CINEMATICA INVERSA

Jose Navarro Cervantes
8°B T/M
Ing. Mecatrónica
Cinemática de robots

CINEMÁTICA INVERSA

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot $q = [q1, q2, ..., qn]T$ para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial (**p**, [**n**, **o**, **a**]).
Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados, de modo que un computador pueda, a partir del conocimiento de la cinemática del robot (con sus parámetros de Denavit-Hartenberg, por ejemplo) obtener la n-upla de valores articulares que posicionan y orientan su extremo.
El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia en sí no está siempre garantizada.

La mayor parte de los robots poseen cinemáticas relativamente simples que facilitan en cierta medida la resolución de su problema cinemático inverso. Por ejemplo, si se consideran sólo los tres primeros grados de libertad de muchos robots, éstos tienen una estructura planar, esto es, los tres primeros elementos quedan contenidos en un plano. Esta circunstancia facilita la resolución del problema. Asimismo, en muchos robots se da la circunstancia de que los tres grados de libertad últimos, dedicados fundamentalmente a orientar el extremo del robot, corresponden a giros sobre ejes que se cortan en un punto.

Los métodos geométricos permiten, normalmente, obtener los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo). Para ello utilizan relaciones trigonométricas y geométricas sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la resolución de triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot.
Los robots con capacidad de posicionar y orientar su extremo en el espacio, esto es, robots con 6 GDL, el método de desacoplamiento cinemático permite, para determinados tipos de robots, resolver los primeros grados de libertad, dedicados al posicionamiento, de manera independiente a la resolución de los últimos grados de libertad, dedicados a la orientación. Cada uno de estos dos problemas más simples podrá ser tratado y resuelto por cualquiera de los procedimientos anteriores.

Resolución del problema cinemático inverso por métodos geométricos

Este procedimiento es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren sólo los primeros grados de libertad, dedicados a posicionar el extremo.
El procedimiento en sí se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.
Para mostrar el procedimiento a seguir se va a aplicar el método a la resolución del problema cinemático inverso de un robot con 3 GDL de rotación (estructura típica articular
El valor de $q1$ se obtiene inmediatamente como

$$q_1 = arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea

En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo. Es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquéllas las relaciones inversas.

El primer paso a dar para resolver el problema cinemático inverso es obtener la Expresión correspondiente a este robot. Es decir, obtener la matriz **T** que relaciona el sistema de referencia $\{S0\}$ asociado a la base con el sistema de referencia $\{S3\}$ asociado a su extremo.

matrices **A** y la matriz **T**.

$$^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -q_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -q_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4.37]$$

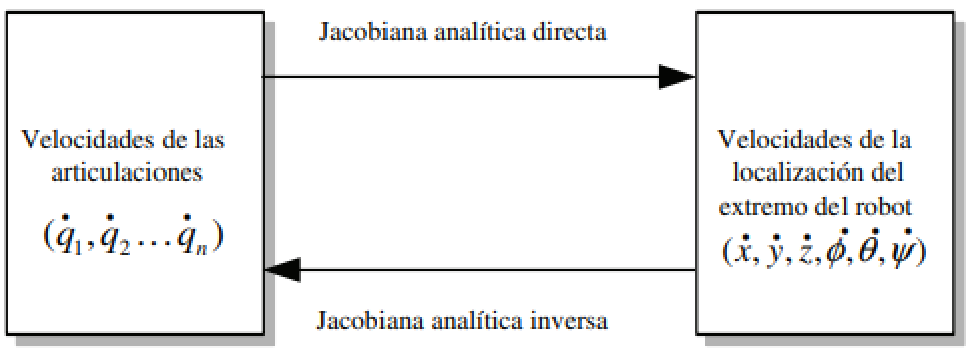
Obtenida la expresión de **T** en función de las coordenadas articulares ($q1$, $q2$, $q3$), y supuesta una localización de destino para el extremo del robot definida por los vectores **n**, **o**, **a** y **p** se podría intentar manipular directamente las 12 ecuaciones resultantes de **T** a fin de despejar $q1$, $q2$, y $q3$ en función de **n**, **o**, **a** y **p**.

MODELO DIFERENCIAL. MATRIZ JACOBIANA

El modelo diferencial queda concretado en la denominada matriz Jacobiana. En general la matriz Jacobiana de un robot, relaciona el vector de velocidades articulares (q . 1 , q . 2 , q . n) con otro vector de velocidades expresado en un espacio distinto. Existen diferentes posibilidades a la hora de seleccionar este espacio. Una primera elección es la de considerar la relación con las velocidades de la localización del extremo del robot, siendo ésta la posición y orientación expresada en base a sus coordenadas cartesianas y a sus ángulos de Euler (x . , y. , z. , φ . , θ . , ψ .) (otras representaciones de la orientación pueden ser consideradas). Esta relación viene dada por la denominada Jacobiana analítica del manipulador. Una segunda elección es relacionar las velocidades articulares, con los vectores de velocidad linear y angular (vx , vy , vz , wx , wy , wz) con que se mueve el extremo del robot, expresados en un sistema de referencia determinado, por ejemplo el del origen. La relación entre ambas velocidades (articulares y linear-angular del extremo) se obtiene a través de la denominada matriz Jacobiana geométrica o simplemente Jacobiana del manipulador. En ambos casos, la matriz Jacobiana directa permite conocer una expresión de las velocidades del extremo del robot a partir de los valores de las velocidades de cada articulación. Por su parte, la matriz Jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades articulares necesarias para obtener un vector concreto de velocidades del extremo.

JACOBIANA ANALÍTICA

Supóngase conocida la posición (x, y, z) del extremo del robot así como su orientación, definida por cualquiera de los procedimientos establecidos en el Capítulo 3, por ejemplo los ángulos de Euler WVW (φ, θ, ψ). La Jacobiana analítica relaciona las velocidades articulares (q . 1 , q . 2 , L q . n) con las velocidades de localización (posición y orientación) del extremo del robot (x . , y. , z. , φ . , θ . , ψ .)

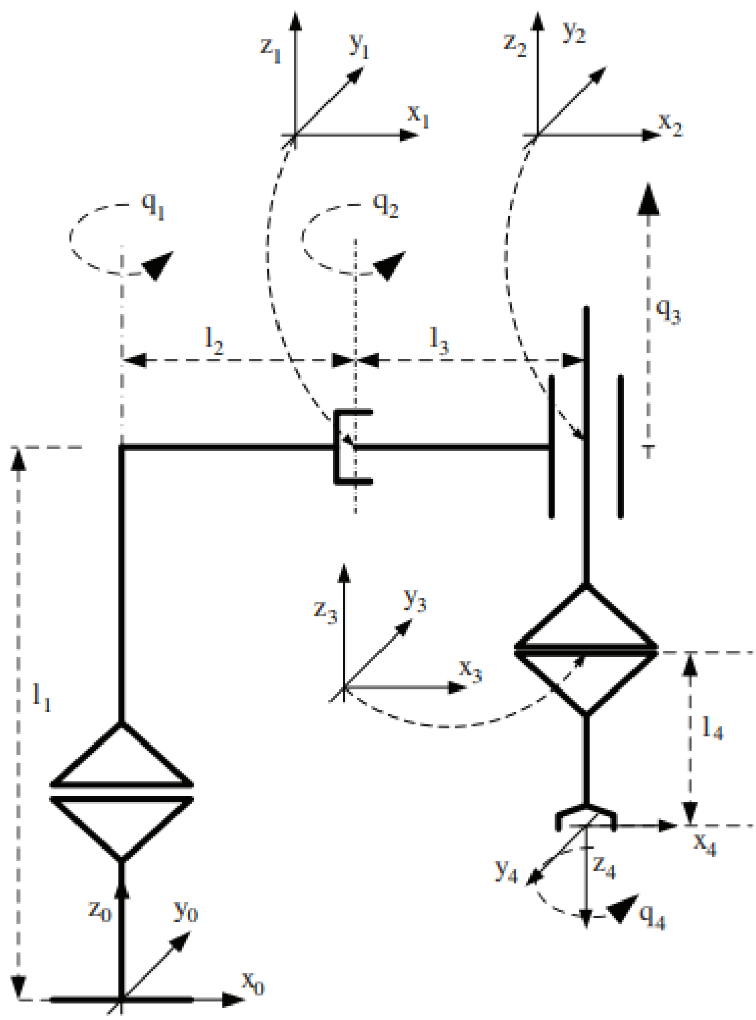


El método más directo para obtener la relación entre velocidades articulares y del extremo del robot consiste en diferenciar las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo. Así, supónganse conocidas las ecuaciones que resuelven el problema cinemático directo de un robot de n GDL:

$$x = f_x(q_1, \ldots, q_n) \qquad y = f_y(q_1, \ldots, q_n) \qquad z = f_z(q_1, \ldots, q_n)$$

$$\phi = f_\phi(q_1, \ldots, q_n) \qquad \theta = f_\theta(q_1, \ldots, q_n) \qquad \psi = f_\psi(q_1, \ldots, q_n)$$

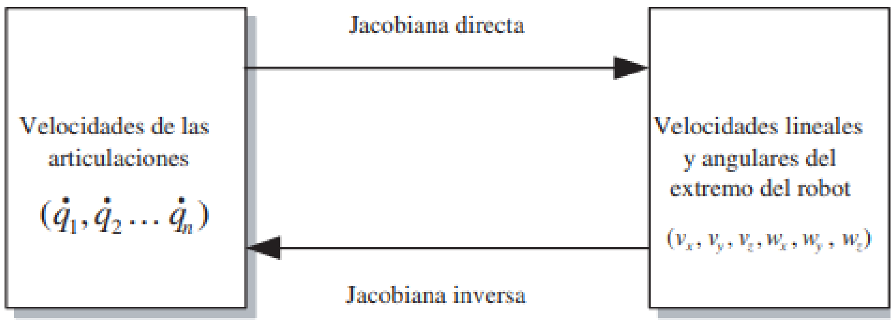
EJEMPLO: Se va a obtener la matriz Jacobiana analítica del robot SCARA de la Figura 4.8, cuyo esquema con la correspondiente asignación de sistemas de coordenadas según DH se muestra en la Figura.



JACOBIANA GEOMÉTRICA

La Jacobiana analítica presentada en el epígrafe anterior relaciona las velocidades de las articulaciones con la velocidad de variación de la posición y orientación del extremo del robot. Otra posible relación de interés es la que se establece entre las velocidades articulares y la velocidad lineal (v) y angular (w) del extremo del robot expresadas habitualmente en el sistema de referencia de la base del robot {S0 }.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$



Para diferenciarla de la relación anterior, se denominará a ésta Jacobiana geométrica o simplemente Jacobiana. La deducción de esta matriz Jacobiana es menos directa que la Jacobiana analítica, precisando su obtención algunas consideraciones. Se va a presentar aquí el modo en que ésta puede ser obtenida de manera directa a partir de la matriz de transformación homogénea.

OBTENCIÓN NUMÉRICA DE LA JACOBIANA GEOMÉTRICA

Existen diferentes procedimientos que permiten la obtención numérica de la Jacobiana a partir de la información contenida en las matrices i–1Ai que definen la modelo cinemática. Debe considerarse que puesto que las matrices i–1Ai tienen, para un robot determinado, una expresión genérica función de qi (tomando i–1Ai un valor numérico concreto para un valor numérico de qi) estos procedimientos pueden ser aplicados tanto de manera analítica, para obtener la expresión general de la Jacobiana, como numérica, para la obtención del valor instantáneo de la Jacobiana en una posición concreta del robot. El siguiente procedimiento de obtención de la Jacobina, está el basado en la propagación de las velocidades. Este método permite obtener las columnas de la matriz Jacobiana geométrica que relaciona las velocidades articulares con las velocidades lineales y angulares del extremo del robot, medidas con respecto del sistema de base, a partir de las matrices i–1Ai . Se denomina 0 zi al vector unitario orientado según el eje de la articulación i

1, definido en el sistema de coordenadas de la base del robot {S0 } (tal como se definió en las reglas DH3 y DH4 del Epígrafe 4.1.3. Algoritmo de Denavith-Hartenberg).
Ejemplo

$$
{}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & \mathbf{0} & \mathbf{l_2C_1} \\ S_1 & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{l_2S_1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}; \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_3C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_3S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{l_3C_{12} + l_2C_1} \\ S_{12} & C_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{l_3S_{12} + l_2S_1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{l_3C_{12} + l_2C_1} \\ S_{12} & C_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{l_3S_{12} + l_2S_1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{q_3 + l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{124} & S_{124} & \mathbf{0} & \mathbf{l_3C_{12} + l_2C_1} \\ S_{124} & -C_{124} & \mathbf{0} & \mathbf{l_3S_{12} + l_2S_1} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{-l_4 + q_3 + l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Donde se han destacado en negrilla los vectores z y p de interés en los cálculos siguientes. A partir de las matrices i–1Ai se obtiene:

$$^{0}\mathbf{z}_0 = {}^{0}\mathbf{A}_0(1:3,3) = (0,0,1)^T$$
$$^{0}\mathbf{z}_1 = {}^{0}\mathbf{A}_1(1:3,3) = (0,0,1)^T$$
$$^{0}\mathbf{z}_2 = {}^{0}\mathbf{A}_2(1:3,3) = (0,0,1)^T$$
$$^{0}\mathbf{z}_3 = {}^{0}\mathbf{A}_3(1:3,3) = (0,0,1)^T$$
$$^{0}\mathbf{z}_4 = {}^{0}\mathbf{A}_4(1:3,3) = (0,0,\text{-}1)^T$$

$$^{0}\mathbf{p}_4 = {}^{0}\mathbf{A}_4(1:3,4) - {}^{0}\mathbf{A}_0(1:3,4) = (l_3C_{12} + l_2C_1, l_3S_{12} + l_2S_1, -l_4 + q_3 + l_1)^T$$
$$^{1}\mathbf{p}_4 = {}^{0}\mathbf{A}_4(1:3,4) - {}^{0}\mathbf{A}_1(1:3,4) = (l_3C_{12}, l_3S_{12}, -l_4 + q_3)^T$$
$$^{2}\mathbf{p}_4 = {}^{0}\mathbf{A}_4(1:3,4) - {}^{0}\mathbf{A}_1(1:3,4) = (0,0,-l_4 + q_3)^T$$
$$^{3}\mathbf{p}_4 = {}^{0}\mathbf{A}_4(1:3,4) - {}^{0}\mathbf{A}_3(1:3,4) = (0,0,-l_4)^T$$

RELACIÓN ENTRE LA JACOBIANA ANALÍTICA Y LA JACOBIANA GEOMÉTRICA

la matriz **J***a* que relaciona las velocidades articulares con las velocidades de la localización del extremo del robot, y la matriz J que relaciona las velocidades articulares con el vector de velocidad lineal y angular del extremo.

La relación entre ambas viene dada por la expresión

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_a$$

Donde las matrices I y 0 son la matriz identidad y nula de dimensión (3 3) respectivamente, y la matriz Q, viene definida por la expresión:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix}$$

En el caso de que se pretenda obtener la Jacobiana analítica Ja a partir de la Jacobiana J se invertirá la matriz que las relaciona, resultando

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}$$

JACOBIANA INVERSA

Del mismo modo que se ha obtenido la relación directa, que permite obtener las velocidades del extremo a partir de las velocidades articulares, puede obtenerse la relación inversa que permite calcular las velocidades articulares partiendo de las del extremo. En la obtención de la relación inversa pueden emplearse diferentes procedimientos. En primer lugar, supuesta conocida la relación directa, dada por la matriz Jacobiana [4.63] o [4.64], se puede obtener la relación inversa invirtiendo simbólicamente la matriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

Como segunda alternativa puede plantearse la evaluación numérica de la matriz Jacobiana para una configuración (qi) concreta del robot, e invirtiendo numéricamente esta matriz encontrar la relación inversa válida para esa configuración. En este caso, hay que considerar, en primer lugar, que el valor numérico de la Jacobiana va cambiando a medida que el robot se mueve y, por tanto, la Jacobiana inversa ha de ser recalculada constantemente. Además, pueden existir n-uplas (q1 ,..., qn) para las cuales la matriz Jacobiana no sea invertible por ser su determinante, denominado Jacobiano, nulo. Estas configuraciones del robot en las que el Jacobiano se anula se denominan configuraciones singulares y serán tratadas más adelante. Una tercera dificultad que puede surgir con éste y otros procedimientos de cómputo de la matriz Jacobiana inversa, se deriva de la circunstancia de que la matriz Jacobiana no sea cuadrada. Esto ocurre cuando el número de grados de libertad del robot no coincide con la dimensión del espacio de la tarea (normalmente seis). En el caso de que el número de grados de libertad sea inferior, la matriz Jacobiana tendrá más filas que columnas. Esto quiere decir que el movimiento del robot está sometido a ciertas restricciones (por ejemplo, no se puede alcanzar cualquier orientación). En ocasiones esto ocurre en casos en los que esta restricción no tiene importancia, como en robots dedicados a tareas como soldadura por arco, en las que la orientación de la herramienta en cuanto a su giro en torno al vector a es indiferente, o en algunas tareas de coger y dejar en las que el vector a siempre toma la dirección vertical. En estos casos se puede eliminar algún grado de libertad del espacio de la tarea, quedando una nueva matriz Jacobiana cuadrada.