observar, quanto mais pequeno fôr o $\eta$, mais interações o algoritmo fará, sendo que é preciso ter cuidado para não ter um $\eta$ pequeno demais. Por outro lado, um $\eta$ demasiado grande leva a que o algoritmo não converja. Além disso é importante referir, que o $\eta$ deve ser escolhido de acordo com o parâmetro a. É também imporante que o valor de $\eta$ seja inferior a $\frac{2}{a}$ que corresponde ao divergence threshold ( neste caso $-x^{(t)} = x^{(t+1)}$):



## 1.3)

Tal como foi visto na aula de problemas, o valor de $\eta$ que faz o algoritmo convergir mais rapidamente é $\eta = \frac{1}{a}$ ,pois:

$$\begin{cases} x^{(t+1)} = x^{(t)} + \Delta x^{(t+1)} \\ \Delta x^{(t+1)} = -\eta \nabla f(x^{t}) \end{cases} \qquad \nabla f(x) = ax$$

$$f(x^1) = 0 \Rightarrow x^1 = 0$$

$$\begin{cases} 0 = x^{(0)} + \Delta x^1 \\ \Delta x^1 = -\eta a x^{(0)} \end{cases} \quad \Big\} \ x^{(0)} = \eta a x^{(0)} \quad \Big\} \ \eta = \frac{1}{a}$$

Não. Basta o $x^{(0)}$ corresponder a um ponto estácionário (máximo, mínimo ou ponto de sela) e o algoritmo não vai ficar preso (não irá avançar). Isto deve-se a que nestes pontos, o declive (gradiente em $\mathbb{R}^1$) corresponde a 0 e por isso:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \eta \underbrace{\nabla f(x^{(t)})}_{0}$$

$$x^{(t+1)} = x^{(t)}$$

## 2.1)

| $\eta$ | a=2 | a=20 |
|---|---|---|
| .01 | 448 | 563 |
| .03 | 143 | 186 |
| .1 | 43 | DT |
| .3 | 13 | Div |
| 1 | DT | Div |
| 3 | Div | Div |
| Fastest | 0.6 | 0.095 |
| Divergence threshold | 1 | 0.1 |

## 2.2)

Tal como acontece em $\mathbb{R}^1$ com a parábola algo semelhante ocorre em $\mathbb{R}^2$para o paraboloíde.

Como se pode observar, com $\eta$ que não seja exagerado pequeno que hajam muitas iterações, ou grande demais que o algoritmo divirja, consegue-se chegar ao mínimo da função dada, sendo que este $\eta$ deverá ser maior para $\alpha$ maior. Outra coisa importante frisar, é que devido a no algoritmo de *gradient descent*, a cada iteração, o próximo x será sempre um ponto localizado num plano que tem a mesma direção que o gradiente, para o a=20, demorará mais iterações a convergir pois o gradiente não está tão direcionado, para o mínimo da função.

## 2.3)

Não, porque ao aumentar $\alpha$ em $\mathbb{R}^1$ não se está a dificultar a tarefa de convergir (tendo em conta que se escolheu um bom valor de $\eta$ ) enquanto que neste caso, ao aumentar a largura do vale ($\alpha$) tal tarefa é dificultada pois o algoritmo aproxima-se cada vez mais lentamente do centro devido à direção do gradiente. Assim quanto maior for $\alpha$ maior será o número mínimo de iterações para funções $\mathbb{R}^2$. Apenas é possível chegar ao mínimo da função numa iteração, quando a = 1 pois o gradiente irá apontar para o ponto mínimo da função.

## 3.1)

| $\eta$ | $\alpha = 0$ | $\alpha = .5$ | $\alpha = .7$ | $\alpha = .9$ | $\alpha = .95$ |
|---|---|---|---|---|---|
| .003 | >1000 | >1000 | >1000 | >1000 | >1000 |
| .01 | 563 | 558 | 552 | 516 | 448 |
| .03 | 186 | 181 | 178 | 115 | 172 |
| .1 | DT | 48 | 35 | 91 | 122 |
| .3 | Div | DT | 29 | 83 | 92 |
| 1 | Div | Div | div | 92 | 146 |
| 3 | Div | div | Div | div | 147 |
| 10 | div | div | div | div | Div |
| Divergence threshold | .1 | .3 | .567 | 1.9 | 3.9 |

## 3.2)

Como podemos observar quanto maior o $\alpha$ menor será a influência do $\eta$, isto é claramente observado para $\alpha = 0.95$. Além disso, podemos observar que ao aumentar o $\alpha$ para $\eta$ suficientemente pequeno, permite o algoritmo convergir mais facilmente. Também se nota que $\alpha$ tem relativamente pouca influência no número de iterações.

## 4.1)

| N. of tests | α | $\eta \rightarrow$ | -20% | -10% | Best ($\eta = 0.015$) | +10% | +20% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\approx 12$ | 0.23 | N. of iterations $\rightarrow$ | 667 | 499 | 25 | DIv | Div |

## 4.2)

É difícil de encontrar valores que resultem em poucas iterações porque os parâmetros são bastante sensíveis, como se pôde observar para uma variação de 10% causa que o algoritmo divirja ou que o número de iterações aumente substancialmente. Em relação ao $\alpha$ este não deve ser muito grande, para que o algoritmo não tenha muita inércia.

## 4.3)

| $\eta$ | $\alpha = 0$ | $\alpha = .5$ | $\alpha = .7$ | $\alpha = .9$ | $\alpha = .95$ | $\alpha = .99$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| .001 | 596 | 298 | 236 | 140 | 198 | 167 |
| .01 | 565 | 287 | 221 | 190 | 200 | 165 |
| .1 | 769 | 389 | 214 | 183 | 172 | 152 |
| 1 | 729 | 396 | 233 | 160 | 137 | 173 |
| 10 | 672 | 383 | 239 | 173 | 124 | 133 |

## 4.4)

| | N. of tests | $\eta$ | $\alpha$ | N. of iterations |
|---|---|---|---|---|
| Without adaptative steps | 20 | -10% | 0.3 | >1000 |
| | | Best ($\eta = 0.0034$) | | 127 |
| | | +10% | | Div |
| With adaptive step sizes | 9 | -10% | 0.99 | 262 |
| | | Best ($\eta = .001$) | | 209 |
| | | +10% | | 363 |

## 4.5)

Podemos ver que o valor do eta não tem grande influência no caso do passo adaptativo pois neste caso as variações de $\pm 10\%$ não irão afetar o resultado de forma drástica apenas um ligeiro aumento no número de iterações. Neste caso o valor inicial do step não terá grande influencia pois este vai sofrer alterações ao longo do correr do algoritmo. Com passo fixo podemos ver que uma pequena variação de eta vai gerar resultados não satisfatórios.

Em relação à convergência com e sem o *momentum term* pode-se compreender que a existência deste termo inercial facilita a convergência do método, sendo que quando se inclui este termo alguns dos etas fazem com que o algoritmo passe a convergir ao invés de divergirem.