Representación de la posición

La localización de un cuerpo rígido en el espacio precisa de especificar tanto su posición como su orientación siendo establecidas con relación a un sistema de referencia definido.

En un plano bidimensional la posición precisa de 2 grados de libertad y la posición queda definida por 2 componentes independientes.

Sistema cartesiano de referencia

Se define mediante ejes perpendiculares entre si con un origen definido, denominados sistemas cartesianos al trabajar en el plano el sistema de referencia OXY queda definido por 2 vectores coordenados OX y OY. Si se trabaja en el espacio el sistema cartesiano OXYZ se compone por una terna ortonormal de vectores OX, OY, OZ.

Coordenadas cartesianas

Si se trabaja en el plano un punto será expresado por las componentes x, y asociando un vector P (x, y) que va desde el origen al punto, las componentes por las que se define el vector se denominan coordenadas cartesianas. En 3 dimensiones el vector se define con respecto al sistema OXYZ y el vector esta definido por las componentes x, y, z.

Coordenadas polares y cilíndricas

Para un plano la localización de un punto o vector respecto a un eje cartesiano OXY utiliza coordenadas polares P(r, θ), r=distancia desde el origen hasta el extremo del vector, θ= ángulo del vector. En 3 dimensiones el vector se expresa con respecto al sistema de referencia OXYZ mediante coordenadas cilíndricas P(r, θ, z), z=proyección sobre el eje OZ.

Coordenadas esféricas

Es posible usarlas en un espacio de 3 dimensiones, el vector tendrá como coordenada esférica (r, θ, ϕ), r=distancia del origen al extremo del vector, θ=angulo del vector sobre el plano OXY con el eje OX, ϕ=ángulo del vector con el eje OZ.

Representación de la orientación

Una orientación en el espacio tridimensional se define por 3 grados de libertad o 3 componentes linealmente independientes.

Matrices de rotación

Son el método más extendido para la descripción de orientación. En un plano con 2 sistemas de referencia OXY y OUV, siendo OXY el sistema fijo y OUV el sistema móvil. Los vectores unitarios del sistema fijo son i_x, j_y y los del sistema móvil son i_u, j_v el vector se representa como $P=p_u i_u+p_v i_v$.

Al verificar las igualdades se trata de productos escalares

$P_x=i_x P$ $\qquad$ $P_y=i_y P$

Sustituyendo se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \end{bmatrix}$$

Donde

$$R \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v \\ j_y i_u & j_y j_v \end{bmatrix}$$

Es la llamada matriz de rotación que define la orientación del sistema móvil con respecto al sistema móvil, también llamada matriz de cosenos directores.

La orientación viene definida por un parámetro independiente considerando que el sistema móvil gira en un ángulo α sobre OXY la matriz R será de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

En un espacio tridimensional los sistemas OXYZ y OUVW. Los vectores de OXYZ serán i_x, j_y, k_z y los de OUVW serán i_u, j_v, k_w. El vector se referirá de la siguiente manera:

$$P_{uvw} = [P_u, P_v, P_w] = P_u \cdot i_u + P_v \cdot j_v + P_w \cdot k_w$$

$$P_{xyz} = \left[P_x, P_y, P_z\right] = P_x \cdot i_x + P_y \cdot j_y + P_z \cdot k_z$$

Equivalencia

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix}$$

Donde

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x kw \\ j_y i_u & j_y i_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z i_u \end{bmatrix}$$

Es la matriz de rotación

Matrices básicas de rotación de un sistema espacial de 3 dimensiones

$$Rotx(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$Roty(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & sen\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rotz(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler

Todo sistema solidario cuya orientación se requiere describir mediante 3 ángulos: ϕ, θ, ψ que representan los valores de los giros a realizar sobre 3 ejes ortogonales entre sí.

Ángulos de Euler WUW

Se asocia con los movimientos básicos de un giróscopo partiendo de los sistemas OXYZ y OUVW se puede colocar en cualquier orientación el sistema OUVW.

1-Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ respecto OZ=OU'V'W'.

2-Girar OU'V'W' un ángulo θ respecto a OU'=OU''V''W''

3-Girar OU''V''W'' un ángulo ψ respecto OW´´=OU´´´V´´´W´´´

Ángulos de Euler WVW

1-Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ respecto OZ=OU'V'W'.

2-Girar OU'V'W' un ángulo θ respecto a OV'=OU''V''W''

3-Girar OU''V''W'' un ángulo ψ respecto OW´´=OU´´´V´´´W´´´

Ángulos de Euler XYZ

1-Girar el sistema OUVW un ángulo ϕ respecto OX. Denominado Yaw o guiñado.

2-Girar el sistema OUVW un ángulo θ respecto OY. Denominado Pitch o cabeceo.

3-Girar el sistema OUVW un ángulo ψ respecto OZ. Denominado Roll o alabec.

Par de rotación

El sistema OUVM respecto al sistema de referencia OXYZ puede realizarse mediante el vector K(K_x, K_y, K_z)y un ángulo de giro θ girándolo sobre el eje K. Al par (K, θ) se le denomina par de rotación.

Para la definición de orientación con este método se definen 4 parámetros distintos: K_x, K_y, K_z y θ representando como Rot (k, θ). La aplicación que rota sobre un vector P un ángulo θ alrededor del vector unitario K

Rot (k, θ)P=p cos θ+(k x p) sen θ + k (k p) (1-cos θ)

Cuaternios

Definidos por Hamilton. Un cuaternio Q esta constituido por 4 componentes (q_0, q_1, q_2, q_3) que representan las coordenadas del cuaternio base.

$$Q = [q_0, q_1, q_2, q_3] = |s, v|$$

S=parte escalar y v=parte vectorial.

Marices de transformación homogénea

Las matrices de transformación homogénea permiten la localización facilitando su uso mediante el algebra matricial.

Coordenadas y matrices homogéneas

El elemento de un espacio n-dimensional es representado en coordenadas homogéneas por n+1 dimensiones el vector P (x, y, z) será representado por P (w_x, w_y, w_z, w) (w=valor arbitrario). Los vectores nulos se representan i $[0, 0, 0, n]^T$ n= no nulo. Los vectores de la forma $[a, b, c, 0]^T$ representan direcciones.

Matriz de transformación homogénea T es de 4x4 dimensiones representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & P_{3x1} \\ F_{1x3} & W_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rotacion & Traslacion \\ perspecticva & escalado \end{bmatrix}$$

Aplicación de matrices homogéneas

La transformación de perspectiva nula y el escalado global unitario la matriz homogénea T resulta:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & P_{3x1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rotacion & Traslacion \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede ser utilizada para representar la orientación y posición de un sistema O'UVW resultado de rotar y trasladar.

También se puede utilizar para expresar la rotación y traslación de un vector respecto de un sistema de referencia fijo.

1-Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado

2-Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema.

3-Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo.

Traslación

El sistema O'UVW se encuentra trasladado un vector $P=p_xi+p_yj+p_zk$ respecto al sistema OXYZ. La matriz T:

$$T(p) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Matriz básica de traslación

Un vector cualquiera representado en el sistema tendrá componentes del vector con respecto al sistema OXYZ.

$$\begin{matrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{matrix}$$

El vector desplazado según T tendrá:

$$\begin{matrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{matrix}$$

Rotación

Suponiendo que el sistema O'UVW se encuentra rotado respecto a OXYZ la submatriz de rotación define la rotación definiendo 3 matrices homogéneas básicas de rotación alrededor de los ejes OX, OY y OZ

$$Rotx(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Roty(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & sen\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rotz(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -sen\psi & 0 & 0 \\ sen\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación junto con rotación

En esta representación se utilizan simultáneamente la matriz de rotación y el vector de traslación. La traslación y la rotación son transformaciones realizadas en relación con un sistema de referencia.

Se debe tener en cuenta si primero se a realizado la rotación y después la traslación o viceversa ya que según el caso se presentan matrices homogéneas distintas.

Rotación seguida de la traslación

Rotación ángulo ϕ sobre el eje OX seguida traslación de vector P_{xyz}

$$T(p)Rot(x)(\phi) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & \cos\phi & -sen\phi & P_y \\ 0 & sen\phi & \cos\phi & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación ángulo θ sobre eje OY traslación vector P_{xyz}

$$T(p)Rotx(\theta) \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ -sen\theta & 0 & \cos\phi & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación ángulo ψ, eje OZ, traslación vector P_{xyz}

$$T(p)Rotx(\psi)\begin{bmatrix} \cos\psi & -sen\psi & 0 & P_x \\ sen\psi & \cos\psi & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación seguida de rotación

Traslación vector P_{xyz} rotación ángulo ϕ eje OX

$$\mathbf{Rotx(\phi)T(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & p_y\cos\phi - p_z\operatorname{sen}\phi \\ 0 & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & p_y\operatorname{sen}\phi + p_z\cos\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación vector P_{xyz} rotación ángulo θ eje OY

$$\mathbf{Roty(\theta)T(p)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & p_x\cos\theta + p_z\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & p_z\cos\theta - p_x\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación vector P_{xyz} rotación ángulo ψ eje OZ

$$\mathbf{Rotz}(\psi)T(p) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 & p_x\cos\psi - p_y\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 & p_x\operatorname{sen}\psi + p_y\cos\psi \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspectiva y escalado

Utiliza una matriz tipo T para el escalado

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rescaldado global

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Para las aplicaciones en robótica de las matrices homogéneas, se supone que no existe la transformación de perspectiva y el escalado es unitario.

Significado geométrico de las matrices homogéneas.

Sirve para transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema a su expresión en las coordenadas del sistema de referencia, se puede utilizar para rotar y grar un vector referido a un sistema fijo y para expresar la orientación y posición de un sistema de referencia con respecto a otro fijo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

n,o,a= terna ortonormal que representan la orientación y P es el vector que representa la posición.

Composición de matrices homogéneas

La utilidad de las matrices homogéneas cobra más importancia cuando se componen para describir diversos giros y traslaciones consecutivos sobre un sistema de referencia determinado.

De forma general al componer diversas transformaciones se debe tener en cuenta los siguientes criterios:

1-Si el sistema fijo y el transformado son coincidentes, la matriz será 4x4 identidad I_4.

2-Si el sistema se obtiene por rotaciones y traslaciones con respecto al sistema fijo, la matriz de cada transformación se debe multiplicar sobre las matrices de multiplicaciones previas.

3-El sistema se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas respecto al sistema móvil, la matriz que representa cada transformación se deberá postmultiplicar.

Aplicación de los cuartenios

Algebra de cuartenios

Un cuarternio esta formado por 4 componentes (q_0, q_1, q_2, q_3) representan las coordenadas (e, i, j, k).

Ley de composición interna de los cuaternios

∘	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	–e	k	–j
j	j	–k	–e	i
k	k	j	–i	–e

Cuartenio conjugado

A todo Cuartenio Q se le asocia un conjugado Q* mantiene el signo de la parte escalar y se invierte el de la vectorial

$$Q^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3] = (s, -\mathbf{v})$$

Operaciones algebraicas

Producto de 2 cuaternios

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) \circ (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1)$$

Suma de 2 cuaternios

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) + (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

Producto escalar

$$Q_3 = \mathrm{a}Q_2 = \mathrm{a}(s_2, \mathbf{v}_2) = (\mathrm{a}s_2, \mathrm{a}\mathbf{v}_2)$$

Norma e inverso

Se denomina norma de Qy se representa por ||Q||

El inverso inverso puede hallarse mediante $Q^{-1} = \dfrac{Q^*}{\|Q\|}$

Relación y comparación entre los distintos métodos de localización espacial

Comparación de métodos de localización espacial

Matrices de comparación homogénea

Sus ventajas residen en la capacidad de representación conjunta de posición y orientación. Su principal inconveniente es su alto nivel de redundancia.

Ángulos Euler

Son capaces de representar orientación y permiten una notación compacta, no permiten la composición de rotaciones ni la aplicación sobre un vector de rotación.

Par de rotación

Solo sirve para representación de orientaciones, usa 4 parámetros parala definición de orientación de un sistema respecto a otro.

Cuartenios

Solo es capaz de representar la orientación relativa de un sistema respecto a otro mediante el uso de 4 componentes.

Relación entre los distintos métodos de localización espacial

Ángulos Euler: Matriz de transformación homogénea

En ocasiones en los ángulos Euler son capaces de realizar una representación de la orientación. Por ello al obtener la matriz no homogénea equivalente a un conjunto de ángulos de Euler.

Relación directa

La obtención de la matriz homogénea a cada conjunto de ángulos de Euler basta con componer las matrices que representan las rotaciones que definen los propios ángulos:

- Sistema WUW
- Sistema WVW
- Sistema XYZ

Par de rotación: matriz de transformación homogénea

Mediante un eje y un ángulo de rotación es posible representar orientación

Par de rotación: cuartenios.

Un Cuartenio Q se puede expresar como:

$$Q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{k}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \right)$$

Cuartenios: matriz de transformación homogénea

El paso de cuaternios a matriz y viceversa se deduce fácilmente utilizando como representación auxiliar intermedia el eje y el ángulo de rotación.

TEMA Navarro Cervantes Jose

FECHA 14/1/2019

Matrices de transformación homogenea

Las matrices de transformación homogenea permiten la localización facilitando su uso mediante el algebra matricial

Coordenadas y matrices homogeneas

Un elemento de un espacio n-dimensional es representado en coordenadas homogeneas por n+1 dimensiones. El vector p(x,y,z) son representado por p(wx, wy, wz, w) (w=valor arbitrario).
Los vectores nulo se representan: $[0,0,0,n]^T$ n= no nulo. Los vectores de la forma $[a,b,c,0]^T$ representan direcciones.
Matriz de transformación homogenea T es de 4x4 dimensiones, representa la transformación de un vector de coordenadas homogeneas.

$$T=\begin{bmatrix} R_{3\times3} & P_{3\times1} \\ f_{1\times3} & w_{1\times1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

Aplicación de matrices homogeneas

La transformación de perspectiva nula y el escalado global unitario la matriz homogenea T resulta:

$$T=\begin{bmatrix} R_{3\times3} & P_{3\times1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede ser utilizado para representar la orientación y posición de un sistema O'UVW resultante de rotar y trasladar.
También se puede utilizar para expresar la rotación y traslación de un vector respecto de un sistema de referencia fijo.
1-Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado
2-Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema
3-Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo.

Traslación

El sistema OUVW se encuentra trasladado un vector $P=P_x i+P_y j+P_z K$ respecto al sistema OXYZ la matriz T

$$T(P)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz básica de traslación

Un vector cualquiera representado en el sistema tendrá componentes del vector con respecto al sistema OXYZ

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_u+P_x \\ r_v+P_y \\ r_w+P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$