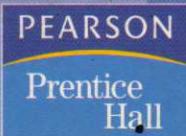


Robótica
Automática

Control de Movimiento de Robots Manipuladores

Rafael Kelly
Víctor Santibáñez



Control de Movimiento de Robots Manipuladores

CONSULTORES EDITORIALES

Prof. Dr. PEDRO ALBERTOS PÉREZ

Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Prof. Dr. JAVIER ARACIL SANTONJA

Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Prof. Dr. SEBASTIÁN DORMIDO BENCOMO

Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Control de Movimiento de Robots Manipuladores

RAFAEL KELLY

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada
México

VÍCTOR SANTIBÁÑEZ

Instituto Tecnológico de La Laguna
México



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

KELLY, R. y SANTIBÁÑEZ, V.

Control de Movimiento de Robots Manipuladores

PEARSON EDUCACIÓN, S. A., Madrid, 2003

ISBN: 84-205-3831-0

INGENIERÍA GENERAL 62

Formato 170 × 240

Páginas: 344

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código Penal*).

DERECHOS RESERVADOS

© 2003 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Ribera del Loira, 28
28042 MADRID

KELLY, R. y SANTIBÁÑEZ, V.

Control de Movimiento de Robots Manipuladores

ISBN: 84-205-3831-0

Depósito legal: M. 15.332-2003

PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Equipo editorial:

Editora: Isabel Capella

Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:

Director: José A. Clares

Técnico: Tini Cardoso

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación S.A.

Impreso por: Gráficas Rógar, S.A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

“A veces pienso que escribir no es más que recopilar y ordenar y que los libros se están siempre escribiendo, a veces solos, incluso antes de empezar materialmente a escribirlos y aun después de ponerles su punto final”.

Camilo José Cela (1960)

Contenido

Prefacio	xi
Prólogo	xiii
Parte I Introducción y preliminares	1
Introducción	3
I.1 Estadísticas	5
Referencias	5
1 Control de robots	9
1.1 Conceptos de control	10
1.1.1 Familiarización con el sistema físico a controlarse	11
1.1.2 Modelado dinámico	12
1.1.3 Especificaciones de control	15
1.1.4 Control de movimiento de robots manipuladores	16
Referencias	18
2 Preliminares matemáticos	21
2.1 Notaciones y definiciones	22
2.2 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	34
Referencias	52
Problemas	54
3 Modelo dinámico	59
3.1 Ecuaciones de movimiento de Lagrange	62
3.2 Modelo dinámico de robots	75
3.3 Modelo dinámico de robots con fricción	80
3.4 Modelo dinámico de robots con accionadores	81
3.5 Ecuaciones de movimiento de Hamilton	86

Referencias	88
Problemas	90
4 Propiedades	95
4.1 Linealidad en los parámetros dinámicos	95
4.2 Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$	98
4.3 Matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	100
4.4 Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$	105
4.5 Dinámica residual $\mathbf{h}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$	107
4.6 Conclusiones	113
Referencias	113
Problemas	115
Parte II Control de posición	119
Introducción	121
Referencias	124
5 Control P con retroalimentación de velocidad y Control PD	127
5.1 Robots sin término $\mathbf{g}(\mathbf{q})$	130
5.2 Robots con término $\mathbf{g}(\mathbf{q})$	131
5.2.1 Equilibrio único	133
5.2.2 Acotamiento del error de posición y de la velocidad	134
5.3 Conclusiones	139
Referencias	140
Problemas	140
6 Control PD con compensación de gravedad	143
6.1 Función de Lyapunov para estabilidad asintótica global	149
6.2 Conclusiones	153
Referencias	153
Problemas	154
7 Control PD con compensación precalculada de gravedad	157
7.1 Acotamiento de errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ y de la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$	160
7.2 Equilibrio único	166
7.3 Estabilidad asintótica global	167
7.4 Función de Lyapunov para estabilidad asintótica global	178
7.5 Conclusiones	183
Referencias	183
Problemas	184

8 Control PID	187
8.1 Función candidata de Lyapunov	193
8.2 Derivada temporal de la función candidata de Lyapunov	195
8.3 Estabilidad asintótica	197
8.4 Procedimiento de sintonía	199
8.5 Conclusiones	202
Referencias	203
Problemas	204
Parte III Control de movimiento	207
Introducción	209
Referencias	211
9 Control por precompensación y Control PD con precompensación	213
9.1 Control por precompensación	214
9.2 Control PD con precompensación	220
9.2.1 Equilibrio único	222
9.2.2 Estabilidad asintótica global	223
9.3 Conclusiones	232
Referencias	232
Problemas	234
10 Control PD+ y Control PD con compensación	237
10.1 Control PD+	237
10.1.1 Función de Lyapunov para estabilidad asintótica	242
10.2 Control PD con compensación	248
10.3 Conclusiones	252
Referencias	252
Problemas	253
11 Control Par-Calculado y Control Par-Calculado+	257
11.1 Control Par-Calculado	257
11.2 Control Par-Calculado+	263
11.3 Conclusiones	268
Referencias	269
Problemas	270
APÉNDICES	273

A Modelo de motores de corriente continua (CC)	275
A.1 Modelo del motor con fricción lineal	280
A.2 Modelo del motor con fricción no lineal	281
Referencias	282
B Robot de 2 grados de libertad	285
B.1 Modelo dinámico	286
B.2 Modelo cinemático directo	291
B.3 Modelo cinemático inverso	292
B.4 Movimiento deseado	294
Referencias	295
C Propiedades del modelo dinámico de robots	299
Referencias	306
D Condición suficiente para funciones definidas positivas	307
D.1 Aplicación a funciones definidas positivas	310
Índice	317

Prefacio

Es para mí un gran placer realizar la presentación de este libro publicado por Pearson Educación dentro de la serie “Robótica” de la colección de monografías sobre “Control Automático e Informática Industrial”, que el Comité Español de Automática (CEA) de la IFAC ha puesto en marcha con el grupo editorial Pearson. Desde hace más de quince años vengo participando dentro del programa CYTED en la Red Iberoamericana de Informática Industrial con uno de los autores de este texto, el Dr. Rafael Kelly, y esto me ha permitido conocer no solo su actividad investigadora sino también su gran preocupación y dedicación por los aspectos didácticos de su disciplina.

La publicación de este libro en la colección “Control Automático e Informática Industrial” tiene su génesis en el III Curso de Especialización en Automática organizado por CEA-IFAC en Santa Pola (Alicante) el pasado mes de junio, donde el Dr. Rafael Kelly impartió un curso sobre “Control de manipuladores robóticos”. Durante esos días le animé a que publicase en forma de libro el trabajo que prácticamente tenía finalizado con su colega, Víctor Santibáñez, porque entendía que sería muy interesante para la comunidad Iberoamericana dedicada a los temas de automática poder disponer de un texto de estas características.

El lector tiene entre sus manos un excelente libro sobre control de robots que mantiene en todo momento ese difícil equilibrio entre el rigor exigible a los planteamientos que se realizan y la claridad didáctica de su exposición. Aunque esto justifica ya, desde mi modesto punto de vista, su publicación, creo que debe de analizarse también por lo que aporta en relación a la amplia bibliografía existente de textos (la gran mayoría en lengua inglesa) que abordan esta problemática. Los méritos del libro de Kelly y Santibáñez, cuando se lleva a cabo este análisis comparativo, son los siguientes:

1. El libro ha sido escrito pensando en lectores potenciales interesados en control automático. La teoría de estabilidad de Lyapunov da un marco unificado a todas las demostraciones de estabilidad que se describen, paso a paso, a lo largo del texto. Muy particularmente se puede apreciar el papel central del celebrado teorema de LaSalle sobre estabilidad asintótica.
2. El libro estudia de manera muy detallada los controladores de robots más representativos en un solo texto. Ninguno de los libros que puedan servir de comparación

incluye todos los controladores que aquí se tratan ni lo hacen con tanto grado de detalle.

3. El libro está pensado desde su concepción para enseñar control de robots y desde esta perspectiva se han cuidado todos los aspectos didácticos de manera exquisita. Incorpora numerosos ejemplos y simulaciones para ilustrar diversos conceptos, y cada uno de los controladores estudiados. También cada capítulo incluye al final un conjunto de problemas para ser abordados por el lector.

Para su lectura, el texto requiere conocimientos de álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y fundamentos de control. La obra podría emplearse como libro de texto, tanto en carreras de Ingeniería como de Ciencias, y también en programas de posgrado sobre control automático. Específicamente podría utilizarse en cursos de: Robótica avanzada, Aplicaciones de control, Control de mecanismos y Control de manipuladores robóticos entre otros.

El Comité editorial de esta colección está convencido de que esta obra viene a llenar un hueco en los libros técnicos sobre control automático en lengua española, y que va a ser muy bien recibida por toda la comunidad interesada en esta importante temática.

Madrid, febrero de 2003
Prof. Sebastián Dormido

Prólogo

La era de la información impulsada por los avances en computación, telecomunicaciones y electrónica está siendo testigo del crecimiento explosivo experimentado por la robótica y tecnologías afines como la cibernetica y la mecatrónica.

Por este motivo, en los últimos años el concepto de *robot* ha pasado de ser una visión de ciencia ficción como dispositivo mecánico super-humano a ser una realidad como máquina autónoma sorprendentemente animada, con un gran potencial de aplicaciones en un sinfín de actividades cotidianas. Estas máquinas se integran de elementos mecánicos, electrónicos, de control automático, eléctricos y sistemas de cómputo. A esta clase de máquinas pertenecen los robots manipuladores industriales.

Los robots manipuladores actuales están constituidos físicamente de eslabones mecánicos interconectados por medio de articulaciones, formando un “brazo” y una “mano” para tomar objetos y herramientas, pudiendo realizar una amplia gama de operaciones físicas en el medio ambiente.

La robótica es un campo nuevo de la tecnología moderna. El buen entendimiento y el desarrollo de aplicaciones de robótica está condicionado al dominio de diversas áreas del conocimiento. Paulatinamente, la robótica ha venido ganando terreno como materia de enseñanza en diversas universidades, impariéndose en cursos de pregrado y posgrado. Las disciplinas hacia las cuales se orientan estos cursos han sido tradicionalmente las Ingenierías Eléctrica, Electrónica, Mecánica, Industrial y las Ciencias Computacionales, y más recientemente la Mecatrónica y Cibernetica.

Un buen número de los libros de texto comúnmente empleados en los cursos de robótica hacen un particular énfasis en aspectos de mecánica. Otros van enfocados a temas tecnológicos tales como instrumentación electrónica y arquitecturas computacionales, así como a los importantes tópicos de los lenguajes de programación y uso de equipo periférico tales como los instrumentos de visión. Lo expuesto anteriormente pone en evidencia el carácter multidisciplinario de la robótica.

El control automático ha aportado también valiosas contribuciones al avance de la robótica. El más simple y común controlador para robots manipuladores industriales es del tipo denominado “Proporcional Integral Derivativo (PID)”. En general, este tipo de controlador se diseña suponiendo que los robots son caracterizados matemáticamente por medio de ecuaciones dinámicas independientes para cada articulación. Este hecho puede

repercibir en una prestación limitada del sistema de control para robots modernos, caracterizados en realidad por ecuaciones dinámicas acopladas. No obstante, esta estrategia de control puede dar resultados aceptables bajo ciertas condiciones. Para mejorar la prestación en aplicaciones generales, ha sido necesario introducir controladores nuevos basados en el conocimiento preciso del modelo dinámico de los robots así como de sus parámetros. También se han planteado diversos controladores con el propósito de mantener servicios aceptables en el control de robots, aun cuando los parámetros del modelo dinámico sean mal conocidos o abiertamente desconocidos. Asimismo, se han aplicado al campo de la robótica controladores adaptables, con estructura variable, controladores borrosos, controladores robustos, controladores basados en redes neuronales y controladores con aprendizaje entre otros.

En su gran mayoría, los textos que abordan el tema de control de robots lo hacen, por así decirlo, de manera complementaria al resto del texto. Este hecho repercute en un tratamiento superficial basado en conceptos de sistemas lineales, en ocasiones falto de rigor, de diversos aspectos sobre el tópico de control de robots. Por otro lado, las herramientas de análisis indispensables para el estudio riguroso de los sistemas de control de robots, inherentemente no lineales, ocupan solamente limitados apéndices, por lo que el lector debe acudir frecuentemente a otros textos de consulta.

La principal motivación para la redacción del presente texto fue incorporar los avances más recientes en el área de control de robots manipuladores en una obra autocontenida, orientada especialmente para aquellos que estén interesados en aspectos de control automático. Se ha procurado hacer una presentación rigurosa de material, pretendiendo que sirva como base tanto para cursos sobre control de robots a nivel de pregrado como de posgrado en Ingeniería Eléctrica, Mecatrónica y Cibernética, así como obra de consulta para investigadores interesados en control de robots. Los conocimientos requeridos por el lector para abordar esta obra son los referentes a los conceptos básicos de control clásico y moderno, ecuaciones diferenciales y álgebra lineal.

Los antecedentes en la redacción de la obra se remontan a unas notas para cursos realizadas en 1989 mientras el primer autor estuvo adscrito a la Universidad Nacional Autónoma de México. Los cursos impartidos por este autor sobre la base del material en dicha institución y posteriormente en la Universidad Autónoma de Nuevo León, la Universidad Nacional de San Juan (Argentina), el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, y el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, entre otros, permitieron, mediante retroalimentación con estudiantes y colegas, adecuarlo y extenderlo. Asimismo, el uso del material en cursos impartidos por el segundo autor en el Instituto Tecnológico de La Laguna (ITL) permitió realizar mejoras y agregados sustantivos que le dan la forma final a la obra.

La obra está dividida en tres partes teniendo un total de once capítulos y cuatro apéndices. En la primera parte, se presenta una introducción y los preliminares tanto matemáticos como sobre el modelo dinámico de robots, con el fin de hacer de ésta una obra autocontenida. Al comienzo de la primera parte presentamos una breve introducción a la robótica. El Capítulo 1 muestra un panorama sobre ideas fundamentales

de control de robots manipuladores. El Capítulo 2 cubre los preliminares matemáticos donde se exponen conceptos básicos de álgebra lineal y la teoría de estabilidad de Lyapunov. El Capítulo 3 resume el tópico del modelo dinámico de los robots manipuladores, prestándose una atención especial a la formulación de Lagrange. Las propiedades básicas de los modelos dinámicos de los robots manipuladores se exponen en el Capítulo 4.

La segunda parte de la obra trata en sus cuatro capítulos uno de los tópicos fundamentales que han incitado su elaboración: el control de posición de robots. En el Capítulo 5, se abordan al detalle dos de los controladores más sencillos para robots manipuladores: el control Proporcional (P) y el control “Proporcional Derivativo (PD)”. El control PD con compensación de gravedad, una de las primeras estrategias de control desarrolladas con análisis riguroso de estabilidad asintótica global, se estudiará en el Capítulo 6. Por su parte, el Capítulo 7 se centra en el estudio del control PD con compensación precalculada de gravedad. Este esquema de control resulta de particular interés debido a su relativa sencillez y escaso poder de cómputo requerido para su puesta en práctica. El popular control PID es el objeto de análisis en el Capítulo 8.

La tercera parte de la obra se dedica al control de movimiento de manipuladores robóticos. Esta parte se compone de tres capítulos donde se estudian seis controladores. En concreto, el Capítulo 9 analiza el control por precompensación y el control PD con precompensación. Allí se comentan algunas limitaciones de dichos esquemas de control. En el Capítulo 10, se presentan dos estrategias de control que permiten garantizar estabilidad asintótica global del sistema de control en su conjunto: control PD+ y control PD con compensación. Finalmente, en el Capítulo 11 se estudia el popular control Par-Calculado así como una variante del mismo.

Los autores manifiestan en este punto su reconocimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), cuyo patrocinio mediante la asignación de una *Cátedra Patrimonial Nivel III* al primer autor, condujo a la elaboración de una primera versión de este texto. Igualmente, el primer autor agradece el apoyo y facilidades que le fueron brindados para la redacción de esa versión del documento por parte del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE). El segundo autor agradece al CONACyT y al Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (COSNET) los diversos apoyos recibidos para sus investigaciones a lo largo de este último lustro, lo que parcialmente permitió su colaboración en este libro.

Su elaboración tampoco habría sido posible sin la interacción de los autores con diversos colegas. En particular, los autores expresan su agradecimiento a Ricardo Carelli, Romeo Ortega y Antonio Loría cuya colaboración a lo largo de más de una década ha permitido mejorar substancialmente tanto el contenido como la redacción de la obra. Asimismo, los autores agradecen también la información verbal o escrita proporcionada sobre el tema por Mark Spong, Suguru Arimoto, Carlos Canudas, Jean-Jacques Slotine, John T. Wen, Roberto Horowitz, Daniel Koditschek, Claude Samson, Louis Whitcomb, Harry Berghuis, Henk Nijmeijer, Ilse Cervantes, Marco A. Arteaga, Hebertt Sirá-Ramírez, Juan M. Ibarra y Alfonso Pámanes, que fue de gran valor durante la redacción del material.

Para concluir, los autores desean reconocer la valía de numerosos comentarios, sugerencias y correcciones, aportadas por estudiantes durante la impartición de cursos con el material del texto.

Ensenada, México, febrero de 2003
Rafael Kelly y Víctor Santibáñez

Parte I

Introducción y preliminares

Introducción

Debido a las exigencias de calidad y rapidez en los sistemas de producción del mundo globalizado contemporáneo, una gran variedad de avances tecnológicos ha comenzado a introducirse en las plantas industriales.

La robótica —término cuya creación se atribuye a Isaac Asimov— está ocupando un lugar destacado en la modernización de diversos sectores industriales. La robótica es aún un campo nuevo de la tecnología moderna. El buen entendimiento y el desarrollo de aplicaciones de la robótica están condicionados al conocimiento de diversas disciplinas entre las que destacan la ingeniería eléctrica, la ingeniería mecánica, la ingeniería industrial, las ciencias computacionales y las matemáticas.

El vocablo *robot* tiene sus orígenes en el idioma checo, y ha sido adoptado como tal en varias lenguas incluyendo el español. Más allá de la definición formal de robot, el lector seguramente coincidirá en que el término robot empleado en el lenguaje cotidiano es usado para referirse a máquinas autónomas sorprendentemente animadas. Estas máquinas generalmente están presentes en alguna de las siguientes categorías:

- Robots manipuladores
- Robots móviles
 - Robots terrestres
 - Robots con ruedas
 - Robots con patas
 - Robots acuáticos
 - Robots marinos
 - Robots submarinos
 - Robots aéreos

Por este motivo, los robots manipuladores y los robots móviles figuran como piezas clave del mosaico que actualmente forma la robótica. Este texto trata diversos aspectos relacionados exclusivamente con robots manipuladores.

Actualmente se cuenta con varias definiciones de robots manipuladores industriales, que a decir verdad, han causado cierta polémica. De acuerdo con la definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica bajo la norma ISO/TR 8373, un robot manipulador se define de la siguiente manera:

Un robot manipulador industrial es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales.

En su aplicación industrial, los robots manipuladores son comúnmente empleados en tareas repetitivas y de precisión, así como en actividades peligrosas para operadores humanos. Las principales ventajas argumentadas para el uso de robots manipuladores en la industria son la reducción de los costes de producción, el incremento de la precisión, la calidad y la productividad, y una mayor flexibilidad comparada con la de las máquinas especializadas. Adicionalmente, existen aplicaciones monopolizadas por los robots manipuladores tales como el trabajo en zonas radioactivas, tóxicas o explosivas y en aplicaciones submarinas y espaciales. Las proyecciones realizadas a corto plazo colocan a la aplicación de ensamblaje como la principal consumidora de robots manipuladores.

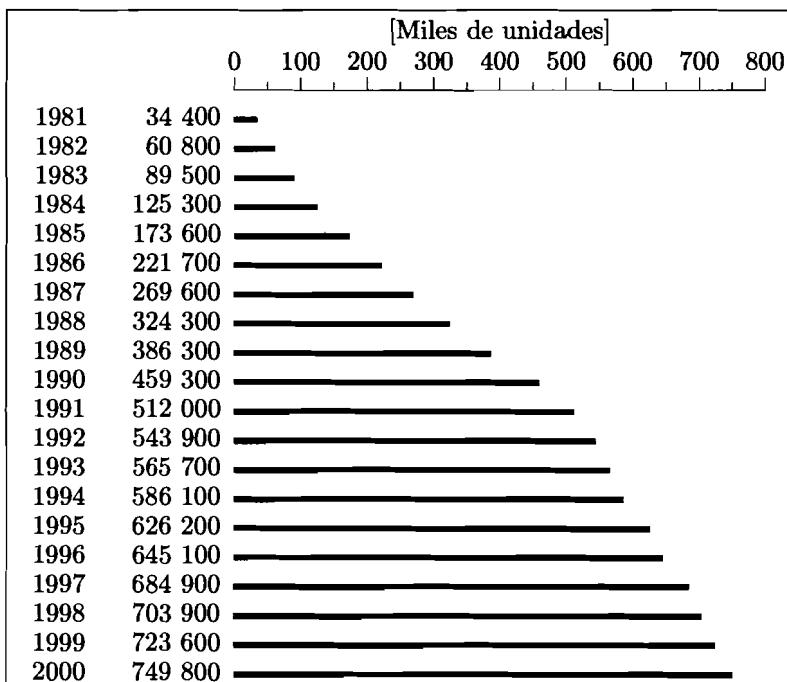


Figura I.1: Parque de robots industriales operativos desde 1981 hasta 2000

I.1 Estadísticas

De acuerdo con los datos publicados conjuntamente por la Organización de las Naciones Unidas y la Federación Internacional de Robótica, el total de robots manipuladores industriales operativos en el mundo en 2000 superó las 749 000 unidades. La evolución año por año desde 1981 hasta 2000 se muestra en la Figura I.1. De esta información, se aprecia un crecimiento sostenido en la población de robots operativos de aproximadamente unas 20 000 unidades anuales durante los últimos años.

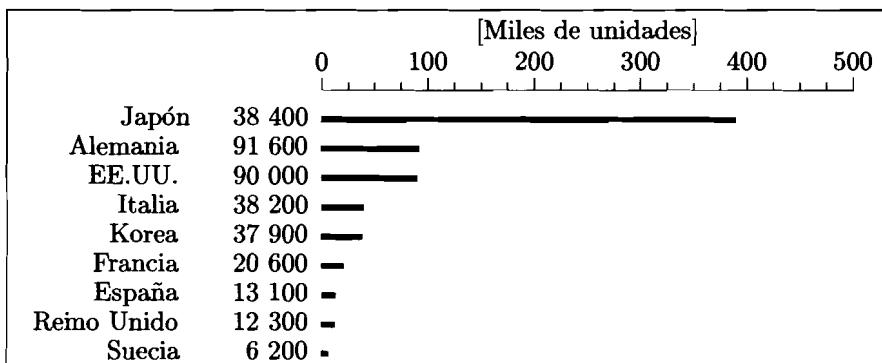


Figura I.2: Robots industriales operativos en 2000

En relación al año 2000, la distribución de los robots operativos por países se muestra en la Figura I.2. Resulta llamativo constatar que más de la mitad de los robots operativos en esa fecha correspondían a Japón, mientras que el 25% a los principales países europeos. También es particularmente relevante mencionar que otras estadísticas indican que en el año 2000, el 37% de los robots operativos en Japón se destinaban a tareas de ensamblaje y sólo el 15% a soldadura.

Referencias

Diversos datos y conceptos sobre robots manipuladores pueden encontrarse en los capítulos introductorios de los textos siguientes:

- Paul, R., 1981, “*Robot manipulators: Mathematics programming and control*”, MIT Press, Cambridge, MA.
- Asada, H., Slotine, J. J., 1986, “*Robot analysis and control*”, Wiley, New York.
- Fu, K., Gonzalez, R., Lee, C., 1987, “*Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*”, McGraw-Hill.

- Craig, J., 1989, "*Introduction to robotics: Mechanics and control*", Addison-Wesley, Reading, MA.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, "*Robot dynamics and control*", Wiley, New York.
- Yoshikawa, T., 1990, "*Foundations of robotics: Analysis and control*", The MIT Press.
- Nakamura, Y., 1991, "*Advanced robotics: Redundancy and optimization*", Addison-Wesley, Reading, MA.
- Spong, M., Lewis, F. L., Abdallah, C. T., 1993, "*Robot control: Dynamics, motion planning and analysis*", IEEE Press, New York.
- Lewis, F. L., Abdallah, C. T., Dawson, D. M., 1993, "*Control of robot manipulators*", Macmillan Publishing Co.
- Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S., 1994, "*A mathematical introduction to robotic manipulation*", CRC Press, Inc., Boca Raton, FL.
- Qu, Z., Dawson, D. M., 1996, "*Robust tracking control of robot manipulators*", IEEE Press, New York.
- Canudas, C., Siciliano, B., Bastin, G., (eds), 1996, "*Theory of robot control*", Springer Verlag, London.
- Arimoto, S., 1996, "*Control theory of non-linear mechanical systems*", Oxford University Press, New York.
- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., Aracil, R., 1997, "*Fundamentos de robótica*", McGraw-Hill, Madrid.
- Sciavicco, L., Siciliano, B., 2000, "*Modeling and control of robot manipulators*", Second Edition, Springer-Verlag, Londres.
- de Queiroz, M., Dawson, D. M., Nagarkatti, S. P., Zhang, F., 2000, "*Lyapunov-based control of mechanical systems*", Birkhäuser, Boston, MA.
- Ollero, A., 2001, "*Robótica: Manipuladores y robots móviles*", Marcombo Boixareu Editors, Barcelona.
- Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S. T., Aracil, R., 2002, "*Robots y sistemas sensoriales*", Prentice Hall, Madrid.

El lector interesado en cifras y estadísticas del parque mundial de robots, tanto por países como por área de aplicación, puede consultar:

- United Nations/Economic Commission for Europe and International Federation of Robotics, 2001, “*World robotics 2001*”, United Nations Publication *sales no. GV.E.01.0.16*, ISBN 92-1-101043-8, ISSN 1020-1076, Printed at United Nations, Geneva, Switzerland.

A continuación, se listan algunas de las revistas periódicas cuyo contenido se enfoca a la robótica:

- *Advanced Robotics*
- *Autonomous Robots*
- *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*
- *IEEE Transactions on Robotics and Automation*
- *Journal of Intelligent and Robotic Systems*
- *Journal of Robotic Systems*
- *Mechatronics*
- *The International Journal of Robotics Research*
- *Robotica*

Otras revistas que actúan como foro para trabajos sobre control de robots son:

- *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*
- *Automatica*
- *IEEE Transactions on Automatic Control*
- *IEEE Transactions on Industrial Electronics*
- *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*
- *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*
- *International Journal of Control*
- *Systems and Control Letters*

1

Control de robots

Para los fines de este texto, se adopta la siguiente definición pragmática de robot manipulador: “mecánicamente, un robot manipulador —o simplemente manipulador— es un brazo mecánico articulado formado de eslabones conectados a través de uniones o articulaciones que permiten un movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos”. El movimiento de cada articulación puede ser translacional, rotacional o una combinación de ambos. Aquí se considerarán únicamente articulaciones translacionales y rotacionales. Bajo consideraciones razonables, el número de articulaciones en un manipulador determina su número de grados de libertad (g.d.l.). Típicamente, un manipulador dispone de 6 g.d.l. de los cuales 3 ubican la posición del extremo del último eslabón en el espacio y 3 más especifican su orientación. La Figura 1.1 muestra un par de esquemas de robots de 4 y 3 g.d.l., respectivamente.

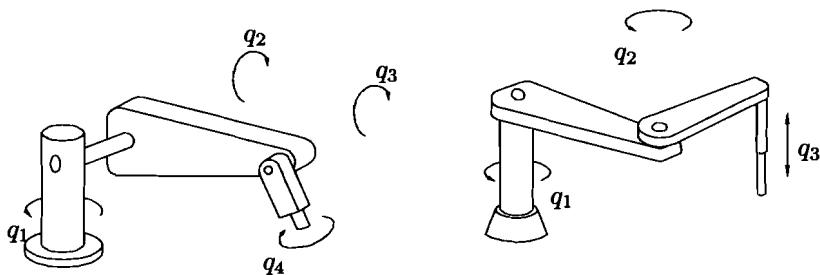


Figura 1.1: Robots de 4 y 3 g.d.l.

Las variables q_1 , q_2 , q_3 y q_4 mostradas en la Figura 1.1, se refieren a las posiciones articulares del robot. Dichas posiciones articulares, previa definición de un marco de referencia adecuado, denotan en consecuencia las posiciones, ya sean angulares o lineales, de cada una de las articulaciones del robot. Para propósitos analíticos, las posiciones

articulares se agrupan para formar el vector de posiciones articulares q :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Tanto las posiciones articulares q como sus derivadas temporales, es decir, las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\mathbf{q}$, se miden mediante sensores convenientemente colocados en el robot.

A cada articulación del robot le corresponde un accionador, que puede ser de naturaleza electromecánica, neumática o hidráulica. Dichos accionadores tienen como objetivo generar fuerzas o pares, introduciendo el movimiento de los eslabones y en consecuencia, el movimiento del robot como un todo. El conjunto de fuerzas y pares generados por los accionadores del robot son agrupados para fines analíticos en el vector τ , esto es,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}.$$

1.1 Conceptos de control

El presente texto se centra en la intersección existente entre la robótica y la ingeniería eléctrica y más específicamente con el área de control automático. De dicha interacción sobresale el tema de control de robots manipuladores.

A pesar de la existencia de robots comerciales, el diseño de controladores para robots sigue siendo un área de intensos estudios por parte de los constructores de robots así como de los centros de investigación. Podría argumentarse que los robots industriales actuales son capaces de realizar correctamente una gran variedad de actividades, por lo que parecería innecesario, a primera vista, el desarrollo de investigaciones sobre el tema de control de robots. Sin embargo, este último tema no solo es interesante en sí mismo, sino que también ofrece grandes retos teóricos, y más importante aún, su estudio es indispensable en aplicaciones específicas que no pueden ser llevadas a cabo mediante los robots comerciales actuales.

La metodología de diseño de los sistemas de control puede resumirse a través de los pasos siguientes:

- Familiarización con el sistema físico a controlarse.
- Modelado.
- Especificaciones de control.

A continuación se profundiza sobre estos pasos haciendo énfasis en su aplicación a robots manipuladores.

1.1.1 Familiarización con el sistema físico a controlarse

En esta etapa se deben determinar las variables físicas del sistema cuyo comportamiento se desea gobernar tales como temperatura, presión, desplazamiento, velocidad, etc. Estas variables reciben el nombre de *salidas del sistema*. Además, también deben identificarse claramente aquellas variables físicas del sistema que se encuentran disponibles y que influyen en su evolución, y en particular de las salidas del sistema. Estas variables llamadas *entradas del sistema* pueden ser, por ejemplo, la apertura de una válvula, tensión, par o fuerza, etc.

En el caso particular de robots manipuladores, la variable de salida —denotada momentáneamente por y — cuya conducta se desea modificar, ofrece un amplio espectro de elecciones tal y como se exemplifica a continuación.

En el caso de robots que se desplazan libremente dentro de su espacio de trabajo sin interaccionar con el medio ambiente tal y como se esquematiza en la Figura 1.2, por ejemplo, los destinados a tareas de pintado, traslado de objetos de un punto a otro, corte por rayo láser, etc., la salida y puede corresponder simplemente a las posiciones q y velocidades \dot{q} articulares, o también a la posición y orientación del órgano terminal o herramienta.

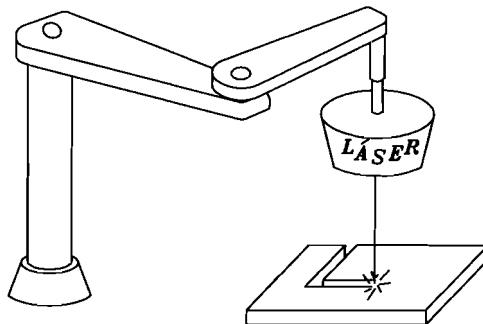


Figura 1.2: Robot en movimiento libre

Para robots manipuladores como el mostrado esquemáticamente en la Figura 1.3 que involucran su interacción con el medio ambiente por contacto físico para realizar tareas como pulido de superficies, desbastado de materiales, ensamble de alta precisión, etc., la salida y puede incluir los pares y fuerzas f ejercidos por el extremo del último eslabón del robot sobre su medio ambiente.

La Figura 1.4 muestra un manipulador sujetando una plantilla con marcas y una cámara que proporciona una imagen resaltando dichas marcas. La salida y de este sistema puede corresponder a las coordenadas asociadas a cada una de las marcas con referencia a la pantalla donde se aprecia la imagen. La Figura 1.5 presenta un manipulador provisto de una cámara en su elemento terminal que captura la escena de su medio ambiente. En este caso, la salida y pudiese corresponder a las coordenadas de puntos en la imagen

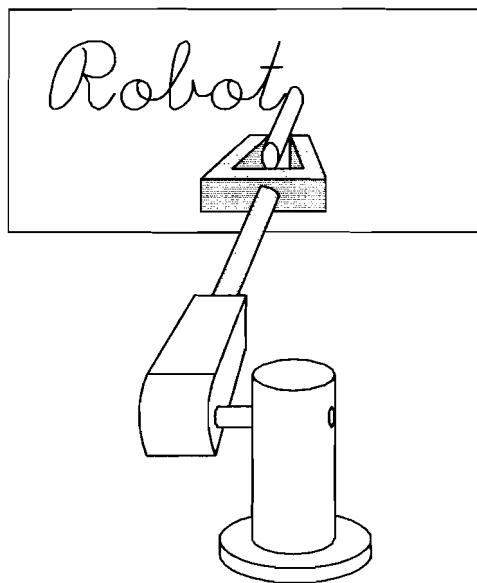


Figura 1.3: Robot en interacción con el medio ambiente

desplegada en la pantalla asociados a marcas previamente establecidas en los objetos visibles del medio ambiente.

De los ejemplos anteriores se desprende que la salida \mathbf{y} correspondiente a un robot —asociado a una clase de tareas— en general puede tener la forma funcional:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}).$$

Por otra parte, las variables de entrada, esto es, aquellas que pueden ser modificadas para alterar la evolución de las salidas, son básicamente los pares y fuerzas $\boldsymbol{\tau}$ aplicados por los accionadores sobre las articulaciones del robot. La Figura 1.6 muestra el diagrama de bloques correspondiente al caso donde las posiciones y velocidades articulares \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ son las salidas del robot, es decir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

mientras $\boldsymbol{\tau}$ es su entrada. En esta situación, nótese que para robots con n articulaciones, se tendrán en general $2n$ salidas y n entradas.

1.1.2 Modelado dinámico

En esta etapa se procede a determinar la regla matemática que vincula las variables de entrada y salida del sistema. Generalmente, dicha caracterización matemática se

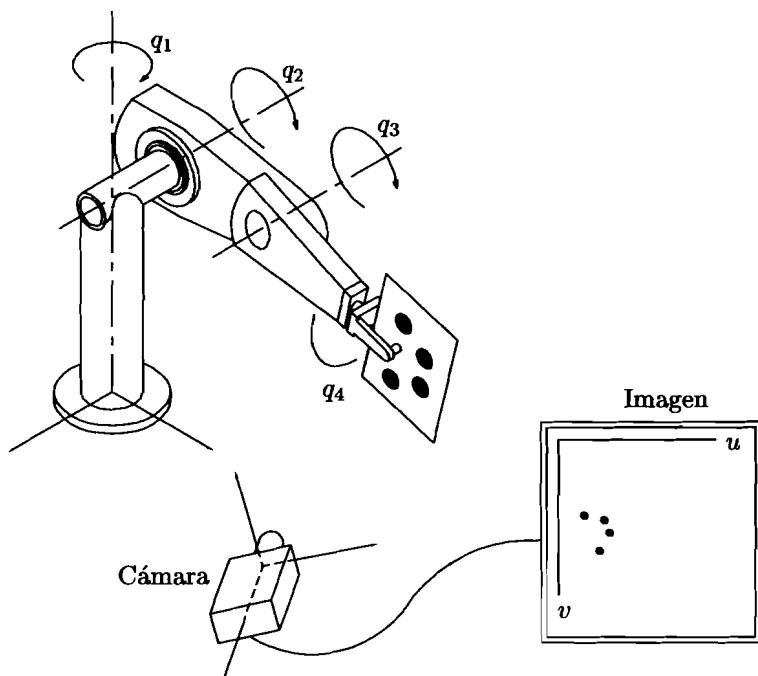


Figura 1.4: Sistema robótico: cámara fija

manifiesta por medio de ecuaciones diferenciales. El modelo matemático del sistema a controlar se obtiene tradicionalmente por una de las dos técnicas siguientes:

- **Analítica.** Este procedimiento se basa en las ecuaciones de la física que rigen el comportamiento del sistema. Esta metodología puede proporcionar un modelo matemático preciso a condición de dominar las leyes de la física que están involucradas en el sistema.
- **Experimental.** Este procedimiento requiere una serie de datos experimentales del sistema. Frecuentemente se trata de examinar el comportamiento del sistema ante entradas específicas. El modelo obtenido a partir de este procedimiento es, en general, más impreciso que el conseguido a partir del método analítico. No obstante, su principal ventaja radica en la facilidad y el corto espacio de tiempo requerido para disponer del modelo.

En algunas ocasiones, en esta etapa se procede a una simplificación del modelo del sistema que desea controlarse con miras a obtener posteriormente un sistema de control relativamente sencillo. Esta etapa puede, no obstante, tener la desventaja de dar como

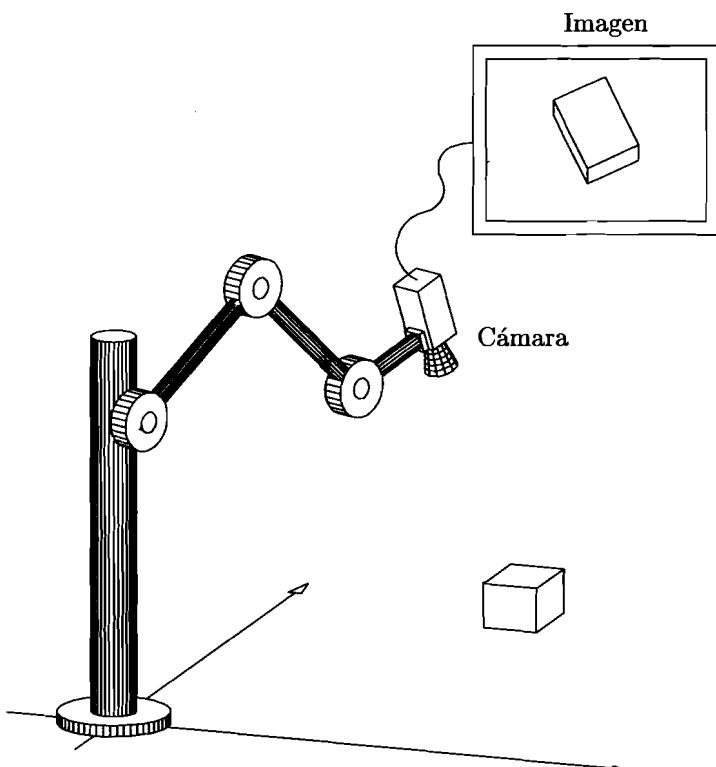


Figura 1.5: Sistema robótico: cámara en mano

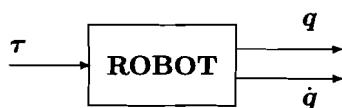


Figura 1.6: Diagrama de bloques

resultado un sistema de control que funcione inadecuadamente, fenómeno conocido como *falta de robustez*.

En otras ocasiones, después de la etapa de modelado se continúa con otra de identificación paramétrica. Aquí se pretende obtener los valores numéricos de los diversos parámetros contenidos en el modelo dinámico. Esto puede llevarse a cabo mediante técnicas que emplean mediciones de las entradas y salidas del sistema a controlar.

El modelado dinámico de robots manipuladores se realiza tradicionalmente de forma analítica, esto es, a partir de las leyes de la física. Debido a la naturaleza mecánica de

los robots manipuladores, las leyes de la física involucradas son simplemente las leyes de la mecánica. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, un robot manipulador de n g.d.l. puede ser considerado como un sistema no lineal multivariable, teniendo n entradas (los pares y fuerzas τ que son aplicados en las articulaciones por medio de accionadores electromecánicos, hidráulicos o neumáticos) y $2n$ variables de estado, normalmente asociadas a las n posiciones q y n velocidades \dot{q} de las articulaciones. La Figura 1.6 muestra el diagrama de bloques correspondiente suponiendo que las variables de estado corresponden también a las salidas. El tema de modelado dinámico de robots manipuladores se expondrá en el Capítulo 3.

Como se ha mencionado, los modelos dinámicos de los robots manipuladores son en general caracterizados por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y no autónomas. Este hecho tiene como consecuencia, que las técnicas de diseño tradicionales para el control de sistemas lineales tengan una aplicación limitada en la síntesis de controladores con alto desempeño para robots manipuladores. Debido a lo expuesto anteriormente, así como a los requerimientos actuales de alta precisión y rapidez en los movimientos de los robots, se ha hecho necesario el uso de técnicas más elaboradas de control para el diseño de controladores con mayores prestaciones. Esta clase de sistemas de control pueden incluir, por ejemplo, controles no lineales y controles adaptables.

1.1.3 Especificaciones de control

En esta última etapa se procede a dictar las características que se desean para el sistema de control, a través de los llamados *objetivos de control*, tales como:

- Estabilidad.
- Regulación.
- Seguimiento de trayectoria.
- Optimización.

La primera propiedad que debe poseer un sistema de control es estabilidad. Dos técnicas de análisis han sido usadas tradicionalmente en el estudio de estabilidad de controladores para robots. La primera se basa en la teoría de estabilidad de Lyapunov. La segunda es la denominada enfoque entrada-salida, que basa su fundamento matemático en el análisis funcional. Ambas técnicas son adecuadas para el análisis de sistemas de control, y en particular, de sistemas de control no lineal. En este texto se empleará la primera de ellas para desarrollar el análisis de los controladores que se presenten. Los fundamentos de la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov se expondrán en el Capítulo 2.

De acuerdo con la definición adoptada para definir la salida y de un robot manipulador, los objetivos de control asociados a regulación y seguimiento de trayectoria reciben nombres especiales. En particular, en el caso típico que la salida y corresponda a la posición q y velocidad \dot{q} articular, los objetivos de control reciben aquí los nombres de

control de posición pura en coordenadas articulares y control de movimiento en coordenadas articulares, respectivamente. A éstos se hará mención en lo sucesivo simplemente como *control de posición* y *control de movimiento*, respectivamente. Éstos comportan tal importancia que merecen ser tratados con más detalle a continuación.

1.1.4 Control de movimiento de robots manipuladores

La manera más sencilla de especificar el movimiento de un robot es la denominada *punto-a-punto*. Esta metodología consiste en determinar una serie de puntos en el espacio de trabajo del manipulador por donde se desea que el extremo final del mismo pase, con el fin de satisfacer una cierta aplicación (véase la Figura 1.7). El problema de control consiste, en resumen, en hacer pasar el extremo del manipulador por dichos puntos.

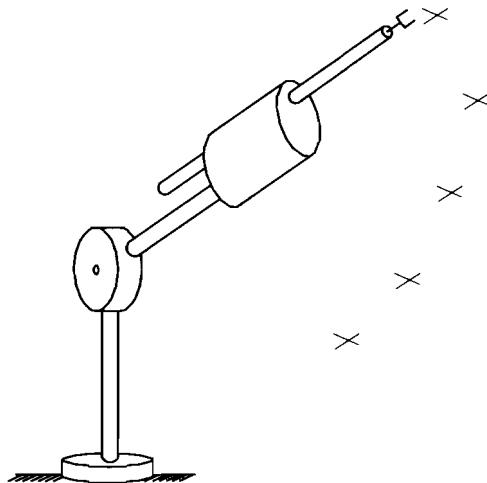


Figura 1.7: Especificación de movimiento por punto-a-punto

Una forma más general para especificar el movimiento de un manipulador es la llamada *trayectoria continua* o simplemente trayectoria. En este caso, se determina una curva o trayectoria parametrizada temporalmente en el espacio de trabajo y el problema de control consiste en hacer pasar el extremo del manipulador por dicha trayectoria tan cerca como sea posible (véase la Figura 1.8). Este problema de control recibe el nombre de *control de movimiento* de robots y su estudio es el objetivo principal del presente texto.

Un planteamiento particularmente sencillo para control de robots, y a decir verdad, un caso particular del control de movimiento es el denominado *control de posición pura* de robots manipuladores. En este planteamiento, la trayectoria especificada en el espacio de trabajo del robot es simplemente un punto en dicho espacio. La problemática de control

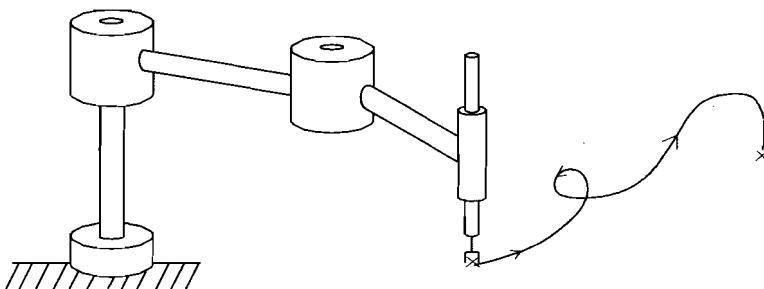


Figura 1.8: Especificación de movimiento por trayectoria

de posición consiste en llevar el extremo del robot a dicho punto independientemente de su posición inicial.

El tema de control de movimiento puede, a su vez, ser enmarcado como una parte del tópico más general conocido como *navegación de robots*. El problema de navegación de robots consiste en resolver, en un solo paso, los siguiente tres subproblemas:

- Planeación del itinerario.
- Generación de trayectoria.
- Diseño del controlador.

La *planeación del itinerario* consiste en determinar una curva en el espacio de trabajo del robot que conecte sin tocar obstáculo alguno la posición inicial del extremo del robot con la posición final deseada del mismo. La *generación de trayectoria* consiste en parametrizar en el tiempo la curva obtenida en la planeación del itinerario. La trayectoria en el tiempo resultante de esta etapa, llamada trayectoria de referencia o trayectoria deseada, se obtiene primeramente en términos de las coordenadas del espacio de trabajo, para posteriormente, mediante la solución del problema conocido como cinemática inversa, determinar la trayectoria parametrizada en el tiempo especificada en términos de las coordenadas articulares. El *diseño del controlador* trata justamente de resolver el problema de control de movimiento previamente enunciado.

En este texto, los intereses se centran en el estudio de controladores de movimiento en coordenadas articulares, por lo que se supondrá, que tanto la planeación del itinerario, como la generación de trayectoria, han sido previamente resueltas.

Antes de finalizar esta introducción, debe hacerse notar que se han excluido por motivos de espacio algunas técnicas de control cuyo uso, en control de movimiento de robots, es respaldado por una gran cantidad de documentación tanto teórica como experimental. Dichas estrategias son el control adaptable, control con estructura variable, control por aprendizaje, control mediante lógica borrosa y control neuronal.

Referencias

Entre la literatura de robótica que aborda aspectos sobre control de movimiento de robots manipuladores, el lector puede consultar las siguientes obras:

- Asada, H., Slotine, J. J., 1986, "*Robot analysis and control*", Wiley, New York.
- Fu, K., Gonzalez, R., Lee, C., 1987, "*Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*", McGraw-Hill.
- Craig, J., 1989, "*Introduction to robotics: Mechanics and control*", Addison-Wesley, Reading, MA.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, "*Robot dynamics and control*", Wiley, New York.
- Yoshikawa, T., 1990, "*Foundations of robotics: Analysis and control*", The MIT Press.
- Spong, M., Lewis, F. L., Abdallah, C. T., 1993, "*Robot control: Dynamics, motion planning and analysis*", IEEE Press, New York.
- Lewis, F. L., Abdallah, C. T., Dawson, D. M., 1993, "*Control of robot manipulators*", Macmillan Publishing Co.
- Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S., 1994, "*A mathematical introduction to robotic manipulation*", CRC Press, Inc., Boca Raton, FL.
- Qu, Z., Dawson, D. M., 1996, "*Robust tracking control of robot manipulators*", IEEE Press, New York.
- Canudas, C., Siciliano, B., Bastin, G., (eds), 1996, "*Theory of robot control*", Springer Verlag, London.
- Arimoto, S., 1996, "*Control theory of non-linear mechanical systems*", Oxford University Press, New York.
- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., Aracil, R., 1997, "*Fundamentos de robótica*", McGraw-Hill, Madrid.
- Sciavicco, L., Siciliano, B., 2000, "*Modeling and control of robot manipulators*", Second Edition, Springer-Verlag, London.
- de Queiroz, M., Dawson, D. M., Nagarkatti, S. P., Zhang, F., 2000, "*Lyapunov-based control of mechanical systems*", Birkhäuser, Boston, MA.
- Ollero, A., 2001, "*Robótica: Manipuladores y robots móviles*", Marcombo Boixareu Editors, Barcelona.

- Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S. T., Aracil, R., 2002, “*Robots y sistemas sensoriales*”, Prentice Hall, Madrid.

Los temas de control de fuerza, control de impedancia y control híbrido movimiento/fuerza pueden consultarse en los textos de Asada & Slotine (1986), Craig (1989), Spong & Vidyasagar (1989), y Sciavicco & Siciliano (2000) citados anteriormente y en:

- Siciliano, B., Villani, L., 1999, “*Robot force control*”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Adicionalmente se puede acudir a los siguientes documentos clásicos:

- Raibert, M., Craig, J., 1981, “*Hybrid position/force control of manipulators*”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, June, Vol. 103.
- Hogan, N., 1985, “*Impedance control: An approach to manipulation. Parts I, II, and III*”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, March, Vol. 107.
- Whitney, D., 1987, “*Historical perspective and state of the art in robot force control*”, The International Journal of Robotics Research, Spring, Vol. 6, No. 1.

El tema de navegación de robots puede consultarse en:

- Rimon, E., Koditschek, D. E., 1992, “*Exact robot navigation using artificial potential functions*”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, October, Vol. 8, No. 5.

Diversos conceptos y aspectos, tanto teóricos como tecnológicos, sobre el guiado de manipuladores incorporando información de sensores de visión, pueden consultarse en los textos siguientes:

- Hashimoto, K., 1993, “*Visual servoing: Real-time control of robot manipulators based on visual sensory feedback*”, World Scientific Publishing Co., Singapur.
- Corke, P.I., 1996, “*Visual control of robots: High-performance visual servoing*”, Research Studies Press Ltd., UK.
- Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S. T., Aracil, R., 2002, “*Robots y sistemas sensoriales*”, Prentice Hall, Madrid.

2

Preliminares matemáticos

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas básicas que serán empleadas en los capítulos posteriores con el propósito de analizar diversos esquemas de control para robots manipuladores.

Especificamente, este capítulo se divide en dos apartados:

- Notaciones y definiciones.
- Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En el Epígrafe 2.1 se dará una breve introducción a definiciones y conceptos sobre vectores, matrices, espacios de funciones y puntos fijos. En el Epígrafe 2.2 se presentarán los fundamentos de la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Esto se llevará a cabo a través de un conjunto de enunciados en forma de lemas y teoremas, que han sido obtenidos de la bibliografía y, en la mayoría de los casos, vendrán dados sin su demostración. El lector interesado en las demostraciones puede recurrir a las referencias citadas al final del capítulo. Las demostraciones de resultados menos conocidos serán presentadas en el texto.

En este texto se emplearán los siguientes símbolos matemáticos de abreviación:

\forall	“para todo”
\exists	“existe”
\in	“perteneciente a”
\Rightarrow	“implica”
\iff	“equivalente a” o “si y sólo si”

También se usarán las siguientes abreviaciones de locuciones latinas:

- i.e. *id est* “esto es”
e.g. *exempli gratia* “por ejemplo”

Las nociones básicas de álgebra lineal son el punto de partida en el desarrollo de una serie de herramientas que serán útiles posteriormente.

2.1 Notaciones y definiciones

En este epígrafe se presentan algunas notaciones y definiciones que serán empleadas a lo largo del texto. Básicamente se resumen algunos conceptos sobre vectores y matrices. El material presentado es estándar, por lo que el lector que desee profundizar en él, puede consultar adicionalmente bibliografía sobre matrices y álgebra lineal.

El conjunto de los *números reales* se denota por el símbolo \mathbb{R} . Los números reales son expresados por letras itálicas minúsculas y ocasionalmente por letras griegas minúsculas.

El conjunto de los números reales no negativos \mathbb{R}_+ se define como:

$$\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in [0, \infty)\}.$$

El valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ se denota por $|x|$.

Vectores

Se denotará por \mathbb{R}^n el espacio euclíadiano real de dimensión n , es decir, el conjunto de todos los vectores \mathbf{x} de dimensión n formados por n -adas de números reales en forma de columna:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T,$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ son las coordenadas o los elementos componentes del vector \mathbf{x} y el superíndice T denota transposición. Los vectores son denotados mediante letras minúsculas en negrita tanto itálicas como griegas.

Producto de vectores

El *producto interno* de dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ es definido como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Puede verificarse fácilmente que el producto interno de vectores satisface las siguientes propiedades:

- $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathbf{x}^T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Norma euclíadiana

La *norma euclíadiana* $\|\mathbf{x}\|$ de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}},$$

donde sólo se considera la parte positiva de la raíz cuadrada. Es inmediato comprobar que la norma euclíadiana satisface las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $\|\mathbf{x}\| > 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad de Schwarz).

Matrices

Se denotará por $\mathbb{R}^{n \times m}$ al conjunto de *matrices* A de dimensión $n \times m$ formadas por arreglos de números reales ordenados por n renglones y m columnas:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ puede ser interpretado como una matriz particular perteneciente a $\mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$. Las matrices son denotadas mediante letras itálicas mayúsculas y ocasionalmente por letras griegas mayúsculas.

La matriz transpuesta $A^T = \{a_{ji}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Producto de matrices

Considérense las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. El producto de las matrices A y B denotado por $C = AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se define como:

$$\begin{aligned} C = \{c_{ij}\} &= AB \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^p a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{mk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Puede verificarse fácilmente que el producto de matrices satisface las siguientes propiedades:

- $(AB)^T = B^T A^T$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
- $AB \neq BA$, en general.
- $A(B + C) = AB + AC$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
- $ABC = A(BC) = (AB)C$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

De acuerdo con la definición de producto de matrices, la expresión $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

Matrices particulares

Una matriz A es *cuadrada* si $n = m$. Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *simétrica* si ésta es igual a su transpuesta, esto es, si $A = A^T$, mientras que es *antisimétrica* si $A = -A^T$. Una propiedad de las matrices antisimétricas $A = -A^T$ es:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Se denotará por $\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a una matriz diagonal, i.e.:

$$\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Consecuentemente cualquier matriz diagonal es también una matriz simétrica. En el caso particular donde $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$, la matriz diagonal correspondiente se denotará por $\text{diag}\{a\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dos matrices diagonales de particular utilidad son las siguientes. La matriz *identidad* de dimensión n se define como:

$$I = \text{diag}\{1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

La matriz *nula* de dimensión n se define como $0 = \text{diag}\{0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *singular* si su determinante es nulo, i.e., si $\det[A] = 0$, en caso contrario es *no singular*. Una característica de una matriz singular es que ésta no tiene inversa.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sin ser necesariamente simétrica, es *definida positiva*¹ si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

La definición de matriz definida positiva recién establecida no requiere que ésta sea simétrica. Es necesario resaltar que normalmente la mayoría de los textos presentan dicha definición sólo para matrices simétricas. No obstante, para los fines de este texto, la definición dada como tal resulta suficiente.

Se emplea la notación $A > 0$ para indicar que la matriz A es definida positiva². Cualquier matriz simétrica y definida positiva $A = A^T > 0$ es no singular; por tanto su inversa A^{-1} existe. Más aún, $A = A^T > 0$ si y sólo si $A^{-1} = (A^{-1})^T > 0$.

Puede demostrarse que la suma de dos matrices definidas positivas también resulta en una matriz definida positiva. El producto de matrices simétricas definidas positivas $A = A^T > 0$ y $B = B^T > 0$, no resulta en general simétrico ni tampoco definido positivo, sin embargo, la matriz resultante es no singular.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no necesariamente simétrica, es *semidefinida positiva* si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Se emplea la notación $A \geq 0$ para indicar que la matriz A es semidefinida positiva.

¹Sea P una matriz cuadrada de dimensión n . Defínase:

$$A = \{a_{ij}\} = \frac{P + P^T}{2}.$$

El teorema de Sylvester establece lo siguiente. La matriz P es definida positiva si y sólo si:

$$\det[a_{11}] > 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det[A] > 0.$$

²Es importante subrayar que $A > 0$ significa que la matriz A es definida positiva y no debe interpretarse como “ A mayor que 0”, siendo esto último carente de sentido.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *definida negativa* si $-A$ es definida positiva mientras que es *semidefinida negativa* si $-A$ es semidefinida positiva.

Valores propios

Para cada matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existen n valores propios (números complejos en general) denotados por $\lambda_1\{A\}, \lambda_2\{A\}, \dots, \lambda_n\{A\}$. Los valores propios de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfacen:

$$\det[\lambda_i\{A\}I - A] = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad de dimensión n .

Para el caso de una matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus valores propios son tales que:

- $\lambda_1\{A\}, \lambda_2\{A\}, \dots, \lambda_n\{A\}$ son números reales.
- Denotando los valores propios máximo y mínimo de A por $\lambda_{\max}\{A\}$ y $\lambda_{\min}\{A\}$ respectivamente, el teorema de Rayleigh–Ritz establece que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\lambda_{\max}\{A\} \|x\|^2 \geq x^T A x \geq \lambda_{\min}\{A\} \|x\|^2.$$

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si y sólo si los valores propios de $A + A^T$ son positivos, i.e., $\lambda_i\{A + A^T\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Más aún, una matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si y sólo si $\lambda_i\{A\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Norma espectral

La *norma espectral* $\|A\|$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se define como³:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}\{A^T A\}},$$

donde $\lambda_{\max}\{A^T A\}$ denota el valor propio máximo de la matriz simétrica $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

En el caso particular de matrices simétricas $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se tiene que:

- $\|A\| = \max_i |\lambda_i\{A\}|$.
- $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_i |\lambda_i\{A\}|}$.

En las expresiones anteriores el valor absoluto resulta redundante si A es simétrica y definida positiva: $A = A^T > 0$.

La norma espectral satisface las siguientes propiedades:

³Es importante notar que el símbolo para la norma euclíadiana de un vector y la norma espectral de una matriz es el mismo. El lector deberá ser cuidadoso para no confundirlas. La distinción entre ellas viene dada exclusivamente por su argumento, i.e., un vector o una matriz.

- $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|A\| > 0$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|A^T B\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Un resultado importante es el siguiente. Considérese la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. La norma euclíadiana del vector $A\mathbf{x}$ satisface:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|,$$

donde $\|A\|$ denota la norma espectral de la matriz A , mientras que $\|\mathbf{x}\|$ denota la norma euclíadiana del vector \mathbf{x} . Aún más, siendo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el valor absoluto de $\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$ satisface:

$$|\mathbf{y}^T A\mathbf{x}| \leq \|A\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\|.$$

Espacios de funciones

Una clase particular de espacios vectoriales son los denominados espacios L_p^n (pronúnciese “ele-pe-ene”). Los elementos o vectores de los espacios L_p^n son funciones con propiedades particulares.

Los espacios lineales denominados L_2^n y L_∞^n , que se definirán posteriormente, son particularmente empleados en el análisis de sistemas dinámicos interconectados en la metodología denominada: enfoque entrada-salida. Esta metodología involucra la noción de operadores, que caracterizan el comportamiento de las diversas partes del sistema dinámico interconectado.

A continuación se presentan una serie de conceptos y definiciones sobre espacios de funciones.

Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una *función continua* si:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Una condición necesaria para que una función sea continua es que esté definida en todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. También se deduce que no es necesario que una función continua tenga derivada en todo su dominio de definición. Tal es el caso, por ejemplo, de la función continua $f(x) = |x|$, cuya derivada con respecto a x en el punto $x = 0 \in \mathbb{R}$ no está definida. Sin embargo, si una función tiene derivada en todo punto, entonces la función es continua.

El espacio L_2^n consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\int_0^\infty \mathbf{f}(t)^T \mathbf{f}(t) dt = \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt < \infty.$$

Dicho de otro modo, una función f pertenece al espacio L_2^n ($f \in L_2^n$) si la integral del cuadrado de su norma euclíadiana está acotada superiormente.

El espacio L_∞^n consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir,

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| < \infty.$$

Los símbolos L_2 y L_∞ sirven para denotar a los espacios L_2^1 y L_∞^1 respectivamente.

A continuación se presenta un ejemplo con el propósito de ilustrar las definiciones expuestas anteriormente.

Ejemplo 2.1 Considérense las funciones continuas $f(t) = e^{-\alpha t}$ y $g(t) = \alpha \operatorname{sen}(t)$ donde $\alpha > 0$. Se desea determinar si f y g pertenecen a los espacios L_2 y L_∞ .

Primeramente considérese la función $f(t)$ y obsérvese que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t)|^2 dt &= \int_0^\infty f^2(t) dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt, \\ &= \frac{1}{2\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

entonces $f \in L_2$. Por otro lado, $|f(t)| = |e^{-\alpha t}| \leq 1 < \infty$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_\infty$. En resumen, se concluye $f \in L_2 \cap L_\infty$.

Considérese ahora la función $g(t)$. Nótese que la integral:

$$\int_0^\infty |g(t)|^2 dt = \alpha^2 \int_0^\infty \operatorname{sen}^2(t) dt$$

no converge; en consecuencia, $g \notin L_2$. Sin embargo $|g(t)| = |\alpha \operatorname{sen}(t)| \leq \alpha < \infty$ para todo $t \geq 0$, por lo que $g \in L_\infty$.

Conviene observar en este momento que una función continua f perteneciente al espacio L_2^n puede no tener un límite asintótico. A continuación, se presenta un resultado obtenido en la bibliografía de análisis funcional que proporciona condiciones suficientes sobre funciones pertenecientes al espacio L_2^n para que éstas tiendan asintóticamente a cero.

Lema 2.1 Considérese una función continua $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función f satisface las siguientes hipótesis:

- $\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} = \frac{d}{dt} \mathbf{f} \in L_\infty^n$.
- $\mathbf{f} \in L_2^n$.

Entonces, necesariamente, se tiene que: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. La prueba se hará por contradicción siguiendo los pasos correspondientes a la demostración del lema de Barbalat⁴. En particular se verá que si $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$, luego la hipótesis $\mathbf{f} \in L_2^n$ resulta vulnerada.

Primeramente, considérese la función continua $\mathbf{f}(t)^T \mathbf{f}(t) = \|\mathbf{f}(t)\|^2$. Su derivada temporal $2\mathbf{f}(t)^T \dot{\mathbf{f}}(t)$ está acotada (pertenece a L_∞) ya que por hipótesis $\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} \in L_\infty^n$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del valor medio⁵, existe una constante finita $k > 0$ para la cual:

$$\left| \|\mathbf{f}(t)\|^2 - \|\mathbf{f}(t_1)\|^2 \right| \leq k |t - t_1| \quad \forall t, t_1 \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1)$$

Ahora bien, nótese que:

$$\|\mathbf{f}(t)\|^2 = \|\mathbf{f}(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t_1)\|^2 - \|\mathbf{f}(t_1)\|^2$$

para todo $t, t_1 \in \mathbb{R}_+$. Luego resulta que la siguiente desigualdad es válida:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t)\|^2 &\geq \|\mathbf{f}(t_1)\|^2 - \left| \|\mathbf{f}(t)\|^2 - \|\mathbf{f}(t_1)\|^2 \right| \\ &\geq \|\mathbf{f}(t_1)\|^2 - k |t - t_1| \end{aligned} \quad (2.2)$$

para todo $t, t_1 \in \mathbb{R}_+$ y donde se ha usado (2.1).

Ahora supóngase que bajo las hipótesis del lema su conclusión resulta falsa, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$. Esto significa que existe un número $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tan grande como se quiera y una constante $\varepsilon > 0$ para los cuales:

$$\|\mathbf{f}(t_1)\| > \varepsilon.$$

De aquí en adelante t_1 denotará un número con las características anteriores. Luego entonces, la desigualdad (2.2) permite llegar a:

$$\|\mathbf{f}(t)\|^2 \geq \varepsilon - k |t - t_1|.$$

Ahora intégruese la desigualdad anterior desde t_1 hasta $t_1 + \frac{\varepsilon}{k}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{k}} \|\mathbf{f}(\tau)\|^2 d\tau &\geq \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{k}} \varepsilon d\tau - \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{k}} k |\tau - t_1| d\tau, \\ &= \frac{\varepsilon^2}{k} - k \left[\frac{\varepsilon^2}{2k^2} \right] = \frac{\varepsilon^2}{2k}. \end{aligned}$$

⁴Véase, e.g., Narendra, K., Annaswamy, A., 1989, *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, pág. 85.

⁵Véase el Apéndice C.

Naturalmente como siempre existiría un número t_1 arbitrariamente grande y uno correspondiente $\varepsilon > 0$, luego

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau \|f(\tau)\|^2 d\tau$$

no convergería. Por lo tanto, se tendría $f \notin L_2^n$ lo cual contradice la hipótesis de que $f \in L_2^n$ y en consecuencia debe ser cierto que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{0}$. \diamond

Lema 2.2 Considérense las funciones continuas y diferenciables $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Defínase la función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por:

$$V(t, x, z, h) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T P(t) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + h(t) \geq 0$$

donde $P(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ es una matriz simétrica definida positiva para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Si la derivada de V con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x, z, h) &= \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial x}^T \frac{dx}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial z}^T \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial h} \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

satisface

$$\dot{V}(t, x, z, h) = - \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0$$

donde $Q = Q^T > 0$, entonces

1. $x \in L_\infty^n$, $z \in L_\infty^m$ y $h \in L_\infty$.
2. $x \in L_2^n$.

Si además $\dot{x} \in L_\infty^n$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}$.

$\nabla\nabla\nabla$

Demostración. Como $V(t, x, z, h) \geq 0$ y $\dot{V}(t, x, z, h) \leq 0$ entonces se tiene que:

$$V(0, x(0), z(0), h(0)) \geq V(t, x(t), z(t), h(t)) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Debido a que todos los términos de V son positivos, y como V está acotada entre 0 y $V(0, x(0), z(0), h(0))$, estos términos están en consecuencia acotados. Queda demostrado 1).

Para demostrar 2), considérese la expresión de $\dot{V}(t, x, z, h)$:

$$\dot{V}(t, x, z, h) = -x^T Q x.$$

Integrando entre 0 y T ($\in \mathbb{R}_+$) se obtiene:

$$V(T, \mathbf{x}(T), \mathbf{z}(T), h(T)) - V(0, \mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0), h(0)) = - \int_0^T \mathbf{x}(\tau)^T Q \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

la cual empleando $V(0, \mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0), h(0)) \geq V(T, \mathbf{x}(T), \mathbf{z}(T), h(T))$ conduce a la desigualdad:

$$V(0, \mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0), h(0)) \geq \int_0^T \mathbf{x}(\tau)^T Q \mathbf{x}(\tau) d\tau.$$

Por otro lado, usando el teorema de Rayleigh-Ritz: $\mathbf{x}^T K \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}\{K\} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ donde K es cualquier matriz simétrica y $\lambda_{\min}\{K\}$ denota el valor propio mínimo de K , se tiene:

$$\frac{V(0, \mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0), h(0))}{\lambda_{\min}\{Q\}} \geq \int_0^T \mathbf{x}(\tau)^T \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

donde $\lambda_{\min}\{Q\} > 0$ porque $Q = Q^T$ es por hipótesis una matriz definida positiva. El lado izquierdo de la última desigualdad es finito, lo cual significa que $\mathbf{x} \in L_2^n$.

Finalmente, como $\mathbf{x} \in L_2^n$ y por hipótesis $\dot{\mathbf{x}} \in L_\infty^n$, del Lema 2.1 se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. \diamond

Considérese ahora un sistema dinámico lineal descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ es el estado del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es la entrada, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ es la salida y $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices con coeficientes reales constantes. La matriz de transferencia $H(s)$ del sistema se define como $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ donde $s \in \mathbb{C}$.

El siguiente resultado⁶ permite obtener conclusiones sobre la pertenencia de \mathbf{y} e $\dot{\mathbf{y}}$ a L_2^n o L_∞^n dependiendo de si \mathbf{u} pertenece a L_2^n o a L_∞^n .

Lema 2.3 Considérese la matriz cuadrada de dimensión n , $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$ cuyos elementos son funciones racionales estrictamente propias de la variable compleja s . Supóngase que los denominadores de sus elementos tienen todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo.

- Si $\mathbf{u} \in L_2^n$ entonces $\mathbf{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{\mathbf{y}} \in L_2^n$ e $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- Si $\mathbf{u} \in L_\infty^n$ entonces $\mathbf{y} \in L_\infty^n$, $\dot{\mathbf{y}} \in L_\infty^n$.

⁶Este resultado ha sido tomado de Desoer, C. A., Vidyasagar, M., 1975, "Feedback systems: Input-output properties", Academic Press, pág. 59.

▽▽▽

A modo de ilustración del lema anterior, considérese la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante definida positiva. Si $\mathbf{u} \in L_2^n$, entonces del Lema 2.3 se concluye que $\mathbf{x} \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{\mathbf{x}} \in L_2^n$ y $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Finalmente, se presenta el siguiente corolario cuya demostración es inmediata del Lema 2.3.

Corolario 2.1 Considérese la hipótesis del Lema 2.3 sobre la matriz de transferencia $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$. Denótese por \mathbf{u} e \mathbf{y} sus entradas y salidas, respectivamente. Si $\mathbf{u} \in L_2^n \cap L_\infty^n$, entonces:

- $\mathbf{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$.
- $\dot{\mathbf{y}} \in L_2^n \cap L_\infty^n$.
- $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

▽▽▽

Puntos fijos

A continuación se presentan algunos conceptos y teoremas básicos sobre puntos fijos. La importancia de estos conceptos radica en la potencialidad de su empleo en la determinación de la existencia y unicidad de soluciones para una clase particular de ecuaciones. Estos teoremas serán empleados posteriormente para garantizar la existencia, y eventual unicidad, de equilibrios de las ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento, en malla cerrada, de los sistemas de control de robots. Primeramente se presenta la definición de punto fijo, que a pesar de su simplicidad, resulta ser de gran aplicación.

Considérese una función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. El vector $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un *punto fijo* de $f(\mathbf{x})$ si:

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*.$$

De acuerdo con la definición anterior, si \mathbf{x}^* es un punto fijo de la función $f(\mathbf{x})$, entonces obviamente \mathbf{x}^* es solución de $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ y también de $\mathbf{x} - f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Algunas funciones tienen uno o más puntos fijos, pero también hay funciones que no los presentan. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene como único punto fijo $x^* = 0$, mientras que la función $f(x) = x^3$ tiene tres puntos fijos: $x^* = 1$, $x^* = 0$ y $x^* = -1$. Sin embargo, $f(x) = e^x$ no tiene punto fijo alguno.

Considérese ahora la siguiente función continua:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \theta \end{bmatrix} &\mapsto f(\mathbf{x}, \theta), \end{aligned}$$

donde $\theta \in \Omega$ se ve como un parámetro y siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Luego $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo de $f(x, \theta)$ para cualquier $\theta \in \Omega$ si:

$$f(x^*, \theta) = x^* \quad \forall \theta \in \Omega.$$

A continuación, se presenta una versión del teorema de contracción de mapas que provee una condición suficiente para la existencia y unicidad de puntos fijos.

Teorema 2.1 Contracción de mapas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Considérese la siguiente función continua:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} &\mapsto f(x, \theta). \end{aligned}$$

Supóngase que existe una constante no negativa k tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in \Omega$ se tiene que:

$$\|f(x, \theta) - f(y, \theta)\| \leq k \|x - y\|.$$

Si la constante k es estrictamente menor que la unidad, entonces dado cualquier $\theta \in \Omega$, se tiene que la función $f(x, \theta)$ posee un único punto fijo $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Además el punto fijo x^* puede ser determinado como:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, \theta)$$

donde $x(n, \theta) = f(x(n-1, \theta))$ y con $x(0, \theta) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario.

▽▽▽

Una interpretación importante del teorema de contracción de mapas es la siguiente. Supóngase que la función $f(x, \theta)$ satisface la condición del teorema, entonces $f(x, \theta) - x = \mathbf{0}$ tiene solución en x y ésta, además, es la única. Como ilustración de lo anterior, considérese la función $h(x, \theta)$:

$$\begin{aligned} h(x, \theta) &= k_p x - mgl \operatorname{sen}(\theta - x) \\ &= -k_p [f(x, \theta) - x] \end{aligned}$$

con $k_p > 0$, $mgl > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y

$$f(x, \theta) = \frac{mgl}{k_p} \operatorname{sen}(\theta - x).$$

El problema planteadido consiste en determinar las condiciones sobre k_p y mgl para que $h(x, \theta) = 0$ tenga una única solución en x . Para resolver este planteamiento, se emplea el teorema de contracción de mapas. Nótese que:

$$\begin{aligned} |f(z, \theta) - f(y, \theta)| &= \left| \frac{mgl}{k_p} [\operatorname{sen}(\theta - z) - \operatorname{sen}(\theta - y)] \right| \\ &\leq \frac{mgl}{k_p} |z - y| \end{aligned}$$

para todo $z, y \in \mathbb{R}$, por lo que, si $1 > mgl/k_p \geq 0$, entonces $f(x, \theta)$ tendrá un único punto fijo, y en consecuencia $h(x, \theta) = 0$ tendrá una única solución en x .

2.2 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En este epígrafe se presentan conceptos y teoremas básicos de la teoría de Lyapunov y en particular, el denominado *segundo método de Lyapunov* o *método directo de Lyapunov*.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (2.3)$$

donde el vector $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por (2.3) y $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en t y $\mathbf{x}(t)$, y se supone que es tal que:

- La Ecuación (2.3) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial de $\mathbf{x}(0)$.
- Si $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (2.3) correspondiente a la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, entonces $\mathbf{x}(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Si la función \mathbf{f} no depende explícitamente del tiempo, i.e., $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, luego la Ecuación (2.3) se denomina autónoma. Si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$ con $A(t)$ una matriz cuadrada de dimensión n y siendo $A(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones únicamente de t —o constantes—, entonces la Ecuación (2.3) es lineal. En caso contrario es no lineal.

Conceptos básicos

Entre los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov destacan los siguientes: equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial. Cada uno de ellos será tratado a continuación. Primeramente, se presenta el concepto de equilibrio, el cual, a pesar de su sencillez, juega un papel clave en la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Definición 2.1 Equilibrio

Un vector *constante* $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio* o estado de equilibrio del sistema (2.3) si

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0.$$

▽▽▽

Como consecuencias inmediatas de la definición de equilibrio, y excluyendo casos “patológicos”, se tiene que si la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ es justamente un equilibrio ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$), entonces se satisface:

- $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e \quad \forall t \geq 0.$

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0.$

Lo expuesto anteriormente se ilustra en la Figura 2.1, donde se muestra el caso $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$. La condición inicial $\mathbf{x}(0)$ es justamente \mathbf{x}_e , por lo que la evolución en el tiempo de la solución $\mathbf{x}(t)$ es exactamente el vector constante \mathbf{x}_e .

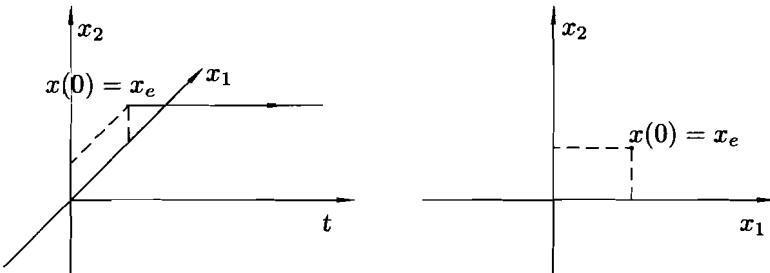


Figura 2.1: Equilibrio

Tradicionalmente se supone que el origen del espacio de estado \mathbb{R}^n , esto es $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, es un equilibrio de (2.3). Si éste no es el caso, puede demostrarse que mediante un cambio adecuado de coordenadas, cualquier equilibrio de (2.3) puede trasladarse al origen del espacio de estado.

En general, una ecuación diferencial puede tener más de un equilibrio, inclusive un número infinito de ellos. Sin embargo, también puede ocurrir que una ecuación no posea equilibrio alguno. Lo expuesto anteriormente se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2 Considérese la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = a \mathbf{x}(t) + b u(t), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son constantes reales y $u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Si $u(t) = u_0$ es constante para todo $t \geq 0$, i.e., la ecuación diferencial es en este caso autónoma, entonces el único equilibrio de dicha ecuación es $\mathbf{x}_e = -bu_0/a$.

Por otro lado, debe tenerse cuidado y no concluir que toda ecuación autónoma tiene equilibrio. Tal es el caso, por ejemplo, de la siguiente ecuación diferencial autónoma no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-\mathbf{x}(t)} \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}$$

la cual no tiene equilibrio.

Finalmente considérese la siguiente ecuación diferencial autónoma no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2(t) &= \operatorname{sen}(x_1(t)) & x_2(0) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La ecuación anterior tiene un número infinito de equilibrios (aislados) dados por $\mathbf{x}_e = [x_{1e} \ x_{2e}] = [n\pi \ 0]$ con $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$.

A continuación se presentan los conceptos básicos de estabilidad para equilibrios de ecuaciones diferenciales. No está de más subrayar nuevamente, que en el presente texto los conceptos de estabilidad que serán enunciados, son considerados como **atributos para equilibrios** de ecuaciones diferenciales y no para las ecuaciones diferenciales mismas, ni sus soluciones. Sin pérdida de generalidad, se supondrá en el resto del capítulo que el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio de (2.3).

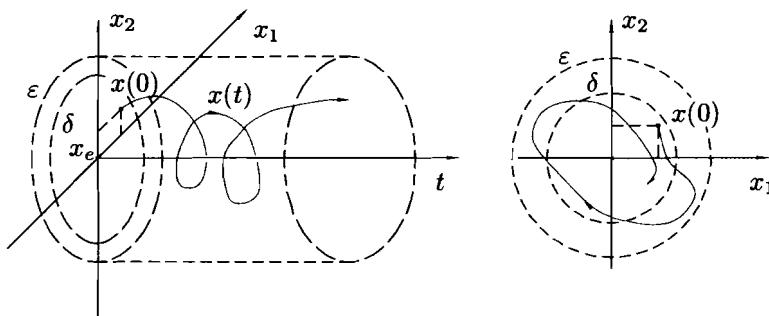


Figura 2.2: Estabilidad

Definición 2.2 Estabilidad

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio estable* (en el sentido de Lyapunov) de la Ecuación (2.3) si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

▽▽▽

En la definición anterior la constante $\delta (\leq \varepsilon)$ no es única. Si existe una constante δ que satisface la condición de la definición, entonces cualquier $\alpha\delta$ con $\alpha \leq 1$ también la satisface.

Debe tenerse claro que la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no para algún $\varepsilon > 0$.

Finalmente, se deberá interpretar claramente la Definición 2.2 de estabilidad y no establecer, como suele suceder en ocasiones por confusión, que para cada constante $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \varepsilon \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \delta \quad \forall t \geq 0.$$

Lo expuesto anteriormente significaría que el origen es un equilibrio estable si para toda condición inicial acotada, las soluciones también están acotadas. Esto último, no es necesario ni tampoco es suficiente para estabilidad en el sentido de Lyapunov. La estabilidad del origen debe ser interpretada como dada una pequeña discrepancia de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ con respecto al equilibrio (origen), la solución $\mathbf{x}(t)$ correspondiente permanecerá acotada. Nótese que se habla de valores pequeños de la condición inicial y no para toda condición inicial.

A modo de ilustración del concepto de estabilidad, la Figura 2.2 muestra un caso para $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ donde el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio estable y, por simplicidad, sólo se muestra la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ correspondiente a una condición inicial $\mathbf{x}(0)$. En la Figura 2.2 se muestra también un ε y un δ que satisfacen la condición de la definición de estabilidad, es decir, $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ implica que $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Definición 2.3 Estabilidad asintótica

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio asintóticamente estable* de (2.3) si:

1. El origen es estable.
2. El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta' \implies \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \mathbf{0} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

▽▽▽

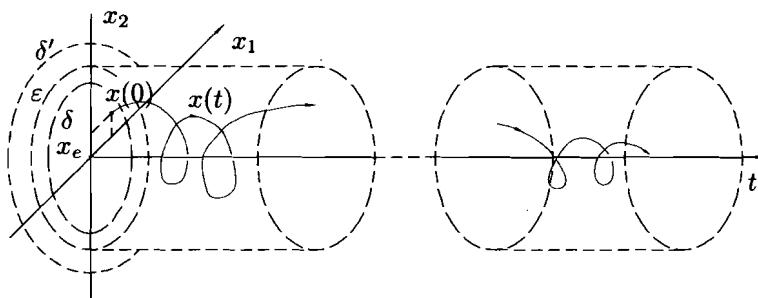


Figura 2.3: Estabilidad asintótica

La Figura 2.3 ilustra el concepto de estabilidad asintótica para el caso de $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$.

La asignación del nombre de estabilidad asintótica en la definición anterior es desafortunada, induciendo a confusión, ya que podría interpretarse como que el equilibrio es estable cuando $t \rightarrow \infty$ (asintóticamente), siendo que la definición claramente indica en la condición 1) que el equilibrio debe ser estable. Podría pensarse que la condición 1) es superflua ya que ésta es implicada por la condición 2). Sin embargo, tal implicación no es cierta, tal y como se verá posteriormente en el Ejemplo 2.4.

Definición 2.4 Estabilidad asintótica global

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio asintóticamente estable en forma global* de la Ecuación (2.3) si:

1. El origen es estable.
2. El origen es atractivo globalmente, es decir,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n.$$

▽▽▽

De la definición anterior se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso.

Definición 2.5 Estabilidad exponencial global

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio exponencialmente estable en forma global* de (2.3) si existen constantes positivas α y β tales que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n.$$

▽▽▽

De acuerdo con las definiciones anteriores, un equilibrio exponencialmente estable en forma global es también un equilibrio asintóticamente estable en forma global. Lo contrario, sin embargo, no es necesariamente verdadero.

Definición 2.6 Inestabilidad

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio *inestable* de la Ecuación (2.3) si éste no es estable.

▽▽▽

El concepto de equilibrio (origen) inestable es equivalente a enunciar que existe al menos un $\varepsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

en otras palabras, si existe al menos un $\varepsilon > 0$, el cual se desea que acote la norma de la solución $\|\mathbf{x}(t)\|$ y no existe ninguna condición inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ cuya solución $\mathbf{x}(t)$ lo satisfaga ($\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$), entonces el origen es inestable. Es importante subrayar que en ningún momento se afirma que la solución $\mathbf{x}(t)$ deba “crecer” indefinidamente.

Algunos autores prefieren hablar de propiedades de estabilidad de sistemas en un equilibrio dado, en vez de propiedades de estabilidad de un equilibrio para un sistema. Por ejemplo, la frase “el sistema es estable en el origen” es empleada en lugar de “el origen es un equilibrio estable del sistema”. Ambos conceptos son equivalentes y en este texto se empleará este último, respetando de esta manera las definiciones presentadas anteriormente.

A continuación, se dan algunos ejemplos para ilustrar los conceptos de estabilidad presentados anteriormente:

Ejemplo 2.3 Considérense las ecuaciones que definen el oscilador de Van Der Pol:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2, & x_2(0) \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (2.4)$$

donde x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$. Nótese que el origen $[x_1 \ x_2]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un estado de equilibrio de las Ecuaciones (2.4).

Soluciones para varias condiciones iniciales del sistema (2.4) se muestran en el espacio de estado (plano de fase) de la Figura 2.4. El comportamiento del sistema es el siguiente. Si la condición inicial del sistema se encuentra en el interior de la curva cerrada Γ , y es diferente de cero, entonces las soluciones se aproximan asintóticamente a Γ . Si la condición inicial está en el exterior de la curva cerrada Γ , entonces las soluciones se aproximan a Γ .

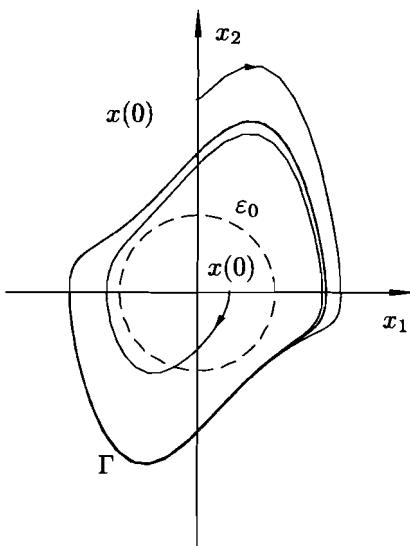


Figura 2.4: Van der Pol

El origen del sistema (2.4) es un equilibrio inestable. Para demostrarlo basta con tomar $\varepsilon = \varepsilon_0$ (véase la Figura 2.4) y claramente no existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Es importante observar que la inestabilidad de un equilibrio no implica que las soluciones del sistema crezcan indefinidamente. Tal es el caso de este ejemplo, donde cada solución asociada a una condición inicial, está acotada.

Ejemplo 2.4 Considérese un sistema con 2 variables de estado expresado en términos de coordenadas polares ($x_1(t) = r \cos(\theta)$ y $x_2(t) = r \sin(\theta)$):

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0.05 r[1 - r], \\ \dot{\theta} &= \sin^2(\theta/2).\end{aligned}$$

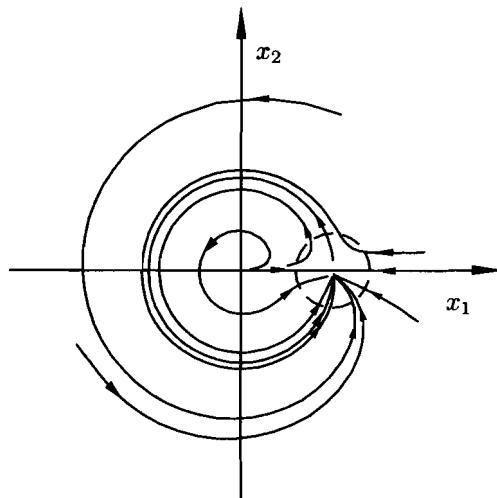


Figura 2.5: Equilibrio atractivo pero inestable

El sistema anterior tiene un equilibrio en el origen $[r \ \theta] = [0 \ 0]$ y otro en $[r \ \theta] = [1 \ 0]$. Generalmente, el comportamiento del sistema es el siguiente: todas las soluciones del sistema (con excepción de las que se inicián en el origen y en $[r \ \theta] = [1 \ 0]$, que son estados de equilibrio) tienden asintóticamente a $[r \ \theta] = [1 \ 0]$. En particular, nótese de la Figura 2.5 que para toda condición inicial, excluyendo $[r \ \theta] = [1 \ 0]$, en el interior del disco punteado, finalmente la trayectoria tiende justamente hacia dicho equilibrio. Este hecho podría hacer pensar que dicho equilibrio es asintóticamente estable. Sin embargo, esta conclusión es errónea debido a la violación de la primera condición de la Definición 2.3, ya que dicho equilibrio no es estable. Esto último puede corroborarse si se toma ε como el radio del disco punteado. En este caso, no existe un número δ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

por lo que el equilibrio $[r \ \theta] = [1 \ 0]$ es inestable.

Ejemplo 2.5 Considérese el sistema descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= -x_1, & x_2(0) \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (2.5)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(0)\cos(t) + x_2(0)\sin(t), \\ x_2(t) &= -x_1(0)\sin(t) + x_2(0)\cos(t).\end{aligned}$$

Claramente, el origen es el único estado o punto de equilibrio. Algunas soluciones de las Ecuaciones (2.5) en el plano x_1-x_2 se pueden ver en la Figura 2.6.

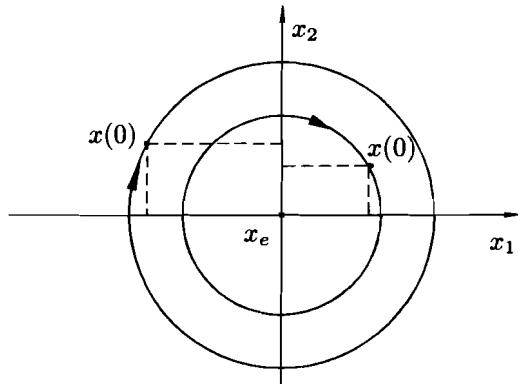


Figura 2.6: Oscilador armónico

Nótese que las trayectorias del Sistema (2.5) son círculos centrados en el origen. Para este ejemplo, el origen es un equilibrio estable ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (cualquier $\delta < \varepsilon$) tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Es importante observar que las trayectorias no convergen al origen, i.e., el equilibrio es estable pero no asintóticamente estable.

A continuación se presentan las definiciones de una clase particular de funciones, que son importantes en el empleo del método directo de Lyapunov para el estudio de estabilidad de equilibrios de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.7 Función definida positiva localmente y función definida positiva
 Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una *función definida positiva localmente* si:

- $W(\mathbf{0}) = 0$.
- $W(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pero con $\|\mathbf{x}\|$ pequeña.

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función definida positiva* si:

- $W(\mathbf{0}) = 0$.
- $W(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

▽▽▽

Ocasionalmente se hará referencia a una función definida positiva como función “definida positiva (globalmente)” o función “definida positiva en forma global” para hacer énfasis al distinguirla de una función definida positiva localmente.

De acuerdo con la definición anterior es obvio que una función definida positiva es también una función definida positiva localmente. También, de acuerdo con las definiciones de función definida positiva y de matriz definida positiva, una función cuadrática $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

con $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es una función definida positiva si y sólo si $P > 0$.

Si $W(\mathbf{x})$ es una función definida positiva, entonces a $-W(\mathbf{x})$ se la referirá como función definida negativa.

A continuación se presenta la definición de otros conceptos útiles sobre funciones.

Definición 2.8 Función radialmente desacotada y función menguante

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función radialmente desacotada* si:

- $W(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función menguante* (globalmente), si existe una función definida positiva $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

$$V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

▽▽▽

Naturalmente, si $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva independiente de t , i.e., $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$, luego $V(\mathbf{x})$ es trivialmente una función menguante.

Con abuso de la nomenclatura, se dirá que una función dependiente del tiempo $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es definida positiva si existe una función definida positiva $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

$$V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

También se dirá que $V(t, \mathbf{x})$ es radialmente desacotada si $W(\mathbf{x})$ lo es.

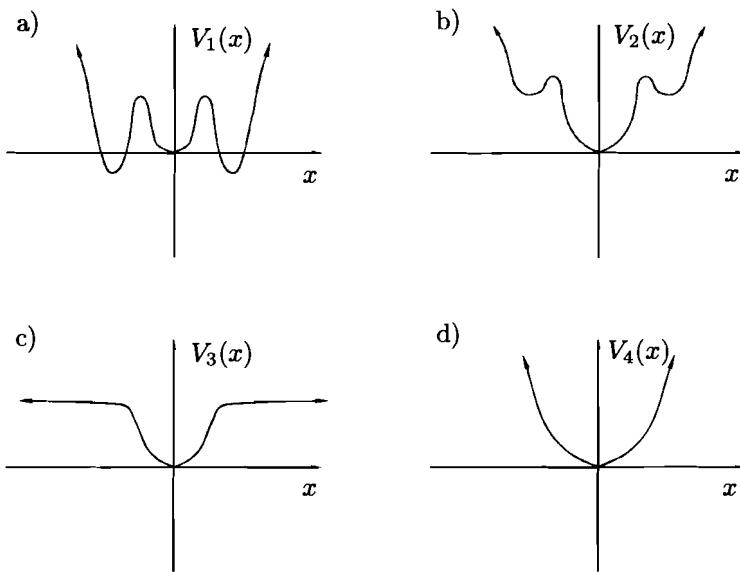


Figura 2.7: Ejemplos

Ejemplo 2.6 Considérense las gráficas de las funciones $V_1(x)$ hasta $V_4(x)$ mostradas en la Figura 2.7. Si observamos cada una de las funciones $V_i(x)$ para $i = 1, \dots, 4$ puede concluirse que:

- $V_1(x)$ es una función definida positiva localmente pero no es una función definida positiva (globalmente).
- $V_2(x)$ es una función definida positiva localmente y además es una función definida positiva (globalmente). También es radialmente desacotada.
- $V_3(x)$ es una función definida positiva pero no es una función radialmente desacotada.
- $V_4(x)$ es una función definida positiva localmente, es una función definida positiva (globalmente), y es una función radialmente desacotada.

A continuación, se dan otros ejemplos que permiten ilustrar los conceptos expuestos anteriormente:

Ejemplo 2.7 La función $W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es una función definida positiva. Debido a la ausencia explícita de t en W , entonces ésta es también menguante.

Ejemplo 2.8 La función $V(t, x_1, x_2) = (t + 1)(x_1^2 + x_2^2)$ es una función definida positiva ya que $V(t, x_1, x_2) > x_1^2 + x_2^2$. Sin embargo, $V(t, x_1, x_2)$ no es una función menguante.

Ejemplo 2.9 La función $W(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ no es una función definida positiva ya que no satisface $W(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Sin embargo, la función $W(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + \alpha x_1^2$ o la función $W(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + \alpha x_2^2$ con $\alpha > 0$ son funciones definidas positivas.

Con el propósito de preparar al lector para el siguiente subepígrafe, donde se presentará el método directo de Lyapunov para el estudio de estabilidad de equilibrios, a continuación se exponen una serie de conceptos relacionados con la noción de función candidata de Lyapunov.

Definición 2.9 Función candidata de Lyapunov

Una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una *función candidata de Lyapunov* para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ si:

- $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y \mathbf{x} .
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a t y \mathbf{x} .

▽▽▽

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es cualquier función definida positiva localmente y continuamente diferenciable —es decir, con derivadas parciales continuas—.

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel clave en la extracción de conclusiones sobre los atributos de estabilidad para los equilibrios de las ecuaciones diferenciales. Por este motivo, se presenta la siguiente definición:

Definición 2.10 Derivada de una función candidata de Lyapunov

Sea $V(t, \mathbf{x})$ una función candidata de Lyapunov para la Ecuación (2.3). La derivada de $V(t, \mathbf{x})$ a lo largo de las trayectorias de (2.3), denotada por $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ vendrá dada por:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^T f(t, \mathbf{x}).$$

▽▽▽

Obsérvese de la definición anterior, que si $V(\mathbf{x})$ no depende explícitamente del tiempo, y la Ecuación (2.3) es autónoma, entonces:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^T f(\mathbf{x})$$

la cual tampoco depende explícitamente del tiempo.

Definición 2.11 Función de Lyapunov

Una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ para la Ecuación (2.3) es una *función de Lyapunov* para (2.3) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (2.3) satisface:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|\mathbf{x}\| \text{ pequeña.}$$

▽▽▽

Método directo de Lyapunov

Con los preliminares anteriores, ahora pueden presentarse los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Los teoremas presentados vendrán dados sin demostraciones. El lector interesado en ellas, puede acudir a los textos citados en las referencias al final del capítulo.

Teorema 2.2 Estabilidad

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio *estable* de la Ecuación (2.3), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|\mathbf{x}\| \text{ pequeña.}$$

▽▽▽

El teorema anterior da condiciones suficientes para estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov. Conviene apuntar que la conclusión del teorema se mantiene obviamente si $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva (globalmente) en lugar de ser definida positiva localmente. El siguiente teorema, permite establecer resultados de estabilidad del equilibrio y además, acotamiento de las soluciones.

Teorema 2.3 Estabilidad y acotamiento de las soluciones

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable, y las soluciones $\mathbf{x}(t)$ están acotadas para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, si existe una función candidata de Lyapunov que sea definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, $V(t, \mathbf{x})$, tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

▽▽▽

Demostración. En vista de que $V(t, \mathbf{x})$ es una función candidata de Lyapunov y satisface $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$, del Teorema 2.2 se concluye estabilidad del origen.

Por otro lado, como $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva y $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ entonces:

$$0 \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq V(0, \mathbf{x}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

es decir, $V(t, \mathbf{x})$ es una función acotada para todo $t \geq 0$. Usando adicionalmente el hecho de que $V(t, \mathbf{x})$ sea una función radialmente desacotada, se concluye que \mathbf{x} está acotada. ◇

En algunas ocasiones, se hace referencia incorrectamente en la bibliografía especializada al resultado de estabilidad de un equilibrio junto con acotamiento de soluciones como estabilidad global. Éste no es un vocablo definido dentro del marco de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

A continuación se presentan condiciones suficientes para determinar estabilidad asintótica en forma global.

Teorema 2.4 Estabilidad asintótica global

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio *asintóticamente estable en forma global* de (2.3), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, y menguante, tal que su derivada satisfaga:

- $\dot{V}(t, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$

▽▽▽

La condición impuesta por el teorema anterior sobre $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ equivale a requerir que $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ sea una función definida negativa (globalmente). Es conveniente apuntar que más allá de la conclusión de estabilidad asintótica global enunciada en el teorema, en realidad, las condiciones establecidas son suficientes para garantizar un resultado de estabilidad más fuerte llamado estabilidad asintótica global en forma *uniforme*. Este concepto no será empleado en el texto.

En el caso de que la Ecuación (2.3) sea autónoma, la función candidata de Lyapunov no suele depender explícitamente del tiempo, por lo que es trivialmente menguante, de modo que para que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global es suficiente que la función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ sea definida positiva (globalmente),

y radialmente desacotada, a la vez que su derivada $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea una función definida negativa (globalmente).

El siguiente resultado presenta condiciones necesarias para la existencia de ciertas propiedades globales de estabilidad de equilibrios en ecuaciones diferenciales autónomas.

Teorema 2.5

Considérese la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

La existencia de un único estado de equilibrio es una condición necesaria para que éste sea asintóticamente estable en forma global.

▽▽▽

La prueba del Teorema 2.5 es inmediata observando que el concepto de estabilidad citado implica $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde \mathbf{x}_e es el equilibrio analizado. Debido a la globalidad de la citada propiedad de estabilidad, la convergencia de la solución $\mathbf{x}(t)$ al equilibrio \mathbf{x}_e debe verificarse para toda condición inicial. Claramente, éste no sería el caso si además de \mathbf{x}_e existen más estados de equilibrio, ya que si la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ fuese exactamente alguno de esos otros estados de equilibrio, entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ permanecería ahí para todo $t \geq 0$.

Nótese que el Teorema 2.5 no establece, como condición necesaria de estabilidad de un equilibrio, la existencia de un único estado de equilibrio. Es importante mencionar, que pueden coexistir equilibrios con propiedades locales de estabilidad, e incluso, equilibrios estables con equilibrios inestables.

Debido a que las propiedades globales de estabilidad implican la existencia de un único equilibrio para el sistema descrito por la ecuación diferencial respectiva, se permite hablar no solo de las propiedades de estabilidad global de dicho equilibrio, sino también de dichas propiedades para el sistema que representan, es decir, afirmaciones como “este sistema es asintóticamente estable en forma global” serían correctas.

El siguiente teorema es una versión simplificada del denominado teorema de LaSalle, la cual resulta adecuada para los fines de este texto.

Teorema 2.6 LaSalle

Considérese la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

cuyo origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ definida positiva (globalmente) y radialmente desacotada tal que:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Defínase el conjunto Ω como:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

Si $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para $t \geq 0$, entonces el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

▼▼▼

Una manera práctica para probar la condición del teorema de LaSalle es la siguiente. Primeramente, se determinan los componentes (o sus combinaciones) del vector de estado \mathbf{x} tales que al anularse impliquen que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. A continuación se consideran dichos componentes como nulos y sus derivadas temporales sucesivas también se toman como nulas. Luego se emplean estas consideraciones en la ecuación original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Finalmente, si de ahí puede concluirse que las restantes variables de estado (aquellas cuyos valores no afectan $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$), son nulas, esto querrá decir que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única condición inicial en Ω para la cual la solución $\mathbf{x}(t)$ permanecerá en Ω .

La aplicación del teorema de LaSalle para establecer estabilidad asintótica global, no requiere que $-\dot{V}(\mathbf{x})$ sea una función definida positiva. Sin embargo, recuérdese que este teorema sólo puede emplearse en ecuaciones diferenciales autónomas.

Los teoremas anteriores son comúnmente los más empleados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Es importante decir que existen otros resultados adicionales, que incluyen por ejemplo, teoremas para estudiar inestabilidad, que no serán expuestos en este texto.

A continuación se presentan una serie de ejemplos con el propósito de mostrar la aplicación de los teoremas presentados anteriormente.

Ejemplo 2.10 Considérese un péndulo sin fricción, de masa m concentrada en su centro de masa, y distancia l desde su eje de giro hasta el centro de masa, sometido a la acción de la gravedad g como el mostrado en la Figura 2.8. Supóngase por simplicidad, que el momento de inercia alrededor del eje que pasa por el centro de masa y que es paralelo al eje de giro es despreciable. La ecuación diferencial que rige el movimiento del péndulo es:

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = 0, \quad q(0), \dot{q}(0) \in \mathbb{R},$$

donde q es la posición angular del péndulo con respecto a la vertical y \dot{q} es la correspondiente velocidad angular. Esta ecuación puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x_1), \end{aligned}$$

donde $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$. Nótese que la ecuación anterior representa una ecuación diferencial autónoma no lineal, cuyo origen es un estado de equilibrio. Es importante constatar, sin embargo, que el origen no es el único estado de equilibrio. En estas circunstancias, de acuerdo con el Teorema 2.5,

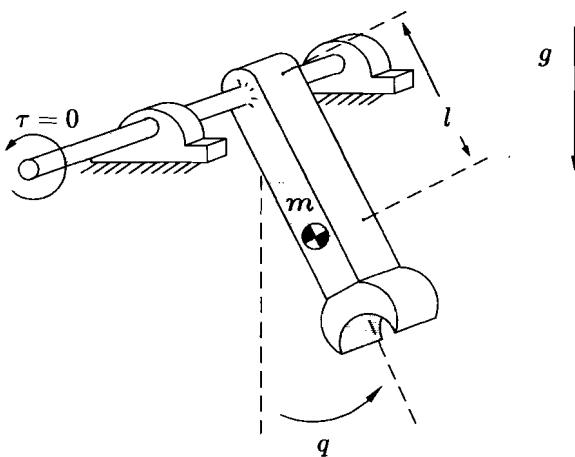


Figura 2.8: Péndulo

ningún equilibrio poseerá propiedades globales de estabilidad. Para analizar la estabilidad del origen, se empleará el Teorema 2.2, proponiendo la siguiente función localmente definida positiva:

$$V(x_1, x_2) = mgl [1 - \cos(x_1)] + ml^2 \frac{x_2^2}{2}.$$

Nótese que el primer término del lado derecho corresponde a la energía potencial, mientras que el segundo, a la energía cinética. Obsérvese que $V(x_1, x_2)$ no es una función definida positiva ya que no cumple con $V(x_1, x_2) > 0$ para todo $[x_1 \ x_2]^T \neq 0 \in \mathbb{R}^2$.

Tomando la derivada de V con respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= mgl \operatorname{sen}(x_1) \dot{x}_1 + ml^2 x_2 \dot{x}_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

De acuerdo con el Teorema 2.2, el origen es un equilibrio estable, es decir, las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ permanecen “cerca” del origen si las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $x_2(0)$ son “pequeñas”. Recuérdese que el concepto de estabilidad por sí mismo, no permite garantizar acotamiento de las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para valores “grandes” de $x_1(0)$ y $x_2(0)$. De hecho, puede demostrarse para este ejemplo en particular, que la solución $x_1(t)$, es decir, la posición angular $q(t)$, no será acotada si la velocidad inicial $\dot{q}(0) = x_2(0)$ es mayor que $2\sqrt{g/l}$. La Figura 2.9 muestra el plano de estado correspondiente a la ecuación diferencial del péndulo.

Este ejemplo muestra claramente, que estabilidad de un equilibrio no es sinónimo de acotamiento de las soluciones.

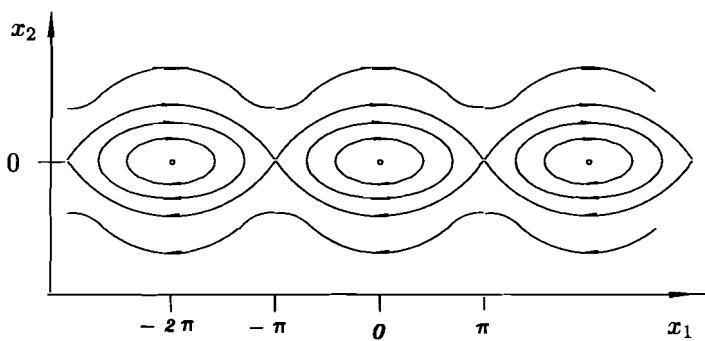


Figura 2.9: Péndulo. Plano de estado

Ejemplo 2.11 Considérese la siguiente ecuación escalar:

$$\dot{x} = -a x, \quad x(0) \in \mathbb{R},$$

donde a es una constante positiva. El origen es el único estado de equilibrio. Para analizar la estabilidad del equilibrio, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov que es definida positiva y radialmente desacotada,

$$V(x) = \frac{x^2}{2},$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x\dot{x}, \\ &= -a x^2.\end{aligned}$$

El origen es entonces un equilibrio global asintóticamente estable según el Teorema 2.4.

Ejemplo 2.12 Considérense las siguientes ecuaciones autónomas:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + k x_2, & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= -k x_1, & x_2(0) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

donde $k \neq 0$. El origen es el único estado de equilibrio. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov —definida positiva y radialmente desacotada— para estudiar la estabilidad del equilibrio:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

La derivada de $V(x_1, x_2)$ con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2.$$

Luego, de acuerdo con el Teorema 2.2 se concluye estabilidad del origen. Como $\dot{V}(x_1, x_2)$ no satisface las condiciones del Teorema 2.4, es decir, no cumple con $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ para todo $[x_1 \ x_2]^T \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, entonces no puede afirmarse en este punto que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

No obstante, como las ecuaciones objeto de estudio son autónomas, adicionalmente podría tratarse de probar estabilidad asintótica global mediante el teorema de LaSalle (Teorema 2.6). Con este propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}, \\ &= \{x_1 = 0 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$ si y sólo si $x_1 = 0$. Para que una solución $\mathbf{x}(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $x_1(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacerse que $\dot{x}_1(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Tomando esto en consideración, de las ecuaciones en estudio se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}0 &= kx_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 0,\end{aligned}$$

significando que $x_2(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. Luego, el teorema de LaSalle permite concluir estabilidad asintótica global del origen.

Ejemplo 2.13 Considérense las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = -x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3 & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 & x_2(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_3 = -k_2 x_1 & x_3(0) \in \mathbb{R} \end{array}$$

donde $k \neq 0$. El origen es el único estado de equilibrio. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov —definida positiva y radialmente desacotada— para estudiar la estabilidad del equilibrio:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

La derivada de $V(x_1, x_2)$ con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2.$$

Luego, de acuerdo con el Teorema 2.2 se concluye estabilidad del origen. Como $\dot{V}(x_1, x_2)$ no satisface las condiciones del Teorema 2.4, es decir, no cumple con $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ para todo $[x_1 \ x_2]^T \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, entonces no puede afirmarse en este punto que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

No obstante, como las ecuaciones objeto de estudio son autónomas, adicionalmente podría tratarse de probar estabilidad asintótica global mediante el teorema de LaSalle (Teorema 2.6). Con este propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}, \\ &= \{x_1 = 0 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$ si y sólo si $x_1 = 0$. Para que una solución $\mathbf{x}(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $x_1(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacerse que $\dot{x}_1(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Tomando esto en consideración, de las ecuaciones en estudio se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}0 &= kx_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 0,\end{aligned}$$

significando que $x_2(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. Luego, el teorema de LaSalle permite concluir estabilidad asintótica global del origen.

Ejemplo 2.13 Considérense las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = -x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3 & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 & x_2(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_3 = -k_2 x_1 & x_3(0) \in \mathbb{R} \end{array}$$

donde $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Las ecuaciones anteriores representan una ecuación diferencial lineal autónoma cuyos equilibrios son:

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -\frac{k_1}{k_2}x_2 \end{bmatrix}^T.$$

Nótese que existe un número infinito de puntos de equilibrio, uno para cada $x_2 \in \mathbb{R}$. Para $x_2 = 0$, el origen es un equilibrio. Para estudiar la estabilidad del origen, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov que es definida positiva y radialmente desacotada:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

cuya derivada temporal es

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2.$$

El Teorema 2.3 garantiza estabilidad del origen y acotamiento de las soluciones. El Teorema 2.4 sobre estabilidad asintótica global, no puede usarse ya que $\dot{V}(x_1, x_2, x_3)$ es nula para $x_1 = 0$ y cualquier valor de x_2 y x_3 , es decir, no se satisface $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$. Las ecuaciones en estudio, a pesar de ser autónomas, tienen un número infinito de equilibrios. Por la razón anterior, y de acuerdo con el Teorema 2.5, el origen no puede ser un equilibrio asintóticamente estable en forma global. No obstante, puede adicionalmente concluirse del Lema 2.2 que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ donde se ha tomado $\mathbf{x} = x_1$, $\mathbf{z} = [x_2 \quad x_3]^T$ y

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad Q = 1, \quad h = 0.$$

Referencias

Gran parte del contenido del segundo epígrafe del presente capítulo se inspiró en el siguiente texto:

- Vidyasagar, M., 1993, “*Nonlinear systems analysis*”, Prentice-Hall, New Jersey.

La definición de espacios L_p se expone claramente en el Capítulo 6 del texto de Vidyasagar (1993).

Los Lemas 2.1 y 2.3 pueden verse en las páginas 232 y 59 del texto:

- Desoer, C., Vidyasagar, M., 1975, “*Feedback systems: input-output properties*”, Academic Press, New York.

La definición y teoremas sobre puntos fijos pueden consultarse en:

- Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1970, “*Introductory real analysis*”, Dover Publishing Inc.
- Hale, J. K., 1980, “*Ordinary differential equations*”, Krieger Publishing Co.
- Khalil, H. K., 1996, “*Nonlinear Systems*”, Second Edition, Prentice Hall.
- Sastry, S., 1999, “*Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*”, Springer-Verlag, New York.

Diversas definiciones y teoremas se han consultado en:

- Vidyasagar, M., 1978, “*Nonlinear Systems Analysis*”, Prentice-Hall, Electrical Engineering Series.
- Khalil, H. K., 1996, “*Nonlinear Systems*”, Second Edition, Prentice Hall.

En particular, la definición de estabilidad asintótica 2.3 se ha extraído de la definición 5.1.14 del libro de Vidyasagar (1978) en la página 135.

El Teorema de estabilidad 2.2 corresponde al Teorema 5.2.1, página 148 del texto de Vidyasagar (1978); el Teorema de estabilidad asintótica global 2.4 ha sido adaptado del Teorema de estabilidad asintótica global en forma uniforme del Teorema 3.8 y Corolario 3.3 del libro de Khalil (1996) (páginas 138 y 140 respectivamente).

Otras referencias adicionales sobre ecuaciones diferenciales y estabilidad en el sentido de Lyapunov son:

- Arnold, V., 1973, “*Ordinary differential equations*”, MIT Press.
- Borrelli, R., Coleman, C., 1987, “*Differential equations-A modeling approach*”, Prentice-Hall.
- Slotine, J. J., Li, W., 1991, “*Applied nonlinear control*”, Prentice-Hall.

La versión general del teorema de LaSalle puede encontrarse en:

- LaSalle, J., Lefschetz, S., 1961, “*Stability by Lyapunov's direct method with applications*”, Academic Press, New York.

Problemas

1. Considérense los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que:

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \|\mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{y}\| \end{array} \right\|.$$

2. Considérese la matriz $P(x)$:

$$P(x) = \begin{bmatrix} k & -\frac{\varepsilon}{1+2x^2} \\ -\frac{\varepsilon}{1+2x^2} & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\varepsilon > 0$. Demostrar que si $k > \varepsilon^2$ entonces $P(x)$ es una matriz definida positiva, i.e., $P(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

3. Considérese la función continua:

$$f(t) = \begin{cases} 2^{n+2}(t-n) & \text{si } n < t < n + \frac{1}{2^{n+2}} \\ 1 - 2^{n+2} \left[t - \left(n + \frac{1}{2^{n+2}} \right) \right] & \text{si } n + \frac{1}{2^{n+2}} \leq t < n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & \text{si } n + \frac{1}{2^{n+1}} \leq t \leq n + 1 \end{cases}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. El límite cuando $t \rightarrow \infty$ de $f(t)$ no existe (véase la Figura 2.10). Demostrar que $f(t)$ pertenece al espacio L_2 .

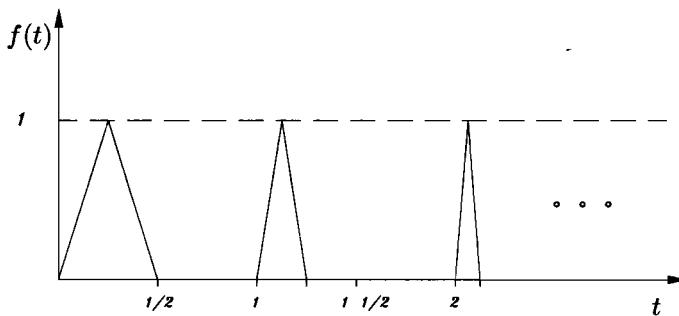


Figura 2.10: Problema 3

Ayuda: Nótese que $f^2(t) \leq h^2(t)$ donde

$$h^2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < t < n + \frac{1}{2^{n+2}} \\ 1 & \text{si } n + \frac{1}{2^{n+2}} \leq t < n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & \text{si } n + \frac{1}{2^{n+1}} \leq t \leq n + 1 \end{cases}$$

y que $\int_0^\infty |h(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^\infty (1/2^i)$.

4. Considérese la ecuación diferencial que describe el comportamiento de una neurona de Hopfield:

$$\dot{x} = -ax + w \tanh(x) + b$$

donde $a > 0$, $w, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Demostrar mediante el teorema de contracción de mapas que si $a - |w| > 0$, entonces la ecuación diferencial tiene un único equilibrio.
 - (b) Supóngase que $a = b = 1$ y $w = 1/2$. Usar el teorema de contracción de mapas junto con un algoritmo numérico para obtener un valor aproximado del único equilibrio de la ecuación diferencial.
5. Considérese la siguiente función:

$$V(x_1, x_2) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

¿Es $V(x_1, x_2)$ una función definida positiva?

6. Considérese la función:

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Demostrar que si $a > 0$ y $ac > b^2$ entonces $V(x_1, x_2)$ es una función definida positiva.

7. Considérese la ecuación diferencial lineal autónoma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostrar que si existe un polo de la ecuación en el origen del plano complejo, entonces la ecuación tiene un número infinito de equilibrios.

Ayuda: Los polos son los valores propios de A .

8. Un equilibrio $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio aislado* de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ si existe un número real positivo $\alpha > 0$ tal que no hay otro equilibrio aparte de \mathbf{x}_e en Ω :

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| < \alpha\}.$$

En caso de no existir algún $\alpha > 0$ que satisfaga lo anterior, entonces el equilibrio \mathbf{x}_e es no aislado.

Supóngase que \mathbf{x}_e es un equilibrio no aislado. Respóndase verdadero o falso a las siguientes afirmaciones:

- (a) El equilibrio \mathbf{x}_e no puede ser asintóticamente estable.

(b) El equilibrio \mathbf{x}_e forzosamente es estable.

9. Considérese la función $\mathbf{f}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

Supóngase que $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0} \iff x = 0$ y $y = 0$. ¿Implica que

$$f_1(x, y) = 0 \iff x = 0 \text{ y } y = 0?$$

10. Considérese el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon[x_1 - \varepsilon] + x_2 - (x_1 - \varepsilon) \left[(x_1 - \varepsilon)^2 + x_2^2 \right], & x_1(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 - \varepsilon) + \varepsilon x_2 - x_2 \left[(x_1 - \varepsilon)^2 + x_2^2 \right], & x_2(0) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ es constante. Determinar los estados de equilibrio.

11. Considérese la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{y} + (y^2 - 1)\dot{y} + y^2 + 1 = 0, \quad y(0), \dot{y}(0) \in \mathbb{R}.$$

Expresar la ecuación en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

(a) ¿Es una ecuación lineal en el estado \mathbf{x} ?

(b) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio? Explíquese.

12. Considérese la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Supóngase que $\mathbf{x}_e = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable. ¿Implica que $\mathbf{x} \in L_\infty^n$?

13. Considérese las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3 \end{aligned}$$

cuyo origen es un equilibrio. Utilizar el método directo de Lyapunov (proponer una función de Lyapunov) para demostrar que el origen es estable.

14. Selecciónense números enteros positivos m y n y constantes adecuadas a y b para construir una función de Lyapunov de la forma

$$V(x_1, x_2) = ax_1^{2m} + bx_2^{2n}$$

para demostrar estabilidad del origen de:

(a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2^3.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3.\end{aligned}$$

15. El Teorema 2.4 permite determinar estabilidad asintótica *global* de un equilibrio de una ecuación diferencial. Para determinar solamente estabilidad asintótica (*local*) las condiciones del Teorema 2.4 que imponen a la función candidata de Lyapunov $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ ser:

- Definida positiva (globalmente).
- Radialmente desacotada.
- Menguante (globalmente).
- $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ definida negativa (globalmente).

deben cambiarse por:

- Definida positiva localmente.
- Menguante (localmente).
- $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ definida negativa localmente.

Si además la ecuación diferencial es autónoma y la función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ es independiente del tiempo, entonces el equilibrio será asintóticamente estable (localmente) si $V(\mathbf{x})$ es definida positiva localmente y $\dot{V}(\mathbf{x})$ es definida negativa localmente. Una aplicación de lo anterior se ilustra a continuación.

Considérese el modelo de un péndulo ideal de longitud l y masa m concentrada en su extremo, sometido a la acción de la gravedad g , el cual posee fricción en sus soportes ($f > 0$: coeficiente de fricción):

$$ml^2\ddot{q} + f\dot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = 0,$$

donde q es la posición angular con respecto a la vertical. Escribir el modelo en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = [q \ \dot{q}]^T$.

- (a) Determinar los equilibrios de la ecuación.
- (b) Demostrar estabilidad asintótica del origen mediante la siguiente función de Lyapunov:

$$V(q, \dot{q}) = 2mgl[1 - \cos(q)] + \frac{ml^2}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{f}{l\sqrt{m}}q + l\sqrt{m}\dot{q} \right]^2.$$

- (c) ¿Es $\dot{V}(q, \dot{q})$ una función definida negativa?

3

Modelo dinámico

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados formados por eslabones conectados entre sí a través de uniones o articulaciones. Las articulaciones son básicamente de dos tipos: rotacionales y traslacionales. En este texto se considerarán robots manipuladores formados por una cadena cinemática abierta como la mostrada en forma abstracta en la Figura 3.1.

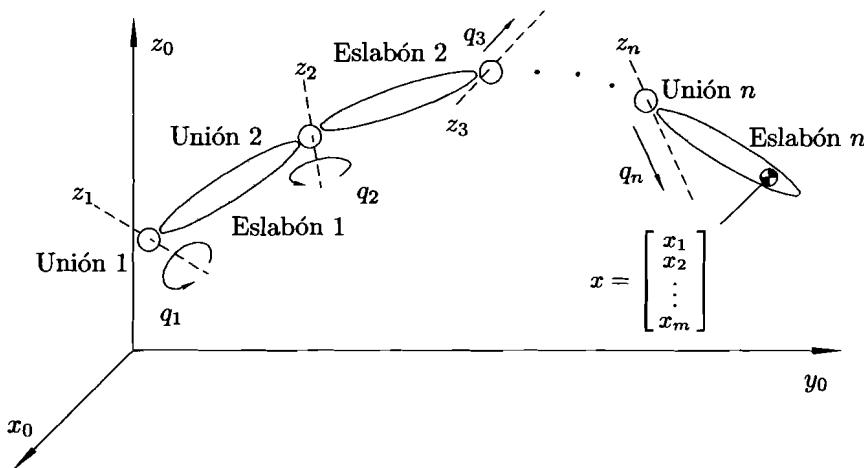


Figura 3.1: Diagrama abstracto de un robot manipulador de n g.d.l.

Considérese el brazo articulado de n eslabones mostrado en la Figura 3.1. Tradicionalmente, se coloca un marco de referencia cartesiano de tres dimensiones en cualquier lugar de la base del robot, siendo denotado indistintamente aquí por las coordenadas $[x \ y \ z]^T$ o $[x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ o $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$. Los eslabones se numeran consecutivamente desde la base (Eslabón 0) hasta el final (Eslabón n). Las uniones son los puntos de contacto entre los eslabones y se numeran de tal forma que la unión i conecta los eslabones i e $i - 1$.

Cada unión se controla independientemente a través de un accionador, que se coloca generalmente en dicha unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones. Aquí se denotará temporalmente por z_i , al eje de movimiento de la unión i . La coordenada articular generalizada denotada por q_i es el desplazamiento angular alrededor de z_i si la unión i es rotacional, o el desplazamiento lineal sobre z_i si la unión i es translacional. En el caso típico donde los accionadores se localizan en las uniones entre eslabones, las coordenadas articulares generalizadas reciben el nombre de *posiciones articulares*. A menos que se indique lo contrario, aquí se supondrá que éste es el caso.

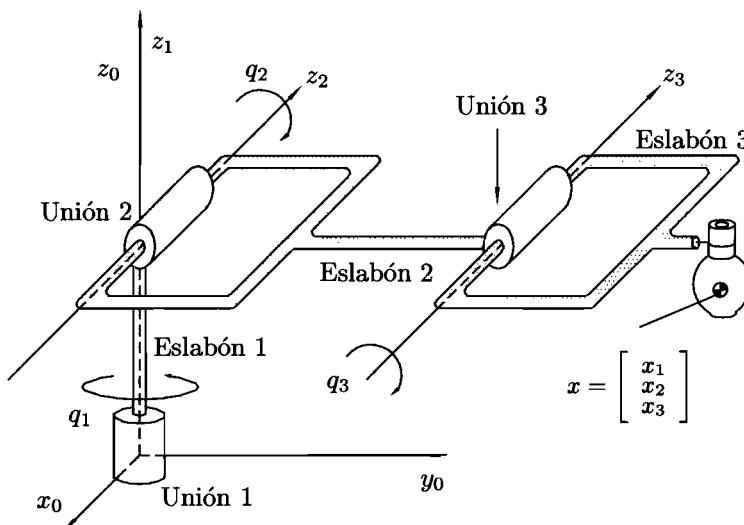


Figura 3.2: Robot de 3 g.d.l.

Ejemplo 3.1 La Figura 3.2 muestra un manipulador de 3 g.d.l. La colocación de los ejes z_i así como las coordenadas articulares, se muestran en dicha figura.

Las posiciones articulares correspondientes a cada **articulación del robot**, que se miden por medio de sensores colocados en los accionadores localizados generalmente justo en las articulaciones, se agrupan para propósitos de análisis en el **vector de posiciones articulares** q . En consecuencia, para un robot con n articulaciones, es decir, de n g.d.l., el vector de

siciones articulares \mathbf{q} tendrá n elementos:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, también resulta de gran interés, sobre todo desde un punto de vista práctico, la determinación de la posición y orientación del dispositivo terminal del robot, esto que este dispositivo terminal realiza la tarea encomendada al robot, tal como abrir cerrar una garra, aplicar una soldadura, etc. Dicha posición y orientación se expresa en términos del marco de referencia coordenado cartesiano (x, y, z) colocado en la base del robot, así como eventualmente en términos de los llamados ángulos de Euler. Dichas coordenadas (y ángulos) son agrupados en el vector \mathbf{x} de posiciones *cartesianas*¹:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

donde $m \leq n$. En el escenario donde el extremo final del robot puede tomar cualquier posición y orientación en el espacio euclíadiano de dimensión 3, se tendrá $m = 6$. Por otra parte, si el movimiento del robot se realiza en un plano (dimensión 2) y sólo interesa la posición de su extremo final, entonces $m = 2$. Si además, se está interesado en su orientación en el plano, entonces $m = 3$.

El *modelo cinemático directo* de un robot, describe la relación entre la posición articular \mathbf{q} y la posición y orientación \mathbf{x} del dispositivo terminal del robot. En otras palabras, el modelo cinemático directo de un robot es una relación de la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}).$$

La obtención del modelo cinemático directo $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, aunque laboriosa, es metódica, y en el caso de robots de escasos g.d.l., involucra sencillas expresiones trigonométricas.

El *modelo cinemático inverso* consiste justamente en la relación inversa del modelo cinemático directo, es decir, es la relación entre la posición cartesiana \mathbf{x} y la posición articular \mathbf{q} , i.e.,

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}).$$

A diferencia del modelo cinemático directo, la determinación del modelo cinemático inverso $\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$ puede resultar complicado, pudiendo tener, inclusive, ninguna o múltiples soluciones.

¹También se conocen como posiciones operacionales.

El *modelo dinámico* de un robot consiste en una ecuación diferencial (ordinaria) vectorial en las posiciones, ya sean articulares \mathbf{q} o cartesianas \mathbf{x} , generalmente de segundo orden, pudiéndose expresar como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

donde aquí, $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ en (3.1) y (3.2) no es la misma, ni tampoco debe ser confundida con la relación $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ del modelo cinemático directo y, finalmente, $\boldsymbol{\tau}$ denota al vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones por medio de los accionadores. El modelo dinámico (3.1) recibe el nombre de modelo dinámico articular, mientras que (3.2) es el modelo dinámico cartesiano. En este texto, sólo se considerará el *modelo dinámico articular*, y se omitirá por simplicidad, el vocablo *articular*.

Tanto la cinemática como la dinámica son fundamentales para planear y llevar a cabo una aplicación específica para un robot manipulador. El modelado cinemático y dinámico de robots manipuladores, se trata munuciosamente en un sinfín de textos sobre mecánica y robótica (véanse las referencias al final del capítulo).

No obstante, en el presente capítulo se presentan las ecuaciones dinámicas de los robots manipuladores. Aparte de la importancia incuestionable de los modelos dinámicos de los manipuladores en el diseño de controladores, los modelos dinámicos pueden utilizarse también para simular, mediante equipo de cómputo, el comportamiento del robot antes de que éste sea construido físicamente. Esta etapa de simulación es importante, ya que permite mejorar el diseño del robot, de manera que pueda realizar una tarea dada de forma adecuada.

Uno de los procedimientos más empleados para la obtención de los modelos dinámicos de los robots manipuladores, en forma cerrada, es el basado en las ecuaciones de movimiento de Lagrange. El empleo de las ecuaciones de Lagrange para el modelado, requiere la noción de dos conceptos importantes, con los cuales el lector seguramente está familiarizado: la energía cinética y la energía potencial. A continuación se describe con detalle el procedimiento de modelado dinámico mediante las ecuaciones de Lagrange.

3.1 Ecuaciones de movimiento de Lagrange

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Estas últimas reciben el nombre de Lagrange, debido a que fue el primero que las dió a conocer en 1788.

Considérese el robot manipulador que se compone de n eslabones mostrado en la Figura 3.1. La energía total \mathcal{E} de un robot manipulador de n g.d.l. es la suma de sus

energías cinética \mathcal{K} y potencial \mathcal{U} :

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathcal{U}(\mathbf{q}(t))$$

donde $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$.

El *lagrangiano* $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot manipulador de n g.d.l. es la diferencia entre su energía cinética \mathcal{K} y su energía potencial \mathcal{U} :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)). \quad (3.3)$$

Aquí se considera que la energía potencial \mathcal{U} se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y a fuerzas de resortes.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n g.d.l., vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau},$$

o de forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente (por accionadores) en cada articulación así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se incluyen las de fricción, las de resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, y en general las que dependen del tiempo o de la velocidad.

Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como g.d.l. tenga el robot manipulador.

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas:

1. Cálculo de la energía cinética: $\mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$.
2. Cálculo de la energía potencial: $\mathcal{U}(\mathbf{q}(t))$.
3. Cálculo del lagrangiano (3.3): $\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$.
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (3.4).

En lo que resta del epígrafe se presentarán algunos ejemplos con el fin de mostrar el procedimiento de modelado de robots mediante el empleo de las ecuaciones de Lagrange.

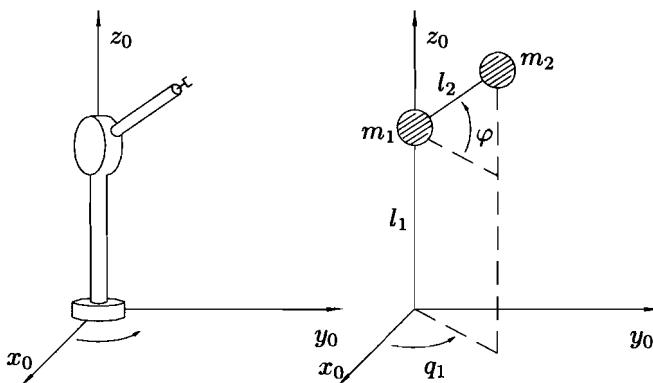


Figura 3.3: Robot de 1 g.d.l.

Ejemplo 3.2 Considérese el mecanismo mostrado en la Figura 3.3. Éste consiste en un eslabón rígido formado por dos partes de longitudes l_1 y l_2 , cuyas masas m_1 y m_2 son consideradas por simplicidad puntuales y concentradas en sus respectivos extremos. El ángulo φ es constante.

El artefacto sólo posee un movimiento rotacional q_1 alrededor del eje z_0 . Para este ejemplo, el único g.d.l. es el asociado a la unión o articulación 1. Se tiene entonces que $q(t)$ es un escalar definido como $q(t) = q_1(t)$.

El modelo dinámico de este aparato puede obtenerse fácilmente utilizando los conceptos de dinámica de cuerpos rígidos en rotación, estudiados en los cursos elementales de física. Sin embargo, para fines demostrativos, se emplearán las ecuaciones de Lagrange para obtener el modelo dinámico.

La energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ del mecanismo viene dada por el producto de la mitad del momento de inercia por el cuadrado de la velocidad angular, i.e.,

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_2l_2^2 \cos^2(\varphi) \dot{q}^2$$

y la correspondiente energía potencial $\mathcal{U}(q)^2$:

$$\mathcal{U}(q) = m_1l_1g + m_2[l_1 + l_2 \operatorname{sen}(\varphi)]g$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. A decir verdad, en este caso la energía potencial es constante y no depende de la posición articular q .

El lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ expresado por (3.3) es, en este caso,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{m_2l_2^2}{2} \cos^2(\varphi) \dot{q}^2 - m_1l_1g - m_2[l_1 + l_2 \operatorname{sen}(\varphi)]g,$$

²Aquí se considera la energía potencial como cero en el plano x_0-y_0 .

de donde pueden obtenerse fácilmente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi) \dot{q}, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] &= m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi) \ddot{q}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0.\end{aligned}$$

La Ecuación de Lagrange (3.4) correspondiente es entonces:

$$m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi) \ddot{q} = \tau, \quad (3.5)$$

donde τ es el par aplicado a la unión 1. La Ecuación (3.5) describe el comportamiento dinámico de este simple mecanismo. Nótese que el modelo dinámico es simplemente una ecuación diferencial lineal no autónoma de segundo orden que resulta de aplicar la segunda ley de Newton a un cuerpo rígido en rotación siendo $m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi)$ su momento de inercia rotacional.

La Ecuación (3.5) puede expresarse en términos del vector de estado $[q \ \dot{q}]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi)} \tau(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

La condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrios es $\tau(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. En esta situación, la ecuación tiene un número infinito de equilibrios dados por $[q \ \dot{q}]^T = [s \ 0]^T \in \mathbb{R}^2$ con $s = q(0) \in \mathbb{R}$. La interpretación de este resultado es la siguiente. Si en el instante $t = 0$ la posición q tiene cualquier valor $s \in \mathbb{R}$ y la velocidad \dot{q} es cero, y además no se aplica par alguno en la unión ($\tau = 0$), entonces para todo instante $t > 0$ se tendrá $q(t) = s$ y $\dot{q}(t) = 0$. Lo expuesto anteriormente concuerda con la interpretación física del concepto de equilibrio.

En el siguiente ejemplo, se analiza el caso de un robot de 2 g.d.l. El modelo de dicho robot se empleará extensamente en los siguientes capítulos como *robot prototipo* para la realización de simulaciones, con el propósito de observar el comportamiento de diversos sistemas de control de robots.

Ejemplo 3.3 Considérese el brazo mecánico de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 3.4. El brazo manipulador está formado por 2 eslabones rígidos de longitudes l_1 y l_2 , y masas m_1 y m_2 respectivamente. Las uniones 1 y 2 son

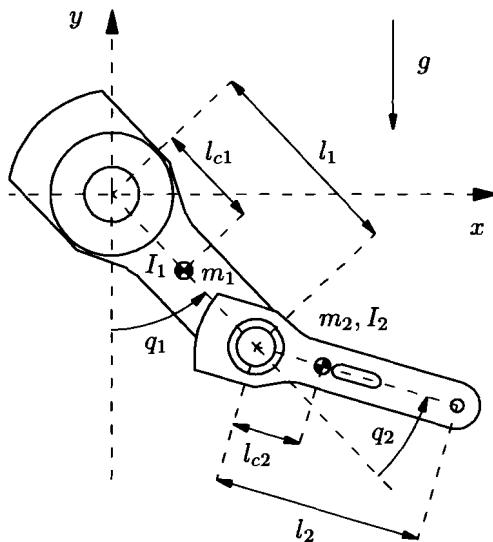


Figura 3.4: Robot de 2 g.d.l.

rotacionales. Los desplazamientos del robot se llevarán a cabo en el plano vertical $x-y$ mostrado en la Figura 3.4. La distancia entre los ejes de giro y los centros de masas se denota por l_{c1} y l_{c2} respectivamente. Por último, I_1 e I_2 expresan los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masas y que es perpendicular al plano $x-y$. Los g.d.l. están asociados a los ángulos q_1 —que se mide desde la posición vertical hacia abajo— y q_2 que se mide a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2, siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El vector de posiciones articulares $\mathbf{q}(t)$ se define como:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t)]^T.$$

La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de dos partes: $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ donde $\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ son las energías cinéticas asociadas a las masas m_1 y m_2 respectivamente³. A continuación se obtienen dichas expresiones.

³La energía cinética se determina como la suma de:

- El producto de la mitad de su masa por el cuadrado de la rapidez del centro de masa.
- El producto de la mitad de su momento de inercia (referido al centro de masa) por el cuadrado de su velocidad angular (referido al centro de masa).

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 1 expresadas en el plano $x-y$ son:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_{c1} \operatorname{sen}(q_1), \\y_1 &= -l_{c1} \cos(q_1).\end{aligned}$$

El vector velocidad \mathbf{v}_1 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la rapidez al cuadrado $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1$ del centro de masa resulta ser:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2.$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del eslabón 1 se obtiene como:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2, \\&= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Por otro lado, las coordenadas del centro de masa del eslabón 2 expresadas en el plano $x-y$ son:

$$\begin{aligned}x_2 &= l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\y_2 &= -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2).\end{aligned}$$

El vector velocidad \mathbf{v}_2 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}, \\&= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, empleando las identidades trigonométricas $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$ y $\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_1 + q_2) + \cos(q_1)\cos(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$ se obtiene finalmente la rapidez al cuadrado $\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2$ del centro de masa del eslabón 2:

$$\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2)$$

de donde:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2, \\&= \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\&\quad + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \\&\quad + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2.\end{aligned}\quad (3.7)$$

De forma similar, la energía potencial puede descomponerse como la suma de 2 partes: $\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) + \mathcal{U}_2(\mathbf{q})$ donde $\mathcal{U}_1(\mathbf{q})$ y $\mathcal{U}_2(\mathbf{q})$ son las energías potenciales asociadas a las masas m_1 y m_2 respectivamente. Se tiene entonces que⁴:

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{q}) = -m_1 l_{c1} g \cos(q_1) \quad (3.8)$$

y

$$\mathcal{U}_2(\mathbf{q}) = -m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2). \quad (3.9)$$

A partir de las Ecuaciones (3.6)–(3.9) puede obtenerse el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \\ &= \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) - \mathcal{U}_2(\mathbf{q}), \\ &= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ &\quad + m_2 l_{c1} l_{c2} \cos(q_2) [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \\ &\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1) \\ &\quad + m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \end{aligned}$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 \\ &\quad + 2m_2 l_{c1} l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 + m_2 l_{c1} l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ &\quad + I_1 \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_{c1} l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c1} l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_{c1} l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_{c1} l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ &\quad + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2]. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_{c1} l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2].$$

⁴Aquí se considera que la energía potencial es nula en $y = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2].\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2] - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2).$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange (3.4):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2$$

de donde finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) \\ &\quad + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2),\end{aligned}\tag{3.10}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_2 &= [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2),\end{aligned}\tag{3.11}$$

siendo τ_1 y τ_2 , los pares que actúan en las uniones 1 y 2.

Nótese que las ecuaciones dinámicas del robot (3.10)-(3.11) son un conjunto de dos ecuaciones diferenciales no lineales en el estado.

El siguiente ejemplo presenta el modelado dinámico de un robot de 2 g.d.l. con articulaciones rotacionales y cuyo movimiento se realiza en el plano horizontal. Una peculiaridad de dicho ejemplo es que los accionadores que suministran los pares no se encuentran propiamente en las articulaciones, sino que transmiten el movimiento a través de bandas, engranes o juegos de palancas. Estos tipos de transmisiones de movimiento son comunes en los robots industriales.

Ejemplo 3.4 Considérese el brazo robótico de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 3.5. El brazo mecánico está formado por 2 eslabones rígidos, siendo l_1 la longitud del primer eslabón. Las uniones 1 y 2 son rotacionales. Los desplazamientos del robot se llevarán a cabo en el plano horizontal $x-y$ mostrado en la Figura 3.5. Las masas de los eslabones se denotan por m_1 y m_2 respectivamente. Nótese que el centro de masa del eslabón 2 puede localizarse físicamente fuera del eslabón. Esto último viene determinado por el valor del ángulo constante δ . La distancia de los ejes de giro a los centros de masas se denota por l_{c1} y l_{c2} , respectivamente. Los símbolos I_1 e I_2 denotan los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masas y que es paralelo al eje z . Las posiciones articulares se asocian a los ángulos q_1 y q_2 , que se miden entre los eslabones y un eje paralelo al eje x , siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. La transmisión de movimiento para el eslabón 2 se realiza mediante una banda, colocada el accionador correspondiente, en la base del robot. El vector de posiciones articulares $q(t)$ se define como:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t)]^T.$$

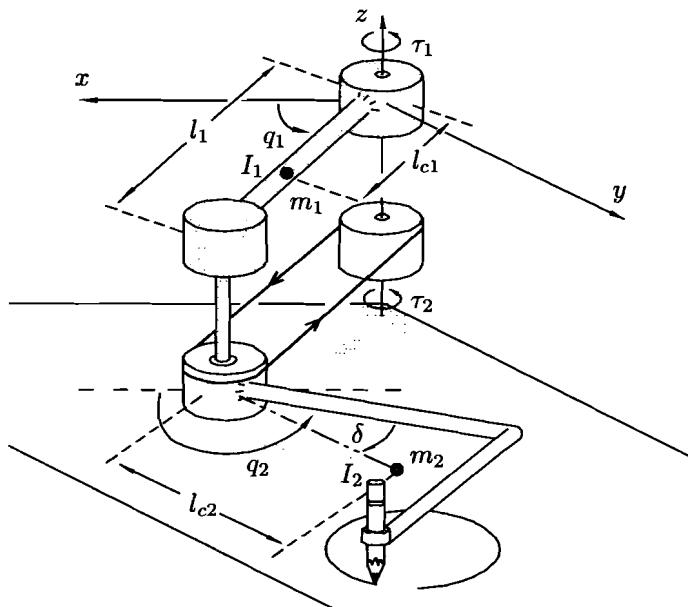


Figura 3.5: Robot de 2 g.d.l.

La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de dos partes: $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, donde $\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ son las energías cinéticas asociadas a las masas m_1 y m_2 respectivamente. A su vez, la energía cinética incluye los movimientos traslacionales y rotacionales. Se tiene entonces: $\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2$, donde v_1 es la rapidez del centro de masa del eslabón 1. En este caso:

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2. \quad (3.12)$$

Por otro lado, $\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2$, donde v_2 es la rapidez del centro de masa del eslabón 2. La rapidez del centro de masa del eslabón 2 al cuadrado v_2^2 , puede obtenerse como:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

donde \dot{x}_2 y \dot{y}_2 son las componentes del vector velocidad del centro de masa del eslabón 2, y se obtienen derivando con respecto al tiempo las posiciones x_2 y y_2 del centro de masa del eslabón 2:

$$x_2 = l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_2 - \delta)$$

$$y_2 = l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_2 - \delta).$$

Empleando las identidades trigonométricas: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ y $\sin(q_1)\sin(q_2 - \delta) + \cos(q_1)\cos(q_2 - \delta) = \cos(q_1 - q_2 + \delta)$, se llega finalmente a:

$$v_2^2 = l_1^2\dot{q}_1^2 + l_{c2}^2\dot{q}_2^2 + 2l_1l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{m_2}{2}l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_{c2}^2\dot{q}_2^2 + m_2l_1l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Debido a que el robot se desplaza en el plano horizontal, la energía potencial es nula, i.e., $\mathcal{U}(\mathbf{q}) = 0$.

A partir de las Ecuaciones (3.12)–(3.13), el lagrangiano toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \\ &= \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ &= \frac{1}{2} [m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_{c2}^2\dot{q}_2^2 \\ &\quad + m_2l_1l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2. \end{aligned}$$

De esta última ecuación pueden determinarse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1] \dot{q}_1 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta) \ddot{q}_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1] \ddot{q}_1 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta) \ddot{q}_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) [\dot{q}_1 - \dot{q}_2] \dot{q}_2.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta) \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta) \ddot{q}_1 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) \dot{q}_1 [\dot{q}_1 - \dot{q}_2] + I_2 \ddot{q}_2.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange (3.4):

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1] \ddot{q}_1 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta) \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) \dot{q}_2^2,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_2 &= m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_1 - q_2 + \delta) \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) \dot{q}_1^2.\end{aligned}$$

Finalmente, empleando las identidades:

$$\begin{aligned}\cos(q_1 - q_2 + \delta) &= \cos(\delta) \cos(q_1 - q_2) - \operatorname{sen}(\delta) \operatorname{sen}(q_1 - q_2) \\ &= \cos(\delta) \cos(q_2 - q_1) + \operatorname{sen}(\delta) \operatorname{sen}(q_2 - q_1), \\ \operatorname{sen}(q_1 - q_2 + \delta) &= \cos(\delta) \operatorname{sen}(q_1 - q_2) + \operatorname{sen}(\delta) \cos(q_1 - q_2) \\ &= -\cos(\delta) \operatorname{sen}(q_2 - q_1) + \operatorname{sen}(\delta) \cos(q_2 - q_1),\end{aligned}$$

y denotando $C_{21} = \cos(q_2 - q_1)$, $S_{21} = \sin(q_2 - q_1)$, se llega a las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1] \ddot{q}_1 \\ &+ [m_2 l_1 l_{c2} \cos(\delta) C_{21} + m_2 l_1 l_{c2} \sin(\delta) S_{21}] \ddot{q}_2 \\ &+ [-m_2 l_1 l_{c2} \cos(\delta) S_{21} + m_2 l_1 l_{c2} \sin(\delta) C_{21}] \dot{q}_2^2,\end{aligned}\quad (3.14)$$

y

$$\begin{aligned}\tau_2 &= [m_2 l_1 l_{c2} \cos(\delta) C_{21} + m_2 l_1 l_{c2} \sin(\delta) S_{21}] \ddot{q}_1 \\ &+ [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &+ [m_2 l_1 l_{c2} \cos(\delta) S_{21} - m_2 l_1 l_{c2} \sin(\delta) C_{21}] \dot{q}_1^2.\end{aligned}\quad (3.15)$$

El siguiente ejemplo presenta el modelado de un robot cartesiano de 3 g.d.l. cuya principal peculiaridad es la de ser un modelo dinámico lineal.

Ejemplo 3.5 Considérese el robot manipulador cartesiano de 3 g.d.l. mostrado en la Figura 3.6. El manipulador consta de tres eslabones rígidos mutuamente ortogonales. Las tres uniones del robot son de traslación. Los desplazamientos del robot se llevan a cabo en el espacio $x_0-y_0-z_0$ mostrado en la Figura 3.6. El vector de coordenadas del robot cartesiano es $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$.

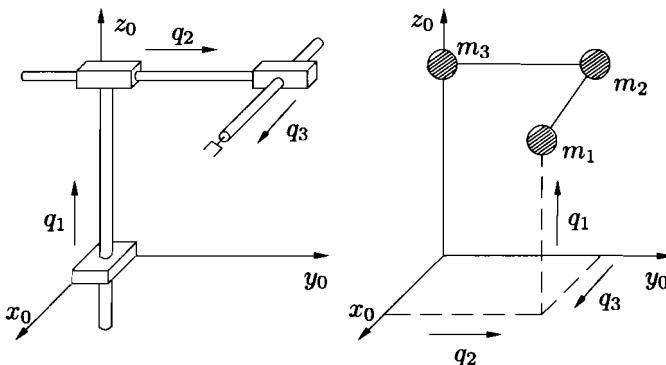


Figura 3.6: Robot de 3 g.d.l.

La energía cinética para este brazo manipulador viene dada por (véase la Figura 3.6):

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} [m_1 \dot{q}_3^2 + [m_1 + m_2] \dot{q}_2^2 + [m_1 + m_2 + m_3] \dot{q}_1^2]. \quad (3.16)$$

Por otro lado, la energía potencial es igual a la siguiente expresión:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = [m_1 + m_2 + m_3] g q_1. \quad (3.17)$$

De las Ecuaciones (3.16) y (3.17) se obtiene el lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \\ &= \frac{1}{2} [m_1 \dot{q}_3^2 + [m_1 + m_2] \dot{q}_2^2 + [m_1 + m_2 + m_3] \dot{q}_1^2] \\ &\quad - [m_1 + m_2 + m_3] g q_1. \end{aligned}$$

Se tiene entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = [m_1 + m_2 + m_3] \dot{q}_1, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] = [m_1 + m_2 + m_3] \ddot{q}_1,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = [m_1 + m_2] \dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] = [m_1 + m_2] \ddot{q}_2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = m_1 \dot{q}_3, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right] = m_1 \ddot{q}_3,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -[m_1 + m_2 + m_3] g.$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan al robot se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange (3.4):

$$[m_1 + m_2 + m_3] \ddot{q}_1 + [m_1 + m_2 + m_3] g = \tau_1, \quad (3.18)$$

$$[m_1 + m_2] \ddot{q}_2 = \tau_2, \quad (3.19)$$

$$m_1 \ddot{q}_3 = \tau_3, \quad (3.20)$$

donde τ_1 , τ_2 y τ_3 son las fuerzas aplicadas en cada unión. Nótese que en este ejemplo las Ecuaciones (3.18)-(3.20) definen un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales autónomas.

En términos del vector de estado $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$, las Ecuaciones

(3.18), (3.19) y (3.20) pueden expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \frac{1}{m_1+m_2+m_3} [\tau_1 - [m_1 + m_2 + m_3]g] \\ \frac{1}{m_1+m_2} \tau_2 \\ \frac{1}{m_1} \tau_3 \end{bmatrix}.$$

La condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrios es $\tau_1 = [m_1 + m_2 + m_3]g$, $\tau_2 = 0$ y $\tau_3 = 0$ y se tendrá un número infinito de equilibrios:

$$[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

con $s_1 = q_1(0)$, $s_2 = q_2(0)$, $s_3 = q_3(0) \in \mathbb{R}$.

3.2 Modelo dinámico de robots

En el epígrafe anterior se presentaron ejemplos mostrando la aplicación de las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones dinámicas para robots con geometrías particulares. La misma metodología puede emplearse para determinar el modelo dinámico de cualquier robot de n g.d.l.

Esta metodología se estudia normalmente en los textos tradicionales de robótica y mecánica teórica, por lo que aquí sólo se presentará de forma resumida. El lector interesado en más detalles, puede recurrir a los textos citados en las referencias al final del capítulo.

Considérese un robot manipulador de n g.d.l. formado por eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad. La energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ asociada a tal dispositivo mecánico articulado puede expresarse siempre como:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (3.21)$$

donde $M(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ denominada *matriz de inercia*. La energía potencial $\mathcal{U}(q)$ no tiene una forma específica como el caso de la energía cinética, pero se sabe que depende del vector de posiciones articulares q .

El lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, dado por la Ecuación (3.3), es en este caso:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}).$$

Con esta forma para el lagrangiano, la ecuación de movimiento de Lagrange (3.4) puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}.$$

Por otro lado, puede verificarse que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Considerando las expresiones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau},$$

o de modo compacto

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} &= \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}], \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La Ecuación (3.22) es la ecuación dinámica para robots de n g.d.l. Nótese que (3.22) es una ecuación diferencial vectorial no lineal en el estado $[\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$. $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis*, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de $n \times 1$ de *fuerzas o pares gravitacionales* y $\boldsymbol{\tau}$ es un vector de $n \times 1$ llamado el *vector de fuerzas externas*, siendo generalmente los pares y fuerzas aplicadas por los accionadores en las articulaciones.

La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ llamada *matriz centrífuga y de Coriolis* puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ sí lo es. Una manera de obtener $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel $c_{ijk}(\mathbf{q})$ definidos como:

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right], \quad (3.24)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$. En efecto, el kj -ésimo elemento $C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede obtenerse de la siguiente manera:

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(\mathbf{q}) \\ c_{2jk}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ c_{njk}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.25)$$

Aquí no se presentan detalles de la obtención de la expresión anterior, por lo que invitamos al lector a consultarlos en los textos citados al final del capítulo.

El modelo (3.22) puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es el vector τ y sus salidas son los vectores \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Esto puede esquematizarse mediante el diagrama de la Figura 3.7.



Figura 3.7: Diagrama de bloques

Cada elemento de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es, en general, una función relativamente compleja de las posiciones y velocidades de todas las articulaciones, i.e., de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Los elementos de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ dependen, por supuesto, de la geometría del robot que modelan.

Nótese que la determinación del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para un robot dado, puede obtenerse con relativa sencillez ya que viene dado por (3.23). En otras palabras, el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es simplemente el gradiente de la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$.

Ejemplo 3.6 El modelo dinámico del mecanismo obtenido en el Ejemplo 3.2, i.e., la Ecuación (3.5), puede escribirse en la forma genérica (3.22) tomando:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi), \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ g(\mathbf{q}) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7 El modelo dinámico del robot obtenido en el Ejemplo 3.3, i.e., las Ecuaciones (3.10) y (3.11) pueden escribirse en la forma genérica (3.22) tomando:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

La existencia de la matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ (ésta existe debido a que $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva) permite expresar el modelo dinámico (3.22) de un robot de n g.d.l. en términos del vector de estado $[\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Debido a la naturaleza no lineal del modelo dinámico (3.26) para robots de n g.d.l., el concepto de estabilidad de un robot en malla abierta debe manejarse con precaución. La definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov (Definición 2.2), es aplicable a un

estado de equilibrio, por lo que es indispensable, primeramente, determinar esos estados para la Ecuación (3.26) que describe el comportamiento del robot.

La condición necesaria y suficiente para existencia de equilibrios para la Ecuación (3.26) es que $\tau(t)$ sea constante y que además exista solución en $s \in \mathbb{R}^n$ para la ecuación algebraica, posiblemente no lineal en s : $g(s) = \tau$. En tal situación los equilibrios vienen dados por $[q^T \quad \dot{q}^T]^T = [s^T \quad 0^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. En el caso particular de $\tau \equiv 0$, los posibles equilibrios de (3.26) vendrían dados por $[q^T \quad \dot{q}^T]^T = [s^T \quad 0^T]^T$ donde s sería solución de $g(s) = 0$. Dada la definición de $g(q)$ como el gradiente de la energía potencial $\mathcal{U}(q)$, luego s corresponde a los vectores donde la energía potencial posee puntos extremos.

Ejemplo 3.8 Considérese el modelo dinámico de un brazo pendular ideal (1 g.d.l.) como el analizado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48) al que ahora se le aplica un par τ en el eje de rotación

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

o en términos del estado $[q \quad \dot{q}]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \dot{q} \\ (ml^2)^{-1} [\tau(t) - mgl \operatorname{sen}(q)] & \end{bmatrix},$$

donde $M(q) = ml^2$, $C(q, \dot{q}) = 0$ y $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$. Considerando $\tau(t) \equiv 0$, los estados de equilibrio vienen dados por $[q \quad \dot{q}]^T = [n\pi \quad 0]^T$ para $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ya que $g(n\pi) = mgl \operatorname{sen}(n\pi) = 0$. En el Ejemplo 2.10 se demostró la estabilidad del equilibrio correspondiente a $n = 0$. Puede demostrarse adicionalmente que los equilibrios asociados a n par son estables, mientras que para n impar son inestables. Para este mismo ejemplo, nótese que si $\tau(t) \equiv \tau$ es tal que $|\tau| > mgl$, entonces no existirá equilibrio alguno ya que no existe ningún $s \in \mathbb{R}$ tal que $\tau = g(s) = mgl \operatorname{sen}(s)$.

Un caso particular es el de robots cuya área de trabajo es el plano horizontal. En este caso $g(q) = 0$, por lo que es necesario y suficiente que $\tau(t) = 0$ para la existencia de equilibrios. Además resulta como estado de equilibrio $[q^T \quad \dot{q}^T]^T = [s^T \quad 0^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ donde s es cualquier vector de dimensión n . Lo anterior significa que existe un número infinito de estados de equilibrio.

Lo expuesto en epígrafes precedentes pone de manifiesto que al abordar el tema de la estabilidad de robots en malla abierta debe especificarse su modelo dinámico, así como las condiciones para la existencia de estados de equilibrio y seleccionar alguno de ellos

cuya estabilidad se desee analizar. La pregunta: “¿es el robot estable?” carece en consecuencia de sentido en el presente contexto.

Con relación al tema de modelado de robots manipuladores es importante hacer notar que la ecuación genérica (3.22) supone que los eslabones que forman el manipulador son rígidos, i.e., no presentan fenómenos de torsión ni flexión. Por otra parte, también se considera que las uniones entre cada eslabón no poseen fricción ni elasticidad.

3.3 Modelo dinámico de robots con fricción

Los efectos de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos complicados que dependen de múltiples factores como la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etc. Por este motivo, tradicionalmente las fuerzas y pares de fricción son modelados sólo de forma aproximada, aunque se reconoce que éstas dependen de la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto. De esta forma, se distinguen dos familias de modelos de fricción: los modelos estáticos en los que la fuerza o par de fricción viene dada en función de la velocidad *instantánea* relativa entre los cuerpos, y los modelos dinámicos, que dependen del pasado de la velocidad relativa.

En los modelos estáticos, la fricción es pues modelada por un vector $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ dependiente solamente de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$. Los efectos de fricción son locales, i.e., $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ puede expresarse como:

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1) \\ f_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ f_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}.$$

Una característica importante de las fuerzas de fricción es que éstas son disipativas, i.e.:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Un modelo estático “clásico” de fricción es aquel que combina los denominados fenómenos de fricción viscosa, y de fricción Coulomb. Este modelo establece que el vector $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ viene dado por:

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = F_{m1}\dot{\mathbf{q}} + F_{m2} \operatorname{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.27)$$

donde F_{m1} y F_{m2} son matrices de $n \times n$ diagonales definidas positivas. Los elementos de la diagonal de F_{m1} corresponden a los parámetros de fricción viscosa mientras que los de F_{m2} a los de fricción de Coulomb. En el modelo anterior:

$$\operatorname{sign}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(\dot{q}_1) \\ \operatorname{sign}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{sign}(\dot{q}_n) \end{bmatrix},$$

donde $\text{sign}(x)$ es la “función” signo dada por

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

pero $\text{sign}(0)$ es indefinido en el sentido de que no se asocia un número real particular a la “función” $\text{sign}(x)$ cuando $x = 0$. En ciertas aplicaciones este hecho no tiene mayor relevancia práctica, como por ejemplo en regulación de velocidad —mantener la velocidad en valores constantes (medios y altos)—, pero resulta decisivo tanto desde el punto de vista teórico como práctico en otras aplicaciones como en regulación de posición (mantener la posición en un valor constante). Por esta razón y del hecho de que el modelo “clásico” (3.27) describe inadecuadamente el comportamiento de la fricción a muy bajas velocidades, es decir, cuando los cuerpos están en reposo y comienzan el movimiento, éste no es recomendable para modelar la fricción cuando se aborda el control de posición pura de manipuladores. En tal situación es aconsejable hacer uso de modelos dinámicos de fricción, cuyo estudio va más allá de los objetivos de este texto.

Considerando un modelo estático de fricción en las uniones, la ecuación dinámica general del manipulador vendrá dada por:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.28)$$

En general, no se supondrá fricción en el modelo dinámico del manipulador a menos que se indique lo contrario.

3.4 Modelo dinámico de robots con accionadores

En un robot manipulador real, el vector de pares $\boldsymbol{\tau}$ es suministrado por accionadores que tradicionalmente son de tipo electromecánico, neumático o hidráulico. Dichos accionadores relacionan dinámicamente el par o fuerza suministrado con la entrada de dicho accionador. Esta entrada puede ser un voltaje o corriente para el caso de accionadores electromecánicos, y flujo o presión de aceite para accionadores hidráulicos. Las Figuras 3.8 y 3.9 muestran los esquemas de dos manipuladores de 2 g.d.l., en donde los accionadores transmiten el movimiento a través de engranes en el primer caso, y usando bandas y engranes en el segundo.

Accionadores con dinámica lineal

En ocasiones, cierto tipo de accionadores electromecánicos pueden modelarse satisfactoriamente mediante ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Un caso común es aquél donde los accionadores son motores de Corriente Continua (CC). El modelo dinámico relacionando el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ suministrado por dicho motor se expondrá con detalle en el Apéndice A. Un modelo dinámico lineal simplificado de un motor de CC con inductancia de armadura

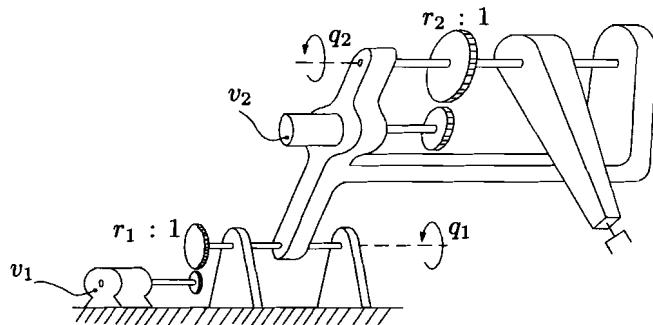


Figura 3.8: Robot de 2 g.d.l.

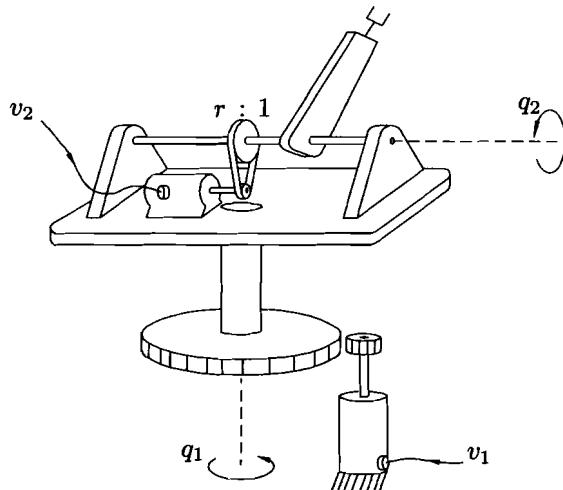


Figura 3.9: Robot de 2 g.d.l.

despreciable como el mostrado en la Figura 3.10, viene dado por la Ecuación (A.16) del Apéndice A:

$$J_m \ddot{q} + f_m \dot{q} + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (3.29)$$

donde

- J_m inercia del rotor [kg m^2].
- K_a constante motor-par [N m / A].

3.4 Modelo dinámico de robots con accionadores

- R_a resistencia de armadura [Ω].
- K_b constante de contrarreacción electromotriz [V s / rad].
- f_m coeficiente de fricción del rotor con sus soportes [N m].
- τ par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga [N m].
- q posición angular del eje de la carga [rad].
- r relación de reducción de los engranes (en general $r \gg 1$).
- v voltaje de armadura [V].

La Ecuación (3.29) relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ aplicado a la carga en términos de su posición, velocidad y aceleración angular.

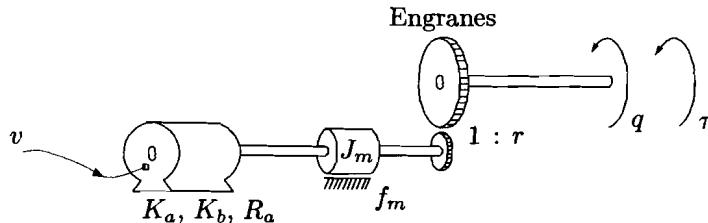


Figura 3.10: Motor de CC

Considerando que cada uno de los accionadores de las n articulaciones es un motor de CC, de la Ecuación (3.29) se obtiene:

$$J\ddot{q} + B\dot{q} + R\tau = Kv \quad (3.30)$$

con

$$J = \text{diag}\{J_{m_i}\},$$

$$B = \text{diag}\left\{f_{m_i} + \left(\frac{K_a K_b}{R_a}\right)_i\right\},$$

$$R = \text{diag}\left\{\frac{1}{r_i^2}\right\}, \quad (3.31)$$

$$K = \text{diag}\left\{\left(\frac{K_a}{R_a}\right)_i \frac{1}{r_i}\right\},$$

donde para cada motor ($i = 1, \dots, n$), J_{m_i} es la inercia del rotor, f_{m_i} el coeficiente de amortiguamiento, $(K_a K_b / R_a)_i$ es una constante electromecánica y r_i es la tasa de reducción del juego de engranes.

El modelo dinámico completo de un manipulador (considerando fricción en las articulaciones) cuyos accionadores se localizan en las articulaciones⁵ se obtiene reemplazando τ de (3.30) en (3.28):

$$[R M(q) + J] \ddot{q} + R C(q, \dot{q}) \dot{q} + R g(q) + R f(\dot{q}) + B \dot{q} = K v. \quad (3.32)$$

La ecuación anterior puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es v y sus salidas son q y \dot{q} . Un diagrama de bloques del modelo (3.32) del manipulador y sus accionadores es mostrado en la Figura 3.11.

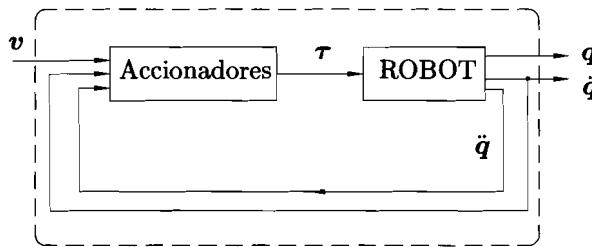


Figura 3.11: Robot-accionadores

Ejemplo 3.9 Considérese la articulación motriz pendular mostrada en la Figura 3.12. La articulación consiste en un motor de CC acoplado mecánicamente a través de engranes, a un brazo pendular moviéndose en un plano vertical, bajo la acción de la gravedad.

La ecuación de movimiento del brazo y su carga viene dada por:

$$[J + ml^2] \ddot{q} + f_L \dot{q} + [m_b l_b + ml] g \operatorname{sen}(q) = \tau$$

donde

- J inercia del brazo (sin carga).
- m_b masa del brazo (sin carga).
- l_b distancia desde el eje de giro al centro de masa del brazo (sin carga).
- m masa de la carga (supuesta puntual).
- l distancia desde el eje de giro a la carga m .
- g aceleración de la gravedad.
- τ par aplicado al eje de giro.

⁵Se supone despreciable el efecto de acoplamiento giroscópico entre los rotores y los eslabones.

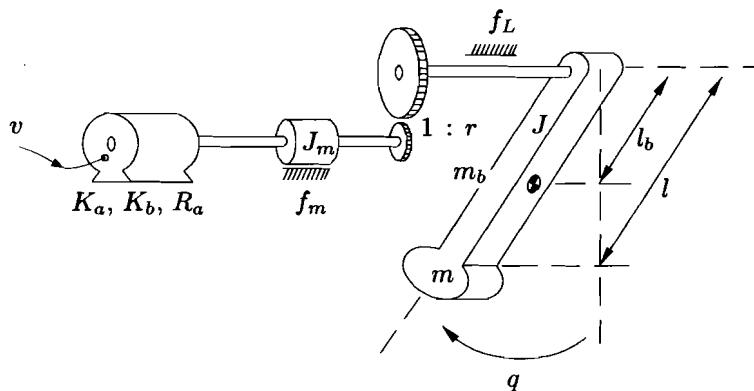


Figura 3.12: Articulación motriz pendular

- f_L constante de fricción viscosa del brazo y su carga.

La ecuación anterior puede escribirse en forma compacta como:

$$J_L \ddot{q} + f_L \dot{q} + k_L \operatorname{sen}(q) = \tau$$

donde

$$J_L = J + ml^2,$$

$$k_L = [m_b l_b + ml]g.$$

El modelo dinámico completo de la articulación motriz pendular se obtiene reemplazando τ del modelo del motor de CC (3.29) en la ecuación del brazo pendular

$$\left[J_m + \frac{J_L}{r^2} \right] \ddot{q} + \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} + \frac{k_L}{r^2} \operatorname{sen}(q) = \frac{K_a}{r R_a} v,$$

donde pueden identificarse por inspección con (3.32):

$$\begin{aligned} M(q) &= J_L, & C(q, \dot{q}) &= 0, & f(\dot{q}) &= f_L \dot{q}, \\ R &= \frac{1}{r^2}, & J &= J_m, & g(q) &= k_L \operatorname{sen}(q), \\ B &= f_m + \frac{K_a K_b}{R_a}, & K &= \frac{K_a}{r R_a}. \end{aligned}$$

La ecuación robot-accionadores (3.32) se simplifica considerablemente cuando las relaciones de engranajes r_i son suficientemente grandes. En dicho caso ($r_i \gg 1$), se tiene $R \approx 0$ y la Ecuación (3.32) puede aproximarse por:

$$J \ddot{q} + B \dot{q} \approx K v$$

es decir, la dinámica no lineal del robot (3.28) puede despreciarse. Lo expuesto anteriormente puede resumirse de la siguiente manera. Si la relación de reducción por el juego de engranes es elevada, entonces la dinámica asociada al modelo robot-accionadores se describe sólo por la dinámica de los accionadores. Éste es el argumento principal que fundamenta la idea de que un buen controlador de accionadores es adecuado para el control de robots provisto de dichos accionadores, y cuyo movimiento es transmitido a través de engranes de elevada reducción.

Es importante resaltar que los parámetros involucrados en la Ecuación (3.30), dependen exclusivamente de los accionadores, y no del manipulador ni de su carga. Entonces, es razonable suponer conocidos y constantes dichos parámetros.

Como la relación de engranes r_i se supone no nula, entonces la matriz R dada por (3.31) es no singular por lo que R^{-1} existe y la Ecuación (3.32) puede escribirse como:

$$M'(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + R^{-1}B\dot{\mathbf{q}} = R^{-1}K\mathbf{v} \quad (3.33)$$

donde $M'(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q}) + R^{-1}J$.

La existencia de la matriz $M'(\mathbf{q})^{-1}$ permite expresar el modelo (3.33) en términos del vector de estado $[\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M'(\mathbf{q})^{-1} [R^{-1} K\mathbf{v} - R^{-1} B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})] \end{bmatrix}.$$

El problema de control de movimiento en estas condiciones consiste en: dado un conjunto de vectores acotados \mathbf{q}_d , $\dot{\mathbf{q}}_d$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d$, determinar un vector de voltajes \mathbf{v} a suministrar a los motores, de tal forma que las posiciones \mathbf{q} asociadas a las coordenadas articulares del robot, sigan con precisión a \mathbf{q}_d .

3.5 Ecuaciones de movimiento de Hamilton

En este epígrafe se presenta una breve introducción a las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Estas ecuaciones son una alternativa a las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el modelado dinámico de robots manipuladores. Esto podría ser desconcertante a primera vista, debido a que ya se ha establecido que la Ecuación (3.22) describe el comportamiento dinámico de los robots manipuladores. Efectivamente, la ecuación (3.22) caracteriza la dinámica de los robots manipuladores en términos de las variables (vectores) de estado \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Dichas variables de estado tienen una interpretación física inmediata, i.e., las posiciones y velocidades articulares, y además son de fácil medición en los robots manipuladores. No obstante, la dinámica de un robot manipulador puede describirse también en términos de otras variables de estado. Justamente una de estas descripciones es la que se obtiene mediante las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Las variables (vectores) de estado son en este caso, la posición articular \mathbf{q} y la cantidad de movimiento (*momentum*) generalizado \mathbf{p} .

Como preámbulo a las ecuaciones de movimiento de Hamilton, primeramente se expresa la energía cinética en función de la posición \mathbf{q} y la cantidad de movimiento \mathbf{p} como

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad (3.34)$$

donde la cantidad de movimiento \mathbf{p} viene dada por:

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

En la expresión de la energía cinética (3.34), la matriz inversa $M^{-1}(\mathbf{q})$ existe puesto que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$, posee la propiedad de ser definida positiva para todo vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Nótese que las expresiones para la energía cinética $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ en (3.21) y $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ en (3.34) son, obviamente, equivalentes.

El hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es la suma de la energía cinética y de la energía potencial:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (3.35)$$

Como alternativa a las ecuaciones de movimiento de Lagrange (3.4), las ecuaciones de movimiento de Hamilton son:

$$\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i} = 0 \quad (3.36)$$

$$\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (3.37)$$

para $i = 1, \dots, n$.

La aplicación de las ecuaciones de movimiento de Hamilton (3.36)–(3.37) para el modelado dinámico de robots manipuladores, hace uso de la forma específica de la energía cinética (3.34). Por lo tanto, el hamiltoniano (3.35) toma la forma:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (3.38)$$

Finalmente, y en relación con las ecuaciones de Hamilton (3.36)–(3.37), el modelo dinámico de robots manipuladores puede describirse mediante:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right] - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

donde se ha usado (3.23), i.e., $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q})$.

A modo de ilustración, el modelo dinámico del péndulo estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48) puede ponerse en la forma (3.39) como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1/m l^2] \mathbf{p} \\ -m g l \sin(\theta) + \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}.$$

En el caso donde la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ posea un mínimo en \mathbf{q}^* , que entre paréntesis implica $\mathbf{g}(\mathbf{q}^*) = \mathbf{0}$, y en ausencia de pares y fuerzas ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$), el modelo dinámico (3.39) tendrá un equilibrio en $[\mathbf{q} \ \mathbf{p}] = [\mathbf{q}^* \ \mathbf{0}]$. También en este mismo caso, el hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*, \mathbf{p})$ resulta ser una función definida positiva localmente.

Por otra parte, es interesante observar que la variación temporal del hamiltoniano (3.38), es decir, de la suma de las energías cinética y potencial, viene dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right] \right]^T \dot{\mathbf{p}} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right] \right]^T \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right]^T \dot{\mathbf{q}}, \\ &= \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}] \right]^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}, \\ &= \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau},\end{aligned}\tag{3.40}$$

donde se ha empleado (3.39). Por lo tanto, si no se aplican pares o fuerzas en las articulaciones, i.e., $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$, lo cual significa que la suma de las energías cinética y potencial se mantiene constante con el paso del tiempo.

Para nuestro fin, el modelo dinámico obtenido mediante las ecuaciones de Hamilton, siendo equivalente al determinado a través de las ecuaciones de Lagrange, no ofrece ventaja evidente en el planteamiento ni resolución de problemas de control de robots. Por este argumento, en este texto se empleará exclusivamente el modelo dinámico (3.22) obtenido a partir de las ecuaciones de Lagrange.

Referencias

El modelo cinemático y dinámico de robots manipuladores puede consultarse en los textos:

- Paul, R., 1982, “*Robot manipulators: Mathematics, programming and control*”, MIT Press, Cambridge, MA.
- Asada, H., Slotine, J. J., 1986, “*Robot analysis and control*”, Wiley, New York.
- Fu, K., Gonzalez, R., Lee, C., 1987, “*Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*”, McGraw-Hill.
- Craig, J., 1989, “*Introduction to robotics: Mechanics and Control*”, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “*Robot dynamics and control*”, Wiley, New York.

- Yoshikawa, T., 1990, “*Foundations of robotics: Analysis and control*”, The MIT Press.
- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., Aracil, R., 1997, “*Fundamentos de robótica*”, McGraw-Hill, Madrid.
- Sciavicco, L., Siciliano, B., 2000, “*Modeling and control of robot manipulators*”, Second Edition, Springer-Verlag, London.

La manera de asignar el eje z_i como eje de rotación de la unión i (para uniones rotacionales) o como un eje paralelo al eje de traslación de la unión i (para uniones traslacionales) ha sido extraido de:

- Craig, J., 1989, “*Introduction to robotics: Mechanics and Control*”, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Yoshikawa, T., 1990, “*Foundations of robotics: Analysis and control*”, The MIT Press.

Conviene destacar que la notación anterior no corresponde a la denominada Denavit-Hartenberg, pero resulta intuitivamente más sencilla y retiene muchas de sus ventajas.

Para el modelo cinemático inverso se exponen técnicas de solución en:

- Chiaverini, S., Siciliano, B., Egeland, O., 1994, “*Review of the damped least-square inverse kinematics with experiments on a industrial robot manipulator*”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, June, Vol. 2, No. 2, pp. 123–134.
- Mayorga, R. V., Wong, A. K., Milano, N., “*A fast procedure for manipulator inverse kinematics evaluation and pseudoinverse robustness*”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, July / August, Vol. 22, No. 4, pp. 790–798.

Las ecuaciones del movimiento de Lagrange se presentan con detalle en los textos antes citados y en:

- Hauser, W., 1966, “*Introduction to the principles of mechanics*”, Addison-Wesley, Reading, MA.

Una derivación particularmente sencilla de las ecuaciones dinámicas para robots de n g.d.l. por medio de las ecuaciones de Lagrange podemos encontrarla en el texto de Spong & Vidyasagar (1989) citado anteriormente.

El tópico de modelado de accionadores electromecánicos y su incorporación en la dinámica de manipuladores puede verse en los textos de Spong & Vidyasagar (1989), Barrientos *et al* (1997) y en:

- Luh, J., 1983, “*Conventional controller design for industrial robots-A tutorial*”, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, June, Vol. SMC-13, No. 3, pp. 298–316.

- Tourassis, V., 1988, “*Principles and design of model-based robot controllers*”, International Journal of Control, Vol. 47, No.5, pp. 1267–1275.
- Yoshikawa, T., 1990, “*Foundations of robotics. Analysis and control*”, The MIT Press.
- Tarn, T. J., Bejczy, A. K., Yun, X., Li, Z., 1991, “*Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control*”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, February, Vol. 7, No. 1, pp. 114–122.

El lector interesado en sistemas de control de robots modelados por medio de las ecuaciones de movimiento de Hamilton puede consultar el Capítulo 12 del texto:

- Nijmeijer, H., van der Schaft, A. J., 1990, “*Nonlinear dynamical control systems*”, Springer-Verlag.

Problemas

1. Considérese el dispositivo mecánico analizado en el Ejemplo 3.2. Supóngase, además, que el dispositivo posee fricción en el eje de giro que se modela aquí como un par proporcional a la velocidad ($f > 0$ es el coeficiente de fricción). El modelo dinámico es en este caso:

$$m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi) \ddot{q} + f \dot{q} = \tau.$$

Escribir el modelo en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = [q \ \dot{q}]^T$.

- (a) Determinar condiciones sobre el par a aplicar τ para existencia de puntos de equilibrio.
- (b) Considerando la condición sobre τ del inciso anterior, demostrar mediante el uso del Teorema 2.2 (pág. 45), que el origen $[q \ \dot{q}]^T = [0 \ 0]^T$ es un equilibrio estable.

Ayuda: Use la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[q + \frac{m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi)}{f} \dot{q} \right]^2 + \frac{1}{2} \dot{q}^2.$$

2. Considérese el dispositivo mecánico mostrado en la Figura 3.13.

Un modelo simplista de dicho dispositivo es:

$$m\ddot{q} + f\dot{q} + kq + mg = \tau, \quad q(0), \dot{q}(0) \in \mathbb{R}$$

donde

- $m > 0$ es la masa.

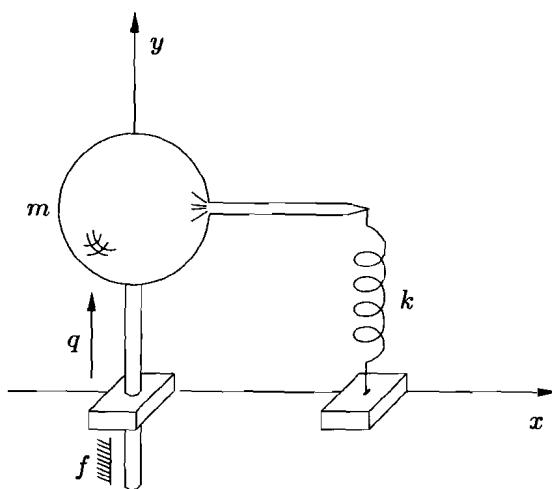


Figura 3.13: Problema 2

- $f > 0$ es el coeficiente de fricción viscosa.
- $k > 0$ es el coeficiente de elasticidad del resorte.
- g es la aceleración de la gravedad.
- τ es la fuerza aplicada.
- q es la posición vertical de la masa m con respecto al origen del plano $x-y$.

Escribir el modelo en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ donde $\mathbf{x} = [q \quad \dot{q}]^T$.

- (a) ¿Qué restricciones hay que imponer a τ para que existan equilibrios?
 - (b) ¿Es posible determinar τ para que el único equilibrio sea el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$?
3. Considérese el dispositivo mecánico y su descripción simplificada mostrado en la Figura 3.14.
- Supóngase que la energía potencial $\mathcal{U}(q_1, q_2)$ es cero para $q_1 = q_2 = 0$. Determinar el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$:
- $$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(q_1, q_2) \\ g_2(q_1, q_2) \end{bmatrix}.$$
4. Considérese nuevamente el dispositivo mecánico y su descripción simplificada mostrado en la Figura 3.14.

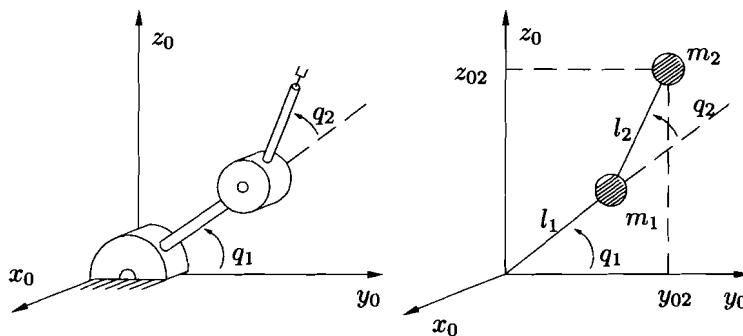


Figura 3.14: Problemas 3 y 4

- (a) Obtener el modelo cinemático directo de dicho dispositivo, i.e., determinar las relaciones:

$$\begin{aligned}y_{02} &= f_1(q_1, q_2) \\z_{02} &= f_2(q_1, q_2).\end{aligned}$$

- (b) El jacobiano $J(\mathbf{q})$ de un robot es la matriz:

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} f_1(\mathbf{q}) & \frac{\partial}{\partial q_2} f_1(\mathbf{q}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} f_1(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial}{\partial q_1} f_2(\mathbf{q}) & \frac{\partial}{\partial q_2} f_2(\mathbf{q}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} f_2(\mathbf{q}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_1} f_m(\mathbf{q}) & \frac{\partial}{\partial q_2} f_m(\mathbf{q}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} f_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ es la relación del modelo cinemático directo ($\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$) y n es la dimensión de \mathbf{q} mientras que m es la dimensión de \mathbf{x} . Determinar el jacobiano.

5. Considérese el robot de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 3.15, donde el significado de las diversas constantes y variables se da a continuación:

- m_1, m_2 son las masas de los eslabones 1 y 2, respectivamente.
- I_1 es el momento de inercia del eslabón 1 con respecto al eje paralelo al eje x que pasa por su centro de masa; el momento de inercia del segundo eslabón se supone despreciable.
- l_1 es la longitud del eslabón 1.
- l_{c1} es la distancia al centro de masa del eslabón 1 desde su eje de giro.
- q_1 es la posición angular del eslabón 1 medida con respecto a la horizontal (positiva en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

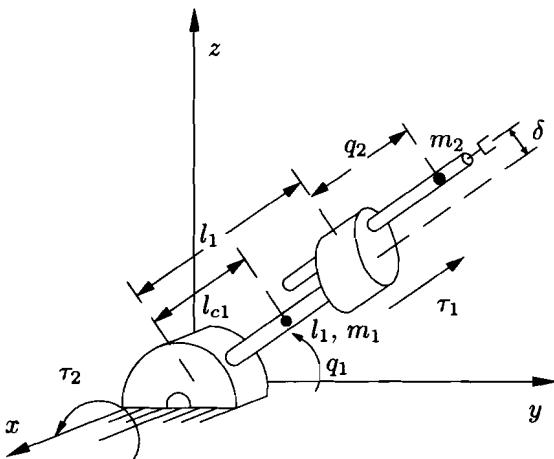


Figura 3.15: Problema 5

- q_2 es la posición lineal del centro de masa del eslabón 2 medida a partir de la terminación del eslabón 1.
- δ despreciable ($\delta = 0$).

Determinar el modelo dinámico. Escribir el modelo en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ donde $\mathbf{x} = [q \ \dot{q}]^T$.

6. Considérese el robot de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 3.16. Dicho robot posee transmisión por medio de palancas en su segunda articulación. Supóngase que la masa de la palanca de longitud l_4 asociada al accionador 2 tiene masa despreciable. Determinar su modelo dinámico. Específicamente obtener la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ y la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Ayuda: Véase el robot presentado en el Ejemplo 3.4. Ambos robots resultan equivalentes tomando $m_3 = I_3 = \delta = 0$.

7. Considérese el robot manipulador cartesiano de 3 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.5 (pág. 73). Expresar el modelo dinámico en términos del vector de estado $[q^T \ p^T]^T$ donde \mathbf{p} es la cantidad de movimiento generalizada.

Ayuda: Usar (3.39).

8. Para cualquier robot rotacional de n g.d.l., demostrar que para todo $T \in \mathbb{R}_+$ existe una constante positiva k tal que:

$$\int_0^T \dot{q}^T(t) \tau(t) dt \geq -k.$$

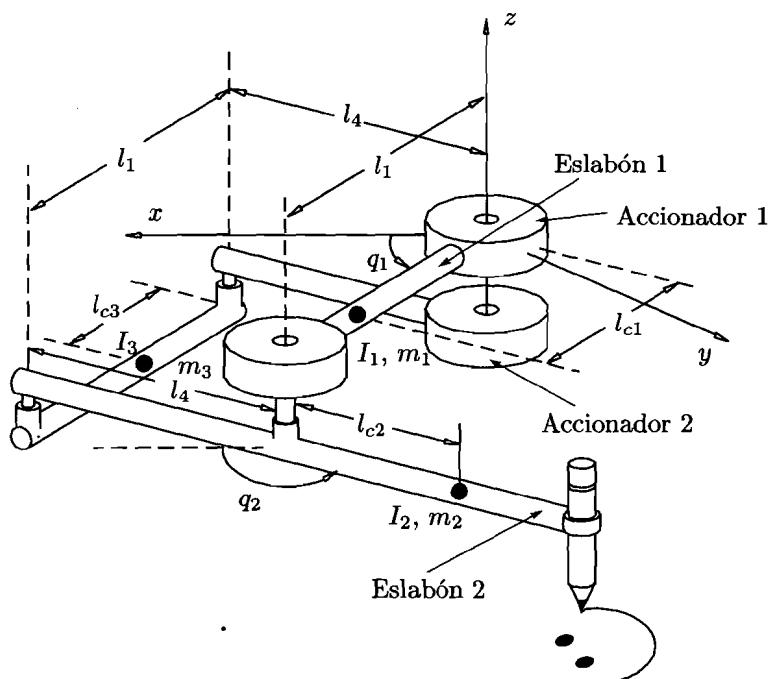


Figura 3.16: Problema 6

Esto significa que el modelo dinámico de robots manipuladores es un mapa pasivo desde los pares τ aplicados por los accionadores hasta las velocidades \dot{q} .

Ayuda: Emplear la Ecuación (3.40) y el hecho de que para robots rotacionales existe una constante finita α tal que el hamiltoniano satisface: $\mathcal{H}(q, p) \geq \alpha$ para todo $q, p \in \mathbb{R}^n$.

4

Propiedades

En este capítulo se expondrán las propiedades básicas del modelo dinámico para robots de n g.d.l caracterizado mediante la Ecuación (3.22):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (4.1)$$

A pesar de la complejidad de la ecuación dinámica (4.1) que gobierna el comportamiento de los robots manipuladores, esta ecuación y sus términos formantes poseen propiedades que resultan de interés por sí mismas. Además, dichas propiedades son de particular valía en el estudio de sistemas de control para robots manipuladores.

Las propiedades a las que se harán referencia son divididas en las siguientes clasificaciones:

- Linealidad en los parámetros dinámicos.
- Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.
- Matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.
- Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.
- Dinámica residual.

Cada una de las clasificaciones será tratada independientemente en los siguientes epígrafes. Las demostraciones de las propiedades que se enunciarán, pueden consultarse en las referencias citadas al final del capítulo y algunas otras, se desarrollarán en el Apéndice C.

4.1 Linealidad en los parámetros dinámicos

Una particularidad importante de la ecuación dinámica (4.1), que entre paréntesis es no lineal en el vector de estado $[\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, es que puede expresarse en términos lineales de los

parámetros dinámicos del robot, por ejemplo de las masas e inercias. Esta característica es básica para el análisis de controladores adaptables. Esta propiedad se formaliza de la siguiente manera.

Propiedad 4.1 Linealidad en términos de los parámetros dinámicos

Considérense las matrices $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ del modelo dinámico (4.1). Se tienen las siguientes propiedades:

Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$M(\mathbf{q})\mathbf{u} + C(\mathbf{q}, \mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\boldsymbol{\theta} + \kappa(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

1.

donde $\kappa(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es un vector de $n \times 1$, $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es una matriz de $n \times m$ y el vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipulador y de su carga.

2.

Si $\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L_\infty^n$ entonces $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in L_\infty^{n \times m}$.



Conviene resaltar que siempre es posible encontrar un vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ para el cual $\kappa(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Considerando esto y tomando $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}}$, la Ecuación (4.1) puede entonces escribirse como:

$$Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (4.2)$$

donde $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \Phi(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times m$, y $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de $m \times 1$ que contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos. La constante n es evidentemente el número de g.d.l., mientras que el valor entero m depende de la selección de los parámetros dinámicos del robot.

Ejemplo 4.1 El modelo dinámico del dispositivo estudiado en el Ejemplo 3.2, i.e., la Ecuación (3.5):

$$m_2 l_2^2 \cos^2(\varphi) \ddot{q} = \tau$$

puede expresarse en la forma (4.2) donde

$$\begin{aligned} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= l_2^2 \cos^2(\varphi) \ddot{q}, \\ \boldsymbol{\theta} &= m_2. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2 Considérese el manipulador de 2 g.d.l. moviéndose en un plano vertical bajo la acción de la gravedad mostrado en la Figura 3.4. Por simplicidad, el manipulador se modela como dos eslabones rígidos de longitudes unitarias ($l_1 = l_2 = 1$) cuyas masas m_1 y m_2 están concentradas en sus extremos ($l_{c1} = l_{c2} = 1$, y $I_1 = I_2 = 0$). El modelo dinámico asociado al manipulador se obtuvo en el Ejemplo 3.3 y se describe por el par de Ecuaciones (3.10) y (3.11):

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [[m_1 + m_2] + m_2 + 2m_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 + m_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_1 + m_2]g \sin(q_1) \\ &\quad + m_2 g \sin(q_1 + q_2),\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= [m_2 + m_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 g \sin(q_1 + q_2).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Los parámetros dinámicos en el modelo son las masas m_1 y m_2 . Defínase entonces el vector θ de parámetros dinámicos como $\theta = [m_1 \ m_2]^T$.

El conjunto de ecuaciones dinámicas (4.3) y (4.4) puede expresarse en términos lineales de θ , es decir, en la forma (4.2)

$$Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\theta = \boldsymbol{\tau}$$

donde $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ es una matriz de 2×2 :

$$Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} Y_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) & Y_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \\ Y_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) & Y_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}Y_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) &= \ddot{q}_1 + gS_1, \\ Y_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) &= 2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + C_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \\ &\quad - S_2 \dot{q}_2^2 - 2S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + gS_{12} + gS_1, \\ Y_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ Y_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) &= C_2 \ddot{q}_1 + \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + S_2 \dot{q}_1^2 + gS_{12},\end{aligned}$$

donde $C_i = \cos(q_i)$, $S_i = \sin(q_i)$, $C_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ y $S_{12} = \sin(q_1 + q_2)$.

A partir de la Propiedad 4.1, puede demostrarse que el modelo dinámico de robots con accionadores (lineales) descrito por (3.33) satisface también una relación de linealidad en términos de los parámetros dinámicos del robot así como de las constantes de los accionadores. Específicamente, para todo $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} &= K^{-1}(R M(\mathbf{q}) + J)\ddot{\mathbf{q}} + K^{-1}R C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + K^{-1}R g(\mathbf{q}) + K^{-1}R f(\dot{\mathbf{q}}) + K^{-1}B\dot{\mathbf{q}}, \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde $\Omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times m$ y $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de $m \times 1$ que contiene m constantes que dependen de parámetros dinámicos del robot y de los accionadores.

Ejemplo 4.3 Considérese la articulación motriz pendular mostrada en la Figura 3.12 y cuyo modelo dinámico se obtuvo en el Ejemplo 3.9:

$$\left[J_m + \frac{J_L}{r^2} \right] \ddot{q} + \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} + \frac{k_L}{r^2} \operatorname{sen}(q) = \frac{K_a}{r R_a} v.$$

La ecuación dinámica puede expresarse en términos lineales de un vector $\boldsymbol{\theta}$, es decir, en la forma (4.5):

$$\Omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{v}$$

donde

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) &= [\ddot{q} \quad \dot{q} \quad \operatorname{sen}(q)], \\ \boldsymbol{\theta} &= \frac{r R_a}{K_a} \left[J_m + \frac{J_L}{r^2} \quad f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} + \frac{f_L}{r^2} \quad \frac{k_L}{r^2} \right]^T.\end{aligned}$$

4.2 Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$

La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ juega un papel importante tanto en el modelado dinámico como en el diseño de controladores para robots. En el primer caso, la matriz de inercia se encuentra íntimamente relacionada con la energía cinética $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, mientras que en el segundo, se emplean algunas de sus propiedades para el estudio de estabilidad de sistemas de control de robots. Entre dichas propiedades se encuentran las enunciadas a continuación.

Propiedad 4.2 Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$

La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos son funciones solamente de \mathbf{q} . La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ satisface las siguientes propiedades:

Existe una constante real positiva α tal que:

$$1. \quad M(\mathbf{q}) \geq \alpha I \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

donde I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva.

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

2. Una manera sencilla de calcular β es la dada por:

$$\beta \geq n \left[\max_{i,j,q} |M_{ij}(\mathbf{q})| \right]$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $M(\mathbf{q})$.

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ tal que:

$$3. \quad \|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (4.6)$$

- para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Una manera sencilla de determinar k_M es:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right]. \quad (4.7)$$

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que:

$$4. \quad \|M(\mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

▼▼▼

El lector interesado en la demostración de la desigualdad (4.6) podrá consultarla en el Apéndice C.

Una consecuencia obvia de la Propiedad 4.2 y en particular, del hecho de que $M(\mathbf{q})$ sea una matriz definida positiva, es que la función $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como:

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

es una función definida positiva en $\dot{\mathbf{q}}$. De hecho, con la definición anterior se tiene que $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ siendo $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ la energía cinética del robot.

Ejemplo 4.4 Considérese el manipulador de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 3.4. El modelo dinámico se obtuvo en el Ejemplo 3.3. La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ de dicho manipulador es (véase el Ejemplo 3.7):

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= l_1^2 m_2 + 2l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2) + l_{c2}^2 m_2 + l_{c1}^2 m_1 + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2) + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_2) + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= l_{c2}^2 m_2 + I_2. \end{aligned}$$

Claramente se aprecia que $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica. Por otro lado, se comprueba que $M(\mathbf{q})$ es definida positiva puesto que $M_{11}(\mathbf{q})$ es positivo para todo \mathbf{q} y además:

$$\begin{aligned} \det[M(\mathbf{q})] &= I_1 I_2 + I_2 [l_{c1}^2 m_1 + l_1^2 m_2] + l_{c2}^2 m_2 I_1 + l_{c1}^2 l_{c2}^2 m_1 m_2 \\ &\quad + l_1^2 l_{c2}^2 m_2^2 [1 - \cos^2(q_2)] > 0. \end{aligned}$$

4.3 Matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La importancia de las propiedades de la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se hace patente en el estudio de estabilidad de los sistemas de control de robots. Las principales propiedades de dicha matriz se citan a continuación.

Propiedad 4.3 Matriz de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Además $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisface las siguientes propiedades:

1. La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.
2. $C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y escalar α , se tiene que:

3.
$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} &= C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \\ C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha\mathbf{x})\mathbf{y} &= C(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}. \end{aligned}$$

El vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$ puede expresarse en la forma:

4.
$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T C_1(\mathbf{q}) \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T C_2(\mathbf{q}) \mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T C_n(\mathbf{q}) \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

donde $C_k(\mathbf{q})$ son matrices simétricas de dimensión n para todo $k = 1, 2, \dots, n$. De hecho, el ij -ésimo elemento $C_{kij}(\mathbf{q})$ de la matriz $C_k(\mathbf{q})$ corresponde al símbolo de Christoffel $c_{jik}(\mathbf{q})$ definido en (3.24).

5.
$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tales que:

$$6. \quad \|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\| \quad (4.9)$$

para todo vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definida como (3.25) está relacionada con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ por la expresión:

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

y de hecho, $\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga la matriz $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ésta siempre satisfará:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n.$$

▽▽▽

A continuación, se presenta la demostración de la existencia de una constante positiva k_{C_1} tal que $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Considerando (4.8), la norma $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\|^2$ del vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$ se define de la forma habitual como la suma de sus elementos al cuadrado:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\|^2 = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}^T C_k(\mathbf{q}) \mathbf{y})^2. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, esto conduce a la siguiente expresión:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\|^2 = \sum_{k=1}^n |\mathbf{x}^T C_k(\mathbf{q}) \mathbf{y}|^2,$$

$$\leq \left[\sum_{k=1}^n \|C_k(\mathbf{q})\|^2 \right] \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (4.11)$$

donde se ha usado el hecho de que para vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} y para la matriz cuadrada A de dimensiones compatibles, se satisface $|\mathbf{x}^T A \mathbf{y}| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

Teniendo en cuenta que la norma espectral $\|A\|$ de una matriz simétrica $A = \{a_{ij}\}$ de dimensión n verifica la desigualdad: $\|A\| \leq n \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$, luego se tiene que:

$$\|C_k(\mathbf{q})\|^2 \leq n^2 \left[\max_{i,j,q} \{|C_{k_{ij}}(\mathbf{q})|\} \right]^2,$$

donde $C_{k_{ij}}(\mathbf{q})$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz simétrica $C_k(\mathbf{q})$. Por lo tanto, se llega inmediatamente a:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^n \|C_k(\mathbf{q})\|^2 \right] &\leq n^2 \sum_{k=1}^n \left[\max_{i,j,q} \{|C_{k_{ij}}(\mathbf{q})|\} \right]^2, \\ &\leq n^3 \left[\max_{k,i,j,q} \{|C_{k_{ij}}(\mathbf{q})|\} \right]^2, \\ &\leq n^4 \left[\max_{k,i,j,q} \{|C_{k_{ij}}(\mathbf{q})|\} \right]^2, \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que $n \geq 1$. El último paso de la desigualdad, aunque conservador, se justifica para mantener exponentes enteros. Incorporando esta desigualdad en (4.11) se llega finalmente a la expresión:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq n^2 \left[\max_{k,i,j,q} |C_{k_{ij}}(\mathbf{q})| \right] \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

donde se identifica claramente la constante k_{C_1} como

$$k_{C_1} = n^2 \left[\max_{k,i,j,q} |C_{k_{ij}}(\mathbf{q})| \right]. \quad (4.12)$$

Como aplicación inmediata de la expresión $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, se tiene entonces que:

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2.$$

A continuación, se presenta un ejemplo con el propósito de mostrar la metodología esbozada anteriormente.

Ejemplo 4.5 Considérese la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis obtenida en el Ejemplo 3.7 y que corresponde al robot de 2 g.d.l., mostrado en la Figura 3.4:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}}.$$

Se desea encontrar una constante positiva k_{C_1} tal que $\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$. Para este fin, nótese que el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ puede expresarse como:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) [2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \\ -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \end{bmatrix}}_{C_1(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

A partir de las matrices $C_1(\mathbf{q})$ y $C_2(\mathbf{q})$ puede verificarse fácilmente que:

$$\begin{aligned} \max_q |C_{111}(\mathbf{q})| &= 0, \\ \max_q |C_{112}(\mathbf{q})| &= m_2 l_1 l_{c2}, \\ \max_q |C_{121}(\mathbf{q})| &= m_2 l_1 l_{c2}, \\ \max_q |C_{122}(\mathbf{q})| &= m_2 l_1 l_{c2}, \\ \max_q |C_{211}(\mathbf{q})| &= m_2 l_1 l_{c2}, \\ \max_q |C_{212}(\mathbf{q})| &= 0, \\ \max_q |C_{221}(\mathbf{q})| &= 0, \\ \max_q |C_{222}(\mathbf{q})| &= 0, \end{aligned}$$

4.4 Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

por lo que considerando (4.12) se obtiene

$$k_{C_1} = 4m_2l_1l_{c2}.$$

El lector interesado en la demostración de la desigualdad (4.9) podrá consultarla en el Apéndice C.

4.4 Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está presente en robots que no han sido diseñados, desde un punto de vista mecánico, con compensación de pares de gravedad, e.g., sin contrapesos o resortes, o para robots destinados a desplazarse fuera del plano horizontal. Algunas de sus propiedades más importantes se citan a continuación.

Propiedad 4.4 Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

El *vector de pares gravitacionales* $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ de $n \times 1$ depende sólo de las posiciones articulares \mathbf{q} . El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado si \mathbf{q} lo está también. Adicionalmente $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ tiene las siguientes propiedades:

El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ pueden relacionarse mediante:

$$1. \quad \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} \, dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad (4.13)$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$.

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante finita $k_{\mathcal{U}}$ tal que:

$$2. \quad \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} \, dt + \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \geq k_{\mathcal{U}}$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_q \{\mathcal{U}(\mathbf{q})\}$.

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, i.e., existe una constante $k_g > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (4.14)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Una forma sencilla de calcular k_g es como:

3. $k_g \geq n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right]. \quad (4.15)$

Además, k_g satisface:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{\text{Max}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\}.$$

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:

4. $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k'$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

▽▽▽

Para la demostración de (4.13) considérese la función de energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ para un manipulador dado. La derivada temporal de $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ viene dada por:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}$$

y reemplazando (3.23),

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}.$$

Integrando $d\mathcal{U}(\mathbf{q})$ desde $\mathcal{U}(\mathbf{q}(0))$ hasta $\mathcal{U}(\mathbf{q}(T))$ para cualquier $T \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_{\mathcal{U}(\mathbf{q}(0))}^{\mathcal{U}(\mathbf{q}(T))} d\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) = \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt.$$

La demostración de (4.14) puede consultarse en el Apéndice C.

Ejemplo 4.6 Considérese el robot de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3 y mostrado en la Figura 3.4. El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para dicho robot se obtuvo en el Ejemplo 3.7, siendo sus componentes:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

De acuerdo con la Propiedad 4.4, la constante k_g puede obtenerse como:

$$k_g = n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right].$$

Notando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_1(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

la constante positiva k_g puede determinarse como:

$$k_g = 2 [[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g + m_2 l_{c2} g].$$

4.5 Dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$

Asociada a cada modelo dinámico de robots existe una función denominada *dinámica residual* de notable importancia para el estudio de estabilidad de diversos controladores.

La dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= [M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})] \ddot{\mathbf{q}}_d \\ &\quad + \left[C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_d \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}), \end{aligned} \tag{4.16}$$

pudiendo expresarse como

$$[M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q})] \ddot{\mathbf{q}}_d + [C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}).$$

Esta función tiene la característica $\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pero más importante todavía, la dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ tiene la virtud de no crecer más rápidamente que $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ ni que $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$, y además sólo podrá crecer arbitrariamente cuando $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ lo haga, independientemente de $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$.

Antes de formalizar este atributo es conveniente mencionar que en la demostración de las características comentadas en el párrafo anterior, juega un papel importante una clase de funciones continuamente diferenciable, monótonamente crecientes, y acotadas. Con el fin de conservar simplicidad en la exposición que resta, a pesar de quitar generalidad, se considerará el tratamiento usando un elemento de esta clase de funciones: la función tangente hiperbólica.

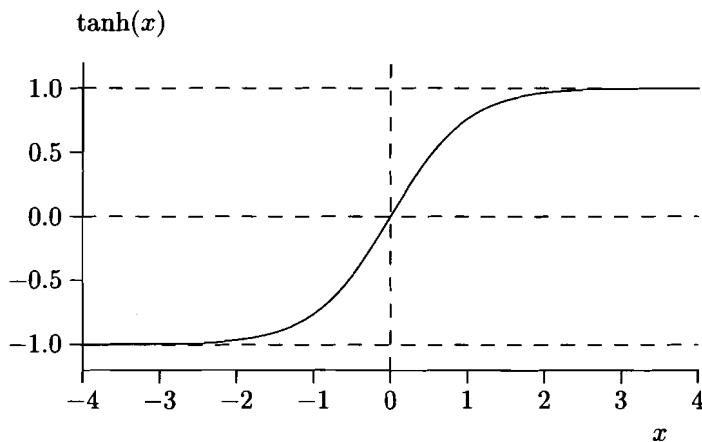


Figura 4.1: Tangente hiperbólica $\tanh(x)$

La tangente hiperbólica $\tanh(x)$ de un número real x se define como:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La gráfica de la función $\tanh(x)$ se visualiza en la Figura 4.1. Ésta es una función continua, monótonamente creciente, y con derivada $\operatorname{sech}^2(x)$. Además, satisface $|x| \geq |\tanh(x)|$ y $1 \geq |\tanh(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En este texto se empleará la siguiente definición de la versión vectorial de la función tangente hiperbólica.

Definición 4.1 Función tangente hiperbólica vectorial

Se define la función tangente hiperbólica vectorial de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tanh(x_1) \\ \vdots \\ \tanh(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ésta satisface las siguientes propiedades para todo $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$:

- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \alpha_1 \|\mathbf{x}\|$,
- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \alpha_2$,
- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 \leq \alpha_3 \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{x}$,
- $\|\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| \leq \alpha_4 \|\dot{\mathbf{x}}\|$,

con $\alpha_1, \dots, \alpha_4 > 0$. Con $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ definida como en (4.17), las diversas constantes quedan como $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{n}$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$.

Propiedad 4.5 Vector de dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$

El vector de dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ de $n \times 1$ depende de los errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, así como del movimiento articular deseado — \mathbf{q}_d , $\dot{\mathbf{q}}_d$, y $\ddot{\mathbf{q}}_d$ — que se supone acotado¹. Adicionalmente $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ tiene la siguiente propiedad:

Existen constantes $k_{h1}, k_{h2} \geq 0$ tales que la norma de la dinámica residual cumple con:

$$1. \quad \|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq k_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_{h2} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \quad (4.18)$$

para todo $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ es la función tangente hiperbólica vectorial introducida en la Definición 4.1.

Demostración. De acuerdo con la definición de la función de dinámica residual (4.16), su norma satisface:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| &\leq \| [M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})] \ddot{\mathbf{q}}_d \| \\ &\quad + \left\| \left[C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_d \right\| \\ &\quad + \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\|. \end{aligned} \quad (4.19)$$

¹Se denotará por $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M$ y $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M$ al valor supremo sobre las normas de la velocidad y aceleración deseadas.

Ahora se trata de acotar superiormente cada uno de los tres sumandos de la derecha de la desigualdad.

Por comodidad se parte de $\|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\|$. De la Propiedad 4.4 se desprende que el vector de pares gravitacionales —considerando robots con articulaciones rotacionales— satisface las dos desigualdades siguientes simultáneamente para todo $\mathbf{q}_d, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\| &\leq k_g \|\tilde{\mathbf{q}}\|, \\ \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\| &\leq 2k',\end{aligned}$$

donde se ha usado $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k'$ para la segunda desigualdad. Este resultado se ilustra gráficamente en la Figura 4.2, donde $\|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\|$ se encuentra en la zona sombreada para todo $\mathbf{q}_d, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

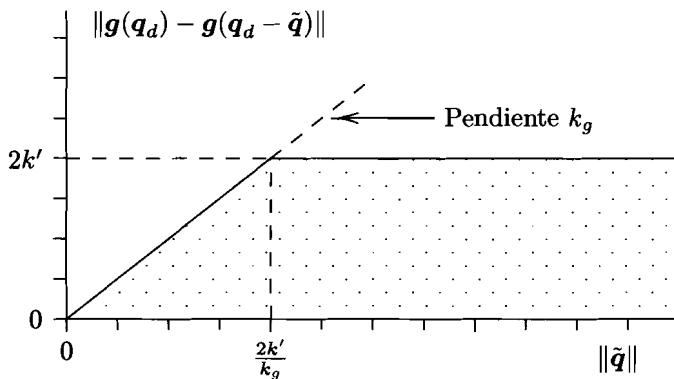


Figura 4.2: Zona de pertencia para $\|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\|$

Con respecto al primer elemento del lado derecho de la desigualdad (4.19), se tiene de la Propiedad 4.2 concerniente a la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ que simultáneamente se satisface:

$$\begin{aligned}\|[M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})] \ddot{\mathbf{q}}_d\| &\leq k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M \|\tilde{\mathbf{q}}\|, \\ \|[M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})] \ddot{\mathbf{q}}_d\| &\leq 2k'_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M,\end{aligned}$$

donde se ha usado $\|M(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{q}}_d\| \leq k'_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|$, que es válida para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, para la segunda desigualdad.

Finalmente, queda por acotar el segundo sumando del lado derecho de la desigualdad (4.19) que requiere el desarrollo siguiente. En virtud de la Propiedad 4.3 puede establecerse que (véase (4.9)):

$$\left\| \left[C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_d \right\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|. \quad (4.20)$$

Asimismo, obsérvese que el lado izquierdo de (4.20) también satisface:

$$\begin{aligned} \left\| \left[C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_d \right\| &\leq \|C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d\| \\ &+ \left\| C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\mathbf{q}}_d \right\|, \end{aligned} \quad (4.21)$$

pero en vista del hecho que $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, entonces los elementos del lado derecho cumplen

$$\|C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2,$$

y

$$\begin{aligned} \left\| C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\mathbf{q}}_d \right\| &\leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \left\| \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\| \\ &\leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\|. \end{aligned}$$

Incorporando estos elementos en (4.21) se obtiene:

$$\left\| \left[C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_d \right\| \leq 2k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\|. \quad (4.22)$$

Por lo tanto, para acotar la norma de la dinámica residual (4.19) se emplean (4.20) y (4.22), así como las cotas previas sobre el primer y tercer sumando. Esto conduce a que $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ satisface al mismo tiempo:

$$\left\| \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\| + \left[k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \right] \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\|,$$

y

$$\left\| \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\| + 2 \left[k' + k'_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \right],$$

para todo $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$. En otros términos:

$$\left\| \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\| + s(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (4.23)$$

donde la función escalar $s(\tilde{\mathbf{q}})$ viene dada por

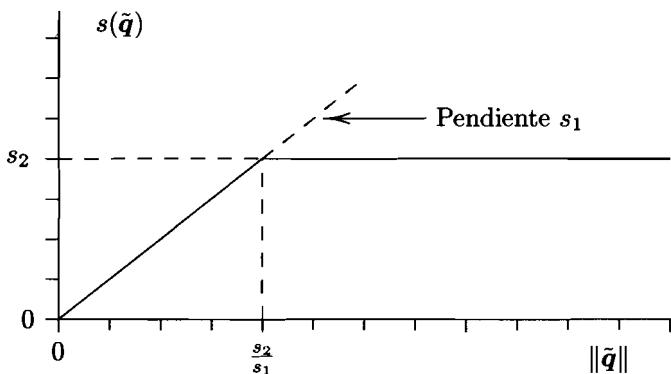
$$s(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{cases} s_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\|, & \text{si } \|\tilde{\mathbf{q}}\| < s_2/s_1 \\ s_2, & \text{si } \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq s_2/s_1 \end{cases}$$

con

$$s_1 = \left[k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \right], \quad (4.24)$$

y

$$s_2 = 2 \left[k' + k'_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \right]. \quad (4.25)$$

Figura 4.3: Función $s(\tilde{q})$

La gráfica de $s(\tilde{q})$ se puede ver en la Figura 4.3. Es evidente, que $s(\tilde{q})$ puede ser acotada superiormente por una función tangente hiperbólica de $\|\tilde{q}\|$, es decir:

$$|s(\tilde{q})| \leq k_{h2} \tanh(\|\tilde{q}\|) \quad (4.26)$$

con cualquier k_{h2} satisfaciendo

$$k_{h2} \geq \frac{s_2}{\tanh\left(\frac{s_2}{s_1}\right)}. \quad (4.27)$$

Con estos elementos, se prueba que $\|\mathbf{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\|$ en (4.23) cumple con:

$$\|\mathbf{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\| \leq k_{h1} \|\dot{\tilde{q}}\| + k_{h2} \|\mathbf{f}(\tilde{q})\|$$

donde se ha usado el hecho de que

$$\tanh(\|\tilde{q}\|) \leq \|\mathbf{f}(\tilde{q})\|,$$

siendo $\mathbf{f}(\tilde{q})$ la tangente hiperbólica vectorial (4.17), y k_{h1} satisfaciendo

$$k_{C_1} \|\dot{\tilde{q}}_d\|_M \leq k_{h1}. \quad (4.28)$$

Con este análisis se ha demostrado la Propiedad 4.5.

◊

Dinámica residual cuando $\dot{\tilde{q}}_d \equiv 0$

En la situación en la que $\dot{\tilde{q}}_d \equiv 0$, y por lo tanto $\dot{\tilde{q}}_d \equiv 0$, la dinámica residual (4.16) se simplifica a:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= \mathbf{g}(\tilde{q}_d) - \mathbf{g}(\tilde{q}_d - \tilde{q}), \\ &= \mathbf{g}(\tilde{q}_d) - \mathbf{g}(\tilde{q}). \end{aligned}$$

También resulta cierto que s_1 y s_2 en (4.24) y (4.25) respectivamente, se reducen a:

$$\begin{aligned} s_1 &= k_g, \\ s_2 &= 2k'. \end{aligned}$$

Con esta información y de las expresiones para k_{h1} en (4.28) y k_{h2} en (4.27), se concluye que éstas pueden ser:

$$\begin{aligned} k_{h1} &= 0, \\ k_{h2} &\geq \frac{2k'}{\tanh\left(\frac{2k'}{k_g}\right)}. \end{aligned}$$

A partir de esta última desigualdad puede demostrarse que k_{h2} cumple con

$$k_{h2} \geq k_g.$$

Por consiguiente, de (4.23) y (4.26) se llega finalmente a:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| &= \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})\| \leq k_{h2} \tanh(\|\tilde{\mathbf{q}}\|), \\ &\leq k_{h2} \left\| \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tanh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \right\|, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{q}_d, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

4.6 Conclusiones

Las Propiedades 4.2, 4.3, 4.4, y 4.5 enunciadas anteriormente serán empleadas ampliamente en los capítulos siguientes para llevar a cabo el análisis de diversas estrategias de control. En particular, la Propiedad 4.2 se empleará para construir funciones no negativas, y en ocasiones funciones de Lyapunov, para estudiar propiedades de estabilidad de equilibrios y convergencia de los sistemas de control.

Finalmente, la Tabla 4.1 resume las expresiones para el cálculo de las principales constantes a las que se ha hecho referencia en este capítulo, donde s_1 y s_2 vienen dados por las Ecuaciones (4.24) y (4.25), respectivamente.

Referencias

La Propiedad 4.1 sobre linealidad del modelo dinámico de robots en términos de sus parámetros dinámicos ha sido extraída de:

Tabla 4.1: Parámetros

β	$n \left[\max_{i,j,q} M_{ij}(q) \right]$
k_M	$n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right \right]$
k_{C_1}	$n^2 \left[\max_{i,j,k,q} C_{k_{ij}}(q) \right]$
k_{C_2}	$n^3 \left[\max_{i,j,k,l,q} \left \frac{\partial C_{k_{ij}}(q)}{\partial q_l} \right \right]$
k_g	$n \left[\max_{i,j,q} \left \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right \right]$
k_{h1}	$k_{C_1} \ \dot{q}_d\ _M$
k_{h2}	$\frac{s_2}{\tanh\left(\frac{s_2}{s_1}\right)}$

- Khosla, P., Kanade, T., 1985, “Parameter identification of robot dynamics”, in Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale FL, December.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “Robot dynamics and control”, John Wiley & Sons.
- Whitcomb, L. L., Rizzi, A., Koditschek, D. E., 1991, “Comparative experiments with a new adaptive controller for robot arms”, Center for Systems Science, Department of Electrical Engineering, Yale University, Technical Report TR9101, February.

Parte de las Propiedades 4.2 y 4.3 se demuestran en Spong & Vidyasagar (1989) y en:

- Craig, J., 1988, “*Adaptive control of mechanical manipulators*”, Addison-Wesley, Reading MA.

El concepto de dinámica residual fue acuñado en:

- Arimoto, S., 1995, “*Fundamental problems of robot control: Part I: Innovation in the realm of robot servo-loops*”, Robotica, Vol. 13, Part 1, pp. 19–27.
- Arimoto, S., 1995, “*Fundamental problems of robot control: Part II: A nonlinear circuit theory towards an understanding of dexterous motions*”, Robotica, Vol. 13, Part 2, pp. 111–122.

Una versión de la prueba de la Propiedad 4.5 sobre la dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ se expone en:

- Santibáñez, V., Kelly, R., 2001, “*PD control with feedforward compensation for robot manipulators: Analysis and experimentation*”, Robotica, Vol. 19, pp. 11–19.

Problemas

1. Considérese el robot de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.4 y cuyo modelo dinámico viene dado por las Ecuaciones (3.14)–(3.15). Defínase el vector de parámetros dinámicos $\boldsymbol{\theta}$ como:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \cos(\delta) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(\delta) \end{bmatrix}.$$

En vista de la Propiedad 4.1, existe una matriz $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ tal que:

$$Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}.$$

Determinar la matriz $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$.

2. Considérese el robot de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3 y cuyo modelo dinámico viene dado por las Ecuaciones (3.10)–(3.11). Usar la Propiedad 4.2 con el propósito de determinar una constante k_M tal que:

$$\|M(\mathbf{x}) - M(\mathbf{y})\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Ayuda: Usar la información del Ejemplo 4.4.

3. De acuerdo con la Propiedad 4.3, la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del modelo dinámico de un robot de n g.d.l. no es única. En el Ejemplo 3.7 se determinaron los elementos de la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del robot de 2 g.d.l., estudiado en el Ejemplo 3.3. Compruébese que la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ cuyos elementos son:

$$\begin{aligned} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -2m_2l_1l_{c2} \operatorname{sen}(q_2)\dot{q}_2, \\ C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2l_1l_{c2} \operatorname{sen}(q_2)\dot{q}_2, \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2l_1l_{c2} \operatorname{sen}(q_2)\dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \end{aligned}$$

también caracteriza las fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$. Con la definición anterior de $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ¿es $\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ una matriz antisimétrica?

4. Considérense las matrices $M(\mathbf{q})$ y $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obtenidas en el Ejemplo 3.7 y que caracterizan el modelo dinámico del robot de 2 g.d.l., estudiado en el Ejemplo 3.3. Compruébese que la matriz $\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica.
5. Considérese el dispositivo mecánico cartesiano y su descripción simplificada mostrada en la Figura 4.4.

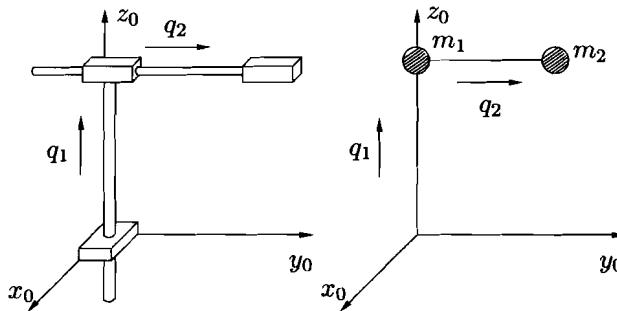


Figura 4.4: Problema 5

- (a) Obténgase el modelo dinámico mediante el empleo de las ecuaciones de Lagrange. Determinar específicamente $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.
- (b) Verificar que la matriz $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica.
- (c) Expresar el modelo dinámico en la forma:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}$$

donde $\boldsymbol{\theta} = [m_1 \ m_2]^T$.

- (d) Expresar el modelo dinámico en términos del vector de estado $[q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]$. ¿Bajo qué condiciones sobre las fuerzas a aplicar τ_1 y τ_2 existen equilibrios?

6. ¿Es verdad que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz constante si y sólo si $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$? (La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se supone que se ha obtenido a partir de los símbolos de Christoffel.)
7. Considérese el modelo dinámico (3.33) de robots con accionadores (lineales). Supóngase ausencia de fricción ($\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$). Demostrar que:

$$\dot{M}'(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

8. Considérese la ecuación que caracteriza el comportamiento de un péndulo de longitud l y masa m concentrada en su extremo, y sometido a la acción de la gravedad g al que se le aplica un par τ en el eje de giro:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau$$

donde q es la posición angular del péndulo con respecto a la vertical.

Demostar que existe una constante β tal que:

$$\int_0^T \tau(s)\dot{q}(s) \, ds \geq \beta, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+,$$

es decir, el mapa desde τ hasta \dot{q} es pasivo.

Ayuda: Demostar que $\int_0^t \dot{q}(s)\operatorname{sen}(q(s)) \, ds \geq -K$ con $K > 0$ usando la Propiedad 4.4.

Introducción

Los robots manipuladores industriales pueden clasificarse según su aplicación en dos clases. La primera es aquella en la cual el robot se desplaza libremente en su espacio de trabajo realizando movimientos sin interaccionar con su medio ambiente. Tareas como el pintado y la soldadura pueden ser realizadas por esta clase de manipuladores. En la segunda categoría, se encuentran aquellos robots destinados a interactuar con su medio ambiente, por ejemplo, aplicando una fuerza sobre éste. Esta clase de manipuladores realiza tareas como el pulido y el ensamblado de precisión.

En el presente texto se abordará exclusivamente el estudio de controladores de movimiento para robots manipuladores que se desplazan libremente en su espacio de trabajo, i.e., sin interaccionar con el medio ambiente.

Se considerarán robots manipuladores provistos de accionadores ideales sin dinámica, es decir, los accionadores proporcionan pares y fuerzas proporcionales a sus entradas. La idealización anterior es común en muchos de los trabajos teóricos sobre control de robots así como en la mayoría de los textos sobre robótica. Por otro lado, recientes desarrollos tecnológicos en la construcción de accionadores electromecánicos, permiten contar hoy día con motores de Corriente Continua (CC) de alto par, que pueden configurarse como fuentes ideales de pares en un amplio intervalo de operación. Por último, es importante mencionar que a pesar de tratarse en este texto el escenario de accionadores ideales, la mayor parte de los estudios sobre controladores que serán presentados, pueden extenderse con ligeras modificaciones, al de accionadores lineales de segundo orden, como son los motores de CC.

Considérese el modelo dinámico de un robot manipulador de n g.d.l. con eslabones rígidos, sin fricción en sus uniones y con actuadores ideales (3.22)

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{II.1})$$

o en términos del vector de estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de fuerzas y pares aplicados en las uniones mediante los accionadores. Los vectores $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ denotan la posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente.

El problema de control de posición de robots manipuladores puede formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica de un robot de n g.d.l. (II.1). Dada una posición articular deseada \mathbf{q}_d , que se supone constante, se trata de determinar una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$, de tal forma que las posiciones \mathbf{q} asociadas a las coordenadas articulares del robot lleguen asintóticamente a \mathbf{q}_d .

En términos más formales, el *objetivo de control de posición pura*, o simplemente *control de posición*, consiste en determinar $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d \quad (\text{II.2})$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante.

El cálculo del vector $\boldsymbol{\tau}$ involucra generalmente a una función vectorial no lineal de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$. Esta función se denomina “ley de control” o simplemente controlador. Es importante recordar que muchos robots manipuladores disponen de sensores de posición y velocidad para cada articulación, por lo que los vectores \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ son medibles y pueden ser empleados en los controladores. Algunos otros vienen equipados sólo con sensores de posición articular, por lo que puede ser necesario estimar la velocidad a partir de la medición de posición —ya sea mediante filtrado o por medio de observadores—. Genéricamente, el controlador puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{g}(\mathbf{q})). \quad (\text{II.3})$$

Para fines prácticos es deseable que el controlador no dependa de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$.

La Figura II.1 presenta un diagrama de bloques formado por un controlador en malla cerrada con un robot.

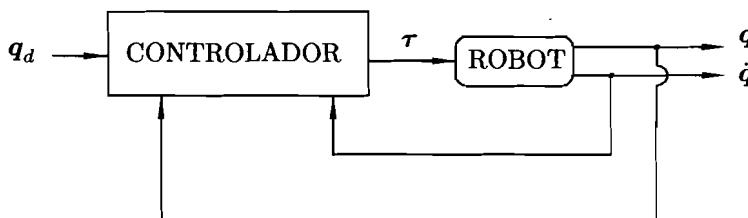


Figura II.1: Control en malla cerrada de robots

Si el controlador (II.3) no depende explícitamente de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, se dice que el controlador no se basa en el modelo del robot. Este nombre es, sin embargo, desafortunado ya que existen controladores, por ejemplo del tipo PID, que poseen parámetros

de diseño cuyos valores numéricos se determinan en función del modelo del robot al cual controlan. De este modo, el diseño adecuado del controlador requiere el conocimiento del modelo del robot —en realidad de sus parámetros físicos—, a pesar de ser un controlador del tipo que no se basa en el modelo.

En esta segunda parte del texto, se realiza el estudio y el análisis de estabilidad de una serie de controladores para el control de posición pura. La metodología de análisis de estabilidad puede resumirse de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Obtención de la ecuación dinámica de malla cerrada. Dicha ecuación se obtiene reemplazando la acción de control τ (Ecuación (II.3)) en el modelo dinámico del manipulador (Ecuación (II.1)). En general, la ecuación de malla cerrada resulta ser una ecuación diferencial ordinaria no lineal pero autónoma.
2. Representación de la ecuación de malla cerrada en la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{g}(\mathbf{q})).$$

La ecuación de malla cerrada anterior puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es \mathbf{q}_d , siendo sus salidas el estado $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$. Aquí $\tilde{\mathbf{q}}$ denota el error de posición articular. La Figura II.2 muestra el diagrama de bloques correspondiente.

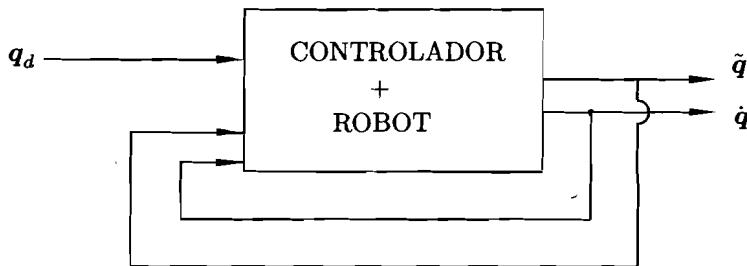


Figura II.2: Sistema dinámico en malla cerrada

3. Estudio de la existencia y posible unicidad de equilibrios de la ecuación de malla cerrada.
4. Propuesta de una función candidata de Lyapunov para el estudio de estabilidad de algún equilibrio de interés de la ecuación de malla cerrada, haciendo uso de los Teoremas 2.2, 2.3, 2.4 y 2.6.
5. Como alternativa al paso 4), en el caso de no ser viable la propuesta de una función candidata de Lyapunov para determinar las propiedades de estabilidad del estado de equilibrio en estudio, se emplea el Lema 2.2 mediante la propuesta de una función

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de fuerzas y pares aplicados en las uniones mediante los accionadores. Los vectores $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ denotan la posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente.

El problema de control de posición de robots manipuladores puede formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica de un robot de n g.d.l. (II.1). Dada una posición articular deseada \mathbf{q}_d , que se supone constante, se trata de determinar una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$, de tal forma que las posiciones \mathbf{q} asociadas a las coordenadas articulares del robot lleguen asintóticamente a \mathbf{q}_d .

En términos más formales, el *objetivo de control de posición pura*, o simplemente *control de posición*, consiste en determinar $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d \quad (\text{II.2})$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante.

El cálculo del vector $\boldsymbol{\tau}$ involucra generalmente a una función vectorial no lineal de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$. Esta función se denomina “ley de control” o simplemente controlador. Es importante recordar que muchos robots manipuladores disponen de sensores de posición y velocidad para cada articulación, por lo que los vectores \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ son medibles y pueden ser empleados en los controladores. Algunos otros vienen equipados sólo con sensores de posición articular, por lo que puede ser necesario estimar la velocidad a partir de la medición de posición —ya sea mediante filtrado o por medio de observadores—. Genéricamente, el controlador puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{g}(\mathbf{q})). \quad (\text{II.3})$$

Para fines prácticos es deseable que el controlador no dependa de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$.

La Figura II.1 presenta un diagrama de bloque formado por un controlador en malla cerrada con un robot.

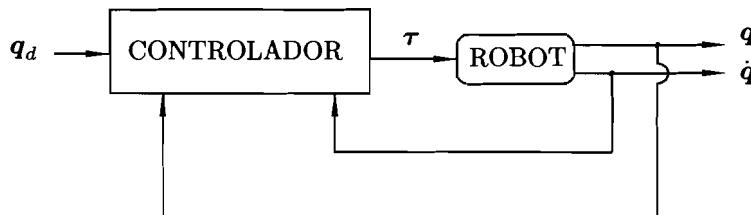


Figura II.1: Control en malla cerrada de robots

Si el controlador (II.3) no depende explícitamente de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, se dice que el controlador no se basa en el modelo del robot. Este nombre es, sin embargo, desafortunado ya que existen controladores, por ejemplo del tipo PID, que poseen parámetros

de diseño cuyos valores numéricos se determinan en función del modelo del robot al cual controlan. De este modo, el diseño adecuado del controlador requiere el conocimiento del modelo del robot —en realidad de sus parámetros físicos—, a pesar de ser un controlador del tipo que no se basa en el modelo.

En esta segunda parte del texto, se realiza el estudio y el análisis de estabilidad de una serie de controladores para el control de posición pura. La metodología de análisis de estabilidad puede resumirse de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Obtención de la ecuación dinámica de malla cerrada. Dicha ecuación se obtiene reemplazando la acción de control τ (Ecuación (II.3)) en el modelo dinámico del manipulador (Ecuación (II.1)). En general, la ecuación de malla cerrada resulta ser una ecuación diferencial ordinaria no lineal pero autónoma.
2. Representación de la ecuación de malla cerrada en la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{g}(\mathbf{q})).$$

La ecuación de malla cerrada anterior puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es \mathbf{q}_d , siendo sus salidas el estado $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$. Aquí $\tilde{\mathbf{q}}$ denota el error de posición articular. La Figura II.2 muestra el diagrama de bloque correspondiente.

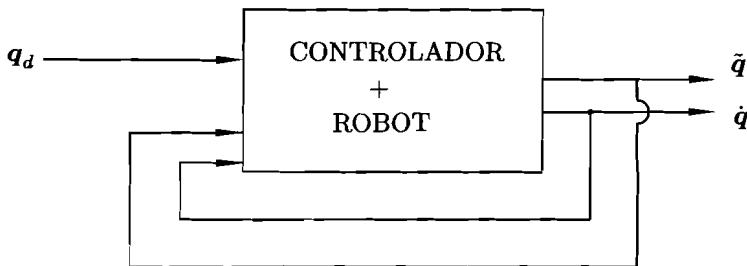


Figura II.2: Sistema dinámico en malla cerrada

3. Estudio de la existencia y posible unicidad de equilibrios de la ecuación de malla cerrada.
4. Propuesta de una función candidata de Lyapunov para el estudio de estabilidad de algún equilibrio de interés de la ecuación de malla cerrada, haciendo uso de los Teoremas 2.2, 2.3, 2.4 y 2.6.
5. Como alternativa al paso 4), en el caso de no ser viable la propuesta de una función candidata de Lyapunov para determinar las propiedades de estabilidad del estado de equilibrio en estudio, se emplea el Lema 2.2 mediante la propuesta de una función

definida positiva cuyas características permitan determinar el comportamiento cuantitativo de las soluciones de la ecuación de malla cerrada.

El resto de esta segunda parte del texto se divide en cuatro capítulos. Los controladores considerados son:

- Control Proporcional con retroalimentación de velocidad y Control PD.
- Control Proporcional Derivativo con compensación de gravedad.
- Control Proporcional Derivativo con compensación precalculada de gravedad.
- Control PID.

Referencias

Entre los libros de texto sobre robótica que incluyen el tópico de control de posición de robots, se encuentran los siguientes:

- Paul, R., 1982, "*Robot manipulators: Mathematics programming and control*", MIT Press, Cambridge, MA.
- Asada, H., Slotine, J. J., 1986, "*Robot analysis and control*", Wiley, New York.
- Fu, K., Gonzalez, R., Lee, C., 1987, "*Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*", McGraw-Hill.
- Craig, J., 1989, "*Introduction to robotics: Mechanics and control*", Addison-Wesley, Reading, MA.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, "*Robot dynamics and control*", Wiley, New York.
- Yoshikawa, T., 1990, "*Fundations of robotics: Analysis and control*", The MIT Press.
- Spong, M., Lewis, F. L., Abdallah, C. T., 1993, "*Robot control: Dynamics, motion planning and analysis*", IEEE Press, New York.
- Lewis, F. L., Abdallah, C. T., Dawson, D. M., 1993, "*Control of robot manipulators*", Macmillan Publishing Co.
- Qu, Z., Dawson, D. M., 1996, "*Robust tracking control of robot manipulators*", IEEE Press, New York.
- Canudas, C., Siciliano, B., Bastin, G., (eds), 1996, "*Theory of robot control*", Springer Verlag, London.

- Arimoto, S., 1996, “*Control theory of non-linear mechanical systems*”, Oxford University Press, New York.
- Sciavicco, L., Siciliano, B., 2000, “*Modeling and control of robot manipulators*”, Second Edition, Springer–Verlag, London.
- de Queiroz, M., Dawson, D. M., Nagarkatti, S. P., Zhang, F., 2000, “*Lyapunov-based control of mechanical systems*”, Birkhäuser, Boston, MA.

Un trabajo particularmente relevante sobre control de movimiento de robots, y que además engloba en forma unificada la mayoría de los controladores que se estudian en esta parte del texto es:

- Wen, J. T., 1990, “A unified perspective on robot control: The energy Lyapunov function approach”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 4, pp. 487–500.

El siguiente artículo expone una panorámica sobre controladores robustos para manipuladores robóticos:

- Sage, H. G., Mathelin, M. F., Ostertag, E., 1999, “Robust control of robot manipulators: a survey”, *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 16, pp. 1498–1522.

5

Control P con retroalimentación de velocidad y Control PD

El control Proporcional (P) con retroalimentación de velocidad es el controlador de malla cerrada más sencillo que puede emplearse en el control de robots manipuladores. La aplicación conceptual de esta estrategia de control es común en el control de la posición angular de motores de corriente continua. En dicha aplicación, también se le conoce con el nombre de *control proporcional con retroalimentación tacometrífica*. La ecuación del controlador Proporcional con retroalimentación de velocidad viene dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} \quad (5.1)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas por el diseñador y denominadas ganancia de posición y de velocidad (o derivativa), respectivamente. El vector $q_d \in \mathbb{R}^n$ es la posición articular deseada, y el vector $\tilde{q} = q_d - q \in \mathbb{R}^n$ se denomina error de posición. La Figura 5.1 presenta el diagrama de bloques correspondiente al sistema de control formado por el control Proporcional con retroalimentación de velocidad y un robot.

El control Proporcional-Derivativo (PD) es una extensión inmediata del control Proporcional con retroalimentación de velocidad (5.1). Como su nombre indica, la ley de control está formada no solo por un término proporcional al error de posición \tilde{q} como el controlador Proporcional con retroalimentación de velocidad, sino también por otro término proporcional a su derivada, i.e., al error de velocidad $\dot{\tilde{q}}$. La ley de control PD viene dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \quad (5.2)$$

donde también $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas por el diseñador. La Figura 5.2 presenta el diagrama de bloques correspondiente al sistema de control formado por el control PD y un robot.

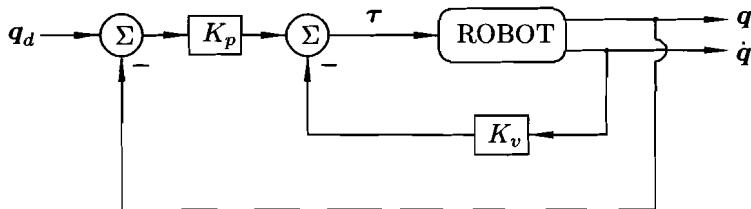


Figura 5.1: Control Proporcional con retroalimentación de velocidad

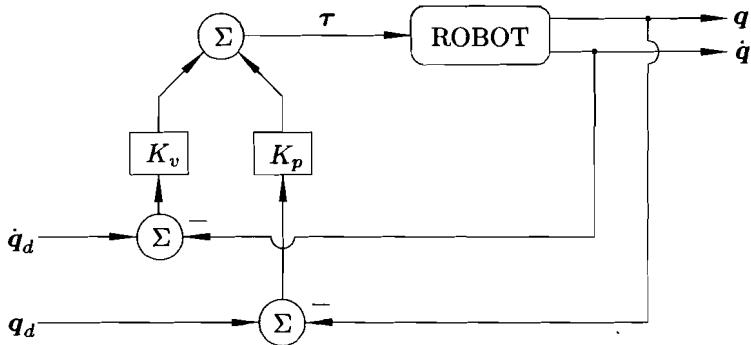


Figura 5.2: Control PD

Hasta este punto, para las definiciones de los controladores Proporcional con retroalimentación de velocidad y PD, no se ha impuesto ninguna restricción al vector de posiciones articulares deseadas q_d . Esto es natural, ya que el nombre dado a un controlador debe caracterizar únicamente a su estructura y no debe depender de la clase de referencias.

Pese al comentario anterior, en la bibliografía sobre control de robots se denotan indistintamente las leyes de control (5.1) y (5.2) como la ley de control PD. La razón comúnmente argumentada para ello es que en el caso particular donde el vector de posición deseada q_d se restringe a ser constante, a partir de la definición de \dot{q} como $\ddot{q} = q_d - q$ se tiene que $\dot{q} = -\dot{q}$, por lo cual, ambas leyes de control (5.1) y (5.2) resultan idénticas, de ahí que se justifique el empleo del mismo nombre para ambos controladores.

Con el propósito de evitar polémica sobre los puntos anteriores, y con el fin de mantenerse en el uso de la nomenclatura común, de aquí en adelante, ambas leyes de control (5.1) y (5.2) denotarán al control PD.

En aplicaciones reales, el control PD es local en el sentido que el par o fuerza determinado por dicho controlador, y a ser aplicado en una articulación, sólo depende de la posición y velocidad de dicha articulación y no de las demás articulaciones. Este hecho se traduce en una selección diagonal de las matrices de diseño K_p y K_v .

El controlador PD dado por la Ecuación (5.1) requiere la medición de las posiciones \mathbf{q} y velocidades $\dot{\mathbf{q}}$, así como la especificación de la posición articular deseada \mathbf{q}_d (véase la Figura 5.1). Nótese que no es necesario especificar la velocidad ni la aceleración deseadas: $\dot{\mathbf{q}}_d$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d$.

A continuación, se presenta el análisis del control PD de robots manipuladores de n g.d.l.

El comportamiento en malla cerrada de un robot de n g.d.l. bajo control PD se obtiene combinando el modelo (II.1) con la ley de control (5.1),

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\mathbf{q}}, \quad (5.3)$$

o equivalentemente en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - M(\mathbf{q})^{-1} [K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix},$$

que es una ecuación diferencial no lineal y no autónoma. En lo que resta del presente epígrafe se supondrá que el vector de posiciones articulares deseadas \mathbf{q}_d es constante. Bajo esta condición, la ecuación de malla cerrada puede escribirse en términos del nuevo vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Ahora la ecuación diferencial de malla cerrada es no lineal pero autónoma. La autonomía se debe a que \mathbf{q}_d es constante. La ecuación anterior podrá tener múltiples estados de equilibrio. Si existiesen, dichos equilibrios vendrían dados por $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [\mathbf{s}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ donde $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ es solución de:

$$K_p\mathbf{s} - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{s}) = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

Naturalmente, si el modelo del manipulador no posee el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, entonces el único equilibrio será el origen. Asimismo, si $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es independiente de \mathbf{q} , i.e., $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}$, entonces $\mathbf{s} = K_p^{-1}\mathbf{g}$ será el único equilibrio.

Nótese que la Ecuación (5.5) es, en general, no lineal en \mathbf{s} debido al término gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{s})$. Por este hecho y dada la forma funcional de $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{s})$, la obtención de las soluciones explícitas de \mathbf{s} es, en general, relativamente compleja.

En los epígrafes siguientes se tratará el estudio de los casos donde el modelo del robot no contiene el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y donde sí contiene éste.

5.1 Robots sin término $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

En este epígrafe se considerarán robots cuyos modelos dinámicos no poseen el término gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q})$:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}.$$

La clase de robots descrita por tales modelos son aquellos cuyos movimientos se realizan únicamente en el plano horizontal, así como los diseñados mecánicamente de forma conveniente.

Suponiendo que la posición articular deseada \mathbf{q}_d es constante, la ecuación de malla cerrada (5.4) se simplifica en ($\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

la cual, en razón de \mathbf{q}_d constante, representa una ecuación diferencial autónoma. El origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0}$ es el único equilibrio de la ecuación.

Para estudiar la estabilidad del equilibrio se empleará el método directo de Lyapunov que ha sido presentado en el capítulo de preliminares matemáticos. Específicamente, se empleará el Teorema 2.3 para demostrar estabilidad del equilibrio (origen).

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Nótese que ésta es definida positiva y radialmente desacotada porque tanto $M(\mathbf{q})$ como K_p son matrices definidas positivas.

La derivada con respecto al tiempo de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}.$$

Al sustituir $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ de la ecuación de malla cerrada (5.6), se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}, \\ &= - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned}$$

donde se ha eliminado el término $\dot{\mathbf{q}}^T [\frac{1}{2} \dot{M} - C] \dot{\mathbf{q}}$ en virtud de la Propiedad 4.3 y se ha hecho uso de $\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}$ puesto que \mathbf{q}_d se supone que es un vector constante.

La función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es entonces una función de Lyapunov en vista de que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$ y en consecuencia, el origen es estable y las soluciones $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ están acotadas (Teorema 2.3).

Debido a la autonomía con respecto al tiempo de la ecuación de malla cerrada (5.6), puede explorarse la aplicación del teorema de LaSalle (Teorema 2.6) para analizar la estabilidad asintótica global del origen.

Con este propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\}, \\ &= \{ \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Para que una solución $\mathbf{x}(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$ es necesario y suficiente que $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacerse que $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Tomando este hecho en consideración, de la ecuación de malla cerrada (5.6) se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces:

$$\mathbf{0} = M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}(t))^{-1} K_p \tilde{\mathbf{q}}(t),$$

y se comprueba que $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $[\tilde{\mathbf{q}}(0)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(0)^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. Luego, de acuerdo con el teorema de LaSalle (Teorema 2.6), esto basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$, y en consecuencia:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

es decir, se verifica el objetivo de control de posición pura.

Cabe citar en este punto, que la ecuación de malla cerrada (5.6) es exactamente la misma que la que se obtendrá mediante el controlador llamado control PD con compensación de gravedad, cuyo estudio será el objeto del Capítulo 6. En dicho capítulo se analiza alternativamente la estabilidad asintótica del origen mediante otra función de Lyapunov y sin requerir el teorema de LaSalle. Naturalmente, dicho análisis resulta válido para el estudio de (5.6).

5.2 Robots con término $g(\mathbf{q})$

El comportamiento del sistema de control formado por el control PD (5.1) de robots cuyos modelos incorporan explícitamente el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, y

suponiendo q_d constante, está gobernado por (5.4):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q} - g(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

El estudio de la ecuación anterior resulta más elaborado que la obtenida con $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$.

En este epígrafe se analizará la ecuación de malla cerrada (5.7), y específicamente, se abordarán los siguientes temas:

- Unicidad del equilibrio.
- Acotamiento de soluciones.

El estudio presentado en este epígrafe se limita únicamente al caso de robots cuyas articulaciones son todas del tipo rotacional.

Ejemplo 5.1 Considérese el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48):

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau.$$

En este caso, la Ecuación (5.5) toma la forma:

$$k_p s - mgl \operatorname{sen}(q_d - s) = 0. \quad (5.8)$$

Con propósitos ilustrativos, tómense los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ k_p &= 0.25, & q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Mediante método gráfico o por algoritmos numéricos, puede comprobarse que la Ecuación (5.8) posee exactamente tres soluciones en s . Los valores aproximados de estas soluciones son: 1.25 [rad], -2.13 [rad] y -3.59 [rad]. Esto significa que el sistema de control PD en malla cerrada con el modelo del péndulo ideal, tiene los siguientes equilibrios:

$$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.13 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3.56 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.2.1 Equilibrio único

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, se demostrará que con una selección suficientemente “grande” de K_p , se garantiza unicidad del equilibrio para la ecuación de malla cerrada (5.7). Para este fin, se empleará el teorema de *contracción de mapas* presentado como Teorema 2.1.

Los equilibrios de la ecuación de malla cerrada (5.7) satisfacen $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T = [s^T \mathbf{0}^T]^T$, donde $s \in \mathbb{R}^n$ es solución de:

$$\begin{aligned}s &= K_p^{-1}g(q_d - s), \\ &= f(s, q_d).\end{aligned}$$

Si la función $f(s, q_d)$ satisface la condición del teorema de contracción de mapas (Teorema 2.1), entonces la ecuación $s = f(s, q_d)$ tendrá una única solución s^* y, en consecuencia, el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada (5.7) será $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T = [s^{*T} \mathbf{0}^T]^T$.

Ahora bien, nótese que para todo vector $x, y, q_d \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\|f(x, q_d) - f(y, q_d)\| &= \|K_p^{-1}g(q_d - x) - K_p^{-1}g(q_d - y)\|, \\ &= \|K_p^{-1}\{g(q_d - x) - g(q_d - y)\}\|, \\ &\leq \lambda_{\text{Max}}\{K_p^{-1}\} \|g(q_d - x) - g(q_d - y)\|.\end{aligned}$$

Por otro lado, usando el hecho de que $\lambda_{\text{Max}}\{A^{-1}\} = 1/\lambda_{\text{min}}\{A\}$ para cualquier matriz simétrica definida positiva A , y la Propiedad 4.4 que garantiza la existencia de una constante positiva k_g tal que $\|g(x) - g(y)\| \leq k_g \|x - y\|$, se tiene que:

$$\|f(x, q_d) - f(y, q_d)\| \leq \frac{k_g}{\lambda_{\text{min}}\{K_p\}} \|x - y\|$$

por lo que, de acuerdo con el teorema de contracción de mapas, una condición suficiente para unicidad de solución de $f(s, q_d) - s = K_p^{-1}g(q_d - s) - s = \mathbf{0}$, y en consecuencia unicidad de equilibrio de la ecuación de malla cerrada, es que K_p sea seleccionada de tal forma que $\lambda_{\text{min}}\{K_p\} > k_g$.

Suponiendo K_p seleccionada de manera que $\lambda_{\text{min}}\{K_p\} > k_g$, el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada (5.7) será $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T = [s^{*T} \mathbf{0}^T]^T$. Definiendo $z = \tilde{q} - s^*$ y usando $K_p s^* = g(q_d - s^*)$, la ecuación de malla cerrada puede escribirse en términos del nuevo estado $[z^T \dot{q}^T]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p z - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q_d - s^* - z) + g(q_d - s^*)] \end{bmatrix},$$

la cual tiene como único equilibrio el origen $[z^T \quad \dot{q}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. La ecuación anterior tiene la misma estructura que la ecuación de malla cerrada del llamado control PD con compensación precalculada de gravedad (para el caso de q_d constante). Como se demostrará en su momento, si $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, entonces el origen de dicha ecuación es un equilibrio asintóticamente estable en forma global. Conviene mencionar en este punto, que la función de Lyapunov empleada para demostrar lo anterior es:

$$\begin{aligned} V(z, \dot{q}) = & \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{U}(q) - \mathcal{U}(q_d - s^*) + g(q_d - s^*)^T \tilde{q} + \frac{1}{2} z^T K_p z \\ & - \frac{\varepsilon_0}{1 + \|z\|} z^T M(q) \dot{q} \end{aligned}$$

donde ε_0 es una constante positiva suficientemente pequeña. Para detalles sobre la demostración, se invita al lector a consultar el análisis presentado en el estudio del control PD con compensación precalculada de gravedad (Capítulo 7).

5.2.2 Acotamiento del error de posición y de la velocidad

A continuación se presenta el estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones de la ecuación de malla cerrada (5.7) y donde K_p no se restringe a satisfacer $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, sino basta con que K_p sea definida positiva. Para este fin se hará uso del Lema 2.2 que a pesar de no proporcionar resultados de estabilidad, concluye sobre pertenencia de las soluciones a los espacios L_2^n y L_∞^n y eventualmente sobre convergencia de ellas. Este estudio se presenta a continuación, donde se supondrá que todas las articulaciones del robot son del tipo rotacional.

Defínase la siguiente función no negativa:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) + \mathcal{U}(q) - k_U + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}$$

donde $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ y $\mathcal{U}(q)$ denotan las energías cinética y potencial del robot, y la constante k_U se define como (véase la Propiedad 4.4):

$$k_U = \min_q \{\mathcal{U}(q)\}.$$

La función $V(\tilde{q}, \dot{q})$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{q}) = & \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} K_p & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} M(q_d - \tilde{q}) \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\ & + \underbrace{\mathcal{U}(q_d - \tilde{q}(t)) - k_U}_h \geq 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

o de modo equivalente

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(\mathbf{q}) - k_U \geq 0.$$

La derivada temporal de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T g(\mathbf{q}). \quad (5.10)$$

donde se ha usado (3.23), i.e., $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q})$. Despejando $M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ de la ecuación de malla cerrada (5.3) y reemplazando en (5.10) se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.11)$$

donde el término $\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} - C \right] \dot{\mathbf{q}}$ ha sido eliminado en virtud de la Propiedad 4.3. Recorriendo que el vector \mathbf{q}_d es constante y que $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$, entonces se tiene $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$. Incorporando esta información, la ecuación (5.11) se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{K_v}_{Q} \dot{\mathbf{q}}, \\ &= -\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \leq 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Usando $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ dados por (5.9) y (5.12) respectivamente y el Lema 2.2, se concluye:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} &\in L_\infty^n, \\ \dot{\mathbf{q}} &\in L_2^n. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Más aún, tal y como se mostrará a continuación, pueden determinarse cotas máximas explícitas para los errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ y para la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$. Teniendo en consideración que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función no negativa y además no creciente en el tiempo ($\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$), se tiene que:

$$0 \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$$

para todo $t \geq 0$. En consecuencia, considerando la definición de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ se deduce inmediatamente que:

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}(t)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)),$$

y

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t)^T M(\mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)),$$

para todo $t \geq 0$, de donde finalmente se obtienen las siguientes cotas:

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 &\leq \frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}\{K_p\}}, \\ &= \frac{\dot{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0)) \dot{\mathbf{q}}(0) + \tilde{\mathbf{q}}(0)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(0) + 2\mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) - 2k_U}{\lambda_{\min}\{K_p\}}\end{aligned}\quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 &\leq \frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}}, \\ &= \frac{\dot{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0)) \dot{\mathbf{q}}(0) + \tilde{\mathbf{q}}(0)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(0) + 2\mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) - 2k_U}{\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}}\end{aligned}\quad (5.15)$$

para todo $t \geq 0$.

Además se demostrará que en realidad $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$. Para este fin, de (5.3) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})]. \quad (5.16)$$

Como $\dot{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ resultaron ser vectores acotados ($\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \in L_\infty^n$), entonces $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ son vectores acotados de acuerdo con las Propiedades 4.3 y 4.4. Por otro lado, como $M(\mathbf{q})^{-1}$ es una matriz acotada (Propiedad 4.2), entonces de (5.16) se concluye:

$$\ddot{\mathbf{q}} \in L_\infty^n.$$

Esto último y (5.13) implican a su vez (Lema 2.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}.$$

No obstante, es importante subrayar que el límite anterior no garantiza que $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}_d$ cuando $t \rightarrow \infty$, más aún, ni siquiera que $\mathbf{q}(t)$ tiende a una constante.

Ejemplo 5.2 Tómese nuevamente el modelo del péndulo ideal considerado en el Ejemplo 5.1,

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

donde se identifica claramente $M(q) = ml^2$ y $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$. Tal y como se mostró en su momento en el Ejemplo 2.10 (pág. 48), la energía potencial viene dada por:

$$\mathcal{U}(q) = mgl[1 - \cos(q)].$$

Ya que $\min_q \{\mathcal{U}(q)\} = 0$, luego la constante k_U toma el valor de cero.

Considérense los valores numéricos usados en el Ejemplo 5.1:

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ k_p &= 0.25, & k_v &= 0.50, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Supóngase que se emplea el control PD en el control del péndulo ideal con las siguientes condiciones iniciales: $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = 0$.

De acuerdo con los resultados sobre acotamiento (5.14) y (5.15) y tomando en cuenta la información previa, se llega a:

$$|\ddot{q}^2(t)| \leq \ddot{q}^2(0) = 2.46 \quad [\text{rad}^2], \quad (5.17)$$

$$|\ddot{q}^2(t)| \leq \frac{k_p}{ml^2} \ddot{q}^2(0) = 0.61 \left[\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \right], \quad (5.18)$$

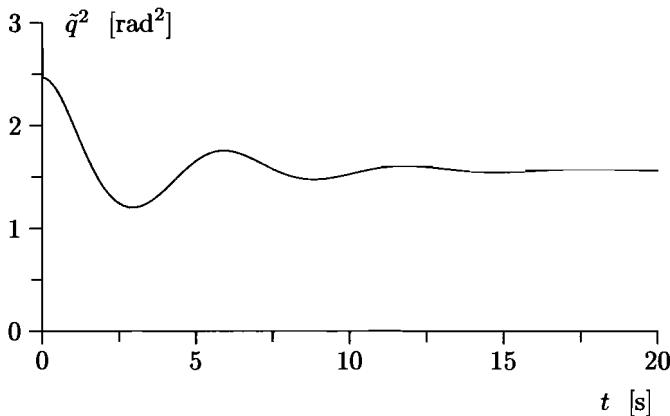
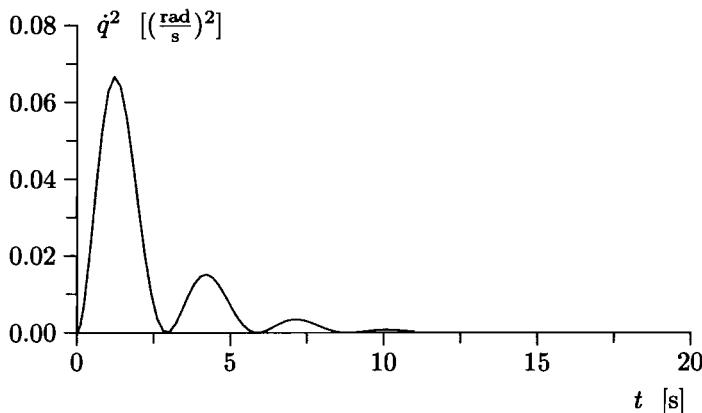


Figura 5.3: Gráfica de \ddot{q}^2

para todo $t \geq 0$. Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran las gráficas de \ddot{q}^2 y \dot{q}^2 obtenidas de simulación. Se aprecia claramente de las gráficas que ambas variables satisfacen las desigualdades (5.17) y (5.18). Finalmente, es interesante observar de ambas figuras que $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}^2(t) = 1.56$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}^2(t) = 0$, por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esto es, las soluciones tienden justamente a uno de los tres equilibrios obtenidos en el Ejemplo 5.1.

Figura 5.4: Gráfica de \dot{q}^2

Para finalizar este epígrafe, a continuación se presentan los resultados obtenidos de la simulación del control PD de un robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 5.3 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y cuyas características y valores numéricos se resumen en el Apéndice B. En particular, el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para dicho robot se obtuvo en el Ejemplo 3.7, siendo sus componentes:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

El objetivo de control consiste en satisfacer:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/20 \end{bmatrix} \text{ [rad].}$$

Puede verificarse fácilmente que $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \neq \mathbf{0}$. Por esta razón, el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ de la ecuación de malla cerrada obtenida bajo control PD, no es un equilibrio. Esto significa que el objetivo de control no puede lograrse mediante el control PD. Sin embargo, con el propósito de ilustrar el comportamiento del sistema de control, a continuación se presentan resultados de simulación.

Considérese el control PD

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}}$$

con los siguientes valores numéricos para las ganancias:

$$K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix} \text{ [Nm/rad]}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \text{ [Nm s/rad]}.$$

Las condiciones iniciales son fijadas en $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$. Los resultados de simulación están presentes en la Figura 5.5 donde se grafican los dos elementos componentes del error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$. Puede apreciarse que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_1(t) = 0.189$ [rad] y $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_2(t) = 0.015$ [rad], por lo tanto, tal y como se esperaba, el objetivo de control de posición pura no se satisface.

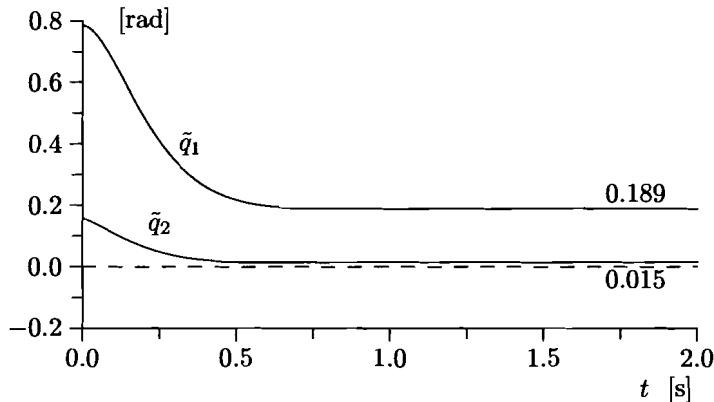


Figura 5.5: Errores de posición

5.3 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos. Considérese el control PD de robots de n g.d.l. Supóngase que el vector de posición deseada \mathbf{q}_d es constante.

- Si el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está ausente en el modelo del robot, entonces el origen de la ecuación de malla cerrada expresada en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ es asintóticamente estable en forma global. En consecuencia, se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$.
- Para robots con articulaciones rotacionales, si el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está en el modelo del robot, entonces el origen de la ecuación de malla cerrada

expresada en términos del vector de estado $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T$, generalmente no es un equilibrio. No obstante, la ecuación de malla cerrada posee necesariamente equilibrios. Adicionalmente, si $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, entonces la ecuación de malla cerrada tiene un único equilibrio. Finalmente, para toda matriz $K_p = K_p^T > 0$, se garantiza acotamiento del error de posición \tilde{q} y de la velocidad $\dot{\tilde{q}}$, y más aún, el vector de velocidades articulares \dot{q} tiende asintóticamente a cero.

Referencias

El análisis de estabilidad asintótica global del control PD para robots sin término gravitacional ($\mathbf{g}(q) \equiv 0$), es idéntico al del control PD con compensación de gravedad presentado originalmente en:

- Takegaki, M., Arimoto, S., 1981, “A new feedback method for dynamic control of manipulators”, Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 105, pp. 119–125.

También, el mismo análisis del control PD para robots sin término gravitacional puede consultarse en los textos:

- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “Robot dynamics and control”, John Wiley & Sons.
- Yoshikawa, T., 1990, “Foundations of robotics: Analysis and control”, The MIT Press.

Problemas

1. Considérese el modelo del péndulo ideal estudiado en el Ejemplo 5.1:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Considérese el empleo del control PD. En el Ejemplo 5.1 se determinó que la ecuación de malla cerrada posee tres equilibrios para $k_p = 0.25$.

- Determinar el valor de la constante k_g (véase la Propiedad 4.4).
- Determinar un valor para k_p para el cual sólo exista un único equilibrio.

- (c) Usar el valor anterior de k_p y el teorema de contracción de mapas (Teorema 2.1) para determinar un valor numérico aproximado del único equilibrio.

Ayuda: El equilibrio es $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T = [x^* \quad 0]^T$, donde $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ con:

$$x(n) = \frac{mgl}{k_p} \operatorname{sen}(q_d - x(n-1))$$

y, por ejemplo, $x(-1) = 0$.

2. Considérese el modelo del péndulo ideal estudiado en el Ejemplo 5.1:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Considérese el empleo del control PD y supónganse las siguientes condiciones iniciales: $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = 0$. De aquí se tiene $\tilde{q}(0) = \pi/2$.

- (a) Determinar k_p para el cual se garantice que:

$$|\dot{q}(t)| \leq c_1 \quad \forall t \geq 0$$

con $c_1 > 0$. Calcular un valor numérico para k_p tomando $c_1 = 1$.

Ayuda: Usar cota (5.15).

3. Considérese el control PD del robot de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 5.3. Los resultados de simulación en dicho ejemplo fueron obtenidos para $K_p = \operatorname{diag}\{120, 81\}$ y con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.45, & l_{c1} &= 0.091, & l_{c2} &= 0.048, \\ m_1 &= 23.902, & m_2 &= 3.88, & g &= 9.81, \\ q_{d1} &= \pi/4, & q_{d2} &= \pi/20. \end{aligned}$$

La Figura 5.5 indica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_1(t) = 0.189$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_2(t) = 0.015$.

- (a) Demostrar que $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T = [\tilde{q}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$, con

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.189 \\ 0.015 \end{bmatrix},$$

es un equilibrio de la ecuación de malla cerrada.

4. Considérese el robot de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3 y mostrado en la Figura 3.4. El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para dicho robot se obtuvo en el Ejemplo 3.7, siendo sus componentes:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Considérese el empleo del control PD. Debido a la presencia de $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, en general el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$ de la ecuación de malla cerrada no es un equilibrio. Sin embargo, para ciertos valores de \mathbf{q}_d , el origen resulta ser un equilibrio.

- (a) Determinar todos los posibles vectores $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \quad q_{d2}]^T$ para los cuales el origen de la ecuación de malla cerrada es un equilibrio.
5. Considérese el robot cartesiano de 3 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.5 (pág. 73) y mostrado en la Figura 3.6. Su modelo dinámico viene dado por:

$$\begin{aligned} [m_1 + m_2 + m_3] \ddot{q}_1 + [m_1 + m_2 + m_3] g &= \tau_1, \\ [m_1 + m_2] \ddot{q}_2 &= \tau_2, \\ m_1 \ddot{q}_3 &= \tau_3. \end{aligned}$$

Considérese el empleo del controlador PD:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}}$$

donde \mathbf{q}_d es constante y K_p, K_v son matrices diagonales definidas positivas.

- (a) Obtener $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. Verificar que $M(\mathbf{q}) = M$ es una matriz constante y diagonal. Verificar que $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}$ es un vector constante.
- (b) Defínase $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3]^T$. Obtener la ecuación de malla cerrada.
- (c) Verificar que la ecuación de malla cerrada tiene como único equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p^{-1} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

- (d) Defínase $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{q}} - K_p^{-1} \mathbf{g}$. Reescribir la ecuación de malla cerrada en términos del nuevo estado $[\mathbf{z}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$. Verificar que el origen es el único equilibrio y demostrar que el origen es un equilibrio estable

Ayuda: Usar la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M^{-1} K_p \mathbf{z}.$$

- (e) Emplear el teorema de LaSalle (Teorema 2.6) para demostrar que además el origen es asintóticamente estable en forma global.

6

Control PD con compensación de gravedad

El control de posición pura de robots manipuladores puede realizarse potencialmente mediante la técnica de control estudiada en el capítulo anterior, es decir, el control PD.

Sin embargo, dicho esquema de control posee ciertas restricciones que pueden limitar su uso. Efectivamente, el controlador PD cuya sencilla ley de control viene dada por la Ecuación (5.2), garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición en forma global para robots cuyos modelos dinámicos no poseen el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. En este caso, la sintonía¹ de este controlador es trivial ya que es suficiente con seleccionar las matrices de diseño K_p y K_v como simétricas y definidas positivas. No obstante, el control PD no garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición pura de manipuladores cuyos modelos dinámicos contienen el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, a menos que la posición deseada \mathbf{q}_d sea tal que $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{0}$.

En este capítulo se estudia el control PD con compensación de gravedad, que es capaz de satisfacer el objetivo de control de posición pura en forma global para robots de n g.d.l.; además, su sintonía resulta trivial. El estudio formal de dicho controlador se remonta al año 1981 y su referencia viene dada al final del capítulo. En la ley de control se requiere el conocimiento previo de una parte del modelo dinámico del robot a ser controlado, puesto que usa el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

La ley de control PD con compensación de gravedad está representada por:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6.1)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas. Nótese que la única diferencia respecto al control PD (5.2) es el término aditivo $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. A diferencia del control PD, que no requiere conocimiento alguno sobre la estructura del modelo del robot, el controlador (6.1) hace uso explícito del conocimiento parcial del modelo del manipulador,

¹Se entiende aquí por sintonía, a la determinación de valores para los parámetros de diseño del controlador que garanticen el cumplimiento del objetivo de control de posición o movimiento.

específicamente de $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. Sin embargo, es importante observar que para un robot dado el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ puede obtenerse con relativa facilidad, puesto que para este fin basta con calcular sólo la expresión correspondiente a la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ del robot. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se obtiene finalmente de (3.23) como $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \partial\mathcal{U}(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q}$.

La ley de control (6.1) requiere información sobre la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ y la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$, así como medición de la posición $\mathbf{q}(t)$ y velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$ a cada instante. La Figura 6.1 muestra el diagrama de bloques correspondiente al control PD con compensación de gravedad de robots.

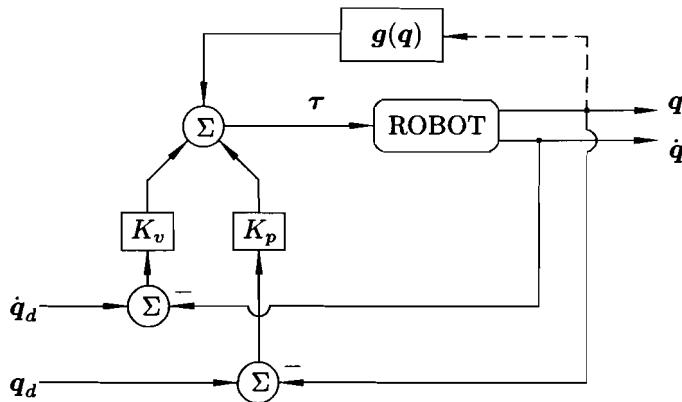


Figura 6.1: Control PD con compensación de gravedad

La ecuación que describe el comportamiento en malla cerrada se obtiene al combinar las Ecuaciones (II.1) y (6.1):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}),$$

o en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q})^{-1} [K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}.$$

Una condición necesaria y suficiente para que el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ sea equilibrio de la ecuación de malla cerrada es que la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ satisfaga:

$$M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0},$$

o equivalentemente, que $\mathbf{q}_d(t)$ sea solución de

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_d \\ -M(\mathbf{q}_d)^{-1}C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}$$

para cualquier condición inicial $[\mathbf{q}_d(0)^T \ \dot{\mathbf{q}}_d(0)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

Evidentemente, en el escenario donde la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ no satisface la condición establecida, entonces el origen no será equilibrio de la ecuación de malla cerrada, y por lo tanto no podrá esperarse que se satisfaga cabalmente el objetivo de control de movimiento, i.e., llevar el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ asintóticamente a cero. No obstante, puede conseguirse que asintóticamente el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ sea tan pequeño como se desee, a condición de seleccionar las matrices K_p y K_v suficientemente "grandes". Para la demostración formal de esta afirmación, el lector puede acudir a la referencia correspondiente citada al final del capítulo.

Una condición suficiente para que el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ sea el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada es que la posición articular deseada \mathbf{q}_d sea un vector constante. En la parte que resta de este capítulo se supondrá que éste es el caso.

Como se demostrará en los párrafos siguientes, este controlador verifica el objetivo de posición pura, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante cualquiera.

Considerando la posición deseada \mathbf{q}_d como constante, la ecuación de malla cerrada puede entonces escribirse en términos del nuevo vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

la cual, debido a que \mathbf{q}_d es constante, representa una ecuación diferencial autónoma. El origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es el único equilibrio de la ecuación.

El análisis de estabilidad que presentamos a continuación se ha extraído de la bibliografía. El lector puede alternativamente consultar las referencias citadas al final del capítulo.

Para estudiar la estabilidad del origen como equilibrio, se empleará el método directo de Lyapunov que ha sido presentado en el capítulo de preliminares matemáticos. Específicamente, se empleará el Teorema 2.3 para demostrar estabilidad del equilibrio (origen).

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}$$

donde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ denota la energía cinética del robot. Claramente, la función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es una función definida positiva en forma global y radialmente desacotada, ya que la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida positiva en $\dot{\mathbf{q}}$ y como por otro lado K_p es una matriz definida positiva, entonces también la forma cuadrática $\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}$ es una función definida positiva en $\tilde{\mathbf{q}}$.

La función candidata de Lyapunov puede expresarse como

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}.$$

Al sustituir $M(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}}$ de la ecuación de malla cerrada (6.2) se simplifica a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}, \\ &= - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde se ha eliminado el término $\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} - C \right] \dot{\mathbf{q}}$ en vista de la Propiedad 4.3 y se ha empleado $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$ ya que \mathbf{q}_d es constante.

La función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es entonces una función de Lyapunov en vista de que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$ y en consecuencia el origen es estable y las soluciones $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ están acotadas (Teorema 2.3).

Debido a la autonomía con respecto al tiempo de la ecuación de malla cerrada (6.2), puede explorarse la aplicación del teorema de LaSalle (Teorema 2.6) para analizar la estabilidad asintótica global del origen.

Con este propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\}, \\ &= \{ \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Para que una solución $\mathbf{x}(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacerse que $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Tomando esto en consideración, de la ecuación de malla cerrada (6.2) se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces:

$$\mathbf{0} = M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}(t))^{-1} K_p \tilde{\mathbf{q}}(t),$$

significando esto que $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $[\tilde{\mathbf{q}}(0)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(0)^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. Luego, de

acuerdo con el teorema de LaSalle (Teorema 2.6), esto basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Como resultado, se afirma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

es decir, que se verifica el objetivo de control de posición pura.

A continuación se presenta un ejemplo cuyo propósito es mostrar la prestación lograda en el control PD con compensación de gravedad de un robot de 2 g.d.l.

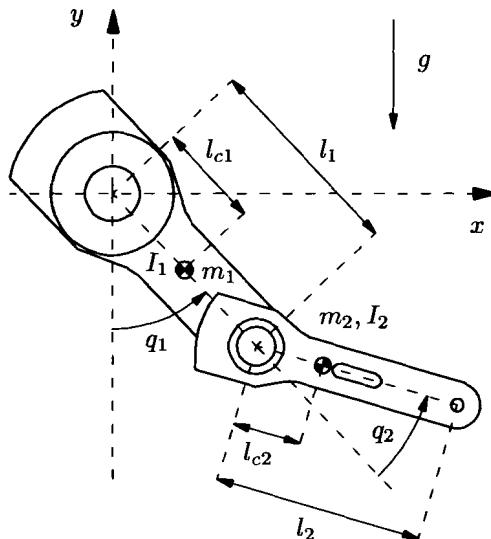


Figura 6.2: Robot de 2 d.g.l.

Ejemplo 6.1 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 6.2. Los diversos elementos que conforman el modelo dinámico se describen en el Apéndice B.

Los componentes del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

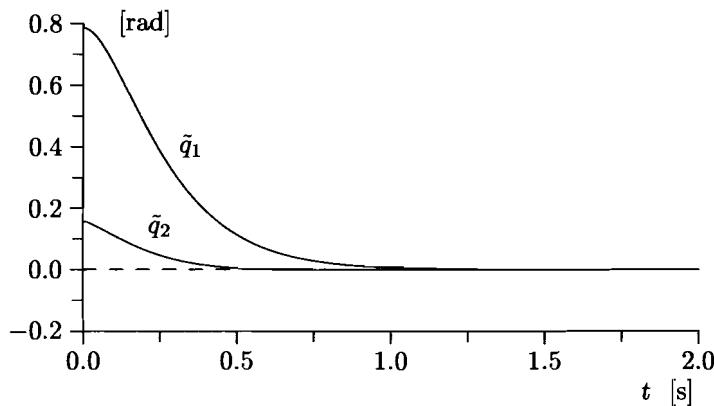


Figura 6.3: Errores de posición

Considérese el control PD con compensación de gravedad de dicho robot para el control de posición pura, donde las matrices de diseño deben ser definidas positivas. En particular, dichas matrices se escogen (arbitrariamente) como:

$$K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix} \text{ [Nm/rad]}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \text{ [Nm s/rad]}.$$

Los elementos que componen la acción de control τ vienen dados por:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= k_{p_1} \tilde{q}_1 - k_{v_1} \dot{\tilde{q}}_1 + g_1(\mathbf{q}), \\ \tau_2 &= k_{p_2} \tilde{q}_2 - k_{v_2} \dot{\tilde{q}}_2 + g_2(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades se escogen nulas:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0 \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Las posiciones articulares deseadas son:

$$q_{d1} = \pi/4 \text{ [rad]}, \quad q_{d2} = \pi/20 \text{ [rad]}.$$

En términos del vector de estado de la ecuación de malla cerrada, el estado inicial correspondiente es

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(0) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.785 \\ 0.157 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La Figura 6.3 presenta los resultados de simulación. En particular, se muestra cómo los elementos que conforman el error de posición $\tilde{q}(t)$ tienden asintóticamente a cero.

6.1 Función de Lyapunov para estabilidad asintótica global

En este epígrafe se presenta una prueba alternativa de estabilidad asintótica en forma global sin hacer uso del teorema de LaSalle, mediante la propuesta de una función de Lyapunov estricta. A continuación se presenta dicho análisis donde se considera el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales y restringiendo la matriz de ganancia proporcional K_p a ser no sólo simétrica sino diagonal, pero conservando su cualidad de definida positiva. El lector puede, si lo desea, omitir el estudio del resto de este epígrafe y pasar al siguiente.

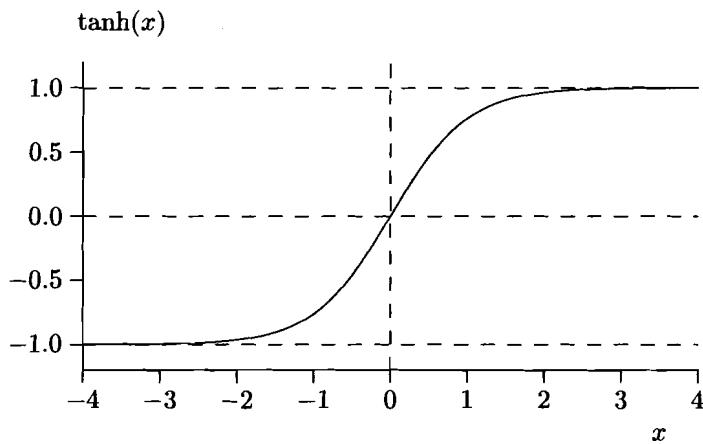


Figura 6.4: Tangente hiperbólica $\tanh(x)$

Antes de iniciar el análisis de estabilidad del equilibrio $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación de malla cerrada (6.2), es conveniente enunciar algunas propiedades de la siguiente función vectorial²:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\tanh(x_1) \quad \tanh(x_2) \quad \cdots \quad \tanh(x_n)]^T \quad (6.5)$$

²Véase también la Definición 4.1 en pág. 108.

donde $\tanh(x)$ (véase la Figura 6.4) denota la función tangente hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Note que dicha función satisface $|x| \geq |\tanh(x)|$, y $1 \geq |\tanh(x)|$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por tanto la norma euclíadiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ satisface:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{x}\| & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6.6)$$

y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Es fácil probar que para una matriz simétrica definida positiva A se mantiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T A \tilde{\mathbf{q}} \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}\{A\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n,$$

y si además A es diagonal, entonces

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T A \tilde{\mathbf{q}} \geq \lambda_{\min}\{A\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.7)$$

A continuación se presenta el análisis de estabilidad previamente comentado. Para estudiar las propiedades de estabilidad del origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación de malla cerrada (6.2), considérese la función de Lyapunov (6.3) pero con un término adicional, de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (6.8)$$

donde $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ se ha definido en (6.5) y $\gamma > 0$ es una constante suficientemente pequeña como para satisfacer simultáneamente:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{M\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}} > \gamma^2, \quad (6.9)$$

y

$$\frac{4\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{K_v\} + 4\lambda_{\min}\{K_p\}[\sqrt{n}k_{C_1} + \lambda_{\max}\{M\}]} > \gamma. \quad (6.10)$$

En vista de que las cotas superiores siempre son constantes estrictamente positivas, entonces siempre existe $\gamma > 0$ arbitrariamente pequeña que satisface ambas desigualdades.

Positividad

Para mostrar que la función candidata de Lyapunov (6.8) es una función definida positiva y radialmente desacotada, primeramente obsérvese que el tercer sumando de (6.8) satisface:

$$\begin{aligned}\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \gamma \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\| \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|\end{aligned}$$

considerando (6.6) en el último paso. De aquí se desprende que:

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \geq -\gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|.$$

Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (6.8) cumple con la siguiente desigualdad:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\gamma \lambda_{\max}\{M\} \\ -\gamma \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\min}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}$$

y en consecuencia, resulta una función definida positiva y radialmente desacotada ya que, por hipótesis, K_p es definida positiva — $\lambda_{\min}\{K_p\} > 0$ —, y γ se ha seleccionado de modo que satisface (6.9).

Derivada temporal

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (6.8) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.2) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - [K_p \tilde{\mathbf{q}}]^T \dot{\mathbf{q}} - \gamma \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}].\end{aligned}$$

Usando la Propiedad 4.3 que establece $\dot{\mathbf{q}}^T [\frac{1}{2} \dot{M} - C] \dot{\mathbf{q}} = 0$ y $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov queda:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \gamma \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Ahora se buscará acotar superiormente a $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ por una función definida negativa en términos de los estados $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\mathbf{q}}$. Para este fin, es conveniente encontrar cotas superiores de cada término de (6.11).

El primer término de (6.11) puede ser trivialmente acotado por

$$-\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \leq -\lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2.\tag{6.12}$$

Para acotar superiormente el segundo término de (6.11) primero nótese que

$$\dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}}) = -F(\tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

donde $F(\tilde{\mathbf{q}})$ es una matriz diagonal cuyos elementos $\text{sech}^2(\tilde{q}_i)$ son no negativos y menores que 1. De aquí se desprende la siguiente desigualdad:

$$\|\dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \|\dot{\mathbf{q}}\|. \quad (6.13)$$

Debido a este argumento se tiene que

$$-\gamma \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (6.14)$$

Por otro lado, nótese que en vista de (6.7), la desigualdad siguiente es cierta debido a que K_p es una matriz diagonal y definida positiva

$$\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \geq \gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2,$$

que conduce finalmente a la siguiente desigualdad clave:

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \leq -\gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2. \quad (6.15)$$

Una cota obtenida en forma directa sobre $\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}}$ viene dada por:

$$\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{K_v\} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|. \quad (6.16)$$

La cota superior del término $-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}$ deberá seleccionarse cuidadosamente. Nótese que

$$\begin{aligned} -\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &= -\gamma \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &\leq \gamma \|\dot{\mathbf{q}}\| \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|. \end{aligned}$$

Considerando nuevamente la Propiedad 4.3 pero en la modalidad que establece la existencia de una constante k_{C_1} tal que $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, resulta que

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \leq \gamma k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|.$$

Aprovechando la característica (6.6) sobre $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ que afirma $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \sqrt{n}$ para toda $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, entonces se obtiene:

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \leq \gamma \sqrt{n} k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (6.17)$$

Las cotas (6.12)–(6.17) conducen a que la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ en (6.11) cumpla con

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq -\gamma \left[\frac{\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|}{\|\dot{\mathbf{q}}\|} \right]^T Q \left[\frac{\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|}{\|\dot{\mathbf{q}}\|} \right] \quad (6.18)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\frac{1}{2}\lambda_{\max}\{K_v\} \\ -\frac{1}{2}\lambda_{\max}\{K_v\} & \frac{1}{\gamma}\lambda_{\min}\{K_v\} - \sqrt{n}k_{C1} - \lambda_{\max}\{M\} \end{bmatrix}.$$

Las dos condiciones siguientes garantizan que la matriz Q sea definida positiva, por tanto, éstas son suficientes para asegurar que $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ sea una función definida negativa:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > 0$$

y

$$\frac{4\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{K_v\} + 4\lambda_{\min}\{K_p\}[\sqrt{n}k_{C1} + \lambda_{\max}\{M\}]} > \gamma.$$

La primera condición se satisface trivialmente puesto que K_p se ha considerado una matriz diagonal definida positiva. La segunda condición también se cumple debido a la cota superior (6.10) impuesta sobre γ .

De acuerdo con los argumentos presentados anteriormente, siempre existe una constante positiva (no nula) γ tal que la función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ dada por (6.8) es definida positiva, mientras que $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ expresada como (6.18) es definida negativa. Por este argumento, $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función de Lyapunov estricta.

El Teorema 2.4 permite establecer finalmente estabilidad asintótica global del origen. Es importante subrayar que no es necesario conocer el valor de γ sino sólo garantizar su existencia, ya demostrada, para validar el resultado de estabilidad asintótica global enunciado.

6.2 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos.

Considérese el control PD con compensación de gravedad de robots de n g.d.l. Supóngase que la posición deseada \mathbf{q}_d es constante.

- Si las matrices simétricas K_p y K_v del controlador PD con compensación de gravedad son definidas positivas, entonces el origen de la ecuación de malla cerrada expresada en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global. En consecuencia, para cualquier condición inicial $\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Referencias

El controlador PD con compensación de gravedad fue analizado originalmente en:

- Takegaki, M., Arimoto, S., 1981, "A new feedback Method for dynamic control of manipulators", Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 103, pp. 119-125.

Los siguientes textos presentan también la demostración de estabilidad asintótica global del control PD con compensación de gravedad de robots manipuladores:

- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “*Robot dynamics and control*”, John Wiley & Sons.
- Yoshikawa, T., 1990, “*Foundations of robotics: Analysis and control*”, The MIT Press.

Una demostración de estabilidad particularmente sencilla del controlador PD con compensación de gravedad haciendo uso del teorema de LaSalle está presente en:

- Paden, B., Panja, R., 1988, “*Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators*”, International Journal of Control, Vol. 47, No. 6, pp. 1697-1712.

El análisis del control PD con compensación de gravedad para el caso donde la posición articular deseada q_d es variante en el tiempo es presentado en:

- Kawamura, S., Miyazaki, F., Arimoto, S., 1988, “*Is a local linear PD feedback control law effective for trajectory tracking of robot motion?*”, in Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, PA, April, pp. 1335–1340.

Problemas

1. Considérese el sistema de control PD con compensación de gravedad de robots. Sea $q_d(t)$ la posición articular deseada.

Supóngase que existe un vector constante $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\mathbf{x} - K_p^{-1} [M(q_d - \mathbf{x})\ddot{q}_d + C(q_d - \mathbf{x}, \dot{q}_d)\dot{q}_d] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

- (a) Demostrar que $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ es un equilibrio de la ecuación de malla cerrada.

2. Considérese el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48)

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin(q) = \tau.$$

El control PD con compensación de gravedad es en este caso:

$$\tau = k_p\tilde{q} + k_v\dot{\tilde{q}} + mgl \sin(q)$$

donde k_p y k_v son constantes positivas.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T$. ¿Es lineal en el estado dicha ecuación?

- (b) Supóngase que la posición deseada es $q_d(t) = \alpha t$ con α una constante real cualquiera. Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0.$$

3. Verificar la expresión de $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ obtenida en (6.4).

4. Considérese el robot cartesiano de 3 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.5 (pág. 73) y mostrado en la Figura 3.6. Su modelo dinámico viene dado por:

$$\begin{aligned}[m_1 + m_2 + m_3]\ddot{q}_1 + [m_1 + m_2 + m_3]g &= \tau_1, \\ [m_1 + m_2]\ddot{q}_2 &= \tau_2, \\ m_1\ddot{q}_3 &= \tau_3.\end{aligned}$$

Supóngase que la posición deseada q_d es constante. Considérese el empleo del controlador PD con compensación de gravedad:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q)$$

donde K_p, K_v son matrices definidas positivas.

- (a) Obtener $g(q)$. Verificar que $g(q) = g$ es un vector constante.
 (b) Definir $\tilde{q} = [\tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3]^T$. Obtener la ecuación de malla cerrada. ¿Es la ecuación de malla cerrada lineal en el estado?
 (c) ¿Es el origen el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada?
 (d) Demostrar que el origen es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

5. Considérese la siguiente variante del control PD con compensación de gravedad³:

$$\tau = K_p \tilde{q} - M(q)K_v \dot{q} + g(q)$$

donde q_d es constante, K_p es una matriz simétrica definida positiva y $K_v = \text{diag}\{k_v\}$ con $k_v > 0$.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T$.
 (b) Verificar que el origen sea el único equilibrio.

³ Problema extraído de Craig, J. J., 1989, "Introduction to robotics: Mechanics and control", Second Edition, Addison-Wesley.

- (c) Demostrar que el origen es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.
6. Considérese el control PD con compensación de gravedad donde ahora la matriz K_v es una función del tiempo:

$$\tau = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v(t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

donde \mathbf{q}_d es constante, K_p es una matriz definida positiva y $K_v(t)$ es también una matriz definida positiva para todo $t \geq 0$.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$.
¿Es autónoma la ecuación de malla cerrada?
- (b) Verificar que el origen sea el único equilibrio.
- (c) Demostrar que el origen es un equilibrio estable.

7

Control PD con compensación precalculada de gravedad

El objetivo de control de posición pura de robots manipuladores (cuyo modelo dinámico incluye el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$), se resuelve en forma global por el control PD con compensación de gravedad. La ley de control de dicho controlador, dada por la Ecuación (6.1), requiere que sus matrices simétricas de diseño K_p y K_v sean definidas positivas. Por otra parte, el citado controlador emplea explícitamente en su ley de control el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ del modelo dinámico del robot a ser controlado.

No obstante, conviene apuntar que aun en el escenario de control de posición pura donde la posición articular deseada $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es constante, en la implantación del control PD con compensación de gravedad se necesita evaluar en permanencia al vector $\mathbf{g}(\mathbf{q}(t))$. En general, los elementos del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ involucran funciones trigonométricas de las posiciones articulares \mathbf{q} , cuyas evaluaciones, realizadas en su mayoría mediante equipo digital, toman un tiempo significativamente mayor que la evaluación de la parte PD de la ley de control. En ciertas aplicaciones, la (alta) frecuencia de muestreo especificada no permite evaluar en permanencia $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. Naturalmente, una solución práctica a esta situación es la de implantar la ley de control a dos frecuencias de muestreo: una frecuencia elevada para la evaluación de la parte PD, y una frecuencia baja para la evaluación de $\mathbf{g}(\mathbf{q}(t))$. Otra alternativa de solución consiste en el empleo de una variante de dicho controlador, el denominado control PD con compensación *precalculada* de gravedad. El estudio del citado controlador es justamente el motivo del presente capítulo.

La ley de control PD con compensación precalculada de gravedad viene dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (7.1)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas por el diseñador. Como de costumbre, el error de posición se denota por $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$,

siendo \mathbf{q}_d la posición articular deseada. La Figura 7.1 presenta el diagrama de bloques del control PD con compensación precalculada de gravedad de robots manipuladores. Nótese que la única diferencia con el controlador PD con compensación de gravedad (6.1) es que el término $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$ reemplaza a $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. La conveniencia práctica de este controlador es evidente cuando la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ es periódica o constante. En efecto, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$, que depende de \mathbf{q}_d y no de \mathbf{q} , puede ser evaluado “fuera de línea” una vez definido \mathbf{q}_d , y por lo tanto, ya no es necesario evaluar $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ en tiempo real.

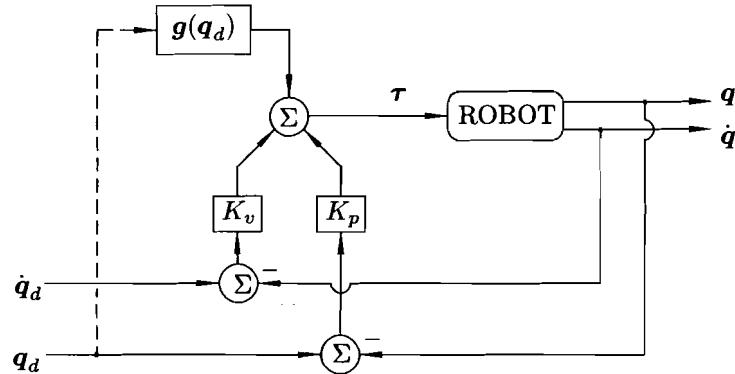


Figura 7.1: Control PD con compensación precalculada de gravedad

La ecuación de malla cerrada se obtiene combinando la ecuación del modelo del robot (II.1) y la ecuación del controlador (7.1)

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$$

o equivalentemente en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q})^{-1} [K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix},$$

la cual representa una ecuación diferencial no lineal y no autónoma. La condición necesaria y suficiente para que el origen $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ sea equilibrio de la ecuación de malla cerrada, es que la posición articular deseada \mathbf{q}_d satisfaga:

$$M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

o igualmente, que $\mathbf{q}_d(t)$ sea solución de

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_d \\ -M(\mathbf{q}_d)^{-1} [C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d] \end{bmatrix}$$

para cualquier condición inicial $[\mathbf{q}_d(0)^T \ \dot{\mathbf{q}}_d(0)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

Evidentemente, en el contexto donde la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ no satisface la condición establecida, entonces el origen no será equilibrio de la ecuación de malla cerrada, y por lo tanto no podrá esperarse que cumpla cabalmente el objetivo de control de movimiento, i.e., llevar el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ asintóticamente a cero.

Una condición suficiente para que el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ sea un equilibrio de la ecuación de malla cerrada es que la posición articular deseada \mathbf{q}_d sea un vector constante. En la parte que resta del capítulo se supondrá que éste es el caso.

Como se demostrará en los párrafos siguientes, este controlador puede verificar el objetivo de posición pura en forma global, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante cualquiera. Se aclara que “puede verificar” el objetivo de control de posición pura, a condición de seleccionar K_p suficientemente “grande”. Más adelante en este capítulo, se cuantificará este vocablo.

Considerando la posición deseada \mathbf{q}_d como constante, la ecuación de malla cerrada puede entonces escribirse en términos del nuevo vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

siendo ahora una ecuación diferencial no lineal pero autónoma, cuyo origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es un equilibrio. Sin embargo, aparte del origen pueden existir otros equilibrios. Habrá tantos equilibrios como soluciones en $\tilde{\mathbf{q}}$ tenga la ecuación:

$$K_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (7.3)$$

Naturalmente, las soluciones explícitas de (7.3) son difícilmente obtenibles. No obstante, como se demostrará posteriormente, si K_p se escoge suficientemente “grande”, entonces $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ será la única solución.

Ejemplo 7.1 Considérese el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48):

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau$$

donde se identifica $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$.

En este caso, la Ecuación (7.3) toma la forma:

$$k_p \tilde{q} - mgl [\operatorname{sen}(q_d - \tilde{q}) - \operatorname{sen}(q_d)] = 0. \quad (7.4)$$

Con propósitos ilustrativos, tómense los siguientes valores numéricos:

$$ml^2 = 1, \quad mgl = 1, \\ k_p = 0.25, \quad q_d = \pi/2.$$

Mediante método gráfico o por algoritmos numéricos, puede comprobarse que la Ecuación (7.4) posee exactamente tres soluciones en \tilde{q} . Los valores aproximados de estas soluciones son: 0 [rad], -0.51 [rad] y -4.57 [rad]. Esto significa que el sistema de control PD con compensación precalculada de gravedad en malla cerrada con el modelo del péndulo ideal, tiene los siguientes equilibrios:

$$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.51 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4.57 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Considérese ahora un valor mayor para k_p (suficientemente “grande”), e.g.,

$$k_p = 1.25$$

En este contexto, puede verificarse numéricamente que la Ecuación (7.4) tiene una única solución: $\tilde{q} = 0$ [rad]. Este hecho significa que el sistema de control PD con compensación precalculada de gravedad en malla cerrada con el modelo del péndulo ideal, tiene en el origen su único equilibrio, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

El resto del presente capítulo desarrolla los siguientes tópicos:

- Acotamiento de soluciones.
- Unicidad del equilibrio.
- Estabilidad asintótica global.

Los estudios presentados se limitan únicamente al caso de robots cuyas articulaciones son todas rotacionales.

7.1 Acotamiento de errores de posición \tilde{q} y de la velocidad \dot{q}

A continuación se presenta un análisis inédito del comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación de malla cerrada (7.2). Se considerará sólo el caso de robots provistos de articulaciones rotacionales.

Suponiendo que las matrices de diseño K_p y K_v son definidas positivas (sin considerar que K_p es suficientemente “grande”), y claro, para una posición deseada \mathbf{q}_d constante, hasta este punto sólo se sabe que la ecuación de malla cerrada (7.2) tiene un equilibrio en el origen, pero pudiesen existir otros. A pesar de ello, se demostrará mediante el empleo del Lema 2.2, que tanto el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ como la velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$ permanecen acotados para toda condición inicial $[\tilde{\mathbf{q}}(0)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(0)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

Defínase la siguiente función (más adelante se demostrará que es una función no negativa):

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) - k_{\mathcal{U}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ denotan las energías cinética y potencial del robot, y la constante $k_{\mathcal{U}}$ se define como (véase la Propiedad 4.4)

$$k_{\mathcal{U}} = \min_q \{\mathcal{U}(\mathbf{q})\}.$$

La función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T P(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + h(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (7.5)$$

donde

$$\begin{aligned} P(\tilde{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}), \\ h(\tilde{\mathbf{q}}) &= \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - k_{\mathcal{U}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \end{aligned}$$

Como se ha supuesto que el robot sólo posee articulaciones rotacionales, entonces $\mathcal{U}(\mathbf{q}) - k_{\mathcal{U}} \geq 0$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, se tiene que

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$$

puede expresarse como¹:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & I \\ I & K_p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix}$$

¹Considérese la matriz particionada:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}.$$

Si $A = A^T > 0$, $C = C^T > 0$ y $C - B^T A^{-1} B \geq 0$, entonces la matriz particionada es semidefinida positiva. Véase, e.g., Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, *Matrix analysis*, pág. 473.

siendo no negativa para todo $\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, la función $h(\tilde{\mathbf{q}})$ es no negativa. Naturalmente, como la energía cinética $\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ es una función definida positiva en $\dot{\mathbf{q}}$, entonces la función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es no negativa para todo $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

La derivada temporal de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (7.6)$$

donde se ha usado (3.23), i.e., $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q})$. Despejando $M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$ de la ecuación de malla cerrada (7.2) y sustituyendo en (7.6):

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (7.7)$$

donde el término $\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} - C \right] \dot{\mathbf{q}}$ ha sido eliminado debido a la Propiedad 4.3 que establece la antisimetría de la matriz $\frac{1}{2} \dot{M} - C$. Recordando que el vector \mathbf{q}_d es constante y que $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$, entonces $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$. Incorporando este elemento, la Ecuación (7.7) se reduce a:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \overbrace{K_v}^Q \dot{\mathbf{q}}. \quad (7.8)$$

Usando $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ dados por (7.5) y (7.8) respectivamente y el Lema 2.2, se concluye que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} &\in L_\infty^n, \\ \dot{\mathbf{q}} &\in L_2^n. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Más aún, tal y como se mostrará a continuación, pueden determinarse cotas máximas explícitas para los errores de posición y para la velocidad. Teniendo en consideración que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función no negativa y además no creciente en el tiempo ($\frac{d}{dt} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$), se tiene que:

$$0 \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$$

para todo $t \geq 0$. En consecuencia, considerando la definición de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ se deduce inmediatamente que

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}(t)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{q}}(t)^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)), \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t)^T M(\mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)), \quad (7.11)$$

para todo $t \geq 0$, y donde:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0)) \dot{\mathbf{q}}(0) + \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) - k_{\mathcal{U}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}(0)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}}(0) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \end{aligned}$$

El valor de $V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$ puede determinarse a condición de conocer la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ y el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. Naturalmente, aquí se supone que la posición $\mathbf{q}(t)$ y la velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$, y en particular al instante $t = 0$, son sensadas por medio de instrumentos colocados en el robot para este fin.

A continuación se obtendrán cotas explícitas sobre $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ y $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ en función de las condiciones iniciales.

Primeramente nótese que

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{2} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}}}_{c} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)}_c$$

donde se ha empleado el hecho de que $c \geq 0$ y que para todo vector \mathbf{x} y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $-\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, por lo que $-\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Teniendo en cuenta (7.10) se obtiene:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{2} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| - V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \leq 0$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)\| + \sqrt{\|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)\|^2 + 2\lambda_{\min}\{K_p\}V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}}{\lambda_{\min}\{K_p\}} \quad (7.12)$$

para todo $t \geq 0$.

Por otra parte, de (7.11) se tiene claramente que:

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 \leq \frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}} \quad (7.13)$$

para todo $t \geq 0$. Las expresiones (7.12) y (7.13) establecen las cotas buscadas.

En realidad, puede demostrarse que la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ no solo es acotada, sino que tiende asintóticamente a cero. En esta dirección, nótese de (7.2) que:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}]. \quad (7.14)$$

Como $\dot{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ resultaron ser vectores acotados ($\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \in L_\infty^n$), entonces $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ son vectores acotados de acuerdo con las Propiedades 4.3 y 4.4. Por otro lado, como $M(\mathbf{q})^{-1}$ es una matriz acotada (Propiedad 4.2), entonces de (7.14) se concluye que:

$$\ddot{\mathbf{q}} \in L_\infty^n.$$

Esto último y (7.9) implican a su vez (Lema 2.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}.$$

Ejemplo 7.2 Considérese nuevamente el modelo del péndulo ideal del Ejemplo 7.1:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

donde se identifica claramente $M(q) = ml^2$ y $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$. Tal y como se indicó en su momento en el Ejemplo 2.10 (pág. 48), la energía potencial viene dada por

$$\mathcal{U}(q) = mgl[1 - \cos(q)].$$

Ya que $\min_q \{\mathcal{U}(q)\} = 0$, luego la constante $k_{\mathcal{U}}$ toma el valor de cero.

Considérense los valores numéricos usados en el Ejemplo 7.1

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ k_p &= 0.25, & k_v &= 0.50, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Supóngase que se emplea el control PD con compensación precalculada de gravedad en el control del péndulo ideal con las siguientes condiciones iniciales: $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = 0$.

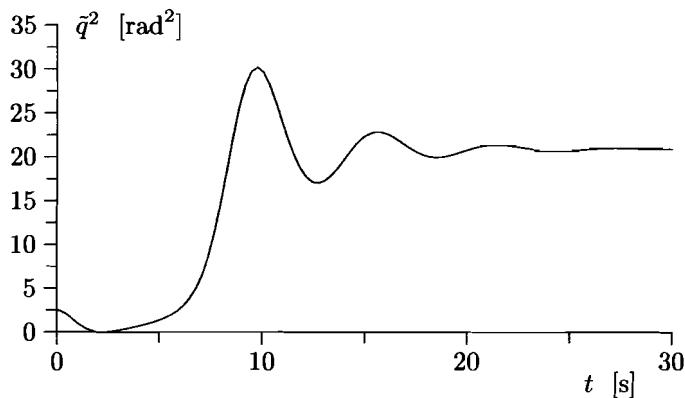
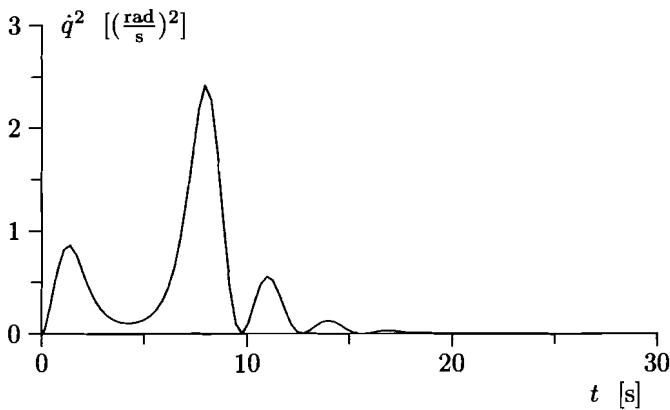


Figura 7.2: Gráfica de \tilde{q}^2

Con los valores anteriores puede fácilmente verificarse que:

$$\begin{aligned} g(q_d) &= mgl \operatorname{sen}(\pi/2) = 1, \\ V(\tilde{q}(0), \dot{q}(0)) &= \frac{1}{2}k_p\tilde{q}^2(0) + mgl\tilde{q}(0) + \frac{1}{2k_p}(mgl)^2 = 3.87 \end{aligned}$$

Figura 7.3: Gráfica de \dot{q}^2

De acuerdo con los resultados sobre acotamiento (7.12) y (7.13) y teniendo en cuenta la información previa, se llega a:

$$\begin{aligned} |\tilde{q}^2(t)| &\leq \left[\frac{mgl + \sqrt{(mgl + k_p\tilde{q}(0))^2 + (mgl)^2}}{k_p} \right]^2 \\ &\leq 117.79 \quad [\text{rad}^2], \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} |\dot{q}^2(t)| &\leq \frac{2}{ml^2} \left[\frac{k_p}{2} \tilde{q}^2(0) + mgl\tilde{q}(0) + \frac{1}{2k_p} (mgl)^2 \right] \\ &\leq 7.75 \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]^2, \end{aligned} \quad (7.16)$$

para todo $t \geq 0$. Las Figuras 7.2 y 7.3 muestran las gráficas de \tilde{q}^2 y \dot{q}^2 obtenidas de simulación. Se aprecia claramente de las gráficas, que ambas variables satisfacen las desigualdades (7.15) y (7.16). Finalmente, es interesante observar de la Figura 7.2 que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}^2(t) = 20.88$ (evidencia de simulación indica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = -4.57$) y $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}^2(t) = 0$, por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.57 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí se desprende que las soluciones tienden justamente a uno de los tres equilibrios obtenidos en el Ejemplo 7.1, pero no corresponde al origen. La moraleja de este ejemplo es que el control PD con compensación precalculada de gravedad puede fallar al verificar el objetivo de control de posición pura si se escoge inadecuadamente la ganancia proporcional k_p .

A modo de resumen de lo expuesto anteriormente se tiene lo siguiente. Considérese el control PD con compensación precalculada de gravedad de robot con articulaciones rotacionales. Supóngase que las matrices de diseño K_p y K_v son definidas positivas. Si la posición articular deseada $\mathbf{q}_d(t)$ es un vector constante, entonces:

- El error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ y la velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)$ están acotados. Las cotas máximas sobre sus normas vienen dadas por las expresiones (7.12) y (7.13), respectivamente.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

7.2 Equilibrio único

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, se demostrará que con una selección suficientemente “grande” de K_p , se garantiza unicidad de equilibrio para la ecuación de malla cerrada (7.2). Para este fin, se empleará aquí el teorema de *contracción de mapas* (Teorema 2.1, pág. 33).

Los equilibrios de la ecuación de malla cerrada (7.2) satisfacen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ donde $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es solución de (7.3):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}} &= K_p^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)] \\ &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d).\end{aligned}$$

Naturalmente $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es una solución trivial de $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d)$, pero como se ha ilustrado con anterioridad en el Ejemplo 7.1, pueden existir además otras soluciones.

Si la función $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d)$ satisface la condición del teorema de contracción de mapas, i.e., $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d)$ es Lipschitz con constante de Lipschitz estrictamente menor que 1, entonces la ecuación $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d)$ tendrá una única solución $\tilde{\mathbf{q}}^*$ y, en consecuencia, el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada (7.2) será $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [\tilde{\mathbf{q}}^{*T} \quad \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Por lo tanto, como el origen siempre es un equilibrio de la ecuación de malla cerrada, luego tal equilibrio único será el origen.

Ahora bien, nótese que para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{q}_d)\| &= \|K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{x}) - K_p^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{y})\|, \\ &= \|K_p^{-1} \{\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{y})\}\|, \\ &\leq \lambda_{\text{Max}}\{K_p^{-1}\} \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{y})\|.\end{aligned}$$

Por otro lado, usando el hecho de que $\lambda_{\text{Max}}\{A^{-1}\} = 1/\lambda_{\min}\{A\}$ para cualquier matriz simétrica definida positiva A , y la Propiedad 4.4 que garantiza la existencia de una constante positiva k_g tal que: $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, se tiene que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{q}_d)\| \leq \frac{k_g}{\lambda_{\min}\{K_p\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

luego, de acuerdo al teorema de contracción de mapas (Teorema 2.1, pág. 33), una condición suficiente para unicidad de solución de:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d) - \tilde{\mathbf{q}} = K_p^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)] - \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n,$$

y en consecuencia unicidad de equilibrio de la ecuación de malla cerrada, es que K_p sea seleccionada de tal forma que

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g. \quad (7.17)$$

Por lo tanto, suponiendo K_p seleccionada de manera que $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, entonces el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada (7.2) será el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

7.3 Estabilidad asintótica global

El objetivo del presente epígrafe es demostrar que bajo el supuesto de que la matriz K_p satisface la condición (7.17), también dicha condición resulta suficiente para garantizar que el origen sea asintóticamente estable en forma global de la ecuación de malla cerrada (7.2). Para este propósito se empleará como de costumbre, el método directo de Lyapunov, pero complementado con el teorema de LaSalle. Dicha demostración ha sido extraída de las referencias citadas al final del capítulo.

Primeramente, se presentará un lema sobre una función definida positiva de particular relevancia para la propuesta posterior de una función candidata de Lyapunov².

Lema 7.1 Considérese la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \quad (7.18)$$

donde $K_p = K_p^T > 0$, $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante, ε es una constante real positiva y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ es la energía potencial del robot. Si

$$\frac{2}{\varepsilon} K_p + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})} > 0$$

²Véase también el Ejemplo D.3 del Apéndice D.

para todo $\mathbf{q}_d, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva en forma global. La condición anterior se satisface si

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} k_g$$

donde k_g se ha definido en la Propiedad 4.4, y que a su vez verifica:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

\nabla\nabla\nabla

Debido a la importancia del lema enunciado, a continuación se presenta de forma detallada su demostración.

Demostración. La demostración consiste en establecer que $f(\tilde{\mathbf{q}})$ tiene un mínimo global en $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Para este fin se empleará el siguiente resultado bien conocido en técnicas de optimización. Sea $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas al menos hasta de segundo orden. La función $f(\mathbf{x})$ tiene un mínimo global en $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ si:

1. El vector gradiente de la función $f(\mathbf{x})$ evaluado en $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es cero, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

2. La matriz hessiana de la función $f(\mathbf{x})$ evaluada para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es una matriz definida positiva, i.e.,

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) > 0.$$

Por lo tanto, el gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ con respecto a $\tilde{\mathbf{q}}$ es:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} f(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{2}{\varepsilon} K_p \tilde{\mathbf{q}}.$$

Recordando de (3.23) que $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \partial U(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$ y que³

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}^T \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}$$

³Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $x = g(y)$. Entonces:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \left[\frac{\partial g(y)}{\partial y} \right]^T \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

se llega por último a la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}} f(\tilde{q}) = -g(q_d - \tilde{q}) + g(q_d) + \frac{2}{\varepsilon} K_p \tilde{q}.$$

Es evidente que el gradiente de $f(\tilde{q})$ es nulo para $\tilde{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. De hecho, puede demostrarse que si $\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} k_g$, entonces el gradiente de $f(\tilde{q})$ sólo se anula en $\tilde{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. La prueba de la afirmación anterior es similar a la empleada en la demostración de unicidad del equilibrio en el Epígrafe 7.2.

La matriz hessiana $H(\tilde{q})$ (simétrica) de $f(\tilde{q})$ definida como:

$$H(\tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left[\frac{\partial f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_n} \\ \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{q}_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{q}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_n \partial \tilde{q}_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_n \partial \tilde{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_n \partial \tilde{q}_n} \end{bmatrix}$$

resulta ser⁴

$$H(\tilde{q}) = \frac{\partial g(q_d - \tilde{q})}{\partial (q_d - \tilde{q})} + \frac{2}{\varepsilon} K_p.$$

Entonces $f(\tilde{q})$ tendrá un mínimo (global) en $\tilde{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ si $H(\tilde{q}) > 0$ para todo $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$, en otras palabras, si la matriz simétrica

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q} + \frac{2}{\varepsilon} K_p \quad (7.19)$$

es definida positiva para todo $q \in \mathbb{R}^n$.

Aquí se empleará el siguiente resultado cuya prueba viene dada en el Ejemplo D.3 del Apéndice D. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices simétricas. Supóngase además que la matriz A es definida positiva, pero B puede no serlo. Si $\lambda_{\min}\{A\} > \|B\|$, entonces la matriz $A + B$ es definida positiva. Definiendo $A = \frac{2}{\varepsilon} K_p$, $B = \frac{\partial g(q)}{\partial q}$, y empleando el resultado enunciado anteriormente, se concluye que la matriz (7.19) es definida positiva si

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\|. \quad (7.20)$$

⁴Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $x = g(y)$. Entonces:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial g(y)}{\partial y}.$$

Debido a que la constante k_g satisface $k_g \geq \left\| \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|$, entonces la condición (7.20) es implicada por

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} k_g.$$

Por lo tanto, si $\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} k_g$, entonces $f(\tilde{\mathbf{q}})$ tiene un único mínimo global en $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Como además $f(\mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}$, entonces $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva en forma global. \diamond

A continuación, se presenta el análisis de estabilidad de la ecuación de malla cerrada (7.2) donde se supone que K_p es suficientemente “grande” en el sentido de que su valor propio mínimo satisface

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g.$$

Como se demostró en el Epígrafe 7.2, con esta selección de K_p , la ecuación de malla cerrada tiene como único equilibrio al origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Para estudiar la estabilidad del origen, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + f(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (7.21)$$

donde $f(\tilde{\mathbf{q}})$ viene dada por (7.18) con $\varepsilon = 2$. En otras palabras, la función candidata de Lyapunov anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

La función anterior es definida positiva en forma global y radialmente desacotada, ya que es la suma de un término definido positivo globalmente en $\dot{\mathbf{q}}$: $\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ y un término definido positivo globalmente en $\tilde{\mathbf{q}}$: $f(\tilde{\mathbf{q}})$.

La derivada temporal de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

donde se ha usado $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) = \partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) / \partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})$ y también

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \frac{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}^T \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}, \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (-I) \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}), \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}). \end{aligned}$$

Despejando $M(\dot{\mathbf{q}})\ddot{\mathbf{q}}$ de la ecuación de malla cerrada (7.2) y reemplazando:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}$$

donde se ha usado la Propiedad 4.3 para eliminar $\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} - C \right] \dot{\mathbf{q}}$. Debido a que $-\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función semidefinida positiva, entonces el origen es estable (Teorema 2.2).

Debido a la autonomía con respecto al tiempo de la ecuación de malla cerrada (7.2), puede explorarse la aplicación del teorema de LaSalle (Teorema 2.6) para analizar la estabilidad asintótica global del origen.

Con este propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\}, \\ &= \{ \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Para que una solución $\mathbf{x}(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacerse que $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Teniendo este hecho en consideración, de la ecuación de malla cerrada (7.2) se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$\mathbf{0} = M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}(t))^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}(t))].$$

Como K_p se ha tomado de manera que $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, luego $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$ es su única solución. Por lo tanto, $[\tilde{\mathbf{q}}(0)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(0)^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. Luego, de acuerdo con el teorema de LaSalle (Teorema 2.6), este elemento basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Como resultado, se afirma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

es decir, que se verifica el objetivo de control de posición pura.

A continuación se presenta un ejemplo cuyo propósito es mostrar la prestación lograda en el control PD con compensación precalculada de gravedad de un robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 7.3 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 7.4. Véase el Apéndice B para una presentación detallada del modelo dinámico.

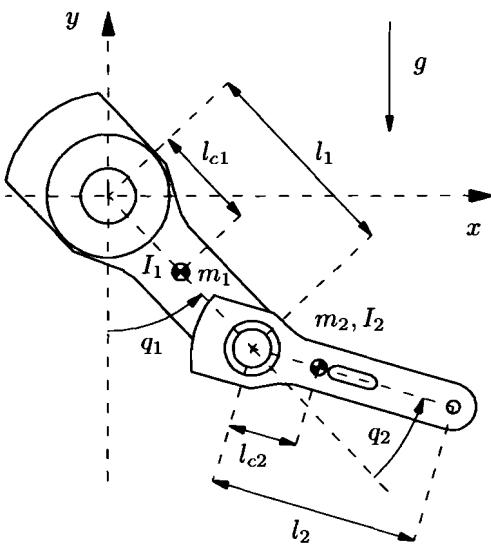


Figura 7.4: Robot de 2 g.d.l.

Los elementos correspondientes al vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

De acuerdo con la Propiedad 4.4, la constante k_g puede determinarse como:

$$\begin{aligned} k_g &= n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right], \\ &= n [[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g + m_2 l_{c2} g], \\ &= 80.578 \quad [\text{kg m}^2/\text{s}^2]. \end{aligned}$$

Considérese el control PD con compensación precalculada de gravedad de dicho robot para el control de posición pura, donde las matrices de diseño deben ser definidas positivas, siendo:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g.$$

En particular, dichas matrices se escogen como (véase también el Ejemplo 6.1):

$$K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix} \quad [\text{Nm/rad}], \quad K_v = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \quad [\text{Nm s/rad}].$$

Los componentes de la acción de control τ vienen dados por:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= k_{p_1} \tilde{q}_1 - k_{v_1} \dot{q}_1 + g_1(\mathbf{q}_d), \\ \tau_2 &= k_{p_2} \tilde{q}_2 - k_{v_2} \dot{q}_2 + g_2(\mathbf{q}_d).\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades, se toman nulas, i.e.:

$$\begin{aligned}q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

Por otra parte, las posiciones articulares deseadas son:

$$q_{d1} = \pi/4 \text{ [rad]}, \quad q_{d2} = \pi/20 \text{ [rad]}.$$

En términos del vector de estado de la ecuación de malla cerrada, el estado inicial resulta ser:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(0) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.785 \\ 0.157 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

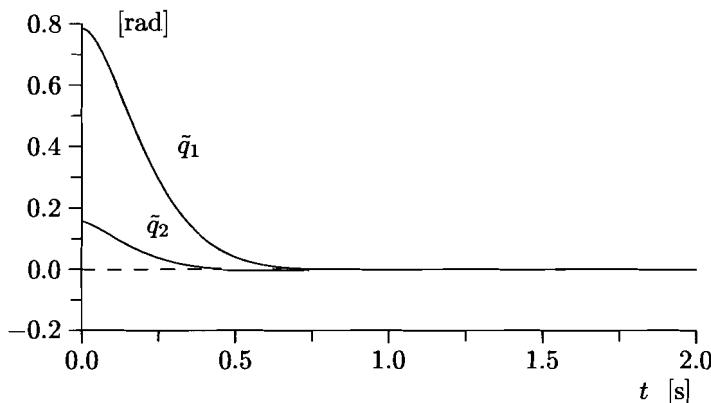


Figura 7.5: Errores de posición

La Figura 7.5 presenta los resultados de simulación. En especial se muestra que los elementos componentes del error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ tienden asintóticamente a cero.

Es interesante percatarse de la similitud entre los resultados mostrados en la Figura 7.5 con los obtenidos mediante el controlador PD con compensación de gravedad, presentados en la Figura 6.3.

El ejemplo anterior pone de manifiesto el buen desempeño logrado en el control PD con compensación precalculada de gravedad de un robot de 2 g.d.l. Desde luego, el procedimiento de sintonía sugerido se ha respetado, es decir, la matriz K_p satisface $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$. Naturalmente, en este momento puede plantearse la pregunta: ¿qué sucede en el caso donde el procedimiento de sintonía sea violado ($\lambda_{\min}\{K_p\} \leq k_g$)? Tal y como se demostró con anterioridad en este mismo capítulo, si la matriz K_p es definida positiva (desde luego, también con K_v , definida positiva) entonces se puede asegurar acotamiento del error de posición \tilde{q} y de la velocidad $\dot{\tilde{q}}$. No obstante, esta situación donde $k_g \geq \lambda_{\min}\{K_p\}$ ofrece un comportamiento dinámico interesante de la ecuación de malla cerrada. Fenómenos tales como *bifurcación de equilibrios* y *saltos catastróficos* pueden estar presentes en el modelo dinámico que caracteriza el sistema de control en malla cerrada.

Los fenómenos anteriores aparecen, inclusive, en el caso del control de un simple eslabón conectado a la base por medio de una unión rotacional. A continuación se presenta un ejemplo con el propósito de mostrar dicha situación.

Ejemplo 7.4 Considérese nuevamente el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau$$

donde se identifica $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$.

El control PD con compensación precalculada de gravedad aplicado al problema de control de posición pura (q_d constante) resulta en este caso:

$$\tau = k_p\tilde{q} - k_v\dot{\tilde{q}} + mgl \operatorname{sen}(q_d)$$

donde $k_v > 0$ y se considera que k_p es un número real no necesariamente positivo ni mayor que $k_g = mgl$.

La ecuación que gobierna el comportamiento del sistema de control en malla cerrada puede describirse mediante:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{ml^2}[k_p\tilde{q} - k_v\dot{\tilde{q}} + mgl[\operatorname{sen}(q_d) - \operatorname{sen}(q_d - \tilde{q})]] \end{bmatrix},$$

la cual es una ecuación diferencial autónoma y cuyo origen $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio sin importar los valores de k_p , k_v y q_d . Más aún, dado un q_d (constante) y definiendo el conjunto Ω_{q_d} como

$$\Omega_{q_d} = \{\tilde{q} \in \mathbb{R} : k_p\tilde{q} + mgl [\operatorname{sen}(q_d) - \operatorname{sen}(q_d - \tilde{q})] = 0 \quad \forall k_p\},$$

entonces cualquier vector $[\tilde{q}^* \quad 0]^T \in \mathbb{R}^2$ es también un equilibrio siempre y cuando $\tilde{q}^* \in \Omega_{q_d}$.

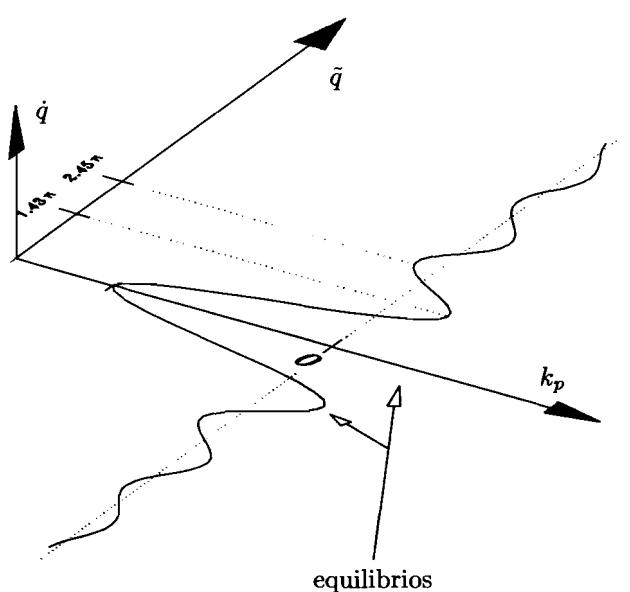


Figura 7.6: Diagrama de equilibrios

En lo que resta del presente ejemplo se considerará el inocuo caso donde $q_d = 0$, es decir, el objetivo de control es llevar el péndulo a la posición trivial vertical hacia abajo. En este escenario el conjunto $\Omega_{q_d} = \Omega_0$ viene dado por:

$$\Omega_0 = \left\{ \tilde{q} \in \mathbb{R} : \tilde{q} = \text{sinc}^{-1} \left(-\frac{k_p}{mgl} \right) \right\},$$

donde la función $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. La Figura 7.6 muestra el diagrama de equilibrios en términos de k_p . Nótese que con $k_p = 0$ habrá un número infinito de equilibrios. En particular, para $k_p = -mgl$ el origen $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es el único equilibrio. De hecho, se dice que la ecuación de malla cerrada posee una bifurcación de equilibrios para $k_p = -mgl$, debido a que para valores ligeramente más pequeños que $-mgl$ existe un único equilibrio, mientras que para valores de k_p ligeramente mayores que $-mgl$ existen tres equilibrios.

Aunque no se demuestra aquí, para valores de k_p ligeramente menores que $-mgl$, el origen (que es el único equilibrio) es inestable, mientras que para valores ligeramente mayores que $-mgl$ el origen es ahora un equilibrio asintóticamente estable y los dos equilibrios restantes son inestables. Este tipo de fenómeno recibe el nombre de *bifurcación horquilla*. La Figura 7.7 presenta varias trayectorias de la ecuación de malla cerrada para $k_p = -11, -4, 3$, donde se ha tomado $ml^2 = 1$, $mgl = 9.8$ y $k_v = 0.1$.

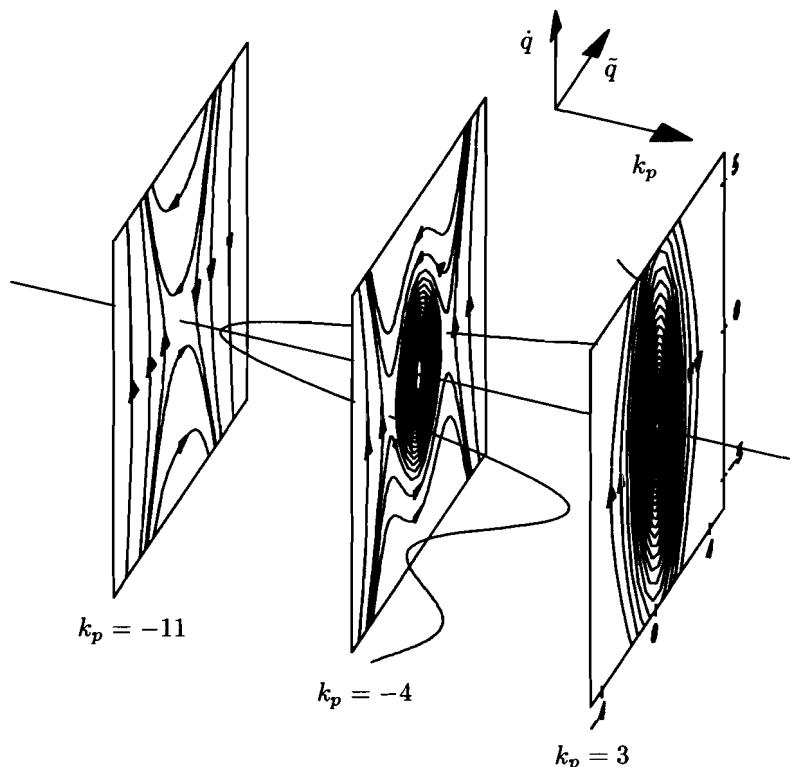


Figura 7.7: Simulación para $k_p = -11, -4, 3$

Además de la bifurcación horquilla en $k_p = -mgl$, también existe otro tipo de bifurcación para el sistema de control en malla cerrada: *bifurcación silla-punto*. En este caso, para ciertos valores de k_p existe un equilibrio aislado, y para valores ligeramente inferiores (superiores) existen dos equilibrios, siendo uno de ellos estable asintóticamente y el otro inestable; mientras que para valores de k_p ligeramente superiores (inferiores) no existe ningún equilibrio en la vecindad del que existía para el valor original de k_p . De hecho, para el sistema de control en malla cerrada considerado (con $q_d = 0$), el diagrama de equilibrios mostrado en la Figura 7.6 permite conjutar la posible existencia de un número infinito de bifurcaciones silla-punto. Aunque no se demuestra aquí, tal conjuta es, en realidad, cierta.

La ecuación de malla cerrada exhibe también otro tipo interesante de fenómeno: *saltos catastróficos*. Esta situación puede aparecer cuando el parámetro k_p varía “lentamente” pasando por valores correspondientes a bifurcaciones silla-punto. En pocas palabras, un salto catastrófico tiene lu-

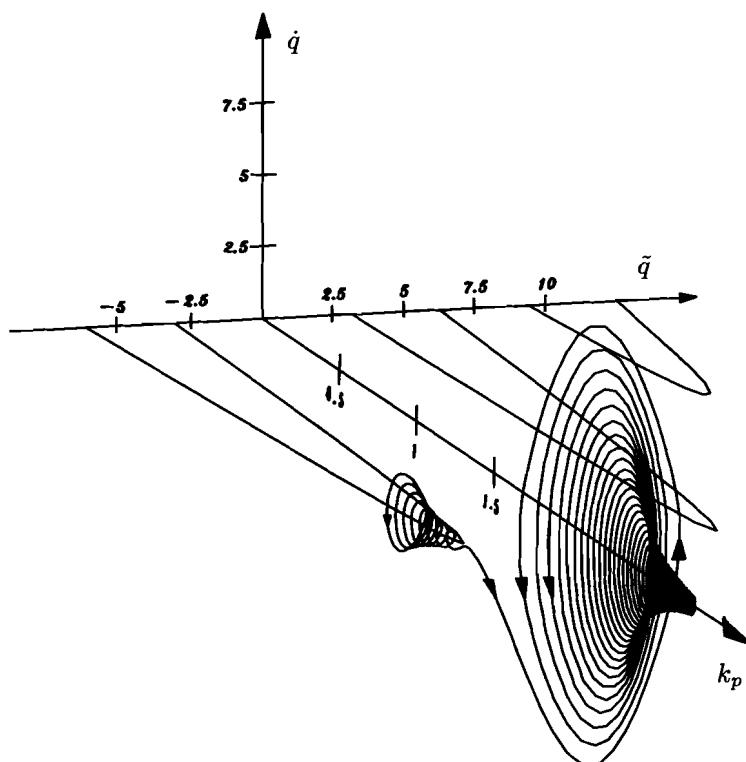


Figura 7.8: Salto catastrófico

gar cuando para una pequeña variación (y además lenta con respecto a la dinámica de la ecuación diferencial) de k_p , la solución de la ecuación de malla cerrada cuya tendencia es de convergencia hacia una región del espacio de estado, cambia abruptamente su comportamiento para dirigirse a otra región “lejana” del espacio de estado. Las Figuras 7.8 y 7.9 muestran el fenómeno antes citado donde se ha tomado

$$k_p(t) = 0.01t + 1.8$$

y se han considerado nuevamente los valores numéricos: $ml^2 = 1$, $mgl = 9.8$ y $k_v = 0.1$, con las condiciones iniciales $q(0) = 4$ [rad] y $\dot{q}(0) = 0$ [rad/s]. Cuando el valor de k_p se incrementa pasando por 2.1288, el equilibrio asintóticamente estable ubicado en $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T = [1.43030\pi \quad 0]^T$ desaparece y el sistema “salta” hacia el único equilibrio asintóticamente estable (en forma global): el origen $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

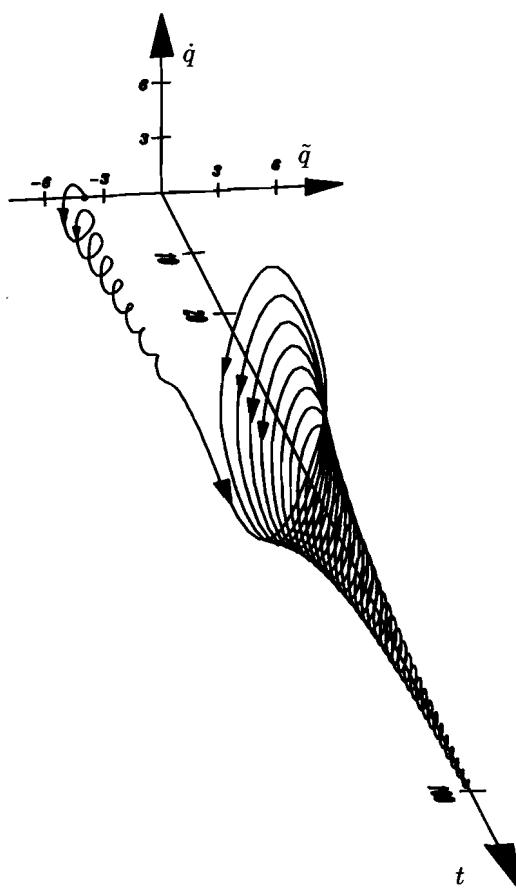


Figura 7.9: Salto catastrófico

7.4 Función de Lyapunov para estabilidad asintótica global

Recientemente ha sido propuesta una función de Lyapunov que permite demostrar directamente estabilidad asintótica global sin hacer uso del teorema de LaSalle. La referencia correspondiente a este tópico viene dada al final del capítulo. A continuación, se presenta dicho análisis donde se considera el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales. El lector puede, si lo desea, omitir lo que resta del epígrafe y pasar al siguiente.

Considérese nuevamente la ecuación de malla cerrada (7.2):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Como hipótesis de diseño, se supondrá, al igual que en el Epígrafe 7.3, que la matriz de ganancias de posición K_p se ha seleccionado de manera que:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g.$$

Dicha selección de K_p satisface la condición de suficiencia obtenida en el Epígrafe 7.2 para garantizar que el origen sea el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada (7.22).

Para estudiar las propiedades de estabilidad del origen, considérese ahora la siguiente función candidata de Lyapunov que, de hecho, puede verse como una generalización de la función (7.21):

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon_2} K_p & -\frac{\varepsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} M(\mathbf{q}) \\ -\frac{\varepsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} M(\mathbf{q}) & M(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\ &\quad + \underbrace{\mathcal{U}(\mathbf{q}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{\varepsilon_1} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}}_{f(\tilde{\mathbf{q}})} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(\mathbf{q}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right] \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} - \frac{\varepsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (7.23)$$

donde $f(\tilde{\mathbf{q}})$ se definió en (7.18) y las constantes $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 2$ y $\varepsilon_2 > 2$ se seleccionan de tal forma que:

$$\frac{2\lambda_{\min}\{K_p\}}{k_g} > \varepsilon_1 > 2, \quad (7.24)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 2} > 2, \quad (7.25)$$

$$\sqrt{\frac{2\lambda_{\min}\{K_p\}}{\varepsilon_2 \beta}} > \varepsilon_0 > 0, \quad (7.26)$$

donde $\beta (\geq \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\})$ fue definida en la Propiedad 4.2. La condición (7.24) garantiza que $f(\tilde{\mathbf{q}})$ sea una función definida positiva (véase el Lema 7.1), mientras que (7.26)

asegura que P sea una matriz definida positiva. Finalmente (7.25) implica que $\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$.

Alternativamente, para demostrar que la función candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva y radialmente desacotada, primeramente defínase ε como:

$$\varepsilon = \varepsilon(\|\tilde{\mathbf{q}}\|) = \frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}. \quad (7.27)$$

En consecuencia, la desigualdad (7.26) implica que la matriz:

$$\frac{2}{\varepsilon_2} K_p - \left[\frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right]^2 M(\mathbf{q}) = \frac{2}{\varepsilon_2} K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q})$$

es definida positiva.

Por otro lado, la función candidata de Lyapunov (7.23) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} [-\dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q}) [-\dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \left[\frac{2}{\varepsilon_2} K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}) \right] \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \underbrace{\mathcal{U}(\mathbf{q}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{\varepsilon_1} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}}_{f(\tilde{\mathbf{q}})}, \end{aligned}$$

que obviamente es una función definida positiva y radialmente desacotada porque las matrices $M(\mathbf{q})$ y $\frac{2}{\varepsilon_2} K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q})$ son definidas positivas y $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es también una función definida positiva ($\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$ y el Lema 7.1).

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (7.23) a lo largo de las trayectorias de la ecuación de malla cerrada (7.22) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \\ &\quad - \dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

donde se ha empleado $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$. Después de algunas simplificaciones, la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}}] \\ &\quad - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] - \dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando la Propiedad 4.3, i.e., la matriz $\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica y $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}} - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})] - \dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.\end{aligned}\quad (7.28)$$

Como es bien sabido, para concluir estabilidad asintótica global por medio del método directo de Lyapunov, un camino es probar que $\dot{V}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$ para todo vector $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. Estas condiciones se verifican si $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función definida negativa. Obsérvese que, hasta este momento, es muy difícil asegurar de (7.28) que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ sea una función definida negativa. Teniendo en mente el encontrar condiciones adicionales sobre ε_0 de tal forma que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ sea definida negativa, ahora se presentan cotas máximas sobre los tres términos siguientes:

- $-\varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}$.
- $-\varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})]$.
- $-\dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$.

Primeramente, con respecto a $-\varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}$, se tiene:

$$\begin{aligned}-\varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}} &\leq |-\varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}|, \\ &\leq \varepsilon \|\dot{\mathbf{q}}\| \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}\|, \\ &\leq \varepsilon k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|, \\ &\leq \varepsilon_0 k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2,\end{aligned}\quad (7.29)$$

donde se ha tenido en cuenta la Propiedad 4.3, i.e., $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, y la definición de ε en (7.27).

A continuación, con respecto al término $-\varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})]$, se tiene:

$$\begin{aligned}-\varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})] &\leq |-\varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T [g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})]|, \\ &\leq \varepsilon \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})\|, \\ &\leq \varepsilon k_g \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2,\end{aligned}\quad (7.30)$$

donde se ha usado la Propiedad 4.4, i.e., $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Finalmente, para el término $-\dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, se tiene:

$$\begin{aligned}-\dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq |-\dot{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}|, \\ &= \left| \frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right|, \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}, \\ &\leq \varepsilon_0 \beta \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde se ha considerado nuevamente la definición de ε en (7.27) y la Propiedad 4.2, i.e., $\beta \|\dot{\mathbf{q}}\| \geq \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} \|\dot{\mathbf{q}}\| \geq \|M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\|$.

A partir de las desigualdades (7.29), (7.30) y (7.31), la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ en (7.28) se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \varepsilon_0 k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \varepsilon k_g \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \varepsilon_0 \beta \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \end{aligned}$$

Ésta puede a su vez ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon K_p & -\frac{\varepsilon}{2} K_v \\ -\frac{\varepsilon}{2} K_v & \frac{1}{2} K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \varepsilon k_g \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_v\} - 2\varepsilon_0(k_{C_1} + 2\beta)] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \end{aligned} \quad (7.32)$$

donde se ha empleado $-\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ y $\varepsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \varepsilon_0 \beta \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$.

Finalmente, de (7.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\varepsilon \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} - k_g & -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} \\ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} & \frac{1}{2\varepsilon_0} \lambda_{\min}\{K_v\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{[\lambda_{\min}\{K_v\} - 2\varepsilon_0(k_{C_1} + 2\beta)]}_{\delta} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Ahora bien, a partir de esta última desigualdad, pueden encontrarse de forma inmediata condiciones sobre ε_0 de manera que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ sea una función definida negativa. Para este fin, primeramente se requiere garantizar que la matriz Q sea definida positiva y que $\delta > 0$. La matriz Q será definida positiva si se satisface

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g, \quad (7.34)$$

$$\frac{2\lambda_{\min}\{K_v\}(\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g)}{\lambda_{\max}^2\{K_v\}} > \varepsilon_0, \quad (7.35)$$

y se tendrá $\delta > 0$ si se cumple:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{2(k_{C_1} + 2\beta)} > \varepsilon_0. \quad (7.36)$$

Obsérvese que (7.34) se verifica debido a que K_p se ha seleccionada de modo que $\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon_1}{2} k_g$ con $\varepsilon_1 > 2$. Es importante hacer hincapié en que la constante ε_0 sólo se necesita para motivos de análisis y no se requiere conocer su valor numérico. Escogiendo ε_0 de forma que satisfaga simultáneamente (7.35) y (7.36), se tendrá $\lambda_{\min}\{Q\} > 0$. Bajo esta situación, de (7.33) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{\min}\{Q\} [\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2] - \frac{\delta}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \\ &\leq -\varepsilon_0 \lambda_{\min}\{Q\} \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\delta}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2,\end{aligned}$$

la cual es una función definida negativa. Por último, empleando el método directo de Lyapunov (Teorema 2.4), se concluye que el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de la ecuación de malla cerrada.

7.5 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos.

Considérese el control PD con compensación precalculada de gravedad de robots de n g.d.l. Supóngase que la posición deseada \mathbf{q}_d es constante.

- Si las matrices simétricas K_p y K_v del controlador son definidas positivas, siendo $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, entonces el origen del espacio de estado de la ecuación de malla cerrada expresada en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global. En consecuencia, para cualquier condición inicial $\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Referencias

El controlador PD con compensación precalculada de gravedad ha sido el objeto de análisis en:

- Takegaki, M., Arimoto, S., 1981, “A new feedback method for dynamic control of manipulators”, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 103, pp. 119–125.
- Arimoto, S., Miyazaki, F., 1986, “Stability and robustness of PD feedback control with gravity compensation for robot manipulators”, in F. Paul & D. Youcef-Toumi (Eds.), Robotics: Theory and Applications, DSC Vol. 3.
- Tomei, P., 1991, “Adaptive PD controller for robot manipulators”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, August, Vol. 7, No. 4, pp. 565–570.

- Kelly, R., 1997, “*PD control with desired gravity compensation of robotic manipulators: A review*”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 16, No. 5, pp. 660–672.

Los temas de bifurcación de equilibrios pueden consultarse en:

- Parker, T. S., Chua, L. O., 1989, “*Practical numerical algorithms for chaotic systems*”, Springer–Verlag.
- Guckenheimer, J., Holmes, P., 1990, “*Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*”, Springer–Verlag.
- Wiggins, S., 1990, “*Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*”, Springer–Verlag.
- Hale, J. K., Koçak, H., 1991, “*Dynamics and bifurcations*”, Springer–Verlag.
- Jackson, E. A., 1991, “*Perspectives of nonlinear dynamics*”, Vol. 1, Cambridge University Press.

El estudio sobre la función de Lyapunov para estabilidad asintótica global presentado en el Epígrafe 7.4, ha sido extraído de:

- Kelly, R., 1993, “*Comments on: Adaptive PD controller for robot manipulators*”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, February, Vol. 9, No. 1, pp. 117–119.

Problemas

1. Considérese el modelo del péndulo ideal estudiado en el Ejemplo 7.2

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau$$

con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Considérese el empleo del control PD con compensación precalculada de gravedad y supónganse las siguientes condiciones iniciales: $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = 0$. De aquí se tiene $\tilde{q}(0) = \pi/2$. Supóngase que $k_p = 4/\pi$.

- (a) Determinar una cota máxima sobre $\dot{q}^2(t)$.

Ayuda: Usar la desigualdad (7.16).

2. Considérese el control PD con compensación precalculada de gravedad del péndulo ideal:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau.$$

Los equilibrios de la ecuación de malla cerrada son $[\tilde{q} \ \dot{q}]^T = [s \ 0]^T$ donde s es solución de:

$$k_p s + mgl [\operatorname{sen}(q_d) - \operatorname{sen}(q_d - s)] = 0.$$

- (a) Demostrar que s satisface:

$$|s| \leq \frac{2mgl}{k_p}.$$

- (b) Simular el sistema en malla cerrada con los siguientes valores numéricos: $m = l = 1$, $g = 10$, $k_p = 1/4$, $k_v = 1$ y con condiciones iniciales $q(0) = \pi/8$ y $\dot{q}(0) = 0$. La posición angular deseada es $q_d = \pi/2$. Verificar mediante simulación que $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) \neq q_d$.
- (c) Obtener mediante simulación el valor aproximado de $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$. Verificar que $\lim_{t \rightarrow \infty} |q_d - q(t)| \leq \frac{2mgl}{k_p}$.

3. Considérese el modelo del péndulo ideal estudiado en el Ejemplo 7.1

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau$$

con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

Considérese el empleo del control PD con compensación precalculada de gravedad.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[\tilde{q} \ \dot{q}]^T$.
- (b) Determinar el valor de la constante k_g (véase la Propiedad 4.4).
- (c) En el Ejemplo 7.1 se mostró que la ecuación de malla cerrada poseía tres equilibrios para $k_p = 0.25$. Determinar un valor para k_p que garantice que el origen $[\tilde{q} \ \dot{q}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ sea el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada.
- (d) Considérese el valor anterior de k_p . Demostrar que el origen es un equilibrio estable.

Ayuda: Demostrar que

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}) &= -mgl \cos(q_d - \tilde{q}) + mgl \cos(q_d) \\ &\quad + mgl \operatorname{sen}(q_d)\tilde{q} + \frac{1}{2}k_p\tilde{q}^2 \end{aligned}$$

es una función definida positiva. Emplear la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 + f(\tilde{q}).$$

- (e) Usar el teorema de LaSalle (Teorema 2.6) para demostrar que el origen es asintóticamente estable en forma global.
4. Verifíquese la expresión de $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ dada en la Ecuación (7.7).

8

Control PID

El control PD es capaz de satisfacer el objetivo de control de posición pura para el caso de robots modelados sin término gravitacional ($\mathbf{g}(q) = \mathbf{0}$). En este caso, el procedimiento de sintonía del controlador PD es trivial ya que basta con seleccionar sus matrices de diseño K_p y K_v , como simétricas y definidas positivas (véase el Capítulo 5).

En el caso donde el modelo del robot contiene el término de pares gravitacionales ($\mathbf{g}(q) \neq \mathbf{0}$), y si en particular $\mathbf{g}(q_d) \neq \mathbf{0}$, donde q_d es la posición articular deseada, entonces el objetivo de control de posición no puede lograrse mediante del control PD. De hecho, puede ocurrir que el error de posición \tilde{q} tienda a un vector constante (pero siempre diferente del vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$). Con el propósito de satisfacer el objetivo de control de posición en forma global, se han presentado en los capítulos anteriores los controladores PD con compensación de gravedad y PD con compensación precalculada de gravedad. Una alternativa a estos controladores es la introducción de un componente *Integral* al control PD para intentar llevar a cero el error de posición. De este razonamiento surge una justificación para la aplicación del controlador Proporcional–Integral–Derivativo (PID) en el control de robots manipuladores.

La ley de control PID puede expresarse de la siguiente manera:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma \quad (8.1)$$

donde las matrices de diseño $K_p, K_v, K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, llamadas respectivamente las ganancias proporcional, derivativa e integral, son matrices simétricas y definidas positivas convenientemente elegidas. La Figura 8.1 muestra el diagrama de bloques del control PID de robots manipuladores.

La mayoría de los robots manipuladores actuales son controlados mediante controladores PID. La evidencia cotidiana del uso de robots manipuladores pone de manifiesto el buen servicio que se logra en una amplia variedad de aplicaciones cuando se emplea el control PID. No obstante, en contraste con el control PD y el control PD con compensación de gravedad, el procedimiento de sintonía del control PID, i.e., la elección de las matrices definidas positivas K_p , K_v y K_i , dista mucho de ser trivial.

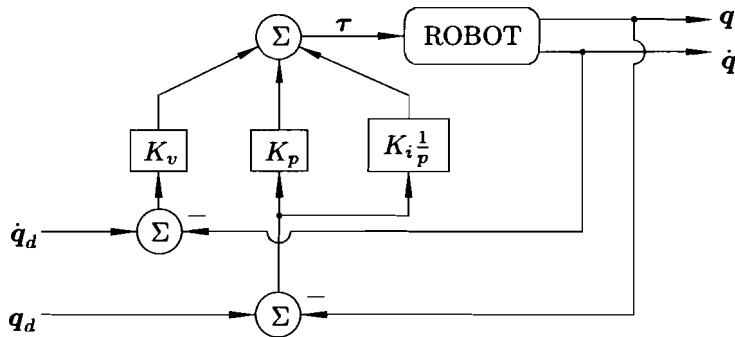


Figura 8.1: Control PID

En la práctica, la sintonía de los controladores PID se facilita cuando el movimiento transmitido desde los accionadores hacia los eslabones del robot se realiza mediante reducciones, ya sea por engranes o por bandas. El uso de reducciones efectivamente incrementa el par o fuerza producido por los accionadores, y por lo tanto, éstos son capaces de desplazar eslabones con gran masa, y en principio, lograr altos valores de aceleración en eslabones ligeros. No obstante, la presencia de reducciones por medio de engranes y bandas, puede introducir algunos efectos indeseables que deterioren la prestación de la tarea encomendada al robot. Entre dichos efectos se encuentran vibraciones por el juego mecánico entre los dientes de los engranes, errores de posicionamiento y desperdicio de energía causado por la fricción en los engranes, y errores de posicionamiento y vibraciones por elasticidad en las bandas y torsión en los engranes. Sin embargo, el empleo de reducciones es común en la mayoría de los robots manipuladores, y esto tiene un impacto positivo en la tarea de sintonía de controladores, y en particular del control PID. Efectivamente, como se mostró en el Capítulo 3, en presencia de altas tasas de reducción, el modelo dinámico completo del robot con estos accionadores, está caracterizado básicamente por el modelo de estos últimos, que muchas veces son descritos mediante sistemas dinámicos lineales. Por lo tanto, en esta situación, la ecuación diferencial que gobierna al sistema de control en malla cerrada resulta ser lineal, y la sintonía del controlador relativamente sencilla. Este último tema no será abordado aquí por encontrarse bien documentado en la bibliografía especializada, y que el lector podrá consultar en alguno de los textos citados al final del capítulo.

En la Introducción de la Parte II del presente texto, se supuso que los accionadores de los robots considerados aquí, eran fuentes ideales de pares y fuerzas. Bajo este supuesto, el modelo dinámico de un robot de n g.d.l. viene dado por (3.22):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (8.2)$$

donde el término de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se encuentra presente. Se supondrá que todas las articulaciones del robot son del tipo rotacional.

En este capítulo se estudiará el sistema de control formado por el control PID dado por la Ecuación (8.1) y el modelo del robot (8.2). Este estudio resulta más elaborado que el del control PID de robots cuyos accionadores posean altas reducciones. Específicamente, se presentará un procedimiento de sintonía para el control PID que garantice el cumplimiento del objetivo de posición pura en forma local. En otras palabras, para una posición deseada \mathbf{q}_d constante, dicha sintonía asegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$, siempre y cuando el error de posición inicial $\tilde{\mathbf{q}}(0)$ y la velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)$, sean suficientemente “pequeños”. Analíticamente, esto se hará demostrando estabilidad asintótica local del origen de la ecuación que gobierna el comportamiento del sistema de malla cerrada. Durante dicho análisis, se empleará la siguiente información extraída de las Propiedades 4.2, 4.3, y 4.4:

- La matriz $\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica.
- Existe una constante no negativa k_{C_1} tal que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|.$$

- Existe una constante no negativa k_g tal que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

donde $k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

La acción integral del controlador PID (8.1) introduce una variable de estado adicional que aquí será denotada por ξ y cuya derivada temporal es $\dot{\xi} = \tilde{\mathbf{q}}$.

La ley de control PID puede expresarse por medio de las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \tau &= K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i \xi \\ \dot{\xi} &= \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

La ecuación de malla cerrada se obtiene reemplazando la acción de control τ de (8.3) en el modelo del robot (8.2):

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i \xi \\ \dot{\xi} &= \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

la cual puede expresarse en términos del vector de estado $[\xi^T \ \tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i \xi - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Los equilibrios de la ecuación anterior, si es que existen, tienen la forma $\left[\xi^T \quad \tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T \right]^T = \left[\xi^{*T} \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \right]^T$, donde:

$$\xi^* = K_i^{-1} [M(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)]$$

debe ser un vector constante. Naturalmente, para que ξ^* sea un vector constante, la posición articular deseada \mathbf{q}_d , si es variante en el tiempo, no puede ser arbitraria, sino debe tener una forma muy particular. Una manera de obtener \mathbf{q}_d para la cual ξ^* resulte constante, es como solución de:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_d \\ M(\mathbf{q}_d)^{-1} [\tau_0 - C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d(0) \\ \dot{\mathbf{q}}_d(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (8.5)$$

donde $\tau_0 \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante. De esta forma $\xi^* = K_i^{-1} \tau_0$. En particular, si $\tau_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces el origen de la ecuación de malla cerrada (8.4), es un equilibrio. Nótese que la solución de (8.5) es simplemente la posición \mathbf{q} y velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ cuando al robot en cuestión se le aplica un par $\tau = \tau_0$ constante. En general, no es posible obtener una expresión en forma cerrada para \mathbf{q}_d , por lo que la Ecuación (8.5) debe resolverse numéricamente. No obstante, la posición deseada \mathbf{q}_d resultante, puede tener una forma caprichosa siendo entonces de dudosa utilidad. Esta característica se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.1 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 3.4. Los datos correspondientes al modelo dinámico pueden consultarse en el Apéndice B.

Considerando $\tau_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ y la condición inicial $[q_{d1}(0) \quad q_{d2}(0) \quad \dot{q}_{d1}(0) \quad \dot{q}_{d2}(0)]^T = [-\pi/20 \quad \pi/20 \quad 0 \quad 0]^T$, la solución numérica de (8.5) para $\mathbf{q}_d(t)$, se muestra en la Figura 8.2.

Con $\mathbf{q}_d(t)$ cuyos dos componentes se muestran en la Figura 8.2, el origen $\left[\xi^T \quad \tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T \right]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$ es un equilibrio de la ecuación de malla cerrada formada por el control PID y el robot en cuestión.

En el caso donde la posición articular deseada \mathbf{q}_d sea una función arbitraria del tiempo, y no tienda hacia un vector constante, entonces la ecuación de malla cerrada no tendrá equilibrio alguno. En tal circunstancia, no puede estudiarse estabilidad en el sentido de Lyapunov puesto que no habría equilibrios, y por lo tanto, tampoco puede esperarse que el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ tienda a cero. En el mejor de los casos, y bajo la hipótesis de valores pequeños en el error de posición inicial $\tilde{\mathbf{q}}(0)$ y en la velocidad inicial $\dot{\mathbf{q}}(0)$, el

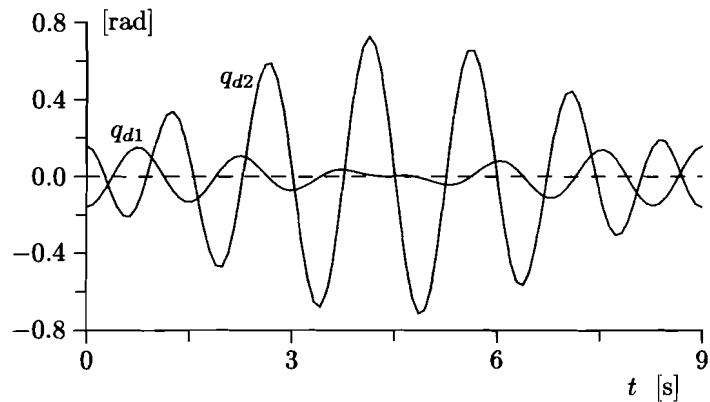


Figura 8.2: Posiciones articulares deseadas

error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ permanecerá acotado. La demostración formal de estas afirmaciones se establece en los trabajos citados en las referencias al final del capítulo.

Una condición suficiente para existencia y unicidad de equilibrio para la ecuación de malla cerrada (8.4) es que la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ sea constante. Denotando por \mathbf{q}_d a dicho vector constante, entonces el equilibrio será:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n}.$$

El equilibrio anterior puede trasladarse al origen mediante el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{z} = \xi - K_i^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}_d),$$

y la correspondiente ecuación de malla cerrada podrá expresarse en términos del vector de estado $[\mathbf{z}^T \ \tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i \mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Nótese que la ecuación anterior es autónoma y su único equilibrio es el origen $[\mathbf{z}^T \ \tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n}$.

Para motivos de ulterior estudio de estabilidad, resulta conveniente adoptar el siguiente cambio global de variables:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha I & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

con $\alpha > 0$.

La ecuación de malla cerrada (8.6) puede expresarse en función de las nuevas variables como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} \\ -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [[K_p - \frac{1}{\alpha} K_i] \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\alpha} K_i \mathbf{w} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Esta ecuación continúa siendo autónoma, y el origen del espacio de estado $[\mathbf{w}^T \ \tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n}$ el único equilibrio del sistema en malla cerrada. Además, debido a la globalidad del cambio de variable (8.7), las características de estabilidad de este equilibrio corresponden a las del equilibrio $[\mathbf{z}^T \ \tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n}$ de la Ecuación (8.6).

Si se encuentran condiciones sobre las matrices K_p , K_v y K_i del controlador PID de forma que el origen de la ecuación de malla cerrada (8.8) sea asintóticamente estable, i.e., que el origen sea estable y que al menos para valores suficientemente pequeños del estado inicial $\mathbf{z}(0)$, $\tilde{\mathbf{q}}(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}(0)$ se tenga que el estado, y en particular $\tilde{\mathbf{q}}(t)$, tiendan asintóticamente a cero, entonces podrá afirmarse que el objetivo de control de posición se satisface (al menos en forma local). Por lo tanto, sobre la base del argumento anterior, se empleará el método directo de Lyapunov junto con el teorema de LaSalle, para obtener condiciones sobre las matrices de diseño de controlador PID que garanticen la estabilidad asintótica del origen de la ecuación de malla cerrada (8.8).

A continuación se estudia la estabilidad del origen de la ecuación de malla cerrada (8.8). Dicha ecuación gobierna el comportamiento del sistema de control PID de robots manipuladores de n g.d.l. para el caso de posición deseada \mathbf{q}_d constante. Específicamente, se verá que si las matrices K_p y K_v son suficientemente “grandes” y la matriz de ganancia integral K_i suficientemente “pequeña” en el sentido

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g}, \quad (8.9)$$

y además

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g, \quad (8.10)$$

luego esta selección de ganancias garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición pura en forma local. A decir verdad, conforme la desigualdad (8.9) se cumpla con mayor contundencia, el dominio de atracción del equilibrio se incrementará —cualidad conocida como *atractividad semiglobal*—.

8.1 Función candidata de Lyapunov

Para estudiar la estabilidad del origen del espacio de estado, se emplea el método directo de Lyapunov mediante la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{w}) = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} K_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha K_v & -\alpha M(\mathbf{q}) \\ 0 & -\alpha M(\mathbf{q}) & M(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \left[K_p - \frac{1}{\alpha} K_i \right] \tilde{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d), \end{aligned} \quad (8.11)$$

donde $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ denota, como ya es costumbre, la energía potencial del robot, y α es la constante positiva empleada en la definición del cambio de variable (8.7) y que ahora se supone además que se escoge de modo que:

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}} > \alpha > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g}. \quad (8.12)$$

En virtud de la guía de sintonía (8.9), siempre existirá α que satisfaga la condición anterior.

Variantes de esta función candidata de Lyapunov se han propuesto con anterioridad en la bibliografía para el estudio del control de PID con compensación de gravedad. Al final del capítulo se ofrecen referencias sobre dichos trabajos.

Para que la función candidata de Lyapunov (8.11) sea tal, es preciso comprobar que sea una función definida positiva al menos localmente.

Primeramente considérese el siguiente término de la función candidata de Lyapunov:

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \left[K_p - \frac{1}{\alpha} K_i \right] \tilde{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d).$$

De acuerdo con el Ejemplo D.3 del Apéndice D y tomando $\varepsilon = 2$, se concluye que la función anterior es definida positiva globalmente en $\tilde{\mathbf{q}}$ si:

$$\lambda_{\min}\{K_p - \frac{1}{\alpha} K_i\} > k_g. \quad (8.13)$$

A su vez, esta desigualdad es implicada por¹

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \frac{1}{\alpha} \lambda_{\max}\{K_i\} > k_g$$

que resulta cierta en razón de la condición (8.12) impuesta sobre α . Por lo tanto, puede afirmarse que la función candidata de Lyapunov (8.11) satisface:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} K_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha K_v & -\alpha M(\mathbf{q}) \\ 0 & -\alpha M(\mathbf{q}) & M(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, utilizando las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \mathbf{w}^T K_i \mathbf{w} &\geq \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min}\{K_i\} \|\mathbf{w}\|^2, \\ \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \tilde{\mathbf{q}} &\geq \alpha \lambda_{\min}\{K_v\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, \\ \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\geq \lambda_{\min}\{M\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \\ -\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\geq -\alpha \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|, \end{aligned}$$

se llega a la siguiente cota mínima para la función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \geq \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{w}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \lambda_{\min}\{K_i\} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{K_v\} & -\lambda_{\max}\{M\} \\ 0 & -\lambda_{\max}\{M\} & \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{w}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix},$$

lo cual prueba $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ que es definida positiva en forma global y radialmente desacotada ya que α fue condicionada a satisfacer (8.12), es decir

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}} > \alpha.$$

¹Teorema de Weyl (Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, "Matrix Analysis", Cambridge University Press, pp. 181.). Para matrices A y B simétricas se cumple:

$$\lambda_{\min}\{A + B\} \geq \lambda_{\min}\{A\} + \lambda_{\min}\{B\}.$$

Por otro lado, como $\lambda_{\min}\{A\} = -\lambda_{\max}\{-A\}$, entonces

$$\lambda_{\min}\{A - B\} \geq \lambda_{\min}\{A\} - \lambda_{\max}\{B\}.$$

8.2 Derivada temporal de la función candidata de Lyapunov

Una vez establecidas las condiciones para que la función candidata de Lyapunov sea definida positiva (en forma global), ahora procede obtener su derivada temporal. Después de manipulaciones algebraicas y usando la antisimetría de la matriz $\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la igualdad $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$ establecidas en la Propiedad 4.3, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (8.11) a lo largo de las soluciones de la ecuación de malla cerrada (8.8) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T [K_v - \alpha M(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T [\alpha K_p - K_i] \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})]\end{aligned}\quad (8.14)$$

donde se ha usado (3.23), i.e., $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \partial \mathcal{U}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$.

De las propiedades sobre las matrices simétricas y definidas positivas se desprende que los dos primeros sumandos de la derivada de la función candidata de Lyapunov satisfacen las siguientes desigualdades:

$$-\dot{\mathbf{q}}^T [K_v - \alpha M(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} \leq -[\lambda_{\min}\{K_v\} - \alpha \lambda_{\max}\{M\}] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$$

y

$$-\tilde{\mathbf{q}}^T [\alpha K_p - K_i] \tilde{\mathbf{q}} \leq -[\alpha \lambda_{\min}\{K_p\} - \lambda_{\max}\{K_i\}] \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2,$$

respectivamente.

Por otro lado, a partir de las Propiedades 4.3 y 4.4, y específicamente

- $\|C(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|$,
- $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$,

se demuestra que los últimos dos sumandos de la derivada de la función candidata de Lyapunov cumplen con:

$$-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \leq \alpha k_{C_1} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$$

y

$$-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \leq \alpha k_g \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2.$$

En consecuencia, $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ también satisface:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \leq -\begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22}(\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

donde

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \alpha [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] - \lambda_{\max}\{K_i\}, \\ Q_{22}(\dot{\mathbf{q}}) &= \lambda_{\min}\{K_v\} - \alpha [\lambda_{\max}\{M\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|].\end{aligned}$$

A continuación se demostrará que existe una bola \mathcal{D} de radio $\eta > 0$ alrededor del origen del espacio de estado:

$$\mathcal{D} = \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \left\| \begin{array}{c} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right\| < \eta \right\}$$

en la cual $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es semidefinida negativa.

Con este fin en mente, nótese que de la condición (8.12) impuesta sobre α se tiene:

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{K_v\} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{\max}\{K_i\}} > \lambda_{\max}^2\{M\}.$$

Como obviamente $\lambda_{\max}\{M\} \geq \lambda_{\min}\{M\}$, luego

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_v\} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{\max}\{K_i\}} > \lambda_{\max}\{M\}$$

y sabiendo que $k_{C_1} \geq 0$, se desprende inmediatamente que:

$$\frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{\min}\{K_v\} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{\max}\{K_i\}} - \lambda_{\max}\{M\} \right] \geq 0. \quad (8.16)$$

Ahora conviene definir el radio η de la bola \mathcal{D} centrada en el origen del espacio de estado como el lado izquierdo de la desigualdad (8.16), es decir

$$\eta = \frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{\min}\{K_v\} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{\max}\{K_i\}} - \lambda_{\max}\{M\} \right]. \quad (8.17)$$

Es importante observar que el radio η además de ser positivo, éste se incrementa conforme $\lambda_{\min}\{K_p\}$ y $\lambda_{\min}\{K_v\}$ se incrementan y cuando $\lambda_{\max}\{K_i\}$ es decrementada, pero siempre respetando la condición (8.12) sobre α .

Ahora se demostrará que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es semidefinida negativa en la bola \mathcal{D} . En esa región del espacio de estado se tiene que

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| < \eta.$$

Incorporando la definición (8.17) de η se obtiene:

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| < \frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{\min}\{K_v\} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{\max}\{K_i\}} - \lambda_{\max}\{M\} \right]$$

que después de manipulaciones sencillas conducen a la desigualdad

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}\{M\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g}$$

que resulta válida en la región \mathcal{D} .

Como α es cualquier número real que cumpla con la condición (8.12), y en particular satisface

$$\alpha > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g},$$

entonces siempre podrá seleccionarse de manera que:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}\{M\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|} > \alpha > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g}$$

sea cierta en la región \mathcal{D} . Es justamente esta desigualdad la que captura las condiciones sobre α para que Q_{11} y $Q_{22}(\dot{\mathbf{q}})$ de la derivada (8.15) de la función candidata de Lyapunov sean estrictamente positivas. Esto significa que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es semidefinida negativa en la bola \mathcal{D} con radio η definido por (8.17).

8.3 Estabilidad asintótica

En resumen, se ha demostrado que si las matrices K_p , K_v y K_i del controlador PID satisfacen las condiciones (8.9) y (8.10), entonces $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es una función definida positiva globalmente y radialmente desacotada mientras que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es una función semidefinida negativa —localmente, aunque el dominio de validez puede agrandarse arbitrariamente mediante la selección adecuada de las ganancias del controlador—. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 2.2, el origen de la ecuación de malla cerrada (8.8), es un equilibrio estable. Debido a que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ no es una función definida negativa sino sólo una función semidefinida negativa, luego el Teorema 2.4 no puede emplearse para demostrar estabilidad asintótica. No obstante, como la ecuación de malla cerrada (8.8) es autónoma, el teorema de LaSalle (Teorema 2.6) puede usarse para tratar de demostrar estabilidad asintótica.

El enunciado del teorema de LaSalle presentado como Teorema 2.6 establece estabilidad asintótica en forma global. Debido a que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ obtenida en (8.15) es semidefinida negativa pero sólo en forma local, el Teorema 2.6 no puede utilizarse directamente. Aunque no se demuestra aquí, si en el enunciado del Teorema 2.6 se sustituye la validez de $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, en vez de ser “para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ”, por “para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeño”, entonces se puede garantizar estabilidad asintótica local. Teniendo lo anterior en consideración, el conjunto Ω es en este caso:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) = 0 \right\} \\ &= \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \}. \end{aligned}$$

Obsérvese de (8.14) que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) = 0$ si y sólo si $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Para que una solución $\mathbf{x}(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacerse que $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Teniendo esto en consideración, de la ecuación de malla cerrada (8.8) se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} &= \frac{1}{\alpha} M(\mathbf{q}_d)^{-1} K_i \mathbf{w}(t),\end{aligned}$$

significando que $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $[\mathbf{w}(0)^T \quad \tilde{\mathbf{q}}(0)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(0)^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. De aquí se concluye finalmente que el origen de la ecuación de malla cerrada (8.8) es un equilibrio asintóticamente estable en forma local.

En la situación particular de robots para los cuales $k_{C_1} = 0$, e.g., una articulación pendular, ciertos robots cartesianos o con transmisión de movimiento por palancas, la función $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ obtenida en (8.15) es ahora una función semidefinida negativa pero en forma global. En esta situación, la estabilidad asintótica del origen es global.

El análisis desarrollado hasta este punto se ha realizado para el controlador PID clásico cuya ley de control viene dada por (8.3). Se ha supuesto igualmente que la posición articular deseada \mathbf{q}_d es constante. En la implantación práctica del controlador PID por medios digitales, la posición deseada \mathbf{q}_d es una función constante por tramos, siendo constante entre instantes de muestreo. Por lo tanto, antes y después de los instantes de muestreo, la posición deseada \mathbf{q}_d toma valores constantes usualmente diferentes, y en el instante de muestreo cambia abruptamente de valor. Por esta razón, el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ y la acción de control $\tau = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + K_i \xi$ también varían bruscamente en los instantes de muestreo. Entonces, la acción de control τ demanda variaciones instantáneas de par a los accionadores. Esta situación puede resultar en excesivo desgaste de ellos o simplemente ser inaceptable en ciertas aplicaciones.

Con el propósito de conservar las virtudes del control PID pero también de eliminar el fenómeno anterior, en la bibliografía especializada se han propuesto varias modificaciones al control PID clásico. Una modificación interesante es la siguiente:

$$\tau = -K_p \mathbf{q} - K_v \dot{\mathbf{q}} + K_i \xi$$

donde

$$\xi(t) = \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma + \xi(0).$$

Este control PID modificado preserva exactamente la misma ecuación de malla (8.8) que el control PID clásico, pero con \mathbf{z} definido como

$$\mathbf{z} = \xi - K_i^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + K_p \mathbf{q}_d].$$

Por lo tanto, el análisis y las conclusiones obtenidas con anterioridad, también se aplican al control PID modificado.

8.4 Procedimiento de sintonía

El análisis de estabilidad presentado en los párrafos anteriores, permite extraer un procedimiento muy sencillo para la sintonía del controlador PID. Este método determina matrices simétricas K_p , K_v y K_i que garantizan el cumplimiento del objetivo de control de posición en forma local.

El procedimiento se extrae de (8.10) y de la condición (8.12) impuesta sobre α y se resume en términos de los valores propios de las matrices de ganancia de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{\max}\{K_i\} \geq \lambda_{\min}\{K_i\} > 0 \\ \lambda_{\max}\{K_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > k_g \\ \lambda_{\max}\{K_v\} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g} \cdot \frac{\lambda_{\max}^2\{M\}}{\lambda_{\min}\{M\}} \end{array} \right\} \quad (8.18)$$

Es importante subrayar que el procedimiento de sintonía requiere del conocimiento de la estructura de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ y del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ del robot a ser controlado, con el fin de calcular $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$ y k_g respectivamente. No obstante, dado que es suficiente contar con cotas máximas sobre $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$ y k_g , y cota mínima sobre $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$ para usar el procedimiento de sintonía, entonces no es necesario conocer los valores exactos de los parámetros dinámicos del robot, e.g., masas e inercias, sino solamente cotas máximas y mínimas sobre ellos.

A continuación se da un ejemplo con el propósito de mostrar la aplicación de las ideas recién esbozadas.

Ejemplo 8.2 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 8.3. Su modelo dinámico junto con sus valores numéricos, se resumen en el Apéndice B.

Los elementos de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2. \end{aligned}$$

Los componentes del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

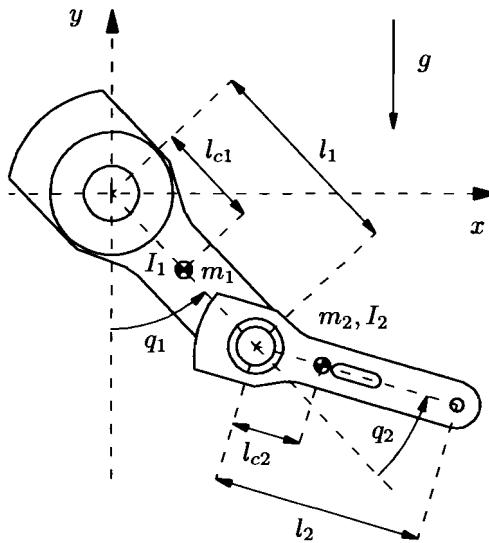


Figura 8.3: Robot de 2 g.d.l.

El objetivo de este ejemplo es aplicar el procedimiento de sintonía presentado previamente para determinar las matrices K_p , K_v y K_i . Primeramente se obtendrá el valor de k_g y luego los de $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$ y $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$.

Haciendo uso de la Propiedad 4.4, así como de los elementos del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, se llega a:

$$\begin{aligned} k_g &= n \left[\text{Max}_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right] \\ &= n[m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_2 l_{c2}]g \\ &= 80.578 \quad [\text{kg m}^2/\text{s}^2] \end{aligned}$$

donde se han tenido en cuenta los valores numéricos de los parámetros del robot listados en el Apéndice B.

Con respecto a $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$ y $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$ —que para este robot dependen sólo de q_2 —, se procede a obtenerlos numéricamente, es decir, evaluando la matriz $M(\mathbf{q})$ para un conjunto de valores de q_2 entre 0 y 2π , y extrayendo los valores propios correspondientes. Los valores que arroja este procedimiento son:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} &= 0.102 \quad [\text{kg m}^2], \\ \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} &= 2.533 \quad [\text{kg m}^2], \end{aligned}$$

y ocurren para $q_2 = \pi$ y $q_2 = 0$, respectivamente.

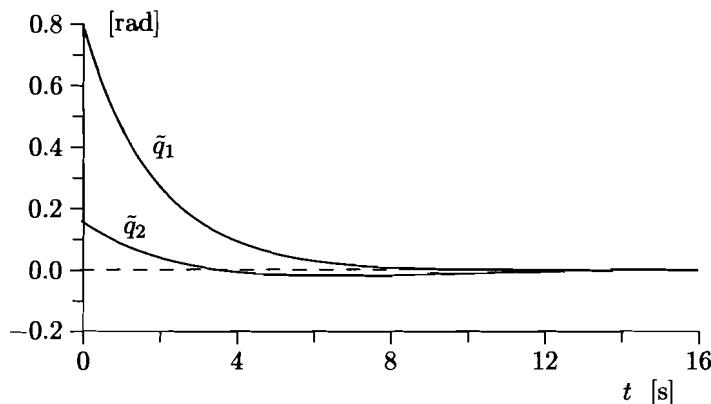


Figura 8.4: Errores de posición

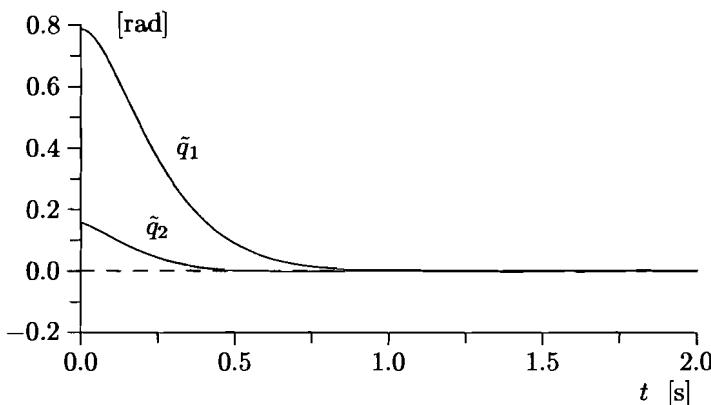


Figura 8.5: Errores de posición

Con los valores numéricos de $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$ y k_g , y siguiendo el procedimiento de sintonía, finalmente se determinan las siguientes matrices que satisfacen las reglas de sintonía (8.18):

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{90\} \quad [\text{Nm / rad}], \\ K_v &= \text{diag}\{166\} \quad [\text{Nm s / rad}], \\ K_i &= \text{diag}\{20\} \quad [\text{Nm / rad s}]. \end{aligned}$$

La Figura 8.4 muestra la evolución temporal de los errores de posición.

Nótese que la escala horizontal asociada al tiempo abarca un intervalo de 16 [s] siendo mayor que los intervalos empleados habitualmente. Por lo tanto, se concluye que la respuesta es más lenta que aquellas obtenidas con los controladores PD con compensación de gravedad (véase la Figura 6.3) y PD con compensación precalculada de gravedad (véase la Figura 7.5). Este comportamiento se debe a que las ganancias del PID se escogieron de acuerdo con el procedimiento de sintonía dado en este capítulo, que limita al valor propio mínimo de K_v por una cota inferior más alta que las usadas en los controladores con estructura tipo PD.

No obstante, si el procedimiento de sintonía se deja a un lado por el momento, y se toman las siguientes ganancias:

$$K_p = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix} \text{ [Nm / rad]},$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \text{ [Nm s / rad]},$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 135 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \text{ [Nm / (rad s)]},$$

donde K_p y K_v tienen los mismos valores que en los casos de los controladores tipo PD, se aprecia de los resultados mostrados en la Figura 8.5 que la prestación del controlador PID mejora alcanzando una velocidad de respuesta similar a los controladores PD con compensación de gravedad y PD con compensación precalculada de gravedad.

8.5 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos. Considérese el control PID de robots de n g.d.l. Supóngase que la posición deseada q_d es constante.

- Si las matrices simétricas K_p , K_v y K_i del controlador PID satisfacen:

- ★ $\lambda_{\max}\{K_i\} \geq \lambda_{\min}\{K_i\} > 0$,
- ★ $\lambda_{\max}\{K_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$,
- ★ $\lambda_{\max}\{K_v\} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g} \cdot \frac{\lambda_{\max}^2\{M\}}{\lambda_{\min}\{M\}}$,

entonces el origen de la ecuación de malla cerrada expresada en términos del vector de estado $[w^T \ \dot{q}^T \ \ddot{q}^T]^T$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma local.

En consecuencia, si las condiciones iniciales son “suficientemente pequeñas”, se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$. No obstante, esta misma conclusión se mantiene para condiciones iniciales “grandes”, siempre y cuando $\lambda_{\min}\{K_p\}$ y $\lambda_{\min}\{K_v\}$ sean también “grandes” y $\lambda_{\max}\{K_i\}$ sea “pequeño”.

Si el término de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ no se encuentra en el modelo dinámico del robot, entonces la estabilidad asintótica es global.

Referencias

Los siguientes documentos tuvieron una fuerte influencia sobre la forma final que tomó este capítulo:

- Arimoto, S., Miyazaki, F., 1984, “*Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability*”, in M. Brady & R. P. Paul (eds.), *Robotics Research: First International Symposium*, MIT Press, pp. 783–799.
- Kelly, R., 1995, “*A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators*”, *Robotica*, March–April, Vol. 13, Part 2, pp. 141–148.
- Meza, J. L., Santibáñez, V., 2001, “*Análisis simple de estabilidad asintótica semi-global del regulador PID lineal para robots manipuladores*”, III Congreso Mexicano de Robótica, Queretaro, Qro.
- Ortega, R., Loría, A., Nicklasson, P., Sira-Ramírez, H., 1998, “*Passivity-based control of Euler–Lagrange Systems*”, Springer Verlag.

El estudio del control PID de robots cuyos modelos dinámicos son “dominados” básicamente por los de sus accionadores (motores de CC) está presente en los siguientes textos:

- Paul, R., 1981, “*Robot manipulators: Mathematics, programming, and control*”, The MIT Press.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “*Robot dynamics and control*”, John Wiley & Sons.

El análisis del control PID de robots donde la posición articular deseada q_d es una función del tiempo está incluido en los siguiente trabajos:

- Samson, C., 1987, “*Robust control of a class of non-linear systems and application to robotics*”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 1, pp. 49–68.
- Kawamura, S., Miyazaki, F., Arimoto, S., 1988, “*Is a local linear PD feedback control law effective for trajectory tracking of robot motion?*”, in *Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, PA, April, pp. 1335–1340.

- Wen, J. T., 1989, “*PID control of robot manipulators*”, *Tech. Report*, June, Rensselaer Polytechnic Institute.
- Wen, J. T., Murphy, S., 1990, “*PID control for robot manipulators*”, CIRSSE Document # 54, Rensselaer Polytechnic Institute, May.
- Qu, Z., Dorsey, J., 1991, “*Robust PID control of robots*”, International Journal of Robotics and Automation, Vol. 6, No. 4.
- Rocco, P., 1996, “*Stability of PID control for industrial robot arms*”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 4, pp. 606–614.
- Cervantes, I., Alvarez-Ramirez, J., 2001, “*On the PID tracking control of robot manipulators*”, Systems and Control Letters, Vol. 42, pp. 37–46.

Una prueba de estabilidad asintótica en forma semiglobal, es decir, cuando el dominio de atracción puede agrandarse tanto como se deseé por medio del incremento adecuado de las ganancias del controlador, viene detallada en:

- Alvarez-Ramirez, J., Cervantes, I., Kelly, R., 2000, “*PID regulation of robot manipulators: stability and performance*”, Systems and Control Letters, Vol. 41, pp. 73–83.

Estudios sobre controladores con ligeras alteraciones a la estructura PID han sido reportados en:

- Ortega, R., Loría, A., Kelly, R., 1995, “*A semiglobally stable output feedback PI²D regulator for robot manipulators*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 8, pp. 1432–1436.
- Kelly, R., 1998, “*Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 7, pp. 934–938.

Problemas

1. Considérese el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau.$$

Supóngase que se emplea el control PID:

$$\tau = k_p\tilde{q} + k_v\dot{\tilde{q}} + k_i \int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma$$

para llevar la posición q a una posición deseada q_d constante.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[w \ \tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T$, donde $w = \alpha \int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma - \alpha \frac{mgl}{k_i} \operatorname{sen}(q_d) + \tilde{q}$, con $\alpha > 0$.

- (b) Demostrar, mediante la propuesta de una función de Lyapunov, que si

- $k_i > 0$,
- $k_p > mgl$,
- $k_v > \frac{k_i \cdot ml^2}{k_p - mgl}$,

entonces el origen de la ecuación de malla cerrada es asintóticamente estable en forma global.

- (c) ¿Significa lo anterior que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$ para todo $\tilde{q}(0) \in \mathbb{R}$?

2. Verificar la expresión de $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, z)$ dada en la Ecuación (8.14).

3. Considérese el control PID *con compensación de gravedad* empleado en el problema de control de posición (posición deseada q_d constante) de robots de n g.d.l. y cuya ley de control es:

$$\begin{aligned}\tau &= K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_i \xi + g(q) \\ \dot{\xi} &= \tilde{q}.\end{aligned}$$

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[\xi^T \ \tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T]^T$. Verifique que el origen sea un equilibrio de la ecuación de malla cerrada.

- (b) Explicar por qué la siguiente política de sintonía garantiza estabilidad asintótica local del origen:

- $\lambda_{\max}\{K_i\} \geq \lambda_{\min}\{K_i\} > 0$,
- $\lambda_{\max}\{K_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > 0$,
- $\lambda_{\max}\{K_v\} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\}} \cdot \frac{\lambda_{\max}^2\{M\}}{\lambda_{\min}\{M\}}$.

Ayuda: La única diferencia respecto al procedimiento de sintonía establecido previamente es la ausencia de k_g en las expresiones para K_p y K_v .

4. Considérese el control PID dado por (8.1). Demuestre que éste equivale a

$$\tau = K'_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} + K'_i \int_0^t [\alpha \tilde{q}(\sigma) + \dot{\tilde{q}}(\sigma)] d\sigma$$

donde

$$K'_p = K_p - \frac{1}{\alpha} K_i,$$

$$K'_i = \frac{1}{\alpha} K_i,$$

para todo $\alpha \neq 0$.

5. Considérese un sistema lineal multivariable descrito por la ecuación:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g} = \mathbf{u},$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es parte del estado y a la vez la salida del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es la entrada del sistema, $M, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas y $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$.

Considérese el empleo del control PID para llevar la salida $\mathbf{x}(t)$ a un vector constante $\mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= K_p \tilde{\mathbf{x}} - K_v \dot{\mathbf{x}} + K_i \xi, \\ \dot{\xi} &= \tilde{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada expresada en términos del estado $[\xi^T \quad \tilde{\mathbf{x}}^T \quad \dot{\mathbf{x}}^T]^T$.
- (b) Verificar que el origen de la ecuación de malla cerrada sea el único equilibrio.
- (c) Usar el procedimiento de sintonía presentado en este capítulo para sugerir una política de sintonía que garantice estabilidad asintótica del origen de la ecuación de malla cerrada. ¿Podría demostrarse que la estabilidad asintótica es global?

Parte III

Control de movimiento

Introducción

Considérese el modelo dinámico de un robot manipulador de n g.d.l. con eslabones rígidos, sin fricción en sus uniones y con accionadores ideales (3.22):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (\text{III.1})$$

o en términos del vector de estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de fuerzas y pares aplicados en las uniones. Los vectores $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ denotan la posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente.

El problema de control de movimiento de robots manipuladores puede formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica de un robot de n g.d.l. (III.1). Dado un conjunto de funciones vectoriales acotadas \mathbf{q}_d , $\dot{\mathbf{q}}_d$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d$ referidas como posiciones, velocidades y aceleraciones articulares *deseadas*, se trata de determinar una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$, de tal forma que las posiciones \mathbf{q} asociadas a las coordenadas articulares del robot sigan con precisión a \mathbf{q}_d .

En términos más formales, el *objetivo de control de movimiento* consiste en determinar $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{III.2})$$

donde $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de errores de posiciones articulares, simplemente denominado error de posición, y definido como

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t).$$

Considerando la definición anterior, el vector $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$ denominará el error de velocidad. Si el objetivo de control se verifica, significará que las articulaciones del robot manipulador siguen asintóticamente la trayectoria de movimiento deseado.

El cálculo del vector τ involucra generalmente una función vectorial no lineal de q , \dot{q} y \ddot{q} . Esta función se denominará “ley de control” o simplemente controlador. Es importante recordar que los robots manipuladores disponen de sensores de posición y velocidad para cada articulación por lo que los vectores q y \dot{q} son medibles y pueden emplearse en los controladores. Genéricamente, el controlador puede expresarse como:

$$\tau = \tau(q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, M(q), C(q, \dot{q}), g(q)). \quad (\text{III.3})$$

Para fines prácticos es deseable que el controlador no dependa de la aceleración articular \ddot{q} .

La Figura III.1 presenta un diagrama de bloque formado por un controlador en malla cerrada con un robot.

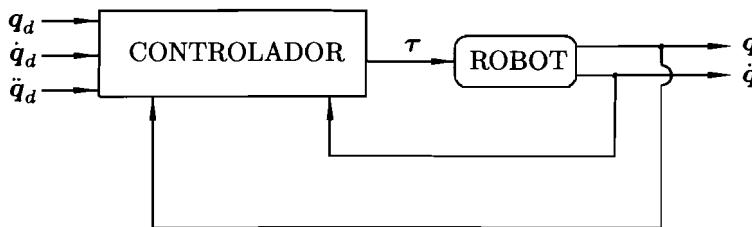


Figura III.1: Control en malla cerrada de robots

En esta tercera parte del texto, se realiza el estudio y el análisis de estabilidad de una serie de controladores para el control de movimiento de robots manipuladores. La metodología del análisis de estabilidad puede ser resumida de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Obtención de la ecuación dinámica de malla cerrada. Dicha ecuación se obtiene reemplazando la acción de control τ (Ecuación (III.3)) en el modelo dinámico del manipulador (Ecuación (III.1)). En general, la ecuación de malla cerrada resulta ser una ecuación diferencial ordinaria no lineal y no autónoma.
2. Representación de la ecuación de malla cerrada en la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_d - q \\ \dot{q}_d - \dot{q} \end{bmatrix} = f(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, M(q), C(q, \dot{q}), g(q)).$$

La ecuación de malla cerrada anterior puede verse como un sistema dinámico cuyas entradas son q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d , y siendo sus salidas el estado $\dot{q} = q_d - q$ y $\ddot{q} = \dot{q}_d - \dot{q}$. La Figura III.2 muestra el diagrama de bloque correspondiente.

3. Estudio de la existencia y posible unicidad de equilibrios de la ecuación de malla cerrada.

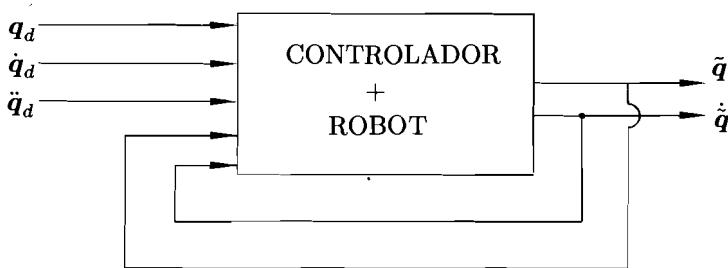


Figura III.2: Sistema dinámico en malla cerrada

4. Propuesta de una función candidata de Lyapunov para el estudio de estabilidad de algún equilibrio de interés de la ecuación de malla cerrada, haciendo uso de los Teoremas 2.2, 2.3, 2.4 y 2.6.
5. Como alternativa al paso 4), en el caso de no ser viable la propuesta de una función candidata de Lyapunov para determinar las propiedades de estabilidad del estado de equilibrio en estudio, se emplea el Lema 2.2 mediante la propuesta de una función definida positiva cuyas características permitan determinar el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación de malla cerrada.

El resto de esta tercera parte del texto se divide en tres capítulos. Los controladores considerados son:

- Control por precompensación y Control PD con precompensación.
- Control PD + y Control PD con compensación.
- Control Par-Calculado y Control Par-Calculado +.

Referencias

Entre los libros de texto sobre robótica que incluyen el tópico de control de movimiento de robots, se encuentran los siguientes:

- Paul, R., 1982, “*Robot manipulators: Mathematics programming and control*”, MIT Press, Cambridge, MA.
- Asada, H., Slotine, J. J., 1986, “*Robot analysis and control*”, Wiley, New York.
- Fu, K., Gonzalez, R., Lee, C., 1987, “*Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*”, McGraw-Hill.

- Craig, J., 1989, "*Introduction to robotics: Mechanics and control*", Addison-Wesley, Reading, MA.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, "*Robot dynamics and control*", Wiley, New York.
- Yoshikawa, T., 1990, "*Fundations of robotics: Analysis and control*", The MIT Press.
- Spong, M., Lewis, F. L., Abdallah, C. T., 1993, "*Robot control: Dynamics, motion planning and analysis*", IEEE Press, New York.
- Lewis, F. L., Abdallah, C. T., Dawson, D. M., 1993, "*Control of robot manipulators*", Macmillan Publishing Co.
- Qu, Z., Dawson, D. M., 1996, "*Robust tracking control of robot manipulators*", IEEE Press, New York.
- Canudas, C., Siciliano, B., Bastin, G., (Eds), 1996, "*Theory of robot control*", Springer Verlag, London.
- Arimoto, S., 1996, "*Control theory of non-linear mechanical systems*", Oxford University Press, New York.
- Sciavicco, L., Siciliano, B., 2000, "*Modeling and control of robot manipulators*", Second Edition, Springer-Verlag, London.
- de Queiroz, M., Dawson, D. M., Nagarkatti, S. P., Zhang, F., 2000, "*Lyapunov-based control of mechanical systems*", Birkhäuser, Boston, MA.

Un trabajo particularmente relevante sobre control de movimiento de robots, y que además engloba de forma unificada la mayoría de los controladores que se estudian en esta parte del texto es:

- Wen, J. T., 1990, "A unified perspective on robot control: The energy Lyapunov function approach", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 4, pp. 487–500.

El siguiente artículo expone una panorámica sobre controladores robustos para manipuladores robóticos:

- Sage, H. G., Mathelin, M. F., Ostertag, E., 1999, "Robust control of robot manipulators: a survey", *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 16, pp. 1498–1522.

9

Precompensación y Control PD con precompensación

La implantación práctica de controladores para robots manipuladores se realiza tradicionalmente mediante tecnología digital. La manera de operar de estos sistemas de control consiste básicamente en las siguientes etapas:

- Muestreo de la posición articular q y de la velocidad \dot{q} .
- Cálculo de la acción de control τ a partir de la ley de control.
- Envío de la acción de control hacia los accionadores.

En ciertas aplicaciones donde se encomienda al robot realizar tareas repetitivas a alta velocidad, las etapas anteriores deben ejecutarse a una cadencia elevada. El cuello de botella, en cuanto a consumo de tiempo se refiere, es el cálculo de la acción de control τ . Naturalmente, una reducción en el tiempo de cálculo de la acción de control τ tendría como ventaja el aumento en la frecuencia de procesamiento, y por ende, un potencial mayor para la realización de tareas con gran rapidez. Esta es la principal razón que atrae el interés por controladores que requieren “poco” poder de cálculo. En particular, éste es el caso de controladores que utilizan información basada en las posiciones, velocidades, y eventualmente, aceleraciones deseadas: $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$, y $\ddot{q}_d(t)$. Efectivamente, en tareas repetitivas la posición deseada $q_d(t)$ y sus derivadas temporales, resultan ser funciones vectoriales periódicas en el tiempo, y además conocidas una vez especificada la tarea. Ya establecida la frecuencia de procesamiento, los términos de la ley de control que dependen exclusivamente de éstas, pueden ser calculados y almacenados en la memoria a modo de tabla. Durante el cálculo de la acción de control, estos términos precalculados son leídos simplemente de la memoria, reduciendo de esta forma el tiempo de cálculo.

En este capítulo se aborda el estudio de dos estrategias de control que han sido sugeridas en la bibliografía y cuyas características son el empleo masivo de términos precalculados en sus respectivas leyes de control:

- Control por precompensación.
- Control PD con precompensación.

A cada uno de estos controladores se dedicará un epígrafe de este capítulo.

9.1 Control por precompensación

Entre las estrategias de control conceptualmente más elementales que pueden utilizarse para controlar un sistema dinámico, se encuentra la denominada *control en malla abierta*, donde el controlador es simplemente el modelo dinámico inverso del sistema.

Para el caso de sistemas dinámicos lineales, esta técnica de control puede ser someramente ejemplificada de la siguiente manera. Considérese el sistema lineal descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y a la vez la *salida* del sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuyos valores propios $\lambda_i\{A\}$ tienen parte real negativa, y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es la *entrada* del sistema. Supóngase que se especifica una función vectorial \mathbf{x}_d así como su derivada temporal $\dot{\mathbf{x}}_d$, siendo ambas acotadas. Se desea lograr que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. En otras palabras, definiendo el vector de error $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$, el problema de control consiste en diseñar un controlador que permita determinar la entrada \mathbf{u} al sistema de forma que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$. La solución al problema de control empleando la técnica de modelo dinámico inverso consiste básicamente en sustituir \mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$ por \mathbf{x}_d y $\dot{\mathbf{x}}_d$ en la ecuación del sistema a controlar para posteriormente despejar \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}_d - A\mathbf{x}_d.$$

De esta manera, el sistema formado por el sistema lineal a controlar y el controlador anterior satisface:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}}$$

el cual, a su vez, es un sistema lineal en el nuevo vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}$, y además se sabe de la teoría de sistemas lineales, en razón de que los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa, que éste satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ para todo $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^n$.

En el caso del control de robots, dicha estrategia se fundamenta en el siguiente razonamiento. Si se aplica un par de entrada τ al robot, entonces el comportamiento de sus salidas \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ está gobernado por (II.1):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\tau - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

Si se desea que el comportamiento de las salidas \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ sea igual al especificado por \mathbf{q}_d y $\dot{\mathbf{q}}_d$, respectivamente, parece razonable reemplazar \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$ por \mathbf{q}_d , $\dot{\mathbf{q}}_d$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d$ en la

ecuación (9.1) y despejar τ . Este razonamiento conduce a la ecuación del control por precompensación dado por:

$$\tau = M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (9.2)$$

Nótese que la acción de control τ no depende de \mathbf{q} ni de $\dot{\mathbf{q}}$, es decir, es un control en malla abierta. Más aún, dicho controlador no posee parámetro de diseño alguno. Como cualquier estrategia de control de malla abierta, esta estrategia necesita el conocimiento preciso del sistema dinámico a controlar, es decir, del modelo dinámico del manipulador y específicamente de la estructura de las matrices $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ así como de sus parámetros. Por esta razón, se dice que el control por precompensación se basa en el modelo del robot. El interés por un controlador de este tipo reside en las ventajas de implementación ya que una vez dados \mathbf{q}_d , $\dot{\mathbf{q}}_d$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d$ (en particular para tareas repetitivas), entonces se pueden determinar *fuerza de línea* los términos $M(\mathbf{q}_d)$, $C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$, y calcular fácilmente la acción de control τ de acuerdo con la Ecuación (9.2). De ahí el nombre de precompensación para este controlador. No hay que olvidar, sin embargo, que un controlador de este tipo poseerá las desventajas intrínsecas de los sistemas de control en malla abierta, e.g., falta de robustez frente a incertidumbre paramétrica y estructural, y degradación de prestación ante presencia de perturbaciones. En la Figura 9.1 se presenta el diagrama de bloques correspondiente al control por precompensación de un robot.

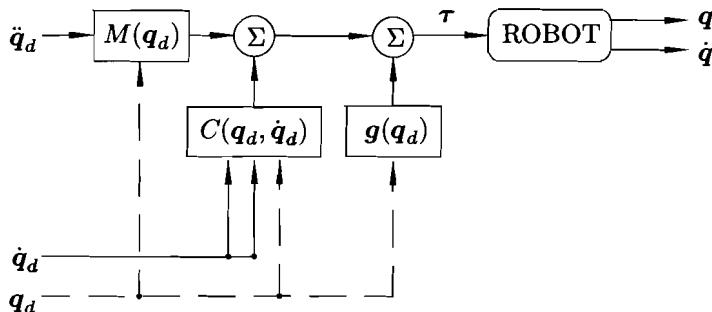


Figura 9.1: Control por precompensación

El comportamiento del sistema de control se obtiene al reemplazar la ecuación del controlador (9.2) en el modelo del robot (II.1):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (9.3)$$

Por motivos de simplicidad en la escritura, se emplearán de aquí en adelante y cuando así convenga, las siguientes notaciones:

$$M = M(\mathbf{q}),$$

$$\begin{aligned} M_d &= M(\mathbf{q}_d), \\ C &= C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ C_d &= C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d), \\ \mathbf{g} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{g}_d &= \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \end{aligned}$$

La Ecuación (9.3) puede expresarse en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1} [(M_d - M)\ddot{\mathbf{q}}_d + C_d\dot{\mathbf{q}}_d - C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_d - \mathbf{g}] \end{bmatrix},$$

la cual representa una ecuación diferencial ordinaria no lineal y no autónoma. El origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es un equilibrio de la ecuación anterior pero en general no es el único. Este hecho se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9.1 Considérese el modelo de un péndulo ideal de longitud l con masa m concentrada en su extremo sometido a la acción de la gravedad g al cual puede aplicársele un par τ en el eje de giro (véase el Ejemplo 2.10, pág. 48):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

donde se identifica $M(q) = ml^2$, $C(q, \dot{q}) = 0$ y $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$. El controlador por precompensación (9.2) se reduce a:

$$\tau = ml^2\ddot{q}_d + mgl \operatorname{sen}(q_d).$$

El comportamiento del sistema está caracterizado por la Ecuación (9.3):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = ml^2\ddot{q}_d + mgl \operatorname{sen}(q_d),$$

o en términos del estado $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -\frac{q}{l} [\operatorname{sen}(q_d) - \operatorname{sen}(q_d - \tilde{q})] \end{bmatrix}.$$

Claramente el origen $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio pero también $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [2n\pi \ 0]^T$ para n enteros son equilibrios.

El siguiente ejemplo presenta el estudio del control por precompensación de un robot cartesiano de 3 g.d.l. El modelo dinámico de dicho manipulador es un inocuo sistema lineal.

Ejemplo 9.2 Considérese el robot cartesiano de 3 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.5 (pág. 73) y mostrado en la Figura 3.6. Su modelo dinámico viene dado por

$$\begin{aligned}[m_1 + m_2 + m_3]\ddot{q}_1 + [m_1 + m_2 + m_3]g &= \tau_1, \\ [m_1 + m_2]\ddot{q}_2 &= \tau_2, \\ m_1\ddot{q}_3 &= \tau_3,\end{aligned}$$

donde se identifica:

$$\begin{aligned}M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ g(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} [m_1 + m_2 + m_3]g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Nótese que el modelo dinámico se caracteriza mediante una ecuación diferencial lineal. La ecuación de “malla cerrada”¹ obtenida con el control por precompensación viene dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix},$$

la cual tiene un número infinito de equilibrios no aislados:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T = [\tilde{\mathbf{q}}^T \ 0^T]^T \in \mathbb{R}^{2n},$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}$ es cualquier vector en \mathbb{R}^n . Naturalmente, el origen es un equilibrio pero no es aislado. En consecuencia, dicho equilibrio (y de hecho cualquier otro) no puede ser asintóticamente estable ni siquiera en forma local. Más aún, debido a la naturaleza lineal de la ecuación que caracteriza al sistema de control, puede demostrarse en este caso que todos los equilibrios son inestables (véase el Problema 9.2).

¹Se pone “malla cerrada” entre comillas porque en realidad el sistema de control en su conjunto es un sistema en malla abierta.

Los ejemplos anteriores ponen en evidencia la posible existencia de múltiples equilibrios para la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento del sistema de control. Más aún, en razón de la ausencia de parámetros de diseño en el controlador, no es viable de forma alguna alterar la ubicación y cantidad de equilibrios, menos aún sus propiedades de estabilidad que son gobernadas únicamente por el modelo dinámico del manipulador. Evidentemente, un controlador cuyo comportamiento en el control de robots tiene los rasgos anteriores, resulta de poca utilidad en aplicaciones reales. Inclusive, su empleo puede dar resultados desastrosos en ciertas aplicaciones tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

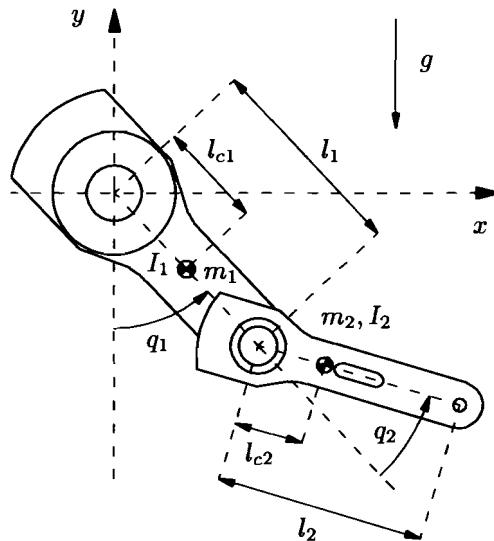


Figura 9.2: Robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 9.3 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 9.2. El modelo dinámico completo incluyendo los valores numéricos de los parámetros se describe en el Apéndice B.

Considérese el control por precompensación (9.2) de dicho robot para el control de movimiento.

La especificación del movimiento articular viene dada a través de la posición articular deseada $q_d(t)$ cuya expresión es (B.1) y su forma se muestra en la Figura B.2 del Apéndice B.

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades

tomadas para las simulaciones fueron:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

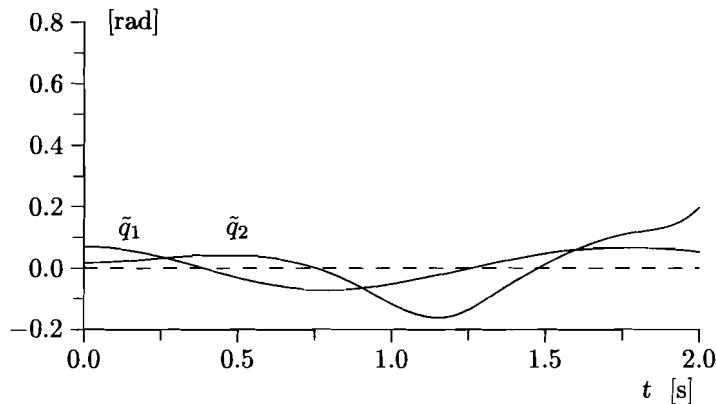


Figura 9.3: Errores de posición

La Figura 9.3 presenta los resultados de simulación. En particular, la figura muestra que los componentes del error de posición $\tilde{q}(t)$ tienen una tendencia oscilatoria. Naturalmente, este comportamiento dista mucho de ser satisfactorio ya que lejos de cumplir con el objetivo de control o en su defecto, de mantener errores de posición pequeños, éstos presentan propensión a incrementarse.

Hasta este punto se han presentado una serie de ejemplos que muestran las características desventajosas del control por precompensación dado por (9.2). Naturalmente, estos ejemplos podrían desalentar el intento de estudio formal de estabilidad del origen como equilibrio de la ecuación diferencial que gobierna el sistema de control.

Más aún, el análisis riguroso genérico de estabilidad o inestabilidad parece inabordable. Mientras que en el Ejemplo 9.2 se mostró el caso donde el origen de la ecuación que caracteriza el sistema de control es inestable, en contraste, el Problema 9.1 presenta el caso donde el origen es un equilibrio estable.

Las reflexiones anteriores ponen en evidencia que el control por precompensación (9.2), aún con conocimiento exacto del modelo del robot, puede no satisfacer objetivos ni siquiera de posición pura. Por lo tanto, puede concluirse que el control por precompensación (9.2), a pesar de su motivación razonada, no debería aplicarse al control de robots.

El control por precompensación (9.2) puede modificarse mediante la adición, por ejemplo, de un término Proporcional-Derivativo (PD):

$$\tau = M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (9.4)$$

donde K_p y K_v son las matrices ($n \times n$) de ganancias de posición y de velocidad, respectivamente. El controlador (9.4) es ahora un controlador de malla cerrada debido a la realimentación explícita de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$, para calcular $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ respectivamente. El controlador (9.4) se estudiará en el epígrafe siguiente.

9.2 Control PD con precompensación

El gran interés práctico de incorporar el menor número de operaciones en tiempo real al implantar un controlador para robots, ha sido el motivo de la propuesta en la bibliografía especializada del control PD con precompensación, cuya ley de control viene dada por:

$$\tau = K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d), \quad (9.5)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas llamadas ganancias de posición y velocidad, respectivamente. Como de costumbre $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ denota el error de posición. El término precompensación en el nombre del controlador es consecuencia del hecho de que la ley de control usa la dinámica del robot evaluada explícitamente en el movimiento deseado.

Se supone también que los eslabones del manipulador están unidos por articulaciones rotacionales y que las cotas máximas de las normas de velocidad y aceleración deseadas, denotadas por $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M$ y $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M$, son conocidas.

El control PD con precompensación (9.5) puede verse como una generalización del control PD con precompensación de gravedad (7.1). La Figura 9.4 muestra el diagrama de bloque correspondiente al control PD con precompensación de robots.

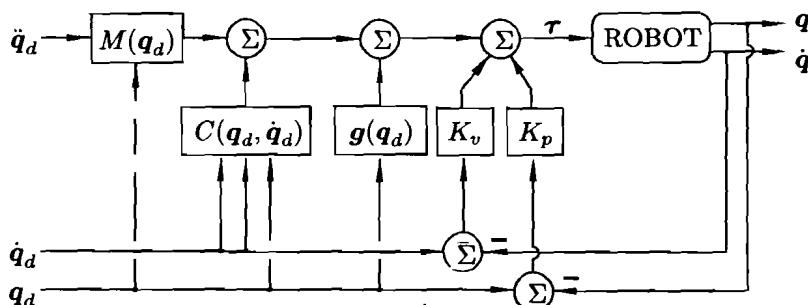


Figura 9.4: Control PD con precompensación

Las experiencias reportadas por diversos autores sobre el control de movimiento para robots mediante el control (9.5) han mostrado una excelente prestación, comparable inclusive con el empleo de controladores del tipo Par-Calculado que será presentado en un capítulo posterior. No obstante, estos resultados pueden ser engañosos ya que el buen desempeño no solo es atribuible, por supuesto, a la estructura del controlador mismo, sino también a una adecuada selección de la matriz de ganancia proporcional K_p .

El comportamiento en malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control τ de (9.5) en la ecuación del modelo del robot (II.1):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = K_p\tilde{\mathbf{q}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (9.6)$$

La ecuación de malla cerrada (9.6) puede expresarse en términos del vector de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

donde

$$\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = [M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}}_d + [C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

es la llamada dinámica residual (4.16).

Es fácil probar que el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ del espacio de estado es un equilibrio, independientemente de las matrices K_p y K_v . Sin embargo, el número de equilibrios del sistema en malla cerrada (9.7) depende de la ganancia proporcional K_p . Lo expresado anteriormente se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.4 Considérese el modelo de un péndulo ideal de longitud l con masa m concentrada en su extremo sometido a la acción de la gravedad g , al cual se le aplica un par τ en el eje de giro (véase el Ejemplo 2.10):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau.$$

La ley de control PD con precompensación (9.5) es en este caso:

$$\tau = k_p\tilde{q} + k_v\dot{\tilde{q}} + ml^2\ddot{q}_d + mgl \operatorname{sen}(q_d)$$

donde k_p y k_v son las constantes positivas de diseño. La ecuación de malla cerrada resulta:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -\frac{1}{ml^2} [k_p\tilde{q} + k_v\dot{\tilde{q}} + mgl [\operatorname{sen}(q_d) - \operatorname{sen}(q - \tilde{q})]] \end{bmatrix},$$

la cual tiene un equilibrio en el origen $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Si $q_d(t)$ es constante, pueden existir equilibrios adicionales $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = [s \quad 0]^T \in \mathbb{R}^2$ donde s es solución de:

$$k_p s + mgl [\sin(q_d) - \sin(q_d - s)] = 0.$$

El Ejemplo 7.1 muestra el caso donde la ecuación anterior tiene tres soluciones. En el mismo ejemplo, si k_p es suficientemente grande, se muestra que $s = 0$ es la única solución.

De acuerdo con el Teorema 2.5, si existe más de un equilibrio, entonces ninguno de ellos podrá ser asintóticamente estable en forma global.

A continuación se presentan condiciones suficientes sobre K_p que garantizan la existencia de un único equilibrio (el origen) para la ecuación de malla cerrada (9.7).

9.2.1 Equilibrio único

Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales y con una selección suficientemente “grande” de K_p , puede demostrarse que el origen $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada (9.7). Los equilibrios son los vectores constantes $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T = [s^T \quad 0^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, donde $s \in \mathbb{R}^n$ es una solución de

$$K_p s + h(s, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (9.8)$$

La ecuación anterior siempre se satisface por la solución trivial $s = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, pero otros vectores s pueden también ser soluciones, dependiendo obviamente de la ganancia proporcional K_p . A continuación, se presentan condiciones explícitas sobre la ganancia proporcional para asegurar unicidad del equilibrio. Con este fin definase:

$$k(s) = K_p^{-1} h(s, \mathbf{0}).$$

La idea es notar que cualquier punto fijo $s \in \mathbb{R}^n$ de $k(s)$ es una solución de (9.8). Así, el interés será encontrar condiciones sobre K_p de manera que $k(s)$ tenga un único punto fijo. Puesto que $s = \mathbf{0}$ es siempre un punto fijo, entonces éste será el único.

Notese que para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|k(\mathbf{x}) - k(\mathbf{y})\| &\leq \|K_p^{-1} [h(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - h(\mathbf{y}, \mathbf{0})]\|, \\ &\leq \lambda_{\text{Max}} \{K_p^{-1}\} \|h(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - h(\mathbf{y}, \mathbf{0})\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, empleando la definición de la dinámica residual (4.16), se llega a:

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - h(\mathbf{y}, \mathbf{0})\| &\leq \|[M(\mathbf{q}_d - \mathbf{y}) - M(\mathbf{q}_d - \mathbf{x})] \ddot{\mathbf{q}}_d\| \\ &\quad + \|[C(\mathbf{q}_d - \mathbf{y}, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}_d - \mathbf{x}, \dot{\mathbf{q}}_d)] \dot{\mathbf{q}}_d\| \\ &\quad + \|\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{x})\|. \end{aligned}$$

Pero de las Propiedades 4.2 a 4.4 se desprende la existencia de constantes k_M , k_{C_1} , k_{C_2} y k_g , asociadas a la matriz de inercias $M(\mathbf{q})$, a la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, y al vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$, respectivamente, tal que:

$$\begin{aligned}\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| &\leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|, \\ \|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| &\leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\|, \\ \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| &\leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,\end{aligned}$$

para todo \mathbf{v} , \mathbf{w} , \mathbf{x} , \mathbf{y} , $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Teniendo en consideración este hecho, se llega a la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{0})\| \leq \left[k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

De aquí, usando $\lambda_{\max}\{K_p^{-1}\} = 1/\lambda_{\min}\{K_p\}$ —porque K_p es una matriz definida positiva simétrica— se obtiene:

$$\|\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}(\mathbf{y})\| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}\{K_p\}} \left[k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Finalmente, invocando el teorema de contracción de mapas (Teorema 2.1, pág. 33), se afirma que:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M^2 \quad (9.9)$$

es una condición suficiente para que $\mathbf{k}(\mathbf{s})$ tenga un único punto fijo, y por lo tanto, para que el origen del espacio de estado sea el único equilibrio del sistema en malla cerrada (9.7).

Como se ha observado en su momento, el control PD con precompensación (9.5) se reduce al control con precompensación de gravedad (7.1) en el caso de posición deseada \mathbf{q}_d constante. Para este último controlador, se demostró en el Epígrafe 7.2 que la ecuación de malla cerrada correspondiente tenía un único equilibrio si $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$. Es interesante observar que efectivamente, cuando \mathbf{q}_d es constante, se obtiene nuevamente la condición de unicidad anterior a partir de (9.9).

9.2.2 Estabilidad asintótica global

A continuación se presentará el análisis de la ecuación de malla cerrada (9.6) o equivalentemente (9.7). En dicho análisis, se obtienen condiciones sobre las matrices de diseño K_p y K_v que garantizan estabilidad asintótica en forma global del origen de la ecuación de malla cerrada.

Antes de estudiar la estabilidad del origen $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación de malla cerrada (9.6) o (9.7), conviene recordar la Definición 4.1 de la función tangente hiperbólica vectorial. Esta tiene la forma dada en (4.17):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tanh(x_1) \\ \vdots \\ \tanh(x_n) \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Como enunciado en la Definición 4.1, ésta satisface las siguientes propiedades para todo $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$:

- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \alpha_1 \|\mathbf{x}\|$,
- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \alpha_2$,
- $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 \leq \alpha_3 \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{x}$,
- $\|\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| \leq \alpha_4 \|\dot{\mathbf{x}}\|$,

con $\alpha_1, \dots, \alpha_4 > 0$. Para $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ definida como en (4.17), las diversas constantes quedan como $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \sqrt{n}, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$.

De aquí en adelante se supondrá que dada una constante $\gamma > 0$, la matriz K_v es seleccionada suficientemente “grande” en el sentido:

$$\lambda_{\max}\{K_v\} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} > k_{h1} + \gamma b, \quad (9.11)$$

y K_p también lo es, de modo que

$$\lambda_{\max}\{K_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > \alpha_3 \left[\frac{[2 \gamma a + k_{h2}]^2}{4 \gamma [\lambda_{\min}\{K_v\} - k_{h1} - \gamma b]} + k_{h2} \right], \quad (9.12)$$

a la vez que

$$\lambda_{\max}\{K_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > \gamma^2 \frac{\alpha_1^2 \lambda_{\max}^2\{M\}}{\lambda_{\min}\{M\}}, \quad (9.13)$$

estando k_{h1} y k_{h2} definidas por (4.28) y (4.27), mientras que las constantes a y b vienen dadas por

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} [\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{h1}], \\ b &= \alpha_4 \lambda_{\max}\{M\} + \alpha_2 k_{C_1}. \end{aligned}$$

Función candidata de Lyapunov y positividad

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov (6.3):

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (9.14)$$

donde $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ es la tangente hiperbólica vectorial (9.10) y $\gamma > 0$ es una constante dada.

Para mostrar que la función candidata de Lyapunov (9.14) es una función definida positiva y radialmente desacotada, primeramente obsérvese que el tercer sumando de

(9.14) satisface:

$$\begin{aligned} -\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &\leq \gamma \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|, \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|, \\ &\leq \gamma \alpha_1 \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|, \end{aligned}$$

habiéndose usado $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \alpha_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\|$ en el último paso. De aquí se desprende que:

$$\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \geq -\gamma \alpha_1 \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|.$$

Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (9.14) cumple con la siguiente desigualdad:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\gamma \alpha_1 \lambda_{\max}\{M\} \\ -\gamma \alpha_1 \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\min}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}$$

y en consecuencia resulta una función definida positiva y radialmente desacotada ya que por hipótesis K_p es definida positiva $-\lambda_{\min}\{K_p\} > 0$, y se ha supuesto seleccionada de modo que satisface (9.13).

Siguendo pasos similares a los anteriormente expuestos, es posible demostrar que la función candidata de Lyapunov $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ dada en (9.14) está acotada superiormente por la siguiente expresión:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & \gamma \alpha_1 \lambda_{\max}\{M\} \\ \gamma \alpha_1 \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\max}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}$$

la cual es definida positiva y radialmente desacotada ya que la condición

$$\lambda_{\max}\{K_p\} > \gamma^2 \alpha_1^2 \lambda_{\max}\{M\},$$

se satisface trivialmente por la misma hipótesis (9.13) hecha sobre K_p . Esto significa que $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es una función menguante.

Derivada temporal

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (9.14) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (9.7) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[-K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right] + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \left[-K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right]. \end{aligned}$$

Usando la Propiedad 4.3 que establece la antisimetría de $\frac{1}{2}\dot{M} - C$ y $\dot{M}(\tilde{\mathbf{q}}) = C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^T$, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov queda:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}).\end{aligned}\quad (9.15)$$

Se buscará ahora acotar superiormente a $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ por una función definida negativa en términos de los estados $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$. Con este fin, es conveniente encontrar cotas superiores de cada término de (9.15).

El primer término de (9.15) puede acotarse trivialmente por:

$$-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq -\lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2. \quad (9.16)$$

Para acotar superiormente el segundo término de (9.15) primero recuérdese que la tangente hiperbólica vectorial $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ definida en (9.10) cumple $\|\dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \alpha_4 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ con $\alpha_4 > 0$. Debido a este argumento se tiene que:

$$\gamma \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma \alpha_4 \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2. \quad (9.17)$$

Por otro lado, nótese que en vista de que K_p es una matriz diagonal y definida positiva, y $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \leq \alpha_3 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \tilde{\mathbf{q}}$, se llega a

$$\gamma \alpha_3 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \geq \gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2$$

lo cual finalmente conduce a la siguiente desigualdad clave:

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \leq -\gamma \frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\alpha_3} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2. \quad (9.18)$$

Una cota obtenida en forma directa sobre $\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ viene dada por

$$\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{K_v\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|. \quad (9.19)$$

La cota superior del término $\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ deberá seleccionarse cuidadosamente. Obsérvese que:

$$\begin{aligned}\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \gamma \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}), \\ &\leq \gamma \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|C(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|.\end{aligned}$$

Considerando nuevamente la Propiedad 4.3 pero en la modalidad que establece la existencia de una constante k_{C_1} tal que $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, resulta que:

$$\begin{aligned}\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &\leq \gamma k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|, \\ &\leq \gamma k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|, \\ &\leq \gamma k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| + \gamma k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|.\end{aligned}$$

Aprovechando la característica sobre $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ que afirma $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \alpha_2$ para toda $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, entonces se llega a:

$$\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \gamma k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| + \gamma \alpha_2 k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2. \quad (9.20)$$

En este momento, resta encontrar cotas superiores sobre los dos términos que contienen $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$. Este estudio se basa en el uso de la característica establecida en la Propiedad 4.5 sobre el vector de dinámica residual $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, que indica la existencia de constantes $k_{h1}, k_{h2} \geq 0$ —calculables mediante (4.27) y (4.28)— tales que la norma de la dinámica residual cumple con (4.18):

$$\|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq k_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_{h2} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|.$$

Primero se estudiará $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$:

$$\begin{aligned}-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\|, \\ &\leq k_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + k_{h2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|.\end{aligned} \quad (9.21)$$

El término restante satisface

$$\begin{aligned}-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq \gamma \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\|, \\ &\leq \gamma k_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| + \gamma k_{h2} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2.\end{aligned} \quad (9.22)$$

Las cotas (9.16)–(9.22) conducen a que la derivada temporal $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ en (9.15) cumpla con

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq \\ -\gamma \left[\frac{\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|}{\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \right]^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\alpha_3} - k_{h2} & -a - \frac{1}{\gamma} \frac{k_{h2}}{2} \\ -a - \frac{1}{\gamma} \frac{k_{h2}}{2} & \frac{1}{\gamma} [\lambda_{\min}\{K_v\} - k_{h1}] - b \end{bmatrix}}_{R(\gamma)} \left[\frac{\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|}{\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \right] &\quad (9.23)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} [\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M + k_{h1}], \\ b &= \alpha_4 \lambda_{\max}\{M\} + \alpha_2 k_{C_1}. \end{aligned}$$

Con el fin de que la matriz $R(\gamma)$ sea definida positiva, es necesario y suficiente que el componente R_{11} y el determinante $\det\{R(\gamma)\}$ sean estrictamente positivos. Con respecto a la primera condición se precisa que la ganancia K_p cumpla con

$$\lambda_{\min}\{K_p\} \geq \alpha_3 k_{h2}. \quad (9.24)$$

Por otro lado, el determinante de $R(\gamma)$ viene dado por

$$\begin{aligned} \det\{R(\gamma)\} &= \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\alpha_3} - k_{h2} \right] [\lambda_{\min}\{K_v\} - k_{h1}] \\ &\quad - \left[\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\alpha_3} - k_{h2} \right] b - \left[a + \frac{1}{\gamma} \frac{k_{h2}}{2} \right]^2. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Éste debe ser estrictamente positivo, por lo que es necesario y suficiente con que la ganancia K_p cumpla:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \alpha_3 \left[\frac{[2 \gamma a + k_{h2}]^2}{4 \gamma [\lambda_{\min}\{K_v\} - k_{h1} - \gamma b]} + k_{h2} \right] \quad (9.26)$$

siendo suficiente seleccionar K_v de modo que

$$\lambda_{\min}\{K_v\} > k_{h1} + \gamma b \quad (9.27)$$

para que el lado derecho de la desigualdad (9.26) sea positiva. Obsérvese que en este caso la desigualdad (9.24) es trivialmente implicada por (9.26).

Son justamente las desigualdades (9.27) y (9.26) las estipuladas en (9.11) y (9.12) como guías de sintonía del controlador. Esto significa que $R(\gamma)$ es definida positiva y por ende, $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es definida negativa en forma global.

De acuerdo con los argumentos presentados anteriormente, dada una constante positiva γ se pueden determinar ganancias K_p y K_v de acuerdo con (9.11)–(9.13) de modo que la función $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ dada por (9.14) sea definida positiva en forma global, menguante y radialmente desacotada, mientras que $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ expresada como (9.23) sea definida negativa en forma global. Por este motivo, $V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es una función de Lyapunov estricta. El Teorema 2.4 permite finalmente establecer estabilidad asintótica global del origen del sistema en malla cerrada.

Procedimiento de sintonía

El análisis de estabilidad presentado en párrafos anteriores, permite extraer un procedimiento para la sintonía del controlador PD con precompensación. Este método determina los valores propios mínimos de las matrices simétricas de diseño K_p y K_v , que garantizan el cumplimiento del objetivo de control de movimiento.

La metodología de sintonía se resume de la siguiente forma:

- Obtención del modelo dinámico del robot a ser controlado. Particularmente, determinación de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.
- Cálculo de las constantes $\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})\}$, $\lambda_{\text{min}}\{M(\mathbf{q})\}$, k_M , k'_M , k_{C_1} , k_{C_2} , k' y k_g ².
- Determinación de $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$, $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}}$ a partir de la especificación de la tarea encomendada al robot.
- Cálculo de las constantes s_1 y s_2 dadas respectivamente por (4.24) y (4.25), i.e.,

$$s_1 = \left[k_g + k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{M}} + k_{C_2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{M}}^2 \right],$$

y

$$s_2 = 2 \left[k' + k'_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{M}} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{M}}^2 \right].$$

Obtención de k_{h1} y k_{h2} dadas por (4.27) y (4.28), i.e.,

- ★ $k_{h1} \geq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{M}}$,
- ★ $k_{h2} \geq \frac{s_2}{\tanh\left(\frac{s_2}{s_1}\right)}$.

- Cálculo de las constantes a y b :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} [\lambda_{\text{Max}}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{M}} + k_{h1}], \\ b &= \alpha_4 \lambda_{\text{Max}}\{M\} + \alpha_2 k_{C_1}, \end{aligned}$$

con $\alpha_2 = \sqrt{n}$, $\alpha_4 = 1$.

- Seleccionar $\gamma > 0$ y determinar las matrices de diseño K_p y K_v de manera que sus valores propios mínimos satisfagan (9.11)–(9.13), i.e.,

- ★ $\lambda_{\text{min}}\{K_v\} > k_{h1} + \gamma b$,
- ★ $\lambda_{\text{min}}\{K_p\} > \alpha_3 \left[\frac{[2 \gamma a + k_{h2}]^2}{4 \gamma [\lambda_{\text{min}}\{K_v\} - k_{h1} - \gamma b]} + k_{h2} \right]$,

²Aquí se sugiere el empleo de la información proporcionada en la Tabla 4.1 (pág. 114) del Capítulo 4.

$$\star \lambda_{\min}\{K_p\} > \gamma^2 \frac{\alpha_1^2 \lambda_{\max}^2\{M\}}{\lambda_{\min}\{M\}},$$

con $\alpha_1 = 1, \alpha_3 = 1$.

A continuación se da un ejemplo con el propósito de mostrar las ideas recién esbozadas.

Ejemplo 9.5 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 9.3, y mostrado en la Figura 9.2. A continuación se detallan los componentes del modelo dinámico siendo los valores numéricos de los parámetros proporcionados en el Apéndice B.

Los elementos de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2, \\ M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\ M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2. \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\ C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2], \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0. \end{aligned}$$

Los elementos del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ son:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Empleando los valores numéricos de las diversas constantes proporcionadas en el Apéndice B así como las formulas de la Tabla 4.1 (pág. 114) se llega a:

$$\begin{aligned} k_M &= 0.672 \text{ [kg m}^2\text]}, \\ k_{C_1} &= 0.336 \text{ [kg m}^2\text]}, \\ k_{C_2} &= 0.672 \text{ [kg m}^2\text]}, \\ k_g &= 80.578 \text{ [kg m}^2/\text{s}^2\text]}, \\ k'_M &= \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} = 2.533 \text{ [kg m}^2\text]}, \\ \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} &= 0.102 \text{ [kg m}^2\text]}. \end{aligned}$$

Para la obtención de $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}$ y $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}$, consultese la explicación en el Ejemplo 8.2.

Con respecto a k' , se procede a obtenerlo numéricamente, es decir, evaluando la norma $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para un conjunto de valores de q_1 y q_2 entre 0 y 2π , y extrayendo el valor máximo. Éste se produce para $q_1 = q_2 = 0$ y arroja el valor:

$$k' = 40.334 \text{ [N m].}$$

Considérese el control PD con precompensación (9.5) de dicho robot para el control de movimiento.

Similar al Ejemplo 9.3, la especificación del movimiento deseado del robot se expresa en términos de la posición articular deseada $\mathbf{q}_d(t)$, mostrada en la gráfica de la Figura B.2 y cuya expresión analítica es (B.1) del Apéndice B. Ahí mismo, se presentan las ecuaciones (B.2) y (B.3) correspondientes a la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$, y aceleración deseada $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$. Mediante simulación numérica pueden verificarse las siguientes cotas máximas para las normas de velocidad y aceleración deseadas —véanse las Figuras B.4 y B.5 del Apéndice B—:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\max} &= 8.074 \text{ [rad/s]}, \\ \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\max} &= 48.371 \text{ [rad/s}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Usando la información anterior y las definiciones de las diversas constantes indicadas en el procedimiento de sintonía, se obtiene:

$$\begin{aligned} s_1 &= 156.892 \text{ [N m]}, \\ s_2 &= 369.524 \text{ [N m]}, \\ k_{h1} &= 2.713 \text{ [kg m}^2/\text{s]}, \\ k_{h2} &= 376.236 \text{ [N m]}, \\ a &= 127.713 \text{ [kg m}^2/\text{s]}, \\ b &= 3.008 \text{ [kg m}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Por último, se toma $\gamma = 2 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, por lo que resta seleccionar las matrices de diseño K_p y K_v de acuerdo con las condiciones (9.11)–(9.13). Una elección adecuada que cumple estas condiciones es:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{785\} \text{ [N m]}, \\ K_v &= \text{diag}\{250\} \text{ [N m s/rad]}. \end{aligned}$$

Las simulaciones se realizaron teniendo en cuenta las siguientes condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

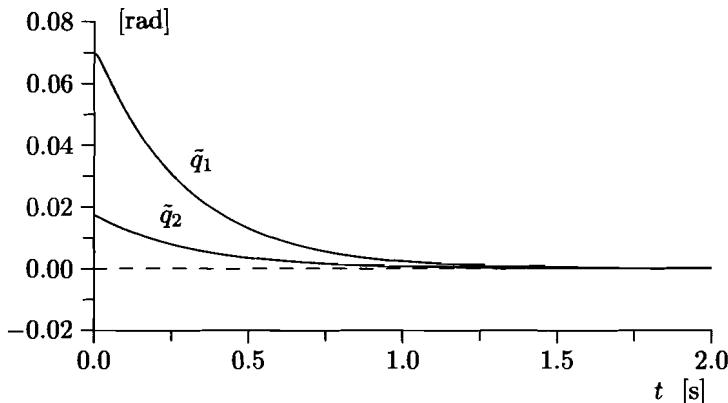


Figura 9.5: Errores de posición

La Figura 9.5 presenta los resultados de simulación y muestra cómo los componentes del error de posición $\tilde{q}(t)$ tienden asintóticamente a cero. Naturalmente, en contraste con el Ejemplo 9.3 donde el controlador no tenía el término PD, ahora el comportamiento obtenido resulta satisfactorio después de un transitorio, presentándose una clara convergencia del error de posición a cero.

9.3 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos:

- El control por precompensación de robots de n g.d.l. es un esquema de control en malla abierta. Por este motivo es desaconsejable, además de que es incapaz de satisfacer en general el objetivo de control de movimiento.
- El control PD con precompensación de robots de n g.d.l. puede, condicionado a usar matrices de diseño K_p y K_v suficientemente “grandes”, satisfacer el objetivo de control de movimiento en forma global.

Referencias

Comentarios interesantes sobre el control por precompensación y control PD con precompensación pueden consultarse en:

- Craig, J., 1989, "Introduction to robotics: Mechanics and Control", Addison-Wesley, Reading, MA.
- Yoshikawa, T., 1990, "Foundations of robotics: Analysis and control", The MIT Press.

La estabilidad asintótica (local) del controlador PD con precompensación ha sido analizada en:

- Paden, B., Riedle, B. D., 1988, "A positive-real modification of a class of nonlinear controllers for robot manipulators", in Proceedings of the American Control Conference, Atlanta, GA, pp. 1782–1785.
- Wen, J. T., 1990, "A unified perspective on robot control: The energy Lyapunov function approach", International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 4, pp. 487–500.
- Kelly, R., Salgado, R., 1994, "PD control with computed feedforward of robot manipulators: A design procedure", IEEE Transactions on Robotics and Automation, August, Vol. 10, No. 4, pp. 566–571.

La prueba de existencia de ganancias proporcional y derivativa que garantizan estabilidad asintótica en forma global ha sido extraída de:

- Santibáñez, V., Kelly, R., 2001, "PD control with feedforward compensation for robot manipulators: analysis and experimentation", Robotica, Vol. 19, pp. 11–19.

Los siguientes documentos presentan resultados experimentales de la aplicación del control PD con precompensación en robots prototípicos:

- Asada, H., Kanade, T., Takeyama, I., 1983, "Control of a direct-drive arm", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 105, pp. 136–142.
- An, C., Atkeson, C., Hollerbach, J., 1988, "Model-based control of a robot manipulator", The MIT Press.
- Khosla, P., Kanade, T., 1988, "Experimental evaluation of nonlinear feedback and feedforward control schemes for manipulators", The International Journal of Robotics Research, Vol. 7, No. 1, pp. 18–28.
- Kokkinis, T., Stoughton, R., 1991, "Dynamics and control of a closed-chain robot with application to a new direct-drive robot arm", International Journal of Robotics and Automation, Vol. 6, No. 1.
- Tarn, T. J., Bejczy, A. K., Marth, G. T., Ramadarai, A. K., 1993, "Performance comparison of four manipulators servo schemes", IEEE Control Systems, February, Vol. 13, No. 1.

- Caccavale, F., Chiacchio, P., 1994, “*Identification of dynamic parameters and feedforward control for conventional industrial manipulators*”, Control Engineering Practice, Vol. 2, No. 6, pp. 1039–1050.
- Reyes, F., Kelly, R., 2001, “*Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm*”, Mechatronics, Vol. 11, pp. 267–282.

Problemas

1. Considérese el control por precompensación del péndulo ideal estudiado en el Ejemplo 9.1. Supóngase que la posición deseada $q_d(t)$ es cero para todo $t \geq 0$.
 - (a) Obtener la ecuación que gobierna el sistema de control en términos de $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T$.
 - (b) Demostrar que el origen es un equilibrio estable.

Ayuda: Ver el Ejemplo 2.10, pág. 48.
2. Considérese el control por precompensación del robot cartesiano de 3 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 9.2.
 - (a) Demostrar que si $\dot{\tilde{q}}(0) \neq 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{q}(t)\| = \infty$.
3. Considérese el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 9.1 pero ahora se incluye adicionalmente un término de fricción lineal:

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) + f\dot{q} = \tau$$

donde $f > 0$ es el coeficiente de fricción. El controlador por precompensación (9.2) obtenido despreciando el término de fricción es:

$$\tau = ml^2\ddot{q}_d + mgl \operatorname{sen}(q_d).$$

Supóngase que $q_d(t) = \operatorname{sen}(t)$.

- (a) Obtener la ecuación $\boldsymbol{x} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{x})$ donde $\boldsymbol{x} = [\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T$. ¿Tiene equilibrios esta ecuación?
 - (b) Supóngase además que $q_d(0) = q(0)$ y $\dot{q}_d(0) = \dot{q}(0)$. ¿Puede esperarse que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$?
4. Considérese el control PD con precompensación del péndulo ideal analizado en el Ejemplo 9.4. Allí mismo se obtuvo la siguiente ecuación de malla cerrada:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -\frac{1}{ml^2} [k_p \tilde{q} + k_v \dot{\tilde{q}} + mgl (\operatorname{sen}(q_d) - \operatorname{sen}(q_d - \tilde{q}))] \end{bmatrix}.$$

Supóngase que la posición deseada viene dada por:

$$q_d(t) = \sin(t).$$

Por otra parte, las constantes de diseño k_p y k_v se escogen de manera que:

$$k_v > ml^2,$$

$$k_p > \frac{2[mgl + ml^2]}{\tanh\left[\frac{2[mgl + ml^2]}{mgl}\right]} + \frac{\left[k_v + \frac{2[mgl + ml^2]}{\tanh\left[\frac{2[mgl + ml^2]}{mgl}\right]}\right]^2}{4[k_v - ml^2]}.$$

- (a) Demostrar que el origen $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

Ayuda: Emplear la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{2}k_p^2\tilde{q}^2 + ml^2\tanh(\tilde{q})\dot{\tilde{q}}$$

y verificar que su derivada temporal satisface

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq - \begin{bmatrix} |\tanh(\tilde{q})| \\ |\dot{\tilde{q}}| \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} |\tanh(\tilde{q})| \\ |\dot{\tilde{q}}| \end{bmatrix}$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} k_p - \frac{2[mgl + ml^2]}{\tanh\left[\frac{2[mgl + ml^2]}{mgl}\right]} & -\frac{1}{2} \left[k_v + \frac{2[mgl + ml^2]}{\tanh\left[\frac{2[mgl + ml^2]}{mgl}\right]} \right] \\ -\frac{1}{2} \left[k_v + \frac{2[mgl + ml^2]}{\tanh\left[\frac{2[mgl + ml^2]}{mgl}\right]} \right] & k_v - ml^2 \end{bmatrix}.$$

5. Considérese el control PD con precompensación del robot *prototipo* de 2 g.d.l. empleado en el Ejemplo 9.5. En dicho ejemplo se presentaron simulaciones donde $K_p = \text{diag}\{785\}$. Verificar que con tal selección, la ecuación de malla cerrada correspondiente tiene un único equilibrio.

Ayuda: Verificar que la condición (9.9) se satisface.

10

Control PD+ y Control PD con compensación

El objetivo de control de movimiento de robots manipuladores puede lograrse en forma global por medio del control PD con precompensación estudiado en el Capítulo 9. No obstante, a pesar de la relativa sencillez de dicha estrategia de control, ésta requiere para su implementación el conocimiento del modelo dinámico del robot, aunque en realidad es una característica común de los controladores de movimiento; sin embargo, el procedimiento de sintonía también hace uso del mismo y más todavía, por un lado se precisa disponer *a priori* de la tarea encomendada al robot, y por otro lado, el procedimiento de sintonía de ganancias es laborioso.

El objetivo de este capítulo es presentar un par de controladores cuyas principales características son: primero, garantía del cumplimiento del objetivo de control de movimiento en forma global y segundo, sus procedimientos de sintonía son triviales. Dichos controladores son:

- Control PD+.
- Control PD con compensación.

Estos controladores han sido estudiados en la bibliografía especializada, y sus referencias pueden consultarse al final del capítulo. El estudio de cada uno de ellos se tratará en epígrafes separados.

10.1 Control PD+

El controlador denominado PD+ es, sin duda, uno de los controladores más sencillos que pueden aplicarse en el control de movimiento de robots manipuladores, con una garantía formal para el cumplimiento de este objetivo de control en forma global. La ley de control PD+ viene dada por:

$$\tau = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (10.1)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas por el diseñador, y como de costumbre $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ denota el error de posición.

La realización práctica del control PD+ requiere el conocimiento exacto del modelo del manipulador, i.e., de $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. Adicionalmente es necesario disponer de las trayectorias deseadas $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ así como de las mediciones $\mathbf{q}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$. No obstante, tal y como se verá en su momento, en contraste con el control PD con precompensación (9.5) aquí la selección de K_p y K_v es completamente arbitraria y no depende del modelo dinámico del robot ni de la tarea encomendada al mismo. La Figura 10.1 presenta el diagrama de bloques del control PD+ de robots manipuladores.

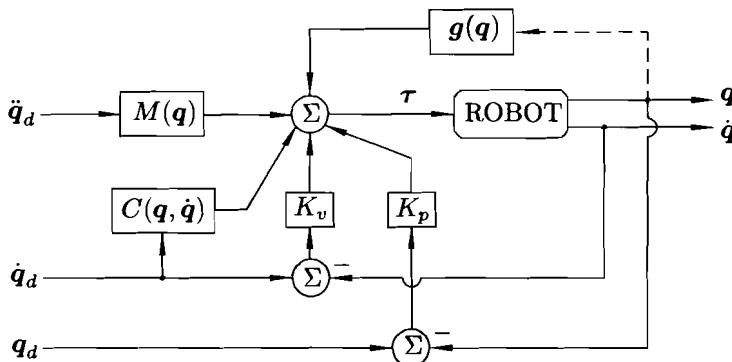


Figura 10.1: Control PD+

Nótese que en el caso particular de control de posición, i.e., $\dot{\mathbf{q}}_d = \ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, el control PD+ descrito por (10.1) es equivalente al control PD con compensación de gravedad (6.1).

La ecuación que gobierna el comportamiento en malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control τ de la ley de control (10.1) en la ecuación del modelo del robot (II.1):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Nótese que la ecuación de malla cerrada puede expresarse en términos del estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})^{-1} [-K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix}, \quad (10.2)$$

la cual es una ecuación diferencial no lineal y no autónoma. Esta última propiedad se debe a que la ecuación depende explícitamente de las funciones del tiempo $\mathbf{q}_d(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$.

Cabe constatar además que la ecuación de malla cerrada tiene como único estado de equilibrio al origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. Por lo tanto, si $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_d(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_d(0)$,

entonces $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_d(t)$ para todo $t \geq 0$. Nótese que lo anterior se concluye exclusivamente a partir del concepto de equilibrio sin necesidad de invocar a ningún otro análisis. Sin embargo, para obtener conclusiones en el caso de $\mathbf{q}(0) \neq \mathbf{q}_d(0)$ o $\dot{\mathbf{q}}(0) \neq \dot{\mathbf{q}}_d(0)$ es necesario proceder al análisis de estabilidad del equilibrio.

Para analizar la estabilidad del origen considérese ahora la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

que es definida positiva ya que tanto la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ como la matriz de ganancias de posición (o proporcional) K_p son definidas positivas.

Derivando (10.3) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Despejando $M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$ de la ecuación de malla cerrada (10.2) y sustituyendo en la ecuación anterior se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \overset{Q}{\overbrace{K_v}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \\ &= - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

donde el término $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} - C \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ ha sido eliminado por la Propiedad 4.3. Del Teorema 2.3 se concluye inmediatamente estabilidad del origen $\left[\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \right]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. Más aún, los errores de posición y de velocidad están acotados, i.e.,

$$\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in L_\infty^n. \quad (10.5)$$

Por otro lado, empleando directamente el Lema 2.2 se obtiene que el error de velocidad pertenece al espacio L_2^n , i.e.,

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in L_2^n. \quad (10.6)$$

Teniendo en cuenta las conclusiones previas, enseguida se demostrará que el error de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ tiende asintóticamente a cero. Para este fin, nótese de la ecuación de malla cerrada (10.2) que:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q})^{-1} \left[-K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right]$$

en donde el lado derecho sería acotado como consecuencia de (10.5) y siempre que los argumentos de $M(q)$ y $C(q, \dot{q})$ también estén acotados. Afortunadamente, debido al acotamiento de \tilde{q} y $\ddot{\tilde{q}}$, se tiene que q y \dot{q} son acotados puesto que la posición y velocidad deseada q_d y \dot{q}_d son por hipótesis vectores acotados. En esta circunstancia el error de aceleración \ddot{q} es un vector acotado, i.e.,

$$\ddot{\tilde{q}} \in L_\infty^n.$$

Esto último junto con (10.6) y Lema 2.2 implican:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Desafortunadamente a partir del estudio recién esbozado, no es posible sacar una conclusión de forma inmediata sobre la tendencia asintótica a cero del error de posición \tilde{q} . Para hacerlo, habría que demostrar no solo estabilidad del origen tal y como se ha hecho, sino por ejemplo probar estabilidad asintótica. El teorema de LaSalle (Teorema 2.6) no puede aplicarse para estudiar estabilidad asintótica global debido a que la ecuación de malla cerrada (10.2) no es autónoma. Sin embargo, puede demostrarse mediante el uso del teorema de Matrosov que el origen es asintóticamente estable en forma global¹.

En el siguiente subepígrafe se presentará el análisis de estabilidad asintótica global mediante el uso de una función de Lyapunov alternativa a (10.3), pero antes se dan algunos ejemplos de aplicación del control PD+.

Ejemplo 10.1 Considérese el modelo de un péndulo ideal de longitud l con masa m concentrada en su extremo y sometido a la acción de la gravedad g , al cual se le aplica un par τ en el eje de giro (véase el Ejemplo 2.10):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau$$

donde se identifica $M(q) = ml^2$, $C(q, \dot{q}) = 0$ y $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$. El control PD+ dado por la ley de control (10.1) es para este ejemplo:

$$\tau = k_p \tilde{q} + k_v \dot{\tilde{q}} + ml^2 \ddot{q}_d + mgl \operatorname{sen}(q),$$

con k_p y k_v números reales positivos. La ecuación de malla cerrada es:

$$ml^2 \ddot{\tilde{q}} + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = 0,$$

la cual representa una ecuación diferencial lineal y autónoma cuyo único equilibrio $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ puede demostrarse que es exponencialmente estable en forma global.

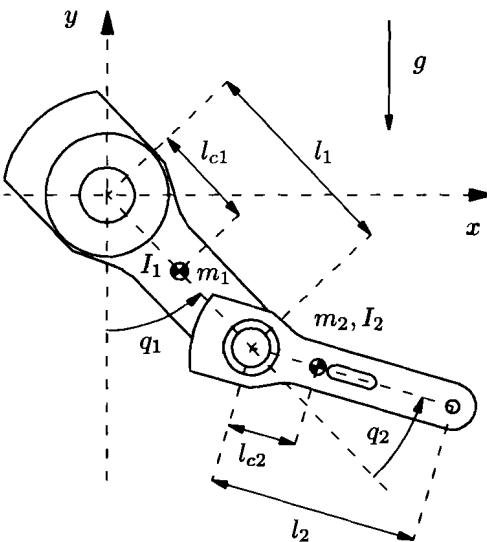


Figura 10.2: Robot de 2 g.d.l.

A continuación se presentan los resultados de simulación obtenidos del control PD+ de un robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 10.2 Considérese el control PD+ (10.1) del *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 10.2. Los detalles técnicos del modelo dinámico se exponen en el Apéndice B.

Las trayectorias de posición, velocidad y aceleración articular deseadas: $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$, vienen dadas por las Ecuaciones (B.1)–(B.3) del Apéndice B.

Las matrices simétricas definidas positivas K_p y K_v se escogen como:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{785\} \quad [\text{N m / rad}] \\ K_v &= \text{diag}\{250\} \quad [\text{N m s / rad}]. \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades son:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

¹El lector puede acudir a la referencia indicada al final del capítulo para una explicación detallada sobre este tópico.

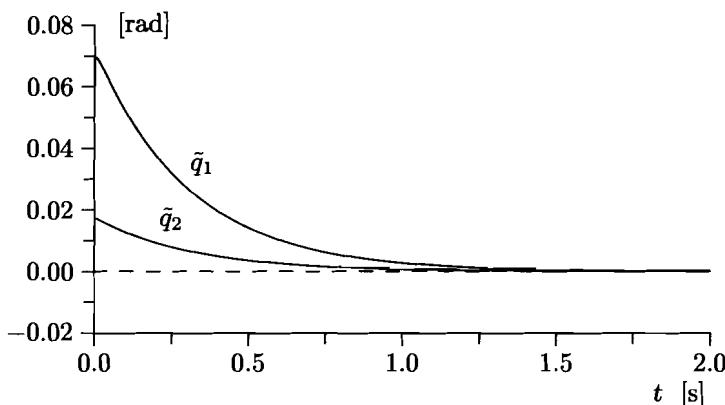


Figura 10.3: Errores de posición

La Figura 10.3 presenta los resultados de simulación, en los que se observa cómo los componentes del error de posición $\tilde{q}(t)$ tienden asintóticamente a cero en un intervalo de tiempo aceptable.

10.1.1 Función de Lyapunov para estabilidad asintótica

A continuación se presenta un análisis alternativo de estabilidad del origen de la ecuación de malla cerrada (10.2). Este estudio se ha extraído de la bibliografía especializada y su referencia la podrá encontrar el lector al final del capítulo. La ventaja que ofrece este análisis alternativo es que se emplea una función de Lyapunov que permite concluir directamente estabilidad asintótica en forma global. El estudio de esta parte del capítulo es laborioso, por lo que el lector puede omitirlo sin perder continuidad y pasar al epígrafe siguiente.

En el caso particular donde todas las articulaciones del robot manipulador son del tipo rotacional, puede demostrarse estabilidad asintótica global del origen $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ en forma directa, mediante el empleo de una función de Lyapunov un poco más elaborada que la propuesta en (10.3).

Tal y como se mencionó en la Propiedad 4.2, el hecho de que un robot manipulador posea solamente articulaciones rotacionales, implica que el valor propio máximo $\lambda_{\text{Max}}\{M(q)\}$ de la matriz de inercia está acotado. Por otra parte, en dicho estudio se supondrá que la velocidad articular deseada \dot{q}_d es un vector acotado, aunque no será necesario conocer su cota máxima.

Enseguida se presenta el análisis de estabilidad comentado previamente. Para estudiar

las propiedades de estabilidad del origen $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación de malla cerrada (10.2), considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & \frac{\varepsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} M(\mathbf{q}) \\ \frac{\varepsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} M(\mathbf{q}) & M(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \\ &= \eta(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\varepsilon(\tilde{\mathbf{q}})} \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde $\eta(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es la función de Lyapunov (10.3). La norma $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ se define de la manera usual como $\|\tilde{\mathbf{q}}\| = (\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{q}})^{1/2}$. La constante positiva ε_0 se selecciona de forma que satisfaga en forma simultánea las tres desigualdades siguientes:

- $\sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}} > \varepsilon_0 > 0},$
- $\frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{2(k_{C_1}+2\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\})} > \varepsilon_0 > 0,$
- $\frac{2\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{(\lambda_{\max}\{K_v\}+k_{C_1}\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\max})^2} > \varepsilon_0 > 0,$

donde $k_{C_1} > 0$ es la constante tal que $\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ (Propiedad 4.3) y $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\max}$ es el valor máximo de $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|$. Es importante subrayar que en el estudio que aquí se presenta, sólo se requiere garantizar la existencia de $\varepsilon_0 (> 0)$ y no es necesario conocer su valor numérico. Afortunadamente, la existencia de $\varepsilon_0 (> 0)$ está garantizada debido a que en las desigualdades anteriores, las cotas máximas sobre ε_0 existen y además, son estrictamente positivas.

La función candidata de Lyapunov (10.7) es una función definida positiva debido a que:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}}} > \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (10.8)$$

Para demostrar que bajo la condición anterior, la función (10.7) es definida positiva, se procede en dos pasos. Primeramente, nótese que la desigualdad (10.8) implica que:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}} > \varepsilon^2 > 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

debido a que $\varepsilon_0^2 \geq \varepsilon^2$ donde $\varepsilon = \varepsilon_0/(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)$. Esto a su vez, implica que la matriz $K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva:

$$K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q}) > 0.$$

Por otro lado, la función (10.7) puede reescribirse como:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q})] \tilde{\mathbf{q}} \quad (10.9)$$

la cual es definida positiva y radialmente desacotada, debido a que tanto $M(\mathbf{q})$ como $K_p - \varepsilon^2 M(\mathbf{q})$ son matrices definidas positivas.

Para mostrar que la función (10.7) es también una función menguante, nótese que ésta puede acotarse superiormente por:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & \varepsilon_0 \lambda_{\max}\{M\} \\ \varepsilon_0 \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\max}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}, \quad (10.10)$$

donde se ha utilizado el hecho de que

$$\left| \frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \varepsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\|.$$

La expresión del lado derecho en la desigualdad (10.10) es definida positiva porque la condición, sobre ε_0 , para que su determinante sea positivo dada por

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{K_p\}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}}} > \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

se satisface trivialmente mediante la hipótesis (10.8). Por lo tanto la función (10.7) es definida positiva, radialmente desacotada y menguante.

Es interesante constatar, que la función candidata de Lyapunov (10.7) es muy similar a la empleada durante el estudio del controlador PD con compensación de gravedad (6.8). Por otro lado, la función (10.7) puede ser considerada como una versión más general de la anterior función de Lyapunov (10.3) en el caso de $\varepsilon_0 = 0$.

Continuando con el estudio de estabilidad, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (10.7) viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \dot{\eta}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (10.11)$$

donde $\dot{\eta}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ se obtiene de (10.4), esto es:

$$\dot{\eta}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Teniendo en consideración la expresión anterior, reemplazando $M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$ de la ecuación de malla cerrada (10.2) y reagrupando términos, la Ecuación (10.11) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + \dot{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la Propiedad 4.3 que establece $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}})^T$, la Ecuación (10.12) se simplifica a:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \underbrace{\varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}}_{a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})} \\ &\quad - \varepsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + \underbrace{\dot{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{b(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})}.\end{aligned}\quad (10.13)$$

A continuación, se obtendrán cotas máximas sobre los términos $a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ y $b(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$. Con respecto al término $a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ se tiene que:

$$\begin{aligned}a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq |a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})| = |\varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}| \\ &\leq \varepsilon \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}\| \\ &\leq \varepsilon k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ &\leq \varepsilon k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| [\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\dot{\mathbf{q}}_d\|] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ &= \frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} k_{C_1} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \varepsilon k_{C_1} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \\ &\leq \varepsilon_0 k_{C_1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \varepsilon k_{C_1} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}_d\|\end{aligned}\quad (10.14)$$

donde se ha vuelto a utilizar la Propiedad 4.3 ($\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$).

Ahora, con respecto al término $b(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, primero nótese que:

$$\dot{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) = -\frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}b(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq |b(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})| = |\dot{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}| \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} |\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}| |\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}| \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| |\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}| \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \sqrt{\lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q})^T M(\mathbf{q})\}} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|\end{aligned}$$

$$\leq \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|}}_{\epsilon(\tilde{q})} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2 \lambda_{\text{Max}}\{M(q)\}. \quad (10.15)$$

donde $\lambda_{\text{Max}}\{M\} = \sqrt{\lambda_{\text{Max}}\{M^T M\}}$, debido a que M es una matriz simétrica definida positiva.

Recordando las cotas máximas sobre $a(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ y $b(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$, la derivada $\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ de la función de Lyapunov dada por la Ecuación (10.13) puede acotarse superiormente por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &\leq -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} + \varepsilon \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \varepsilon_0 k_{C_1} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2 + \varepsilon k_{C_1} \left\| \tilde{q} \right\| \left\| \dot{\tilde{q}} \right\| \left\| \dot{q}_d \right\| \\ &\quad - \varepsilon \dot{\tilde{q}}^T [K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}}] + \varepsilon \lambda_{\text{Max}}\{M\} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2. \end{aligned} \quad (10.16)$$

donde se han suprimido por simplicidad de notación los argumentos de $\varepsilon(\tilde{q})$ y $M(q)$. Empleando las desigualdades:

- $-\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} \leq -\frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{2} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2$,
- $\varepsilon \lambda_{\text{Max}}\{M\} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2 \leq \varepsilon_0 \lambda_{\text{Max}}\{M\} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2$,
- $\varepsilon \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \leq \varepsilon \lambda_{\text{Max}}\{M\} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2 \leq \varepsilon_0 \lambda_{\text{Max}}\{M\} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2$,

la desigualdad (10.16) puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &\leq - \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon K_p & \frac{\varepsilon}{2} K_v \\ \frac{\varepsilon}{2} K_v & \frac{1}{2} K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} + \varepsilon k_{C_1} \left\| \tilde{q} \right\| \left\| \dot{\tilde{q}} \right\| \left\| \dot{q}_d \right\| \\ &\quad - \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_v\} - 2\varepsilon_0(k_{C_1} + 2\lambda_{\text{Max}}\{M\})] \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Nótese que adicionalmente $\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ puede acotarse superiormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &\leq -\varepsilon \underbrace{\begin{bmatrix} \left\| \tilde{q} \right\| \\ \left\| \dot{\tilde{q}} \right\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \left\| \tilde{q} \right\| \\ \left\| \dot{\tilde{q}} \right\| \end{bmatrix}}_{h(\left\| \tilde{q} \right\|, \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{[\lambda_{\min}\{K_v\} - 2\varepsilon_0(k_{C_1} + 2\lambda_{\text{Max}}\{M\})]}_{\delta} \left\| \dot{\tilde{q}} \right\|^2, \end{aligned} \quad (10.18)$$

donde la matriz simétrica Q viene dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\frac{1}{2}(\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\tilde{q}}_d\|) \\ -\frac{1}{2}(\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\tilde{q}}_d\|) & \frac{1}{2\varepsilon_0} \lambda_{\min}\{K_v\} \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

y donde se han empleado

- $-\frac{\varepsilon}{2} \tilde{q}^T K_v \dot{\tilde{q}} \leq \frac{\varepsilon}{2} |\tilde{q}^T K_v \dot{\tilde{q}}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{q}\| \|K_v \dot{\tilde{q}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{q}\| \sqrt{\lambda_{\max}\{K_v^T K_v\}} \|\dot{\tilde{q}}\|,$
- $-\frac{1}{2\varepsilon} \lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 = -\frac{1+\|\dot{\tilde{q}}\|}{2\varepsilon_0} \lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \leq -\frac{1}{2\varepsilon_0} \lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2.$

Para garantizar que $\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ sea una función definida negativa, es necesario seleccionar ε_0 convenientemente. Por un lado, se requiere que $\delta > 0$, i.e.:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_v\}}{2(k_{C_1} + 2\lambda_{\max}\{M\})} > \varepsilon_0.$$

Por otro lado, se necesita también que la matriz Q sea definida positiva. Esta característica de Q se garantiza si

$$\frac{2\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{(\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\tilde{q}}_d\|_{\max})^2} > \varepsilon_0,$$

donde $\|\dot{\tilde{q}}_d\|_{\max} \geq \|\dot{\tilde{q}}_d(t)\|$ para todo $t \geq 0$, puesto que la desigualdad anterior implica que:

$$\frac{1}{2\varepsilon_0} \lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{K_v\} - \frac{1}{4} (\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C_1} \|\dot{\tilde{q}}_d\|)^2 > 0$$

siendo esta expresión el determinante de Q .

A modo de resumen, la expresión de $\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ dada por (10.18), puede escribirse como:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq -\varepsilon(\|\tilde{q}\|) h(\|\tilde{q}\|, \|\dot{\tilde{q}}\|) - c \|\dot{\tilde{q}}\|^2,$$

donde, con la selección hecha de ε_0 , resulta que $h(\|\tilde{q}\|, \|\dot{\tilde{q}}\|)$ es una función definida positiva y $c > 0$. La función $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es una función definida negativa debido a que:

- $\dot{V}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0,$

- $\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) < 0 \quad \forall \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$

Finalmente, empleando el Teorema 2.4, se concluye que el origen $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

10.2 Control PD con compensación

En el año 1987 se presentó un controlador *adaptable* para resolver el problema de control de movimiento de robots manipuladores. Este controlador ha tenido una gran popularidad en el ámbito académico y recibe el nombre de sus creadores: *controlador de Slotine-Li*. Las referencias sobre este controlador se indican al final del capítulo. La versión no adaptable, por así decirlo, de este controlador es el objeto de análisis en esta parte del capítulo. Desde un punto de vista estructural, la ley de control de dicho controlador está formada por un término PD y otro de compensación. Por esta razón, se ha decidido llamarlo aquí: control PD con compensación.

Tal y como se verá en su momento, el control PD con compensación puede verse como una generalización del control PD+. De hecho, su ley de control es ligeramente más elaborada que la del control PD+. Naturalmente, podría cuestionarse el motivo del estudio de un controlador de movimiento más complejo que el control PD+, siendo este último capaz de garantizar el cumplimiento del objetivo de control de movimiento con una selección trivial de sus parámetros de diseño. La razón de su estudio es doble; primero, la omisión de dicho controlador dejaría una laguna en esta obra, y segundo, a pesar de ser un controlador más elaborado que el control PD+, su análisis resulta más sencillo. Tal vez esta última sea la causa principal de su popularidad.

El material de este epígrafe se ha extraído de las referencias indicadas al final del capítulo.

El controlador PD con compensación puede expresarse como:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \ddot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + g(q), \quad (10.20)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas de diseño, $\tilde{q} = q_d - q$ denota el error de posición, y Λ se define de la siguiente manera:

$$\Lambda = K_v^{-1} K_p.$$

Nótese que Λ es el producto de dos matrices simétricas definidas positivas. Aunque ésta puede no ser simétrica ni definida positiva, siempre es una matriz no singular. Esta característica de Λ será útil posteriormente.

Obsérvese que los dos primeros términos del lado derecho de la ley de control (10.20) corresponden al control PD. El control PD con compensación es del tipo basado en el modelo, es decir, que la ley de control emplea explícitamente los términos del modelo (II.1): $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$. La Figura 10.4 presenta el diagrama de bloque del control PD con compensación. La estructura de este controlador puede verse como una extensión del control PD+ (10.1) donde se ha introducido la matriz Λ .

La ecuación de malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control τ de la ley de control (10.20) en la ecuación del modelo del robot (II.1):

$$M(q) [\ddot{q} + \Lambda \ddot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q} + \Lambda \dot{\tilde{q}}] = -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}},$$

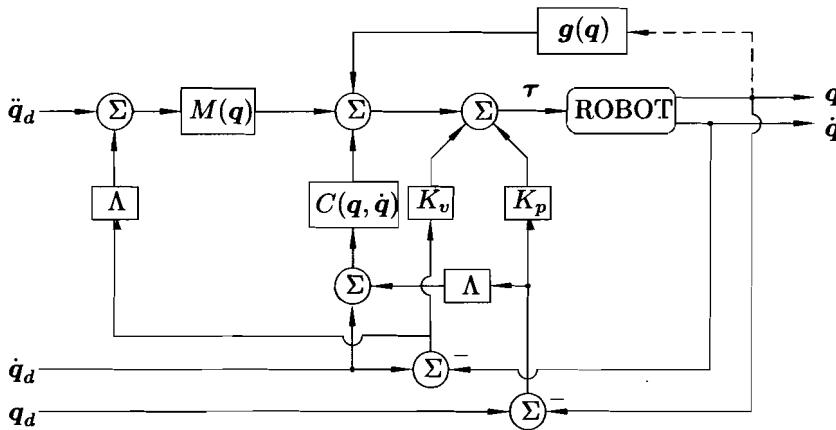


Figura 10.4: Control PD con compensación

la cual puede expresarse en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[-K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] \right] - \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \quad (10.21)$$

siendo ésta una ecuación diferencial no autónoma y el origen $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ un equilibrio.

El análisis de estabilidad del origen de la ecuación de malla cerrada se realiza considerando la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2K_p + \Lambda^T M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \Lambda & \Lambda^T M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \\ M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \Lambda & M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}.$$

A primera vista, no parece evidente que la función candidata de Lyapunov sea definida positiva, sin embargo, expresándola de la forma siguiente la eventual duda desaparece:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}. \quad (10.22)$$

Puede demostrarse también que la función candidata de Lyapunov es radialmente desacotada.

Es obvio notar que la función candidata de Lyapunov (10.22) es menguante, ya que satisface la siguiente desigualdad:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{M\} \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \right\|^2 + \lambda_{\max}\{K_p\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2.$$

Es interesante mencionar que la función (10.22) puede verse como una extensión de la función de Lyapunov (10.3) empleada en el estudio del control PD+. Ambas resultarían idénticas, al igual que los controladores, si Λ fuese la matriz nula.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (10.22) toma la forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q}) [\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + \frac{1}{2} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}]^T \dot{M}(\mathbf{q}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] \\ &\quad + 2\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.\end{aligned}\quad (10.23)$$

Despejando $M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$ de la ecuación de malla cerrada (10.21) y sustituyendo en la ecuación anterior se llega a:

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = -[\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}]^T K_v [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] + 2\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}},$$

donde se eliminó el término

$$[\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}]^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}]$$

en virtud de la Propiedad 4.3. Ahora, empleando $K_p = K_v \Lambda$, la ecuación de $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ se reduce finalmente a:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda^T K_v \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \\ &= -\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Lambda^T K_v \Lambda & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (10.24)$$

Recordando que dada una matriz simétrica definida positiva A y una matriz no singular B , el producto $B^T A B$ es una matriz simétrica definida positiva², luego como K_v es simétrica y definida positiva y Λ es no singular, entonces $\Lambda^T K_v \Lambda$ es una matriz definida positiva. Por lo tanto, $\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ dada por (10.24) resulta ser una función definida negativa en forma global. Como además la función candidata de Lyapunov (10.22) es definida positiva en forma global, menguante y radialmente desacotada, luego del Teorema 2.4 se concluye inmediatamente estabilidad asintótica global del equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. Como consecuencia, para cualquier error inicial en posición y velocidad se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)] = \mathbf{0},$$

²Demostración. Obviamente la matriz $B^T A B$ es simétrica. Defínase $y = Bx$, la cual en razón del supuesto que B es no singular, garantiza que $y = 0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $x = 0 \in \mathbb{R}^n$. De aquí se obtiene que:

$$x^T [B^T A B] x = y^T A y > 0$$

para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, lo cual es equivalente a que $B^T A B$ sea definida positiva.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [q_d(t) - q(t)] = 0,$$

de ahí que el objetivo de control de movimiento se verifique.

A continuación, se presentan los resultados de simulación obtenidos del control PD con compensación de un robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 10.3 Considérese el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 10.2. Su modelo dinámico junto con sus valores numéricos se resumen en el Apéndice B.

Considérese el control PD con compensación (10.20) de dicho robot para el control de movimiento.

Se pretende que el robot siga las trayectorias deseadas $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ representadas respectivamente por las Ecuaciones (B.1)–(B.3) del Apéndice B.

Las matrices simétricas definidas positivas K_p y K_v se escogen como:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{785\} \quad [\text{N m / rad}] \\ K_v &= \text{diag}\{250\} \quad [\text{N m s / rad}], \end{aligned}$$

y por lo tanto $\Lambda = K_v^{-1}K_p = \text{diag}\{3.14\}$ 1/s.

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades son:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

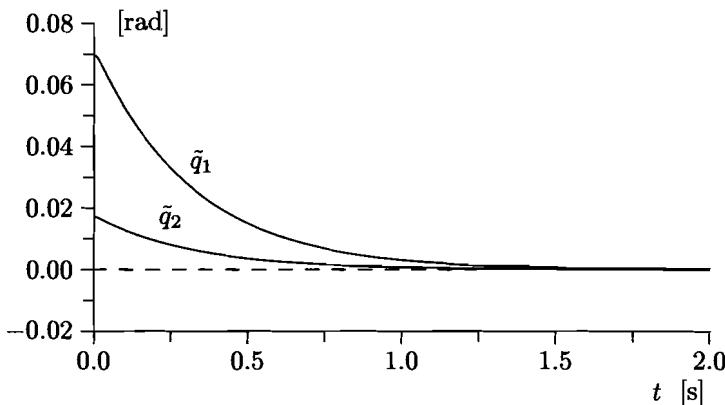


Figura 10.5: Errores de posición

La Figura 10.5 presenta los resultados de simulación. Se puede observar que la respuesta es muy similar a las presentadas en los ejemplos de los

controladores PD con precompensación y PD+, ya que la estructura PD se preserva con las mismas ganancias en los tres controladores antes mencionados.

10.3 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos:

- Para cualquier selección de las matrices simétricas definidas positivas K_p y K_v , el origen de la ecuación de malla cerrada del control de robots mediante control PD+ expresada en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$, es asintóticamente estable globalmente. Por lo tanto, el control PD+ satisface el objetivo de control de movimiento en forma global. En consecuencia, para cualquier error inicial de posición $\tilde{\mathbf{q}}(0) \in \mathbb{R}^n$ y de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$.
- Para cualquier selección de las matrices simétricas definidas positivas K_p y K_v , el origen de la ecuación de malla cerrada del control de robots mediante control PD con compensación expresada en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$, es asintóticamente estable globalmente. Por lo tanto, el control PD con compensación satisface el objetivo de control de movimiento en forma global. En consecuencia, para cualquier error inicial de posición $\tilde{\mathbf{q}}(0) \in \mathbb{R}^n$ y de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$.

Referencias

El controlador PD+ se propuso en:

- Koditschek, D. E., 1984, “*Natural motion for robot arms*”, in Proceedings of the IEEE 23th Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, December, pp. 733–735.

El análisis del controlador PD+ mediante el teorema de Matrosov fue presentado en:

- Paden, B., Panja, R., 1988, “*Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators*”, International Journal of Control, Vol. 47, No. 6, pp. 1697-1712.

La Subepígrafe 10.1.1 sobre la función de Lyapunov para estabilidad asintótica global se ha extraído de:

- Whitcomb, L. L., Rizzi, A., Koditschek, D. E., 1993, “Comparative experiments with a new adaptive controller for robot arms”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, February, Vol. 9, No. 1, pp. 59–70.

La estructura del controlador PD con compensación ha sido propuesta y estudiada en:

- Slotine, J. J., Li, W., 1987. “On the adaptive control of robot manipulators”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 6, No. 3, pp. 49-59.
- Slotine, J. J., Li, W., 1988. “Adaptive manipulator control: A case study”, IEEE Transactions on Automatic Control, November, Vol. AC-33, No. 11, pp. 995-1003.
- Slotine, J. J., Li, W., 1991, “Applied nonlinear control”, Prentice-Hall.

La función de Lyapunov (10.22) para el análisis de estabilidad asintótica global del control PD con compensación fue desarrollada en:

- Spong, M., Ortega, R., Kelly, R., 1990, “Comments on “Adaptive manipulator control: A case study””, IEEE Transactions on Automatic Control, June, Vol. 35, No. 6, pp.761–762.
- Egeland, O., Godhavn, J. M., 1994, “A note on Lyapunov stability for an adaptive robot controller”, IEEE Transactions on Automatic Control, August, Vol. 39, No. 8, pp. 1671–1673.

Problemas

1. Considérese el control PD+ del péndulo ideal presentado en el Ejemplo 10.1. Proóngase una función candidata de Lyapunov para demostrar que el origen $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}] = [0 \ 0]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ de la ecuación de malla cerrada:

$$ml^2\ddot{\tilde{q}} + k_v\dot{\tilde{q}} + k_p\tilde{q} = 0$$

es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

2. Considérese el modelo de la articulación motriz pendular presentada en el Ejemplo 3.9 y mostrado en la Figura 3.12:

$$\left[J_m + \frac{J_L}{r^2} \right] \ddot{q} + \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} + \frac{k_L}{r^2} \operatorname{sen}(q) = \frac{K_a}{r R_a} v$$

donde

- v es el voltaje de armadura (entrada),

- q es la posición angular del péndulo con respecto a la vertical (salida),

y el resto de los parámetros son constantes eléctricas y mecánicas positivas y conocidas.

Se desea llevar la posición angular $q(t)$ a un valor constante q_d . Para este fin se propone el empleo de la siguiente ley de control tipo PD+³:

$$v = \frac{rR_a}{K_a} \left[k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + \frac{k_L}{r^2} \operatorname{sen}(q) \right]$$

con k_p y k_v constantes positivas de diseño y $\tilde{q}(t) = q_d - q(t)$.

- Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del estado $[\tilde{q} \ \dot{q}]^T$.
- Verificar que el origen sea un equilibrio y proponer una función de Lyapunov para demostrar su estabilidad.
- ¿Podría demostrarse adicionalmente que el origen es un equilibrio global asintóticamente estable?

3. Considérese la siguiente ley de control:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d) \dot{q} + g(q).$$

- Detectar la diferencia con respecto a la ley de control PD+ dada por la Ecuación (10.1)
- Demostrar que en realidad el controlador anterior es equivalente al control PD+.

Ayuda: Usar la Propiedad 4.3.

4. Verifíquese la Ecuación (10.24) a partir de (10.23).

5. Considérese el modelo de un péndulo ideal como el estudiado en el Ejemplo 2.10 (pág. 48):

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau.$$

Supóngase que se emplea el control PD con compensación:

$$\tau = k_p \tilde{q} + k_v \dot{\tilde{q}} + ml^2 [\ddot{q}_d + \lambda \dot{\tilde{q}}] + mgl \operatorname{sen}(q),$$

donde $\lambda = k_p/k_v$ siendo k_p y k_v números positivos.

- Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T$. Verificar que el origen sea su único equilibrio.

³Por tratarse de control de posición pura, en este caso el controlador resulta del tipo PD con compensación de gravedad.

- (b) Demostrar que el origen $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es asintóticamente estable en forma global.

Ayuda: Emplear la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2}ml^2 [\dot{\tilde{q}} + \lambda\tilde{q}]^2 + k_p\tilde{q}^2.$$

11

Control Par–Calculado y Control Par–Calculado+

Los controladores para posición y movimiento presentados en los capítulos anteriores tienen en común, en sus leyes de control, la presencia explícita de un controlador lineal del tipo PD. Siendo la excepción a esta regla, en este capítulo se estudian dos controladores de movimiento cuyas leyes de control no presentan explícitamente el término lineal PD. Específicamente, los controladores analizados son:

- Control Par–Calculado.
- Control Par–Calculado+.

Otras peculiaridades de estos controladores son las siguientes. El control Par–Calculado permite obtener una ecuación de malla cerrada lineal en términos de las variables de estado. Este hecho no tiene precedente en el estudio de los controladores abordados hasta el momento en este texto. Por su parte, el control Par–calculado+ se caracteriza por ser un controlador dinámico, es decir, su ley de control completa incluye variables de estado. Finalmente, conviene adelantar que ambos controladores satisfacen el objetivo de control de movimiento con una selección trivial de sus parámetros de diseño.

El contenido de este capítulo se ha obtenido de las referencias citadas al final del mismo. El lector interesado en profundizar en el material está invitado a consultarlas.

11.1 Control Par–Calculado

El modelo dinámico (II.1) que caracteriza el comportamiento de los robots manipuladores es generalmente no lineal en términos de las variables de estado (posiciones y velocidades articulares). Esta peculiaridad del modelo dinámico podría hacer pensar que dado cualquier controlador, la ecuación diferencial que gobierna al sistema de control en malla cerrada debería ser también no lineal en las variables de estado correspondientes.

Esta idea intuitiva se confirma para el caso de todos los controladores estudiados en capítulos anteriores. No obstante, existe un controlador también no lineal en las variables de estado con el cual se consigue describir el sistema de control en malla cerrada ahora mediante una ecuación diferencial lineal. Dicho controlador es capaz de satisfacer el objetivo de control de movimiento en forma global con una selección trivial de sus parámetros de diseño y recibe el nombre de control Par-Calculado.

La ecuación correspondiente al control Par-Calculado viene dada por:

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (11.1)$$

donde K_v y K_p son matrices simétricas definidas positivas de diseño, y $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ denota como de costumbre al error de posición.

A pesar de la presencia del término $K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ en la ley de control (11.1), éstos son en realidad multiplicados por la matriz de inercia $M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})$. Este hecho tiene como resultado que efectivamente la ley de control cuente con un término del tipo PD pero éste no es un controlador lineal, ya que las ganancias de posición y de velocidad no son constantes sino que dependen explícitamente del error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$. Esto puede verse claramente expresando la ley de control Par-Calculado dada por (11.1) de la siguiente manera:

$$\tau = M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) K_p \tilde{\mathbf{q}} + M(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}).$$

El control Par-Calculado fue una de las primeras estructuras de control de movimiento basadas en el modelo del manipulador a ser controlado, es decir, que hace uso explícito del conocimiento de las matrices $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. Obsérvese que la trayectoria de movimiento deseada: $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$, así como la medición de la posición $\mathbf{q}(t)$ y de la velocidad $\dot{\mathbf{q}}(t)$, se emplean para realizar el cálculo de la acción de control (11.1). El diagrama de bloques correspondiente al control Par-Calculado de robots manipuladores se puede ver en la Figura 11.1.

La ecuación de malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control τ de la ley de control (11.1) en la ecuación del modelo del robot (II.1):

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} \right]. \quad (11.2)$$

Debido a que $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva (Propiedad 4.2) y por lo tanto también invertible, luego la Ecuación (11.2) se reduce a:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} = 0,$$

la cual a su vez puede expresarse en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix},$$

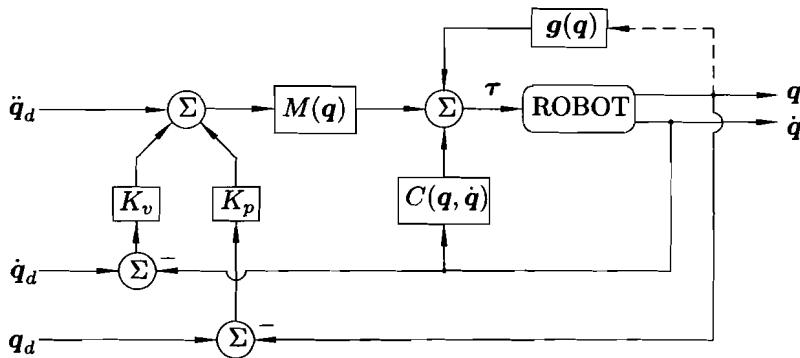


Figura 11.1: Control Par-Calculado

$$= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}, \quad (11.3)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión n .

Es importante observar que la ecuación de malla cerrada (11.3) representa una ecuación diferencial lineal y autónoma, cuyo único estado de equilibrio es $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. La unicidad del equilibrio se debe a que la matriz K_p es por diseño definida positiva y por lo tanto no singular.

Como la ecuación de malla cerrada (11.3) es lineal y autónoma, las soluciones de ésta pueden obtenerse en forma cerrada. No obstante, enseguida se procederá a realizar el estudio de estabilidad del origen como equilibrio de la ecuación de malla cerrada.

Primeramente definase la constante ε como:

$$\lambda_{\min}\{K_v\} > \varepsilon > 0.$$

Multiplicando por $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector no nulo, se llega a $\lambda_{\min}\{K_v\} \mathbf{x}^T \mathbf{x} > \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x}$. Como K_v es por diseño una matriz simétrica, entonces $\mathbf{x}^T K_v \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, y por lo tanto:

$$\mathbf{x}^T [K_v - \varepsilon I] \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual significa que la matriz $K_v - \varepsilon I$ es definida positiva, i.e.,

$$K_v - \varepsilon I > 0. \quad (11.4)$$

Considerando lo anterior así como la positividad de la matriz K_p y de la constante ε , luego se concluye que:

$$K_p + \varepsilon K_v - \varepsilon^2 I > 0. \quad (11.5)$$

Procediendo ahora con el análisis de estabilidad del equilibrio (origen) de la ecuación de malla cerrada (11.3), considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p + \varepsilon K_v & \varepsilon I \\ \varepsilon I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}]^T [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p + \varepsilon K_v - \varepsilon^2 I] \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

donde la constante ε satisface (11.4) y por supuesto también (11.5). Claramente se aprecia que la función (11.6) es definida positiva en forma global y radialmente desacotada.

La función candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ en (11.6) puede expresarse también de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p + \varepsilon K_v] \tilde{\mathbf{q}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}},$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p + \varepsilon K_v] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Sustituyendo $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$ de la ecuación de malla cerrada (11.3) en la expresión anterior y realizando simplificaciones se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [K_v - \varepsilon I] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}, \\ &= - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon K_p & 0 \\ 0 & K_v - \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Como ε se elige de manera que $K_v - \varepsilon I > 0$, y también como K_p es por diseño definida positiva, luego la función $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ en (11.7) es una función definida negativa en forma global. En vista del Teorema 2.4, se concluye que el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación de malla cerrada es asintóticamente estable en forma global¹ y entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

y por lo tanto, esto implica que el objetivo de control de movimiento se verifica.

Para fines prácticos, las matrices de diseño K_p y K_v pueden ser diagonales, por tanto la ecuación de malla cerrada (11.3) representa un sistema lineal multivariable desacoplado, es decir, el comportamiento dinámico de los errores de posiciones articulares

¹En realidad esto basta para garantizar que el origen sea también exponencialmente estable en forma global.

es gobernado por ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, donde cada una de ellas es independiente de las restantes. En este contexto la elección de las matrices K_p y K_v puede hacerse específicamente como:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}, \\ K_v &= \text{diag}\{2\omega_1, \dots, 2\omega_n\}. \end{aligned}$$

Con esta elección, cada unión responde igual que un sistema lineal de segundo orden críticamente amortiguado con ancho de banda ω_i . El ancho de banda ω_i determina la velocidad de respuesta de la unión y, en consecuencia, la tasa de decaimiento exponencial de los errores $\tilde{q}(t)$ y $\tilde{\dot{q}}(t)$.

Ejemplo 11.1 La ecuación de un péndulo de longitud l y masa m concentrada en su extremo, sometido a la acción de la gravedad g y al que se le aplica un par τ en el eje de giro es (véase Ejemplo 2.10):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau,$$

donde q es la posición angular con respecto a la vertical y τ es el par aplicado en la unión. Para este ejemplo se tiene $M(q) = ml^2$, $C(q, \dot{q}) = 0$ y $g(q) = mgl \operatorname{sen}(q)$. El control Par-Calculado (11.1) viene dado por:

$$\tau = ml^2 [\ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q}] + mgl \operatorname{sen}(q),$$

con $k_v > 0$, $k_p > 0$. Con esta estrategia de control se garantiza el cumplimiento del objetivo de movimiento en forma global.

A continuación se presentan resultados de simulación obtenidos del control Par-Calculado de un robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 11.2 El control Par-Calculado (11.1) se ha simulado para controlar el *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, mostrado en la Figura 11.2. Los detalles del modelo dinámico pueden consultarse en el Apéndice B.

La trayectoria deseada $q_d(t)$ viene dada por la Ecuación (B.1) del Apéndice B. Analíticamente se determinaron las velocidades y aceleraciones deseadas, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$, correspondientes a las Ecuaciones (B.2) y (B.3).

Las matrices simétricas positivas definidas K_p y K_v se asignan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{\omega^2\} = \text{diag}\{900\} [1/\text{s}], \\ K_v &= \text{diag}\{2\omega\} = \text{diag}\{60\} [1/\text{s}^2], \end{aligned}$$

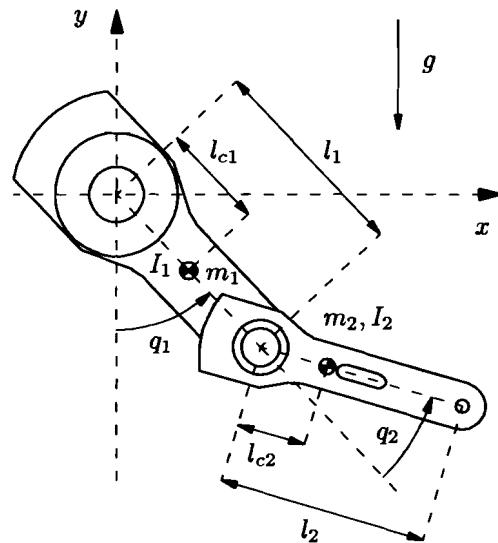


Figura 11.2: Robot de 2 g.d.l.

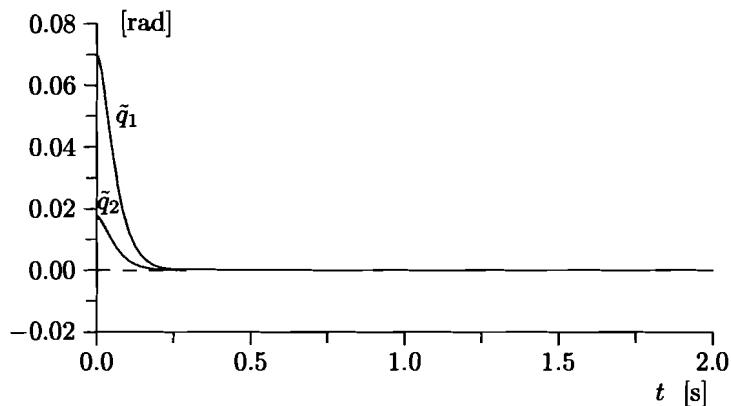


Figura 11.3: Errores de posición

donde se ha empleado $\omega = 30$ [rad/s].

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades fueron:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Los resultados de simulación se encuentran graficados en la Figura 11.3. Observe de esta figura cómo los componentes del error de posición $\tilde{q}(t)$ tienden asintóticamente a cero más rápido que en los ejemplos de los capítulos anteriores, donde se simularon controladores de movimiento con estructura basada en lazos retroalimentados PD.

11.2 Control Par-Calculado+

La mayoría de los controladores analizados a lo largo del presente texto, tanto para control de posición como de movimiento, han tenido estructuralmente el siguiente punto en común: estos controladores utilizan retroalimentación estática del vector de estado (posiciones y velocidades articulares). La excepción a esta regla ha sido el control PID. No obstante, el controlador anterior puede satisfacer solamente el objetivo de control de posición y no de movimiento.

En este epígrafe se presenta el estudio de un controlador de movimiento que emplea retroalimentación dinámica del vector de estado. Tal y como se verá en su momento, este controlador consiste básicamente en una parte exactamente igual al control Par-Calculado, cuya ley de control viene dada por la expresión (11.1), y un término adicional que incluye una parte dinámica. Debido a esta característica, el controlador fue originalmente llamado control *Par-Calculado con compensación*, sin embargo, de aquí en adelante se denotará como *Par-Calculado+*.

La razón para incluir el control Par-Calculado+ como materia de estudio en este texto es doble. En primer lugar, los controladores de movimiento analizados con anterioridad utilizan retroalimentación estática del vector de estado. Sin el afán de pretender encontrar desventajas a tales estructuras de control, resulta interesante también el estudio de un controlador de movimiento cuya estructura emplee retroalimentación dinámica del estado. En segundo lugar, el control Par-Calculado+ puede generalizarse fácilmente para contemplar una versión *adaptable* del mismo cuando exista incertidumbre paramétrica en el modelo del robot.

El material de este epígrafe ha sido adaptado de las referencias citadas al final del capítulo.

La ecuación correspondiente al control Par-Calculado+ viene dada por:

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\nu}, \quad (11.8)$$

donde K_v y K_p son matrices simétricas definidas positivas de diseño, el vector $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ denota como de costumbre al error de posición, y el vector $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ se obtiene de filtrar los errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ y velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ de la manera siguiente:

$$\boldsymbol{\nu} = -\frac{bp}{p+a} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{b}{p+a} \left[K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} \right],$$

donde p es el operador diferencial ($p = \frac{d}{dt}$) y a, b son constantes positivas de diseño. Sin pérdida de generalidad se asignará $a = \lambda > 0$ y $b = 1$, i.e.:

$$\nu = -\frac{p}{p + \lambda} \dot{\tilde{q}} - \frac{1}{p + \lambda} [K_v \dot{q} + K_p \tilde{q}] . \quad (11.9)$$

La diferencia entre el control Par-calculado y el control Par-Calculado+ cuyas leyes de control vienen dadas por (11.1) y (11.8) respectivamente, radica exclusivamente en que este último contiene adicionalmente el término $C(q, \dot{q})\nu$.

La realización del control Par-Calculado+ expresado por medio de las Ecuaciones (11.8) y (11.9) requiere el conocimiento de las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y del vector $\mathbf{g}(q)$, así como de la trayectoria de movimiento deseada $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ y medición de la posición $q(t)$ y de la velocidad $\dot{q}(t)$. El diagrama de bloques correspondiente al control Par-Calculado+ puede verse en la Figura 11.4.

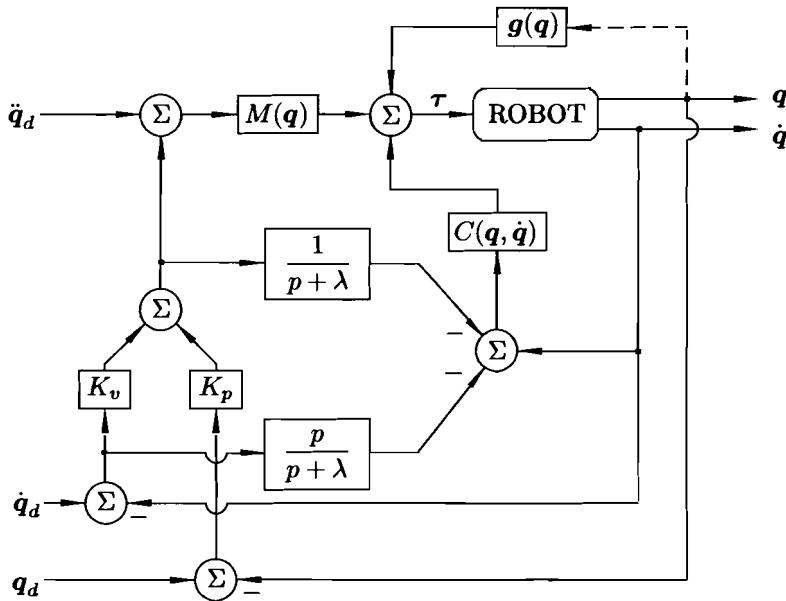


Figura 11.4: Control Par-Calculado+

Debido a la presencia del vector ν en la ley de control (11.8), el control Par-Calculado+ es una ley de control dinámica, es decir, la acción de control τ depende no solo de los valores actuales del vector de estado formado por q y \dot{q} sino también de sus valores pasados. Este hecho tiene como consecuencia la aparición de variables de estado adicionales para caracterizar completamente la ley de control. En efecto, una descripción a través

de la ecuación de estado para la expresión (11.9) es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda I & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p & K_v \\ 0 & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}, \quad (11.10)$$

$$\nu = [-I \quad -I] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - [0 \quad I] \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}, \quad (11.11)$$

donde $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ representan las nuevas variables de estado.

Para obtener la ecuación de malla cerrada primeramente se combina la ecuación dinámica del robot (II.1) con la del controlador (11.8), llegando a la expresión:

$$M(\mathbf{q}) [\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}] - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \nu = \mathbf{0}. \quad (11.12)$$

En términos del vector de estado $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T \quad \xi_1^T \quad \xi_2^T]^T$, las Ecuaciones (11.12), (11.10) y (11.11) permiten obtener la siguiente ecuación de malla cerrada:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -M(\mathbf{q})^{-1} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\xi_1 + \xi_2 + \dot{\tilde{q}}] - K_v \dot{\tilde{q}} - K_p \tilde{q} \\ -\lambda \xi_1 + K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \\ -\lambda \xi_2 - \lambda \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}, \quad (11.13)$$

cuyo origen $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T \quad \xi_1^T \quad \xi_2^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4n}$ es un equilibrio.

El estudio de estabilidad (en el sentido de Lyapunov) del origen de la ecuación de malla cerrada (11.13) es actualmente un tema abierto. No obstante, haciendo uso del Lema 2.2 y del Corolario 2.1 presentados en el capítulo de preliminares matemáticos, se demostrará que las funciones $\tilde{q}(t)$, $\dot{\tilde{q}}(t)$ y $\nu(t)$ están acotadas y que el objetivo de control de movimiento se satisface.

Para analizar el sistema de control, primeramente se procede a expresarlo de otra forma equivalente. Para este fin, nótese que la expresión de ν dada en (11.9) permite obtener la siguiente ecuación:

$$\dot{\nu} + \lambda \nu = - [\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}]. \quad (11.14)$$

Incorporando (11.14) en (11.12) se llega a:

$$M(\mathbf{q}) [\dot{\nu} + \lambda \nu] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \nu = \mathbf{0}. \quad (11.15)$$

La ecuación anterior será el punto de partida en el análisis que a continuación se presenta. Considérese ahora la siguiente función no negativa:

$$V(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2} \underbrace{\boldsymbol{\nu}^T M(\boldsymbol{q}_d - \tilde{\boldsymbol{q}})}_P \boldsymbol{\nu} \geq 0 \quad (11.16)$$

la cual, a pesar de no satisfacer las condiciones para ser una función candidata de Lyapunov para la ecuación de malla cerrada (11.13), será de utilidad para las demostraciones que a continuación se presentan. Específicamente $V(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}})$ no puede ser una función candidata de Lyapunov para la ecuación de malla cerrada (11.13) debido a que no es una función definida positiva en el estado completo formado por las variables de estado $\tilde{\boldsymbol{q}}$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$, $\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$.

La derivada con respecto al tiempo de $V(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}})$ viene dada por:

$$\dot{V}(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\nu}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \dot{M}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{\nu}.$$

Despejando $M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}$ de la Ecuación (11.15) y sustituyendo en la ecuación anterior se llega a:

$$\dot{V}(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}}) = -\underbrace{\boldsymbol{\nu}^T \lambda M(\boldsymbol{q})}_{Q} \boldsymbol{\nu} \leq 0 \quad (11.17)$$

donde el término $\boldsymbol{\nu}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} - C \right] \boldsymbol{\nu}$ ha sido eliminado en virtud de la Propiedad 4.3. Ahora, considerando $V(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}})$ dada por la Ecuación (11.16), su derivada temporal $\dot{V}(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}})$ expresada por la Ecuación (11.17) y el Lema 2.2, se concluye que:

$$\boldsymbol{\nu} \in L_\infty^n \cap L_2^n. \quad (11.18)$$

Más aún, nótese de (11.17) que:

$$\dot{V}(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}}) = -2\lambda V(\boldsymbol{\nu}, \tilde{\boldsymbol{q}}),$$

lo cual implica a su vez que

$$V(\boldsymbol{\nu}(t), \tilde{\boldsymbol{q}}(t)) = V(\boldsymbol{\nu}(0), \tilde{\boldsymbol{q}}(0)) e^{-2\lambda t}.$$

Además, sabiendo de la Propiedad 4.2 que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $M(\boldsymbol{q}) \geq \alpha I$, se llega a

$$\alpha \boldsymbol{\nu}(t)^T \boldsymbol{\nu}(t) \leq \boldsymbol{\nu}(t)^T M(\boldsymbol{q}(t)) \boldsymbol{\nu}(t) = 2V(\boldsymbol{\nu}(t), \tilde{\boldsymbol{q}}(t))$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\underbrace{\boldsymbol{\nu}(t)^T \boldsymbol{\nu}(t)}_{\|\boldsymbol{\nu}(t)\|^2} \leq \frac{2V(\boldsymbol{\nu}(0), \tilde{\boldsymbol{q}}(0))}{\alpha} e^{-2\lambda t} \quad (11.19)$$

lo cual significa que $\nu(t) \rightarrow \mathbf{0}$ exponencialmente.

Por otro lado, la Ecuación (11.14) puede también expresarse como

$$(p + \lambda)\nu = -[p^2 I + pK_v + K_p]\tilde{\mathbf{q}}$$

o en forma equivalente por:

$$\tilde{\mathbf{q}} = -(p + \lambda)[p^2 I + pK_v + K_p]^{-1}\nu. \quad (11.20)$$

Debido a que $\lambda > 0$, mientras que K_v y K_p son matrices simétricas definidas positivas, ésta define un sistema dinámico lineal multivariable exponencialmente estable y además estrictamente propio. La entrada de dicho sistema es ν y su salida $\tilde{\mathbf{q}}$. Haciendo uso de esto último, así como de la conclusión obtenida en (11.18), es decir, $\nu \in L_\infty^n \cap L_2^n$ y del Corolario 2.1 se concluye que:

$$\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in L_2^n \cap L_\infty^n,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

significando esto último que el objetivo de control de movimiento se verifica.

Es interesante observar que la Ecuación (11.8) del control Par-Calculado+ se reduce al control Par-Calculado dado por (11.1) en el caso particular de manipuladores sin término centrífugo y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Tal es el caso, por ejemplo, de mecanismos de 1 g.d.l. y manipuladores cartesianos.

A continuación se presentan los resultados de simulación obtenidos del control Par-Calculado+ del un robot de 2 g.d.l.

Ejemplo 11.3 En este ejemplo se presentan los resultados de simulación del control Par-Calculado+ descrito por (11.8), (11.10) y (11.11) considerando el modelo del *robot prototipo* de 2 g.d.l. estudiado en el Ejemplo 3.3, y mostrado en la Figura 11.2. Las características técnicas del modelo dinámico junto con los valores numéricos de los parámetros se encuentran detallados en el Apéndice B.

Como trayectoria de movimiento deseado se emplea la misma de los ejemplos anteriores, es decir, el robot deberá seguir las trayectorias de posición, velocidad y aceleración $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ dadas por las Ecuaciones (B.1)–(B.3) del Apéndice B.

Las matrices simétricas positivas definidas K_p y K_v , y la constante λ se escogen como:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{900\} [1/\text{s}^2], \\ K_v &= \text{diag}\{60\} [1/\text{s}], \\ \lambda &= 60. \end{aligned}$$

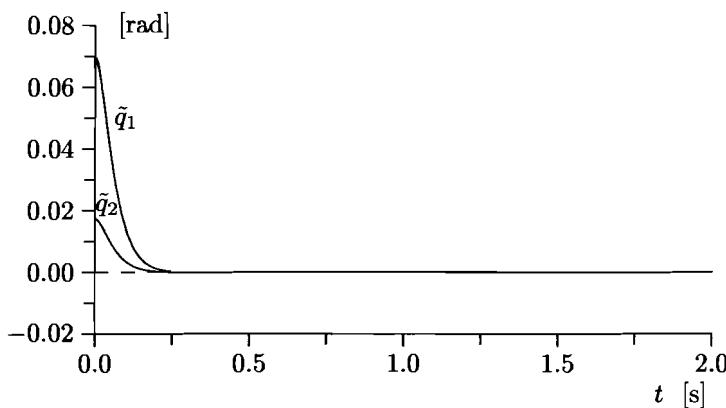


Figura 11.5: Errores de posición

Las condiciones iniciales asociadas a las variables de estado del controlador fueron:

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = 0.$$

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades correspondieron a:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= 0, & \dot{q}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Los componentes del error de posición $\tilde{q}(t)$ obtenidos de la simulación numérica se pueden ver en la gráfica de la Figura 11.5. Tal y como fue predicho por el desarrollo teórico, puede apreciarse como ambos componentes del error de posición $\tilde{q}(t)$ convergen asintóticamente a cero. Es interesante observar que las gráficas presentadas en la Figura 11.3 obtenidas con el control Par–Calculado, presentan una gran similitud a las proporcionadas en la Figura 11.5.

11.3 Conclusiones

Las conclusiones obtenidas del análisis presentado en este capítulo se resumen en los siguientes términos:

- Para cualquier selección de las matrices simétricas definidas positivas K_p y K_v , el origen de la ecuación de malla cerrada del control de robots mediante control Par–Calculado expresada en términos del vector de estado $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T$, es

asintóticamente estable globalmente. Por lo tanto, el control Par–Calculado satisface el objetivo de control de movimiento en forma global. En consecuencia, para cualquier error inicial de posición $\tilde{q}(0) \in \mathbb{R}^n$ y de velocidad $\dot{\tilde{q}}(0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$.

- Para cualquier selección de las matrices simétricas definidas positivas K_p y K_v , y cualquier constante positiva λ , el control Par–Calculado+ satisface el objetivo de control de movimiento en forma global. En consecuencia, para cualquier error inicial de posición $\tilde{q}(0) \in \mathbb{R}^n$ y de velocidad $\dot{\tilde{q}}(0) \in \mathbb{R}^n$, y cualquier condición inicial $\xi_1(0) \in \mathbb{R}^n$, $\xi_2(0) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$.

Referencias

El control Par–Calculado se analiza en los siguientes textos:

- Fu, K., Gonzalez, R., Lee, C., 1987, “*Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*”, McGraw–Hill.
- Craig, J., 1989, “*Introduction to robotics: Mechanics and control*”, Addison–Wesley.
- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “*Robot dynamics and control*”, John Wiley & Sons.
- Yoshikawa, T., 1990, “*Foundations of robotics: Analysis and control*”, The MIT Press.

El análisis del controlador Par–Calculado tal y como fue presentado en el Epígrafe 11.1, sigue las ideas presentadas en:

- Wen, J. T., Bayard, D., 1988, “*New class of control law for robotic manipulators. Part 1: Non-adaptive case*”, International Journal of Control, Vol. 47, No. 5, pp. 1361–1385.

La estructura del controlador Par–Calculado+, en su versión adaptable, se propuso en:

- Kelly, R., Carelli, R., 1988. “*Unified approach to adaptive control of robotic manipulators*”, in Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX, December, Vol. 1, pp. 1598–1603.
- Kelly, R., Carelli, R., Ortega, R., 1989. “*Adaptive motion control design of robot manipulators: An input-output approach*”, International Journal of Control, September, Vol. 50, No. 6, pp. 2563–2581.
- Kelly, R., 1990, “*Adaptive computed torque plus compensation control for robot manipulators*”, Mechanism and Machine Theory, Vol. 25, No. 2, pp. 161–165.

Problemas

1. Considérese el robot cartesiano de 2 g.d.l. mostrado en la Figura 11.6.

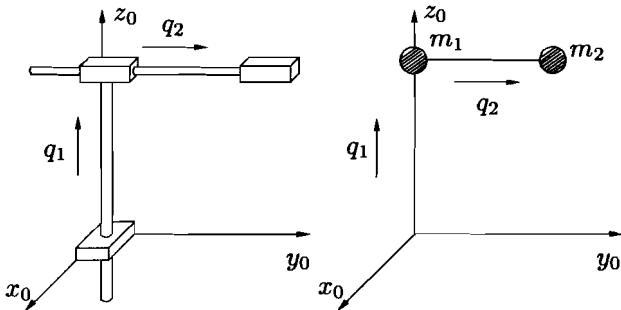


Figura 11.6: Robot cartesiano de 2 g.d.l.

- Obtener el modelo dinámico y específicamente determinar en forma explícita $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.
 - Escribir la ley de control Par-Calculado y dar explícitamente τ_1 y τ_2 .
2. Considérese el modelo de un péndulo ideal en cuyo eje de giro se aplica además del par de actuación τ , un par externo constante τ_e :

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin(q) = \tau - \tau_e.$$

Para controlar el movimiento del dispositivo se emplea un controlador tipo Par-Calculado:

$$\tau = ml^2 [\ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q}] + mgl \sin(q),$$

donde $k_p > 0$ y $k_v > 0$. Demostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \frac{\tau_e}{k_p ml^2}.$$

Ayuda: Obténgase la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}^T$ y demuéstrese que el origen es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

3. Considérese el modelo de un péndulo ideal en cuyo eje de giro se aplica además del par de actuación τ , un par externo τ_e debido a un resorte torsional de constante $k_e > 0$ ($\tau_e = k_e q$):

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin(q) = \tau - k_e q.$$

Para controlar el movimiento del dispositivo se emplea un controlador tipo Par-Calculado:

$$\tau = ml^2 [\ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q}] + mgl \operatorname{sen}(q),$$

donde $k_p > 0$ y $k_v > 0$. Supóngase que q_d es constante. Demostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \frac{k_e}{k_p ml^2 + k_e} q_d.$$

Ayuda: Obténgase la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{q} - \frac{k_e}{k_p ml^2 + k_e} q_d & \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T$ y demuéstrese que el origen es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

4. Considérese el modelo de un péndulo ideal en cuyo eje de giro se aplica un par τ :

$$ml^2 \ddot{q} + mgl \operatorname{sen}(q) = \tau.$$

Supóngase que los valores de los parámetros l y g son exactamente conocidos, pero sobre la masa m sólo se conoce un valor aproximado m_0 . Para controlar el movimiento del dispositivo se emplea un controlador tipo Par-Calculado donde m se ha sustituido por m_0 debido a que el valor de m fue supuesto desconocido:

$$\tau = m_0 l^2 [\ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q}] + m_0 gl \operatorname{sen}(q),$$

donde $k_p > 0$ y $k_v > 0$.

- (a) Obtener la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{q} & \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T$.
- (b) Verificar que independientemente del valor de m y m_0 (pero con $m \neq 0$), el origen $\begin{bmatrix} \tilde{q} & \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio de la ecuación de malla cerrada si la posición deseada $q_d(t)$ satisface:

$$\ddot{q}_d + \frac{g}{l} \operatorname{sen}(q_d) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

5. Considérese la ecuación de malla cerrada obtenida con el control Par-Calculado+ de robots dada por la Ecuación (11.13) y cuyo origen $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T & \boldsymbol{\xi}_1^T & \boldsymbol{\xi}_2^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ es un equilibrio. Con respecto a la variable $\boldsymbol{\nu}$ se demostró en (11.19) que:

$$\underbrace{\boldsymbol{\nu}(t)^T \boldsymbol{\nu}(t)}_{\|\boldsymbol{\nu}(t)\|^2} \leq \frac{2V(\boldsymbol{\nu}(0), \tilde{q}(0))}{\alpha} e^{-2\lambda t}.$$

Por otro lado, se tiene de (11.10) y (11.20) que:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{p+\lambda} [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \\ \xi_2 &= -\frac{\lambda}{p+\lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{q}} &= -(p+\lambda) [p^2 I + pK_v + K_p]^{-1} \boldsymbol{\nu}\end{aligned}$$

donde K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas. Supóngase que el robot posee solamente articulaciones del tipo rotacional.

- (a) ¿Puede concluirse adicionalmente que $\tilde{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)$, $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ tienden exponencialmente a cero?
- (b) ¿Implicaría lo anterior que el origen es exponencialmente estable en forma global?

APÉNDICES

A

Modelo de motores de corriente continua (CC)

Los accionadores de robots manipuladores pueden ser eléctricos, hidráulicos o neumáticos. Entre los accionadores eléctricos aplicados en robótica se encuentran los motores de corriente continua (CC) con imán permanente.

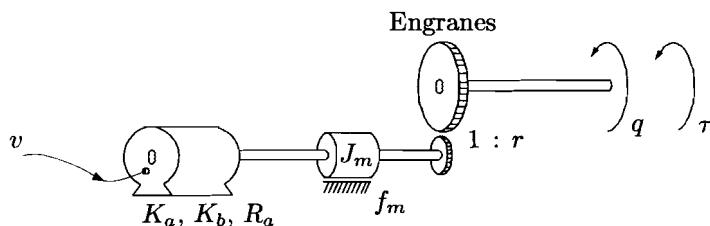


Figura A.1: Motor de CC

Un modelo matemático idealizado que caracteriza el comportamiento de un motor CC con imán permanente controlado con la armadura se describe típicamente por el siguiente conjunto de ecuaciones (véase la Figura A.1):

$$\tau_m = K_a i_a, \quad (\text{A.1})$$

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b, \quad (\text{A.2})$$

$$e_b = K_b \dot{q}_m, \quad (\text{A.3})$$

$$q_m = r q,$$

donde el significado de las variables y parámetros se resume en las Tablas A.1 y A.2, respectivamente.

Tabla A.1: Variables

Símbolo	Descripción	Unidades
q	Posición angular del eje de la carga	rad
v	Voltaje de armadura	V
q_m	Posición angular del eje del motor	rad
τ_m	Par en el eje del motor	N m
i_a	Corriente de armadura	A
e_b	Fuerza contra-electromotriz	V

Tabla A.2: Parámetros

Símbolo	Descripción	Unidades
R_a	Resistencia de armadura	Ω
L_a	Inductancia de armadura	H
K_a	Constante motor-par	N m / A
K_b	Constante de contrarreacción electromotriz	V s / rad
r	Relación de reducción de engranes (en general $r \gg 1$)	

Por otro lado, la ecuación de movimiento para el sistema es:

$$J_m \ddot{q}_m = \tau_m - f_m(\dot{q}_m) - \frac{\tau}{r} \quad (\text{A.4})$$

donde τ es el par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga, J_m es la inercia del rotor y $f_m(\dot{q}_m)$ es el par introducido por la fricción del rotor con sus soportes.

Desde un punto de vista de sistemas dinámicos, el motor de CC puede verse como un dispositivo cuya entrada es el voltaje v y su salida es el par τ que se aplica después de la caja de engranes. Eventualmente, la derivada temporal $\dot{\tau}$ del par τ , puede también considerarse como salida.

El modelo dinámico que relaciona el voltaje v con el par τ se obtiene de la siguiente manera. Primeramente se procede a reemplazar i_a de (A.1) y e_b de (A.3) en (A.2):

$$v = \frac{R_a}{K_a} \tau_m + L_a \frac{di_a}{dt} + K_b \dot{q}_m. \quad (\text{A.5})$$

Ahora, sacando la derivada con respecto al tiempo en ambos lados de la Ecuación (A.1) se obtiene $\frac{di_a}{dt} = \dot{i}_m / K_a$ la cual al ser reemplazada en (A.5) da:

$$v = \frac{R_a}{K_a} \tau_m + \frac{L_a}{K_a} \dot{i}_m + K_b \dot{q}_m. \quad (\text{A.6})$$

Por otro lado, de (A.4) se obtiene τ_m :

$$\tau_m = J_m \ddot{q}_m + f_m(\dot{q}_m) + \frac{\tau}{r}$$

siendo su derivada temporal

$$\dot{\tau}_m = J_m \frac{d}{dt} \ddot{q}_m + \frac{\partial f_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m + \frac{\dot{\tau}}{r},$$

las cuales se sustituyen en (A.6):

$$\begin{aligned} v &= \frac{R_a}{K_a} \left[J_m \ddot{q}_m + f_m(\dot{q}_m) + \frac{\tau}{r} \right] + \frac{L_a}{K_a} \left[J_m \frac{d}{dt} \ddot{q}_m + \frac{\partial f_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m + \frac{\dot{\tau}}{r} \right] \\ &\quad + K_b \dot{q}_m. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo uso de la relación $q_m = rq$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{K_a}{r R_a} v &= \frac{L_a J_m}{R_a} \frac{d}{dt} \ddot{q} + \left[J_m + \frac{L_a}{R_a} \frac{\partial f_m(r \dot{q})}{\partial(r \dot{q})} \right] \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r \dot{q}) \\ &\quad + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} + \frac{L_a}{r^2 R_a} \dot{\tau}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

la cual puede expresarse también en términos del vector de estado $[q \ \dot{q} \ \ddot{q}]$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ L_a \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \frac{1}{J_m} \left[\frac{K_a}{r} v - \left[R_a J_m + L_a \frac{\partial f_m(r \dot{q})}{\partial(r \dot{q})} \right] \ddot{q} + g(\dot{q}, \tau, \dot{\tau}) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

donde

$$g(\dot{q}, \tau, \dot{\tau}) = -\frac{R_a}{r} f_m(r \dot{q}) - K_a K_b \dot{q} - R_a \frac{\tau}{r^2} - L_a \frac{\dot{\tau}}{r^2}.$$

La Ecuación (A.8) representa una ecuación diferencial de tercer orden. La ecuación será adicionalmente no lineal si el término de fricción $f_m(\cdot)$ es una función no lineal de su argumento. La presencia de la inductancia de armadura L_a en forma multiplicativa de $\frac{d}{dt} \ddot{q}$, puede originar que la ecuación sea del tipo denominado ecuación diferencial perturbada singularmente para valores "pequeños" de ella.

Inductancia de armadura despreciable ($L_a = 0$)

En muchas aplicaciones, tradicionalmente la inductancia de armadura L_a es despreciable ($L_a \approx 0$). En el resto del presente apéndice se supondrá que éste es el caso. Considerando

pues que $L_a = 0$, la Ecuación (A.7) toma la forma

$$J_m \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{q}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (\text{A.9})$$

o equivalentemente en términos del vector de estado $[q \ \dot{q}]$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{J_m} \left[\frac{K_a}{r R_a} v - \frac{f_m(r\dot{q})}{r} - \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} - \frac{\tau}{r^2} \right] \end{bmatrix}.$$

Esta importante ecuación relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor, con el par τ aplicado a la carga en términos de su posición, velocidad y aceleración angular.

Ejemplo A.1 Modelo del motor con carga cuyo centro de masa se localiza en el eje de rotación .

En el caso particular donde la carga está modelada simplemente por una inercia J_L con pares de fricción $f_L(\dot{q})$ tal y como se muestra en la Figura A.2, entonces el par τ se obtiene a partir de la ecuación de movimiento asociada a la carga:

$$J_L \ddot{q} = \tau - f_L(\dot{q}). \quad (\text{A.10})$$

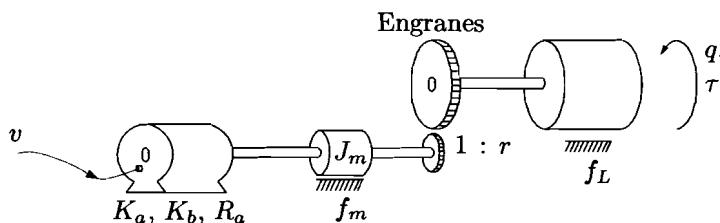


Figura A.2: Motor de CC con inercia cilíndrica

El modelo motor-carga para este caso se obtiene reemplazando τ de (A.10) en (A.9):

$$\left[\frac{J_L}{r^2} + J_m \right] \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{q}) + \frac{1}{r^2} f_L(\dot{q}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.11})$$

Ejemplo A.2 Modelo de una articulación motriz pendular.

Considérese la articulación motriz pendular mostrada en la Figura A.3. La articulación consiste en un motor de CC conectado a través de engranes a un brazo pendular.

La ecuación de movimiento del brazo y su carga viene dada por

$$[J + ml^2] \ddot{q} + f_L(\dot{q}) + [m_b l_b + ml] g \operatorname{sen}(q) = \tau \quad (\text{A.12})$$

donde:

- J inercia del brazo (sin carga).
- m_b masa del brazo (sin carga).
- l_b distancia desde el eje de giro al centro de masa del brazo (sin carga).
- m masa de la carga (supuesta puntual).
- l distancia desde el eje de giro a la carga m .
- g aceleración de la gravedad.
- τ par aplicado al eje de giro.
- $f_L(\dot{q})$ par de fricción del brazo con su soporte.

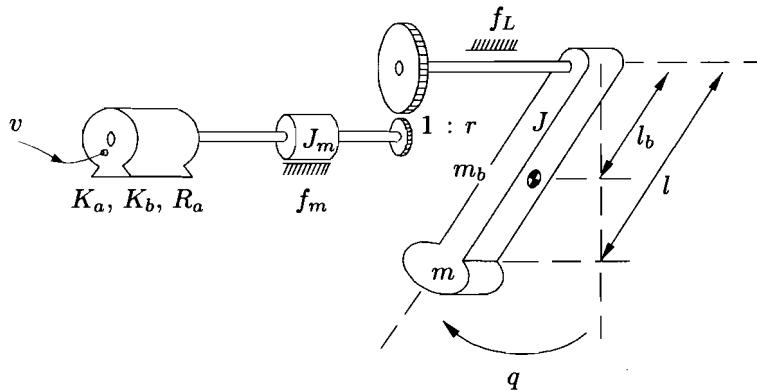


Figura A.3: Articulación motriz pendular

La Ecuación (A.12) puede escribirse en forma compacta como:

$$J_L \ddot{q} + f_L(\dot{q}) + k_L \operatorname{sen}(q) = \tau \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\begin{aligned} J_L &= J + ml^2, \\ k_L &= [m_b l_b + ml] g. \end{aligned}$$

El modelo completo de la articulación motriz pendular se obtiene reemplazando τ de (A.13) en el modelo del motor de CC (A.9):

$$\left[\frac{J_L}{r^2} + J_m \right] \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{q}) + \frac{1}{r^2} f_L(\dot{q}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{k_L}{r^2} \operatorname{sen}(q) = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.14})$$

Nótese que el modelo anterior es una ecuación diferencial no lineal, debido no solamente a los pares de fricción $f_m(r\dot{q})$ y $f_L(\dot{q})$ sino también al término $(k_L/r^2) \operatorname{sen}(q)$.

En el caso particular donde la tasa de reducción por engranes r sea elevada ($r \gg 1$), entonces, despreciando los términos con factor $1/r^2$, el modelo (A.14) puede aproximarse por el modelo del motor de CC (A.9) con par nulo ($\tau = 0$). Igualmente, obsérvese que si el centro de masa del brazo y de la carga se localizan sobre el eje de giro ($l_b = l = 0 \Rightarrow k_L = 0$), entonces se obtiene la Ecuación (A.11) correspondiente al modelo de un motor con carga cuyo centro de masa se localiza sobre el eje de giro.

A.1 Modelo del motor con fricción lineal

A pesar de la extrema complejidad de los fenómenos de fricción, tradicionalmente se emplean modelos lineales para caracterizar su comportamiento:

$$f_m(\dot{q}_m) = f_m \dot{q}_m \quad (\text{A.15})$$

donde f_m es una constante positiva. Este modelo de fricción es conocido como *fricción viscosa* y f_m es el parámetro o coeficiente de fricción viscosa.

Considerando el modelo lineal anterior para los pares de fricción, la Ecuación (A.9), que relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ ejercido sobre la carga, toma la forma :

$$J_m \ddot{q} + \left[f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.16})$$

Ejemplo A.3 Modelo del motor con carga cuyo centro de masa se localiza en el eje de rotación (fricción lineal).

Considérese el modelo lineal (A.15) para el par de fricción correspondiente al rotor sobre sus soportes, así como la ecuación lineal siguiente para el par de fricción de la carga con sus soportes:

$$f_L(\dot{q}) = f_L \dot{q}$$

donde f_L es una constante positiva. El modelo motor–carga (A.11) se reduce a

$$\left[\frac{J_L}{r^2} + J_m \right] \ddot{q} + \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} = \frac{K_a}{r R_a} v$$

o en forma compacta:

$$\left[\frac{J_L}{r^2} + J_m \right] \ddot{q} + \frac{f_L}{r^2} \dot{q} + b \dot{q} = k v$$

donde

$$\begin{aligned} b &= f_m + \frac{K_a K_b}{R_a}, \\ k &= \frac{K_a}{r R_a}. \end{aligned}$$

A.2 Modelo del motor con fricción no lineal

Un modelo “clásico” para caracterizar los pares de fricción es el dado por la siguiente expresión:

$$f_m(\dot{q}_m) = f_m \dot{q}_m + c_1 \operatorname{sign}(\dot{q}_m) \quad (\text{A.17})$$

donde f_m y c_1 son constantes positivas (véase la Figura A.4) conocidas respectivamente como coeficiente de fricción viscosa y coeficiente de fricción de Coulomb. La “función signo” $\operatorname{sign}(x)$ viene dada por:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

pero $\operatorname{sign}(0)$ está indefinido en el sentido de que no se asocia un número real particular a la “función” $\operatorname{sign}(x)$ cuando $x = 0$. Esto último, además de la discontinuidad en $x = 0$, puede ser una limitante para emplear este modelo en simulaciones numéricas y para el análisis de controladores de posición pura. En estas condiciones, se precisa de modelos de fricción adecuados más completos, por ejemplo los denominados *modelos dinámicos de fricción* como el modelo de Dahl y el modelo LuGre. La descripción de estos modelos sale fuera de los objetivos de este apéndice, pero el lector interesado puede acudir a la referencia citada al final del mismo.

Considerando el modelo no lineal anterior para los pares de fricción, la Ecuación (A.9) que relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ ejercido sobre la carga toma la forma:

$$J_m \ddot{q} + \left[f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} + \frac{c_1}{r} \operatorname{sign}(r \dot{q}) + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.18})$$

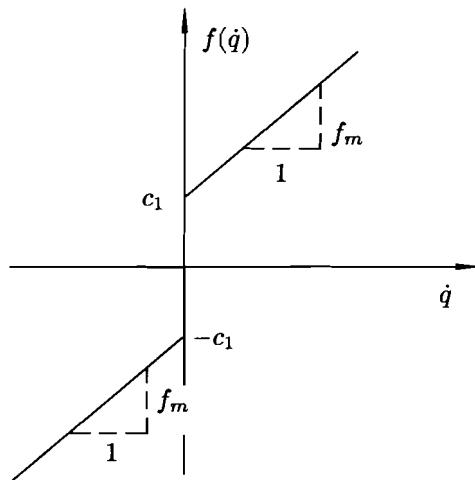


Figura A.4: Fricción no lineal

Ejemplo A.4 **Modelo del motor con carga cuyo centro de masa se localiza sobre el eje de rotación (fricción no lineal).**

Considérese el modelo de fricción no lineal (A.17) para el par de fricción del eje del rotor con sus soportes y la correspondiente a la fricción de la carga:

$$f_L(\dot{q}) = f_L \dot{q} + c_2 \operatorname{sign}(\dot{q}) \quad (\text{A.19})$$

donde f_L y c_2 son constantes positivas.

Teniendo en consideración las funciones (A.17) y (A.19), el modelo motor-carga (A.11) toma la forma:

$$[J_L + J_m] \ddot{q} + \left[f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} + f_L \right] \dot{q} + [c_1 + c_2] \operatorname{sign}(\dot{q}) = \frac{K_a}{R_a} v$$

donde se ha supuesto por simplicidad $r = 1$.

Referencias

La obtención del modelo dinámico de motores de corriente continua puede encontrarse en un sinfín de textos. A manera indicativa, el lector puede acudir a los siguientes textos de control y robótica, respectivamente:

- Ogata, K., 1970, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall.

- Spong, M., Vidyasagar, M., 1989, “*Robot Dynamics and Control*”, John Wiley & Sons, Inc.

Varios modelos no lineales de fricción en motores de corriente continua se presentan en:

- Canudas, C., Åström, K. J., Braun, K., 1987, “*Adaptive friction compensation in DC-motor drives*”, IEEE Journal of Robotics and Automation, December, Vol. RA-3, No. 6.
- Canudas, C., 1988, “*Adaptive control for partially known systems—Theory and applications*”, Elsevier Science Publishers.

Modelos dinámicos de fricción adecuados para simulaciones numéricas y capaces de predecir el comportamiento de la fuerza de fricción a muy baja velocidad, como el modelo de Dahl y el modelo LuGre, se describen en:

- Canudas, C., Olsson, H., Åström, K. J., Lischinsky, P., 1995, “*A new model for control of systems with friction*”, IEEE Transactions on Automatic Control, March, Vol. 40, No. 3, pp. 419–425.

B

Robot de 2 grados de libertad

En este apéndice se resumen varios tópicos sobre el robot de 2 g.d.l. que se ha usado como *robot prototipo* en diversos capítulos del presente texto. Específicamente, se abordan los siguientes temas:

- Modelo dinámico.
- Modelo cinemático directo.
- Modelo cinemático inverso.

El robot considerado puede verse en la Figura B.1. Este consiste de 2 eslabones conectados a través de articulaciones rotacionales. El significado de las diversas constantes así como el de sus valores numéricos están resumidos en la Tabla B.1.

Tabla B.1: Parámetros

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.450	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.450	m
Distancia al centro de masa (eslabón 1)	l_{c1}	0.091	m
Distancia al centro de masa (eslabón 2)	l_{c2}	0.048	m
Masa eslabón 1	m_1	23.902	kg
Masa eslabón 2	m_2	3.880	kg
Inercia eslabón 1 respecto al centro de masa	I_1	1.266	kg m ²
Inercia eslabón 2 respecto al centro de masa	I_2	0.093	kg m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/s ²

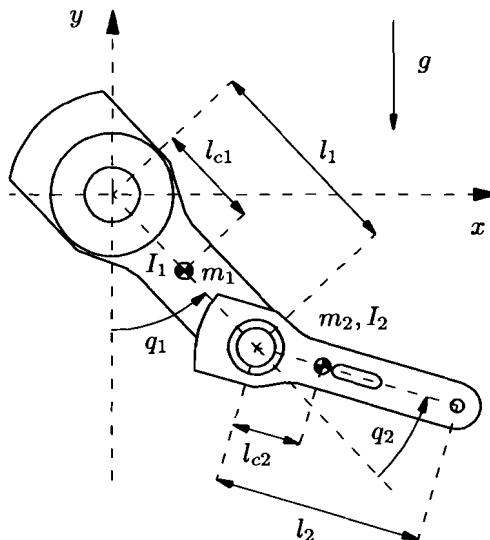


Figura B.1: Robot prototipo de 2 g.d.l.

B.1 Modelo dinámico

El robot manipulador de 2 g.d.l. mostrado en la Figura B.1 fue objeto de estudio detallado en el Ejemplo 3.3 (pág. 65). En dicho ejemplo, se obtuvo su modelo dinámico a partir del empleo de las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Dicho modelo viene dado por las Ecuaciones (3.10) y (3.11). Por otra parte, en el Ejemplo 3.7 se mostró que el modelo dinámico descrito por las ecuaciones anteriores puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} = \boldsymbol{\tau},$$

donde

$$\begin{aligned}
 M_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2, \\
 M_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\
 M_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2, \\
 M_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\
 C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\
 C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1, \\ C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0, \\ g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ g_2(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} g \operatorname{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Las variables de estado adecuadas para describir el modelo dinámico del robot son las posiciones q_1 y q_2 y las velocidades \dot{q}_1 y \dot{q}_2 . En términos de estas variables de estado, el modelo dinámico del robot puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}.$$

A continuación se presenta la obtención de los valores numéricos de las siguientes constantes asociadas al modelo dinámico del robot: $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$, k_M , k_{C_1} , k_{C_2} y k_g . La determinación de estas constantes fue establecida en el Capítulo 4 y se resume en la Tabla B.2.

Tabla B.2: Parámetros

$\lambda_{\text{Max}}\{M\}$	$n \left[\max_{i,j,q} M_{ij}(q) \right]$
k_M	$n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right \right]$
k_{C_1}	$n^2 \left[\max_{i,j,k,q} C_{kij}(q) \right]$
k_{C_2}	$n^3 \left[\max_{i,j,k,l,q} \left \frac{\partial C_{kij}(q)}{\partial q_l} \right \right]$
k_g	$n \left[\max_{i,j,q} \left \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right \right]$

Determinación de $\lambda_{\text{Max}}\{M\} = \beta$

Considérese la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$. A partir de los componentes de la matriz de inercia puede verificarse la siguiente expresión:

$$\max_{i,j,q} |M_{ij}(\mathbf{q})| = m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}] + I_1 + I_2.$$

De acuerdo con la Tabla B.2, la constante $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$ puede determinarse como un valor mayor o igual a n veces la expresión anterior. Por lo tanto, la constante $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$ se escoge como:

$$\lambda_{\text{Max}}\{M\} \geq n [m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}] + I_1 + I_2].$$

Empleando los valores numéricos presentados en la Tabla B.1, se obtiene $\lambda_{\text{Max}}\{M\} = 5.03 \text{ [kg m}^2]$.

Determinación de k_M

Considérese la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$. A partir de los componentes de la matriz de inercia pueden verificarse las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{11}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -2m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2), \\ \frac{\partial M_{12}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{12}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2), \\ \frac{\partial M_{21}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{21}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2), \\ \frac{\partial M_{22}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial M_{22}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con la Tabla B.2, la constante k_M puede determinarse como:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right].$$

Por lo tanto, la constante k_M se escoge como:

$$k_M \geq n^2 2m_2 l_1 l_{c2}.$$

Empleando los valores numéricos presentados en la Tabla B.1, se obtiene $k_M = 0.672 \text{ [kg m}^2]$.

Determinación de k_{C_1}

Considérese el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ expresado como:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) [2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \\ -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \end{bmatrix}}_{C_1(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con la Tabla B.2, la constante k_{C_1} puede determinarse como:

$$k_{C_1} \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} |C_{k_{ij}}(\mathbf{q})| \right].$$

Por lo tanto, la constante k_{C_1} se escoge como:

$$k_{C_1} \geq n^2 m_2 l_1 l_{c2}$$

la cual, usando los valores numéricos de la Tabla B.1 toma el valor numérico $k_{C_1} = 0.336 \text{ [kg m}^2\text{]}.$

Determinación de k_{C_2}

Considérese el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ expresado como:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) [2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \\ -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \end{bmatrix}}_{C_1(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

A partir de las matrices $C_1(\mathbf{q})$ y $C_2(\mathbf{q})$ puede fácilmente verificarse que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{111}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{111}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial C_{112}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{112}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{121}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{121}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{122}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{122}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{211}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{211}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2), \\ \frac{\partial C_{212}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{212}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial C_{221}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{221}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial C_{222}(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= 0, & \frac{\partial C_{222}(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con la Tabla B.2, la constante k_{C_2} puede determinarse como:

$$k_{C_2} \geq n^3 \left[\max_{i,j,k,l,q} \left| \frac{\partial C_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right| \right].$$

Por lo tanto, la constante k_{C_2} se escoge como:

$$k_{C_2} \geq n^3 m_2 l_1 l_{c2}$$

la cual, usando los valores numéricos de la Tabla B.1 toma el valor numérico $k_{C_2} = 0.672 \text{ [kg m}^2\text{]}.$

Determinación de k_g

De acuerdo con los componentes del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_1(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{q})}{\partial q_1} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{q})}{\partial q_2} &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Nótese que la matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es, de hecho, la matriz hessiana de la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$, que es una matriz simétrica, aunque no necesariamente definida positiva.

La constante positiva k_g puede determinarse a partir de la información proporcionada en la Tabla B.2 como:

$$k_g \geq n \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right|.$$

Por lo tanto, la constante k_g se escoge como:

$$k_g \geq n [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_2 l_{c2}] g$$

la cual, usando los valores numéricos de la Tabla B.1 toma el valor numérico $k_g = 80.578 \left[\text{kg m}^2/\text{s}^2 \right]$.

Resumen

Los valores numéricos de las constantes $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$, k_M , k_{C_1} , k_{C_2} y k_g obtenidas previamente se resumen en la Tabla B.3.

Tabla B.3: Parámetros

Parámetro	Valor	Unidades
$\lambda_{\text{Max}}\{M\}$	5.03	kg m^2
k_M	0.672	kg m^2
k_{C_1}	0.336	kg m^2
k_{C_2}	0.672	kg m^2
k_g	80.578	$\text{kg m}^2/\text{s}^2$

B.2 Modelo cinemático directo

El tópico de modelado cinemático directo de robots manipuladores se plantea en los siguientes términos. Considérese un robot manipulador de n g.d.l. colocado en una superficie fija. Defínase un marco de referencia también fijo en algún lugar de la superficie. Dicho marco de referencia suele denominarse *marco referencial de base*. El problema de la determinación del modelo cinemático directo del robot consiste en expresar la posición y orientación (si procede) de un marco de referencia sólidamente colocado en la parte terminal del último eslabón del robot referida al marco referencial de base en término de las coordenadas articulares del robot. La solución de este planteamiento se reduce, desde un punto de vista matemático, a la solución de un problema geométrico que, por cierto, siempre tiene solución cerrada.

Con relación al robot de 2 g.d.l., definase primeramente el marco referencial de base como un sistema cartesiano de 2 dimensiones cuyo origen se localiza exactamente en la primera articulación del robot, tal y como se muestra en la Figura B.1. Las coordenadas cartesianas x e y denotan la posición del extremo final del segundo eslabón con respecto al marco referencial de base. Para este caso sencillo de 2 g.d.l., la orientación del extremo final del robot carece de sentido. Por supuesto, se aprecia claramente que ambas coordenadas cartesianas x e y dependen de las coordenadas articulares q_1 y q_2 . La relación

entre ellas define al modelo cinemático directo propiamente dicho:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{f}(q_1, q_2)$$

donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Para el caso del robot de 2 g.d.l., es inmediato verificar que el modelo cinemático directo viene dado por:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2), \\ y &= -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

A partir del modelo cinemático directo puede obtenerse también la siguiente relación de velocidades:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \\ &= J(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ recibe el nombre de matriz jacobiana o simplemente jacobiano del robot. Obviamente, también resulta cierta la siguiente relación de aceleraciones:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q}) \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + J(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

En este punto, procede hacer una observación importante acerca del jacobiano $J(\mathbf{q})$. Para el caso de robots no redundantes, el jacobiano es una matriz cuadrada de dimensión n cuyos elementos dependen del vector de coordenadas articulares \mathbf{q} . Para un robot dado, pueden existir ciertas *configuraciones*, es decir, ciertas posiciones articulares \mathbf{q} , para las cuales el jacobiano resulta ser una matriz singular. A dichas configuraciones se las denomina en consecuencia *configuraciones singulares*. Típicamente, las configuraciones singulares son aquellas en las cuales el extremo del robot se localiza en su frontera física de trabajo. Aunque para los fines del modelado cinemático directo y de las relaciones de velocidad y aceleración presentadas, esta observación tiene poca relevancia, pero este no es el caso sin embargo, en el modelado cinemático inverso que se presenta a continuación.

B.3 Modelo cinemático inverso

El modelo cinemático inverso de robots manipuladores resulta de gran importancia desde un punto de vista práctico. Dicho modelo permite obtener las posiciones articulares \mathbf{q} en términos de la posición y orientación del extremo final del último eslabón referido

al marco referencial cartesiano de base. Para el caso del robot de 2 g.d.l., el modelo cinemático inverso tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}^{-1}(x, y)$$

donde $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La obtención del modelo cinemático inverso resulta ser, en general, laborioso.

El interés práctico del modelo cinemático inverso consiste en su empleo para obtener las especificaciones de posiciones articulares deseadas $\mathbf{q}_d = [q_{d_1} \ q_{d_2}]^T$ a partir de especificaciones de posición deseada x_d e y_d del extremo final del último eslabón del robot.

A partir de esta información pueden obtenerse las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares deseadas¹:

$$\begin{aligned} q_{d_1} &= \tan^{-1} \left(\frac{z_d}{-y_d} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{l_2 \sin(q_{d_2})}{l_1 + l_2 \cos(q_{d_2})} \right), \\ q_{d_2} &= \cos^{-1} \left(\frac{y_d^2 + z_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right). \end{aligned}$$

Adicionalmente, pueden obtenerse las siguientes relaciones de velocidad y aceleración, que resultan válidas siempre y cuando el robot no se encuentre en configuraciones singulares, i.e., para cuando el jacobiano $J(\mathbf{q}_d)$ no sea singular:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_{d_1} \\ \dot{q}_{d_2} \end{bmatrix} &= J^{-1}(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \ddot{q}_{d_1} \\ \ddot{q}_{d_2} \end{bmatrix} &= \underbrace{-J^{-1}(\mathbf{q}_d) \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q}_d) \right]}_{\frac{d}{dt}[J^{-1}(\mathbf{q}_d)]} J^{-1}(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + J^{-1}(\mathbf{q}_d) \begin{bmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $J^{-1}(\mathbf{q}_d)$ denota la inversa de la matriz jacobiana y $\frac{d}{dt}[J(\mathbf{q}_d)]$ la derivada temporal de la matriz jacobiana, ambas evaluadas en $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$. Estas vienen dadas respectivamente por:

$$J^{-1}(\mathbf{q}_d) = \begin{bmatrix} \frac{S_{12}}{l_1 S_2} & -\frac{C_{12}}{l_1 S_2} \\ \frac{-l_1 S_1 - l_2 S_{12}}{l_1 l_2 S_2} & \frac{l_1 C_1 + l_2 C_{12}}{l_1 l_2 S_2} \end{bmatrix},$$

y

$$\frac{d}{dt}[J(\mathbf{q}_d)] = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \dot{q}_{d_1} - l_2 S_{12}(\dot{q}_{d_1} + \dot{q}_{d_2}) & -l_2 S_{12}(\dot{q}_{d_1} + \dot{q}_{d_2}) \\ l_1 C_1 \dot{q}_{d_1} + l_2 C_{12}(\dot{q}_{d_1} + \dot{q}_{d_2}) & l_2 C_{12}(\dot{q}_{d_1} + \dot{q}_{d_2}) \end{bmatrix},$$

donde por simplicidad se han empleado las siguientes notaciones: $S_1 = \sin(q_{d_1})$, $S_2 = \sin(q_{d_2})$, $C_1 = \cos(q_{d_1})$, $S_{12} = \sin(q_{d_1} + q_{d_2})$, $C_{12} = \cos(q_{d_1} + q_{d_2})$.

¹Aquí se presenta una de las dos posibles soluciones al problema de cinemática inversa.

B.4 Movimiento deseado

Con el propósito de evaluar mediante simulaciones numéricas la prestación de los controladores de movimiento descritos en este texto, se ha elegido la siguiente trayectoria de movimiento articular:

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1[1 - e^{-2.0 t^3}] + c_1[1 - e^{-2.0 t^3}] \operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ b_2[1 - e^{-1.8 t^3}] + c_2[1 - e^{-1.8 t^3}] \operatorname{sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \quad [\text{rad}] \quad (\text{B.1})$$

donde $a_1 = \pi/45$ [rad], $b_1 = \pi/4$ [rad], $c_1 = \pi/18$ [rad] y $\omega_1 = 15$ [rad/s], son parámetros de la referencia de posición deseada para la primera articulación, mientras que $a_2 = \pi/180$ [rad], $b_2 = \pi/3$ [rad], $c_2 = 25\pi/36$ [rad] y $\omega_2 = 3.5$ [rad/s], son parámetros de la referencia de posición deseada para la segunda articulación. La Figura B.2 muestra el perfil de la trayectoria deseada para ambas articulaciones.

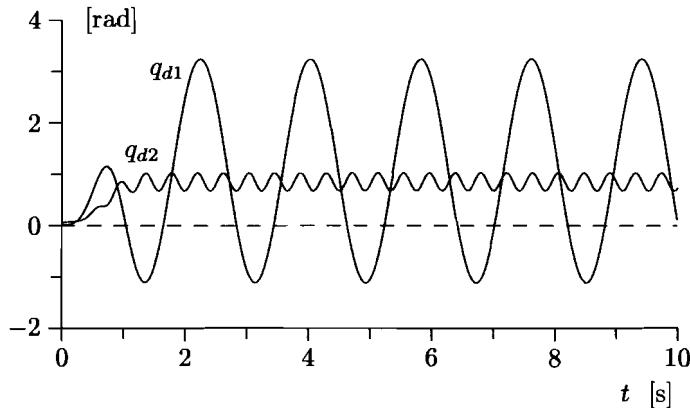


Figura B.2: Trayectorias deseadas

Esta trayectoria presenta las características siguientes:

- Incluye un término tipo escalón de pequeña magnitud para que sea posible mostrar la respuesta transitoria de los controladores.
- Incorpora un término de tipo senoidal para evaluar la prestación ante señales periódicas relativamente rápidas, donde las no linealidades de la dinámica del robot son realmente importantes.
- Presenta un término que crece suavemente para mantener al robot en un estado de operación sin saturar los accionadores cuyos límites se sitúan respectivamente en 15 [Nm] y 150 [Nm].

La magnitud y frecuencia de la señal periódica debe escogerse con el debido cuidado para evitar, tanto saturaciones de par en los accionadores como saturaciones de velocidad angular en los mismos. La evolución de la dinámica del robot a lo largo de las trayectorias deseadas debe demandar pares y velocidades admisibles en los actuadores de las articulaciones para que sea factible realizar el movimiento deseado.

A partir de las posiciones deseadas (B.1) es posible obtener analíticamente las velocidades deseadas, que vienen dadas en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{d1} &= 6b_1t^2e^{-2.0 t^3} + 6c_1t^2e^{-2.0 t^3} \operatorname{sen}(\omega_1 t) + [c_1 - c_1e^{-2.0 t^3}] \cos(\omega_1 t)\omega_1, \\ \dot{q}_{d2} &= 5.4b_2t^2e^{-1.8 t^3} + 5.4c_2t^2e^{-1.8 t^3} \operatorname{sen}(\omega_2 t) + [c_2 - c_2e^{-1.8 t^3}] \cos(\omega_2 t)\omega_2.\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

De la misma manera, se procede para obtener analíticamente las aceleraciones deseadas

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{d1} &= 12b_1te^{-2.0 t^3} - 36b_1t^4e^{-2.0 t^3} + 12c_1te^{-2.0 t^3} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ &\quad - 36c_1t^4e^{-2.0 t^3} \operatorname{sen}(\omega_1 t) + 12c_1t^2e^{-2.0 t^3} \cos(\omega_1 t)\omega_1 \\ &\quad - [c_1 - c_1e^{-2.0 t^3}] \operatorname{sen}(\omega_1 t)\omega_1^2 \quad [\text{rad / s}^2], \\ \ddot{q}_{d2} &= 10.8b_2te^{-1.8 t^3} - 29.2b_2t^4e^{-1.8 t^3} + 10.8c_2te^{-1.8 t^3} \sin(\omega_2 t) \\ &\quad - 29.2c_2t^4e^{-1.8 t^3} \sin(\omega_2 t) + 10.8c_2t^2e^{-1.8 t^3} \cos(\omega_2 t)\omega_2 \\ &\quad - [c_2 - c_2e^{-1.8 t^3}] \sin(\omega_2 t)\omega_2^2 \quad [\text{rad / s}^2].\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

Las Figuras B.3, B.4 y B.5 muestran, respectivamente, la evolución en el tiempo de las normas correspondientes a las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares deseadas. De dichas figuras se desprenden las siguientes cotas máximas sobre las citadas normas:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}_d\|_{\text{Max}} &\leq 3.41 \text{ [rad]}, \\ \|\dot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} &\leq 8.071 \text{ [rad/s]}, \\ \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_{\text{Max}} &\leq 48.371 \text{ [rad/s}^2]\text{].}\end{aligned}$$

Referencias

El diagrama del robot mostrado en la Figura B.1 corresponde a un prototipo experimental realizado en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, México.

Los valores numéricos de los parámetros del robot mostrados en la Tabla B.1 se han obtenido de:

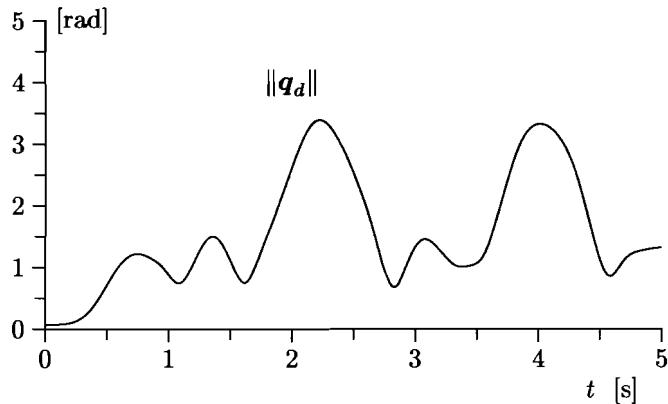
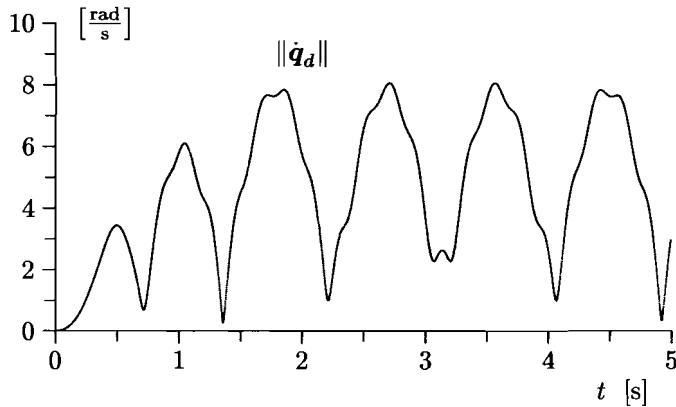


Figura B.3: Norma del vector de posiciones articulares deseadas



- Reyes, F., Kelly, R., 1997, “*Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot*”, Robotica, Vol. 15, pp. 563–571.

Las constantes indicadas en la Tabla B.3 también han sido extraídas de:

- Reyes, F., Kelly, R., 2001, “*Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm*”, Mechatronics, Vol. 11, pp. 267–282.

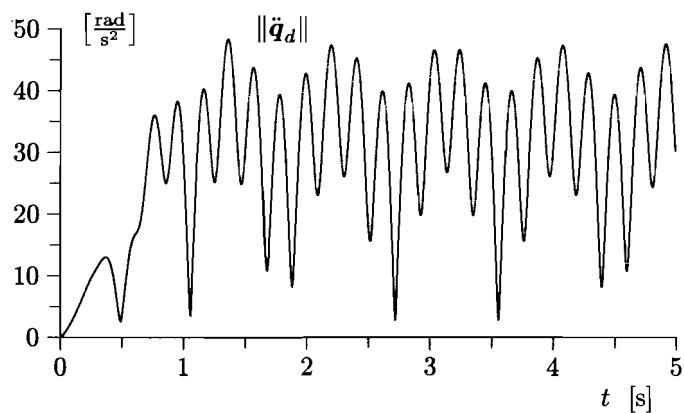


Figura B.5: Norma del vector de aceleraciones articulares deseadas

C

Propiedades del modelo dinámico de robots

En este apéndice se presentan demostraciones de algunas de las propiedades del modelo dinámico de robots manipuladores enunciadas en el Capítulo 4.

Para los fines de dichas demostraciones, conviene enunciar primeramente los siguientes lemas, cuyas demostraciones pueden encontrarse en la bibliografía sobre matrices.

Lema C.1 Considérese el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la norma euclíadiana $\|\mathbf{x}\|$ satisface:

$$\|\mathbf{x}\| \leq n \left[\max_i \{|x_i|\} \right].$$

▽▽▽

Lema C.2 Considérese la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y denote por a_{ij} a su ij -ésimo elemento. Sean $\lambda_1\{A\}, \dots, \lambda_n\{A\}$ sus valores propios. Entonces se satisface que:

$$|\lambda_k\{A\}| \leq n \left[\max_{i,j} \{|a_{ij}|\} \right] \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n.$$

▽▽▽

Lema C.3 Considérese la matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y denote por a_{ij} a su ij -ésimo elemento. La norma espectral $\|A\|$ de la matriz A inducida por la norma vectorial euclíadiana satisface:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\text{Max}}\{A^TA\}} \leq n \left[\max_{i,j} \{|a_{ij}|\} \right].$$

▽▽▽

Otro resultado importante que se empleará en este apéndice es el teorema del valor medio, cuyo enunciado se presenta a continuación.

Teorema C.1 Teorema del valor medio

Considérese la función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ tiene derivadas parciales continuas, entonces para dos vectores constantes $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_1} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} \\ \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_2} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}^T [\mathbf{x} - \mathbf{y}]$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ es un vector convenientemente seleccionado en el segmento de línea que une los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , y que en consecuencia satisface:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{y} + \alpha[\mathbf{x} - \mathbf{y}], \\ &= \alpha\mathbf{x} + [1 - \alpha]\mathbf{y}, \end{aligned}$$

para algún α real en el intervalo $[0, 1]$. Nótese que además, la norma de $\boldsymbol{\xi}$ verifica:

$$\|\boldsymbol{\xi}\| \leq \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

o también

$$\|\boldsymbol{\xi}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

▽▽▽

La extensión del teorema del valor medio para funciones vectoriales se presenta a continuación.

Teorema C.2 Teorema del valor medio para funciones vectoriales

Considérese la función vectorial continua $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$ tiene derivadas parciales continuas para $i = 1, \dots, m$, entonces para dos vectores constantes $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{z})}{\partial z_1} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} & \frac{\partial f_1(\mathbf{z})}{\partial z_2} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{z})}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{z})}{\partial z_1} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} & \frac{\partial f_2(\mathbf{z})}{\partial z_2} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{z})}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{z})}{\partial z_1} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} & \frac{\partial f_m(\mathbf{z})}{\partial z_2} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{z})}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}}_{\text{jacobiano de } \mathbf{f} \text{ evaluado en } \mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} [\mathbf{x} - \mathbf{y}], \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}} [\mathbf{x} - \mathbf{y}], \end{aligned}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ es un vector convenientemente seleccionado en el segmento de línea que une los vectores x e y , y que en consecuencia satisface:

$$\xi = y + \alpha[x - y]$$

para algún α real en el intervalo $[0, 1]$.

▽▽▽

A continuación se presenta un corolario de utilidad que puede derivarse de los Teoremas C.1 y C.2

Corolario C.1 Considérese la función matricial suave $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Supóngase que las derivadas parciales de los elementos de la matriz A son funciones acotadas, es decir, existe una constante finita δ tal que:

$$\left| \frac{\partial a_{ij}(z)}{\partial z_k} \right|_{z=z_0} \leq \delta$$

para $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ y todo vector $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Defínase ahora la siguiente función vectorial:

$$[A(x) - A(y)]w,$$

con $x, y, w \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la norma de la función anterior satisface:

$$\|[A(x) - A(y)]w\| \leq n^2 \max_{i,j,k,z_0} \left\{ \left| \frac{\partial a_{ij}(z)}{\partial z_k} \right|_{z=z_0} \right\} \|x - y\| \|w\|, \quad (\text{C.1})$$

donde $a_{ij}(z)$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz $A(z)$ mientras que z_k denota el k -ésimo elemento del vector $z \in \mathbb{R}^n$.

▽▽▽

Demostración. La prueba del corolario puede realizarse mediante el empleo de los teoremas C.1 o C.2. Aquí se usará del Teorema C.1.

La norma del vector $A(x)w - A(y)w$ satisface:

$$\|A(x)w - A(y)w\| \leq \|A(x) - A(y)\| \|w\|.$$

Considerando el Lema C.3, se obtiene:

$$\|A(x)w - A(y)w\| \leq n \left[\max_{i,j} \{|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|\} \right] \|w\|. \quad (\text{C.2})$$

Por otro lado, como por hipótesis la matriz $A(z)$ es una función suave en su argumento, luego sus elementos tienen derivadas parciales continuas. En consecuencia, dados

dos vectores constantes $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, de acuerdo con el teorema del valor medio (Teorema C.1), existe un número real α_{ij} en el intervalo $[0, 1]$ tal que:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) - a_{ij}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_1} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \\ \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_2} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \end{bmatrix}^T [\mathbf{x} - \mathbf{y}]. \quad (\text{C.3})$$

Por lo tanto, tomando el valor absoluto en ambos lados de la ecuación anterior se llega a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |a_{ij}(\mathbf{x}) - a_{ij}(\mathbf{y})| &\leq \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_1} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \\ \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_2} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \end{bmatrix} \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \\ &\leq n \left[\max_k \left\{ \left| \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_k} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}+\alpha_{ij}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]} \right| \right\} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \end{aligned}$$

donde se ha usado el Lema C.1 ($\|\mathbf{x}\| \leq n (\max_i \{|x_i|\})$).

Más aún, como se ha supuesto que las derivadas parciales de los elementos de A son funciones acotadas, entonces puede afirmarse que:

$$|a_{ij}(\mathbf{x}) - a_{ij}(\mathbf{y})| \leq n \left[\max_{k, z_0} \left\{ \left| \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{z})}{\partial z_k} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0} \right| \right\} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

De esta última expresión y de (C.2) se concluye la aseveración enunciada en (C.1). \diamond

Propiedad 4.2.3

La demostración de la desigualdad (4.6) se realiza haciendo uso directo del Corolario C.1. Esto es viable debido al hecho de que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es continua en \mathbf{q} al igual que la derivada parcial de cada uno de sus elementos $M_{ij}(\mathbf{q})$. Además, como se ha considerado el caso de robots cuyas articulaciones son todas del tipo rotacional, se tiene la característica adicional de que

$$\left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \right|$$

es una función de \mathbf{q}_0 con cota superior.

Por lo tanto, dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, de acuerdo con el Corolario C.1, la norma del vector $M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}$ satisface:

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq n^2 \max_{i,j,k,q_0} \left\{ \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \right\} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|.$$

Ahora, seleccionando la constante k_M de acuerdo con (4.7), i.e.,

$$k_M = n^2 \max_{i,j,k,q_0} \left\{ \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \right\},$$

se llega a

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|$$

correspondiendo esta última expresión a la desigualdad enunciada en (4.6). \diamond

Propiedad 4.3.6

Para realizar la demostración de la desigualdad (4.9) primeramente se considera (4.8) que permite expresar el vector $C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}$ de la siguiente manera:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T C_1(\mathbf{x})\mathbf{z} \\ \mathbf{w}^T C_2(\mathbf{x})\mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T C_n(\mathbf{x})\mathbf{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T C_1(\mathbf{y})\mathbf{v} \\ \mathbf{w}^T C_2(\mathbf{y})\mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T C_n(\mathbf{y})\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde $C_k(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica de dimensión n , continua en \mathbf{q} y con la característica de tener todos sus elementos $C_{k_{ij}}(\mathbf{q})$ acotados para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y además, también sus derivadas parciales ($C_{k_{ij}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{C}^\infty$).

De acuerdo con la Ecuación (4.4), el vector $C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}$ puede también escribirse como:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w} &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T [C_1(\mathbf{x}) - C_1(\mathbf{y})]\mathbf{z} - \mathbf{w}^T C_1(\mathbf{y})[\mathbf{v} - \mathbf{z}] \\ \mathbf{w}^T [C_2(\mathbf{x}) - C_2(\mathbf{y})]\mathbf{z} - \mathbf{w}^T C_2(\mathbf{y})[\mathbf{v} - \mathbf{z}] \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T [C_n(\mathbf{x}) - C_n(\mathbf{y})]\mathbf{z} - \mathbf{w}^T C_n(\mathbf{y})[\mathbf{v} - \mathbf{z}] \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T [C_1(\mathbf{x}) - C_1(\mathbf{y})]\mathbf{z} \\ \mathbf{w}^T [C_2(\mathbf{x}) - C_2(\mathbf{y})]\mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T [C_n(\mathbf{x}) - C_n(\mathbf{y})]\mathbf{z} \end{bmatrix} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v} - \mathbf{z})\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Aplicando normas a ambos lados de la última expresión se llega inmediatamente a la siguiente desigualdad:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq \left\| \begin{array}{c} \mathbf{w}^T [C_1(\mathbf{x}) - C_1(\mathbf{y})] \mathbf{z} \\ \mathbf{w}^T [C_2(\mathbf{x}) - C_2(\mathbf{y})] \mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T [C_n(\mathbf{x}) - C_n(\mathbf{y})] \mathbf{z} \end{array} \right\| + \|C(\mathbf{y}, \mathbf{v} - \mathbf{z})\mathbf{w}\|. \quad (\text{C.5})$$

Ahora se procede a determinar cotas superiores sobre las dos normas del lado derecho de la desigualdad. Por una parte, empleando el Lema C.1 se obtiene:

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{w}^T [C_1(\mathbf{x}) - C_1(\mathbf{y})] \mathbf{z} \\ \mathbf{w}^T [C_2(\mathbf{x}) - C_2(\mathbf{y})] \mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T [C_n(\mathbf{x}) - C_n(\mathbf{y})] \mathbf{z} \end{array} \right\| \leq n \max_k \{ |\mathbf{w}^T [C_k(\mathbf{x}) - C_k(\mathbf{y})] \mathbf{z}| \}. \quad (\text{C.6})$$

Más aún, como las derivadas parciales de los elementos de las matrices $C_k(\mathbf{q})$ son funciones acotadas, luego el Corolario C.1 conduce a:

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}^T [C_k(\mathbf{x}) - C_k(\mathbf{y})] \mathbf{z}| &\leq \| [C_k(\mathbf{x}) - C_k(\mathbf{y})] \mathbf{z} \| \| \mathbf{w} \|, \\ &\leq n^2 \max_{i,j,k,l,q_0} \left\{ \left| \frac{\partial C_{kij}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \right\} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto resulta cierto que

$$n \max_k \{ |\mathbf{w}^T [C_k(\mathbf{x}) - C_k(\mathbf{y})] \mathbf{z}| \} \leq n^3 \max_{i,j,k,l,q_0} \left\{ \left| \frac{\partial C_{kij}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \right\} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\|.$$

Incorporando esta última desigualdad en (C.6) se llega finalmente a:

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{w}^T [C_1(\mathbf{x}) - C_1(\mathbf{y})] \mathbf{z} \\ \mathbf{w}^T [C_2(\mathbf{x}) - C_2(\mathbf{y})] \mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T [C_n(\mathbf{x}) - C_n(\mathbf{y})] \mathbf{z} \end{array} \right\| \leq n^3 \max_{i,j,k,l,q_0} \left\{ \left| \frac{\partial C_{kij}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \right\} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\|. \quad (\text{C.7})$$

Por otra parte, haciendo uso de (4.12) la segunda norma del lado derecho de la desigualdad (C.5) puede ser acotada como:

$$\|C(\mathbf{y}, \mathbf{v} - \mathbf{z})\mathbf{w}\| \leq n^2 \left(\max_{k,i,j,q} |C_{kij}(\mathbf{q})| \right) \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\|. \quad (\text{C.8})$$

Definiendo las constantes k_{C_1} y k_{C_2} de acuerdo con la Tabla 4.1, i.e.,

$$\begin{aligned} k_{C_1} &= n^2 \left[\max_{i,j,k,q} |C_{k_{ij}}(\mathbf{q})| \right], \\ k_{C_2} &= n^3 \left[\max_{i,j,k,l,q} \left| \frac{\partial C_{k_{ij}}(\mathbf{q})}{\partial q_l} \right| \right], \end{aligned}$$

e incorporando (C.7) y (C.8) en la desigualdad (C.5), se obtiene finalmente la siguiente expresión:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{w}\|,$$

siendo esto último lo que se deseaba demostrar. \diamond

Propiedad 4.4.3

La demostración de la desigualdad (4.14) se realiza empleando el Teorema C.2. Debido a que el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es una función vectorial continua, entonces para dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\xi} [\mathbf{x} - \mathbf{y}]$$

donde $\xi = \mathbf{y} + \alpha[\mathbf{x} - \mathbf{y}]$ para un número α convenientemente seleccionado en el intervalo $[0, 1]$. Extrayendo normas a ambos lados de la ecuación anterior se llega a la siguiente desigualdad:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq \left\| \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\xi} \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (\text{C.9})$$

Por otro lado, empleando el Lema C.3, se obtiene:

$$\left\| \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\xi} \right\| \leq n \max_{i,j} \left\{ \left| \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\xi} \right| \right\}.$$

Además, como se ha considerado el caso de robots con articulaciones rotacionales, se tiene que la función

$$\left| \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right|$$

está acotada. Por lo tanto, también resulta cierto que

$$\left\| \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\xi} \right\| \leq n \max_{i,j,q} \left\{ \left| \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right| \right\}.$$

Incorporando esta desigualdad en (C.9), se llega a:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq n \max_{i,j,q} \left\{ \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right\} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Seleccionando ahora la constante k_g como en (4.15), i.e.,

$$k_g = n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right]$$

que entre paréntesis implica de acuerdo con el Lema C.3:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|,$$

se obtiene finalmente la expresión

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

que es lo que se quería demostrar. \diamond

Referencias

El Lema C.2 está presente en:

- Marcus, M., Minc, H., 1965, “*Introduction to linear algebra*”, Dover Publications, pág. 207.
- Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, “*Matrix analysis*”, Cambridge University Press, pág. 346.

El enunciado del teorema del valor medio para funciones vectoriales puede consultarse en los siguientes textos:

- Taylor, A. E., Mann, W. R., 1989, “*Fundamentos de cálculo avanzado*”, Editorial Limusa, pág. 406.
- Khalil, H. K., 1992, “*Nonlinear systems*”, Macmillan Publishing Co., pág. 68.

D

Condición suficiente para funciones definidas positivas

Primeramente se presenta un resultado a modo de lema sobre funciones vectoriales suaves. Este resultado es bien conocido en la bibliografía de cálculo y de optimización, obteniéndose del teorema de Taylor y de la fórmula del residuo de Lagrange. Dada la importancia de este lema en el estudio de funciones definidas positivas, la demostración se presenta en forma completa.

Lema D.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con derivadas parciales continuas al menos hasta de segundo orden. Entonces, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, existe un número real α ($1 \geq \alpha \geq 0$) tal que:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0})^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H(\alpha \mathbf{x}) \mathbf{x}$$

donde $H(\alpha \mathbf{x})$ es la matriz hessiana de $f(\mathbf{x})$ evaluada en $\alpha \mathbf{x}$.

▽▽▽

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector constante. Considérese la derivada temporal de $f(t\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=t\mathbf{x}} \right]^T \mathbf{x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t\mathbf{x})^T \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Integrando desde $t = 0$ hasta $t = 1$:

$$\int_{f(0 \cdot \mathbf{x})}^{f(1 \cdot \mathbf{x})} df(t\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t\mathbf{x})^T \mathbf{x} dt,$$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t\mathbf{x})^T \mathbf{x} dt. \quad (\text{D.1})$$

La integral del lado derecho puede expresarse como:

$$\int_0^1 \mathbf{y}(t)^T \mathbf{x} dt \quad (\text{D.2})$$

donde

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t\mathbf{x}). \quad (\text{D.3})$$

Definiendo

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{y}(t)^T \mathbf{x} \\ v &= t - 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \dot{\mathbf{y}}(t)^T \mathbf{x} \\ \frac{dv}{dt} &= 1, \end{aligned}$$

la integral (D.2) puede resolverse por partes¹:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{y}(t)^T \mathbf{x} dt &= - \int_0^1 [t - 1] \dot{\mathbf{y}}(t)^T \mathbf{x} dt + \mathbf{y}(t)^T \mathbf{x} |_{t=1}^1, \\ &= \int_0^1 [1 - t] \dot{\mathbf{y}}(t)^T \mathbf{x} dt + \mathbf{y}(0)^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Ahora, empleando el teorema del valor medio para integrales², y notando que $(1-t) \geq 0$ para todo t entre 0 y 1, la integral del lado derecho de la Ecuación (D.4) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t) \dot{\mathbf{y}}(t)^T \mathbf{x} dt &= \dot{\mathbf{y}}(\alpha)^T \mathbf{x} \int_0^1 (1-t) dt, \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}(\alpha)^T \mathbf{x}, \end{aligned}$$

¹Recuérdese la fórmula:

$$\int_0^1 u \frac{dv}{dt} dt = - \int_0^1 v \frac{du}{dt} dt + uv|_0^1.$$

²Recuérdese que para funciones $h(t)$ y $g(t)$ continuas en el intervalo cerrado $a \leq t \leq b$, y donde $g(t) \geq 0$ para cada t del intervalo, siempre existe un número c tal que $a \leq c \leq b$ y

$$\int_a^b h(t)g(t) dt = h(c) \int_a^b g(t) dt.$$

para algún α ($1 \geq \alpha \geq 0$).

Incorporando lo anterior en (D.4) se llega a

$$\int_0^1 \mathbf{y}(t)^T \mathbf{x} dt = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}(\alpha)^T \mathbf{x} + \mathbf{y}(0)^T \mathbf{x}$$

y por lo tanto, (D.1) puede expresarse como:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}(\alpha)^T \mathbf{x} + \mathbf{y}(0)^T \mathbf{x}. \quad (\text{D.5})$$

Por otra parte, usando la definición de $\dot{\mathbf{y}}(t)$ dada en (D.3), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = H(t\mathbf{x})\mathbf{x},$$

y por lo tanto $\dot{\mathbf{y}}(\alpha) = H(\alpha\mathbf{x})\mathbf{x}$. Incorporando esto y (D.3) en (D.5), se llega a

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H(\alpha\mathbf{x})^T \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0})^T \mathbf{x}$$

que es lo que finalmente se deseaba demostrar.

◇

A continuación se presenta un ejemplo sencillo con el fin de ilustrar el enunciado del Lema D.1.

Ejemplo D.1 Considérese la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^x.$$

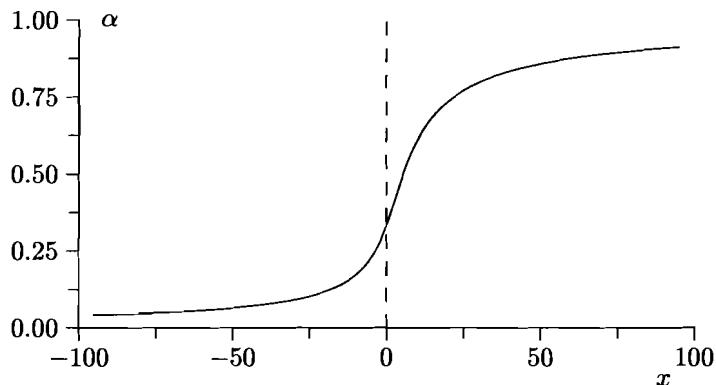
De acuerdo con el Lema D.1, la función $f(x)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2} e^{\alpha x} x^2$$

donde para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un α ($1 \geq \alpha \geq 0$). Específicamente, para $x = 0 \in \mathbb{R}$ cualquier $\alpha \in [0, 1]$ es adecuado (de hecho cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$). En el caso de $x \neq 0 \in \mathbb{R}$, entonces α viene dada explícitamente por:

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{2[e^x - 1 - x]}{x^2}\right)}{x}.$$

La Figura D.1 muestra la gráfica correspondiente de α versus x .

Figura D.1: Gráfica de α

D.1 Aplicación a funciones definidas positivas

El Lema D.1 puede emplearse inmediatamente para derivar condiciones suficientes para que una función sea definida positiva (tanto en forma local como global). A continuación se presentan dichas condiciones a modo de lema.

Lema D.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con derivadas parciales continuas al menos hasta de segundo orden. Supóngase que:

- $f(\mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}$.
- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Luego:

- Si $H(\mathbf{0}) > 0$, entonces $f(\mathbf{x})$ es una función definida positiva (al menos en forma local).
- Si $H(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(\mathbf{x})$ es una función definida positiva en forma global.

▽▽▽

Demostración. Considerando los supuestos sobre la función $f(\mathbf{x})$ y el Lema D.1, se obtiene que para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un α ($1 \geq \alpha \geq 0$) tal que:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H(\alpha \mathbf{x}) \mathbf{x}.$$

Debido a la hipótesis de continuidad de las derivadas parciales al menos hasta de segundo orden, si la matriz hessiana evaluada en $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es definida positiva

$(H(\mathbf{0}) > 0)$, entonces la matriz hessiana será también definida positiva en una vecindad de $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, e.g., para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ con algún $\varepsilon > 0$, i.e.,

$$H(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon.$$

Claro está que $H(\alpha\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que satisfaga $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ y cualquier α ($1 \geq \alpha \geq 0$). Como para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un α ($1 \geq \alpha \geq 0$) y

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H(\alpha\mathbf{x}) \mathbf{x},$$

entonces $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$. Además, como por hipótesis $f(\mathbf{0}) = 0$, luego $f(\mathbf{x})$ es definida positiva al menos en forma local.

Por otro lado, si la matriz hessiana $H(\mathbf{x})$ es definida positiva para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, luego obviamente también lo será para $H(\alpha\mathbf{x})$ no solo para $1 \geq \alpha \geq 0$ sino también para cualquier α real. Por lo tanto, $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, y como además se ha supuesto $f(\mathbf{0}) = 0$, entonces $f(\mathbf{x})$ es una función definida positiva en forma global.

◊

A continuación se presentan algunos ejemplos con el propósito de ilustrar la aplicación del lema anterior.

Ejemplo D.2 Considérese la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ empleada en el estudio de estabilidad del origen de la ecuación diferencial que modela el comportamiento de un péndulo ideal:

$$f(x_1, x_2) = mgl[1 - \cos(x_1)] + ml^2 \frac{x_2^2}{2}.$$

Claramente, se tiene que $f(0, 0) = 0$. El gradiente de $f(x_1, x_2)$ viene dado por

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} mgl \operatorname{sen}(x_1) \\ ml^2 x_2 \end{bmatrix},$$

que evaluado en $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es cero. Finalmente, la matriz hessiana viene dada por

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} mgl \operatorname{cos}(x_1) & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix},$$

la cual es definida positiva en $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Luego, de acuerdo con el Lema D.2, la función $f(x_1, x_2)$ es definida positiva al menos localmente. En realidad esta función no es definida positiva en forma global.

El siguiente ejemplo, menos trivial que el anterior, muestra una función que se utiliza como parte de las funciones de Lyapunov para el estudio de estabilidad de varios esquemas de control de robots.

Ejemplo D.3 Considérese la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}$$

donde $K_p = K_p^T > 0$, $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante, ε es una constante real positiva y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ denota la energía potencial del robot. Aquí se supone que todas las articulaciones del robot son del tipo rotacional.

El objetivo de este ejemplo es mostrar que si K_p se selecciona de manera que³:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} k_g, \quad (\text{D.6})$$

entonces $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva en forma global.

Para probar lo anterior se empleará el Lema D.2. Nótese primeramente que $f(\mathbf{0}) = 0$.

El gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ con respecto a $\tilde{\mathbf{q}}$ es:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} f(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{2}{\varepsilon} K_p \tilde{\mathbf{q}}.$$

Recordando de (3.23) que $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \partial U(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}$ y que⁴:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}$$

se llega finalmente a la expresión

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} f(\tilde{\mathbf{q}}) = -\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + \frac{2}{\varepsilon} K_p \tilde{\mathbf{q}}.$$

³La constante k_g ha sido definida en la Propiedad 4.4 y satisface

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

⁴Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $x = g(y)$. Entonces

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \left[\frac{\partial g(y)}{\partial y} \right]^T \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Claramente el gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es nulo para $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Ahora bien, la matriz hessiana $H(\tilde{\mathbf{q}})$ (simétrica) de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ definida como:

$$H(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \left[\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_n} \\ \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{q}_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_2 \partial \tilde{q}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_n \partial \tilde{q}_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_n \partial \tilde{q}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{q}_n \partial \tilde{q}_n} \end{bmatrix}$$

resulta ser⁵

$$H(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial g(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})} + \frac{2}{\varepsilon} K_p.$$

De acuerdo con el Lema D.2, si $H(\tilde{\mathbf{q}}) > 0$ para todo $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, entonces la función $f(\tilde{\mathbf{q}})$ será definida positiva en forma global.

Para demostrar que $H(\tilde{\mathbf{q}}) > 0$ para todo $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, se recurre al siguiente resultado. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices simétricas. Supóngase además que la matriz A es definida positiva, pero B puede no serlo. Si $\lambda_{\min}\{A\} > \|B\|$, entonces la matriz $A + B$ es definida positiva⁶. Definiendo $A = \frac{2}{\varepsilon} K_p$, $B =$

⁵Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $x = g(y)$. Entonces

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial g(y)}{\partial y}.$$

⁶Demostración. Como por hipótesis $\lambda_{\min}\{A\} > \|B\|$, entonces

$$\lambda_{\min}\{A\} \|x\|^2 > \|B\| \|x\|^2$$

para todo $x \neq \mathbf{0}$.

Observe que el lado izquierdo cumple con

$$x^T A x \geq \lambda_{\min}\{A\} \|x\|^2$$

mientras que el lado derecho satisface

$$\begin{aligned} \|B\| \|x\|^2 &= \|B\| \|x\| \|x\| \\ &\geq \|Bx\| \|x\| \\ &\geq |x^T B x| \\ &\geq -x^T B x. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x^T A x > -x^T B x$$

para todo $x \neq \mathbf{0}$, es decir

$$x^T [A + B] x > 0,$$

lo cual es equivalente a que la matriz $A + B$ sea definida positiva.

$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}$, y empleando el resultado recién enunciado, se concluye que la matriz hessiana es definida positiva si

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right\|. \quad (\text{D.7})$$

Debido a que la constante k_g satisface $k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right\|$, entonces la condición (D.7) es implicada por

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\varepsilon}{2} k_g.$$

El siguiente ejemplo podría desprenderse como un corolario del ejemplo anterior.

Ejemplo D.4 Este ejemplo demostrará que la función $f(\tilde{\mathbf{q}})$ definida en el ejemplo anterior está acotada inferiormente por una forma cuadrática en $\tilde{\mathbf{q}}$.

Especificamente se demostrará que

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \geq \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2$$

es válida para todo $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, con $K_p = K_p^T$ tal que $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, siendo $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ un vector constante, y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ la energía potencial del robot. Aquí se supone que todas las articulaciones del robot son del tipo rotacional.

Para realizar la prueba, se recurrirá al argumento de mostrar que la siguiente función $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva en forma global:

$$f(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2.$$

Con este objetivo se empleará el Lema D.2. Nótese primeramente que $f(\mathbf{0}) = 0$.

El gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ con respecto a $\tilde{\mathbf{q}}$ es:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} f(\tilde{\mathbf{q}}) = -\mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) + K_p \tilde{\mathbf{q}} - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \tilde{\mathbf{q}}.$$

Claramente el gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es nulo para $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

La matriz hessiana $H(\tilde{\mathbf{q}})$ de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ resulta ser:

$$H(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})} + K_p - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I.$$

Ahora se verá que ésta es definida positiva. Se parte del hecho de que la constante k_g satisface para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$:

$$k_g > \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

Por lo tanto, resulta cierto que

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \lambda_{\min}\{K_p\} + k_g > \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|$$

o equivalentemente

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \lambda_{\max}\{[\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I\} > \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

En virtud del hecho de que para dos matrices simétricas A y B se tiene que $\lambda_{\min}\{A - B\} \geq \lambda_{\min}\{A\} - \lambda_{\max}\{B\}$, luego

$$\lambda_{\min}\{K_p - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I\} > \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

Finalmente, invocando el resultado sobre matrices que establece, para una matriz dada A simétrica y definida positiva y una matriz B simétrica, que si se tiene $\lambda_{\min}\{A\} > \|B\|$ entonces $A + B > 0$, esto permite concluir que:

$$K_p - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} > 0$$

siendo justamente ésta la expresión del hessiano. Por lo tanto, éste es definido positivo y en acuerdo con el Lema D.2, la función $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva en forma global.

Índice

- L_2^n , 27
 L_∞^n , 27
 \iff , 21
 \exists , 21
 \forall , 21
 \in , 21
 \implies , 21
 \mathbb{R} , 22
 \mathbb{R}^n , 22
 $\mathbb{R}^{n \times m}$, 23
 \mathbb{R}_+ , 22
- Abdallah, C. T., 6, 18, 124, 212
accionadores, 10, 60, 81, 275
 - electromecánicos, 81, 89
 - hidráulicos, 81
 - lineales, 81acotamiento de soluciones, 46, 134, 160
Alvarez-Ramirez, J., 204
An, C., 233
ancho de banda, 261
Aracil, R., 6, 18, 19, 89
Arimoto, S., xv, 6, 18, 115, 125, 140,
 153, 154, 183, 203, 212
Arnold, V., 53
Arteaga, M. A., xv
articulación
 - rotacional, 59
 - traslacional, 59Asada, H., 5, 18, 88, 124, 211, 233
Åström, K. J., 283
Atkeson, C., 233
- Balaguer, C., 6, 18, 89
- Barbalat
 - lema de, 29Barrientos, A., 6, 18, 89
Bastin, G., 6, 18, 124, 212
Bayard, D., 269
Bejczy, A. K., 90, 233
Berghuis, H., xv
bifurcación, 174, 184
 - horquilla, 175
 - silla-punto, 176Borrelli, R., 53
Braun, K., 283
- Caccavale, F., 234
cantidad de movimiento, 86
Canudas, C., xv, 6, 18, 124, 212, 283
caos, 174
Carelli, R., xv, 269
Cervantes, I., xv, 204
Chiacchio, P., 234
Chiaverini, S., 89
Christoffel
 - símbolos de, 76, 101Chua, L. O., 184
CICESE, xiv, xv
cinemática
 - directa, 61
 - inversa, 61coeficiente de amortiguamiento, 83
Coleman, C., 53
CONACyT, xv
configuraciones singulares, 293

- constante de contrarreacción electromotriz, 83, 276
 constante motor-par, 82, 276
 contracción de mapas, véase teorema control adaptable, 17
 con aprendizaje, 17
 con estructura variable, 17
 de fuerza, 19
 de impedancia, 19
 de movimiento, 209
 de posición, 122
 de posición pura, 16, 122
 de Slotine–Li, véase control PD con compensación
 especificaciones de, 15
 híbrido movimiento/fuerza, 19
 lógica borrosa, 17
 ley de, 122, 210
 neuronal, 17
 P, véase control PD
 Par–Calculado, véase control Par–Calculado
 Par–Calculado+, véase control Par–Calculado+
 PD, véase control PD
 PD con compensación, véase control PD con compensación
 PD con compensación de gravedad, véase control PD con compensación de gravedad
 PD con compensación precalculada de gravedad, véase control PD con compensación precalculada de gravedad
 PD con precompensación, véase control PD con precompensación
 PD+, véase control PD+
 PID, véase control PID
 por precompensación, véase control por precompensación
 control Par–Calculado
 ley de control, 258
 malla cerrada, 258
 péndulo, 261
 control Par–Calculado+ ley de control, 263
 malla cerrada, 265
 control PD, 127
 ley de control, 127
 malla cerrada, 129
 péndulo, 132, 137
 control PD con compensación ley de control, 248
 malla cerrada, 249
 control PD con compensación de gravedad péndulo, 154
 control PD con compensación de gravedad, 143
 ley de control, 143
 malla cerrada, 145
 robustez, 154
 control PD con compensación precalculada de gravedad
 ley de control, 157
 malla cerrada, 159
 péndulo, 160, 174
 control PD con precompensación experimentos, 233
 ley de control, 220
 malla cerrada, 221
 péndulo, 221
 sintonía, 223
 control PD con precompensación de gravedad, véase control PD con compensación precalculada de gravedad
 control PD+ ley de control, 237
 malla cerrada, 238
 péndulo, 240
 control PID ley de control, 187
 malla cerrada, 191
 modificado, 198

- robustez, 203
- sintonía, 199
- control por precompensación
 - ley de control, 215
 - péndulo, 216
- controlador, 122, 210
- coordenadas
 - articulares, 60, 291
 - cartesianas, 61, 291
- Coriolis
 - fuerzas de, 76
- Corke, P.I., 19
- corriente de armadura, 276
- críticamente amortiguado, 261
- Craig, J., 6, 18, 19, 88, 89, 115, 124, 212, 233, 269
- Dawson, D. M., 6, 18, 124, 125, 212
- de Queiroz, M., 6, 18, 125, 212
- Denavit–Hartenberg, 89
- desigualdad de Schwarz, 23
- Desoer, C., 53
- dinámica
 - residual, 107
- Dorsey, J., 204
- e.g., 21
- ecuación diferencial
 - autónoma, 34, 47
 - lineal, 34
 - no lineal, 34
- ecuaciones de movimiento
 - de Hamilton, 86, 87
 - de Lagrange, 62, 76, 86
- Egeland, O., 89, 253
- energía
 - cinética, 75, 87
 - potencial, 75
- engranes, 83, 276
- entrada-salida, 15, 27
- entradas, 11, 77, 84
- equilibrio
 - aislado, 55
- asintóticamente estable, 38
- bifurcación de, 174
- definición, 34
- estable, 36
- exponencialmente estable, 38
- inestable, 38
- error
 - de posición, 209
 - de velocidad, 209
- eslabones
 - numeración de, 59
- espacio
 - L_2^n , 27
 - L_p^n , 27, 52
 - L_∞^n , 28
 - euclíadiano, 22
- estabilidad, 15
 - de robots, 80
 - definición, 36
 - global, 46
 - semiglobal, 193
 - teorema de, 45
- estabilidad asintótica
 - definición, 37
- estabilidad asintótica global, 47
 - definición, 38
 - teorema de, 46
- estabilidad exponencial global
 - definición, 38
- Fomin, S. V., 53
- fricción
 - clásica, 80, 281
 - coeficiente de, 83
 - de Coulomb, 80
 - fuerzas de, 80
 - lineal, 280
 - no lineal, 281
 - viscosa, 80, 280
- Fu, K., 5, 18, 88, 124, 211, 269
- fuerza contra-electromotriz, 276
- fuerzas
 - centrífugas y de Coriolis, 76

- conservativas, 63
de fricción, 80
dissipativas, 80
externas, 76
gravitacionales, 76
no conservativas, 63
- función
candidata de Lyapunov, 44
continua, 27
cuatrática, 42
de Lyapunov, 45
de Lyapunov estricta, 149, 153, 228
definida positiva, 42, 310
definida positiva globalmente, 42
definida positiva localmente, 42
menguante, 42
radialmente desacotada, 42
signo, 81, 281
- g.d.l., 9
- ganancia
de posición, 127
de velocidad, 127
derivativa, 127
integral, 187
- Gil, P., 6, 19
- Godhavn, J. M., 253
- Gonzalez, R., 5, 18, 88, 124, 211, 269
- gradiente, 77, 168, 312
- grados de libertad, 4, 9
- Guckenheimer, J., 184
- Hale, J. K., 53, 184
- Hamilton
ecuaciones de movimiento de, 86
- hamiltoniano, 87
- Hashimoto, K., 19
- Hauser, W., 89
- hessiano, 169, 307, 313
- Hogan, N., 19
- Hollerbach, J., 233
- Holmes, P., 184
- Hopfield, véase neurona de Hopfield
- Horn, R. A., 306
- Horowitz, R., xv
- horquilla, véase bifurcación
- i.e., 21
- Ibarra, J. M., xv
- imán permanente, 275
- incertidumbre, 215
- inductancia, 81, 276
- inercia
del rotor, 82
matriz de, 75
- inestabilidad
definición, 38
- integrador, 187
- ITL, xiv
- Jackson, E. A., 184
- jacobiano, 92, 292
- Johnson, C. R., 306
- Kanade, T., 114, 233
- Kawamura, S., 154, 203
- Kelly, R., 184, 203, 204, 233, 234, 253, 269, 296
- Khalil, H. K., 53, 306
- Khosla, P., 114, 233
- Koçak, H., 184
- Koditschek, D. E., xv, 19, 114, 252, 253
- Kokkinis, T., 233
- Kolmogorov, A. N., 53
- Lagrange
ecuaciones de movimiento de, 62
- lagrangiano, 63, 76
- LaSalle, véase teorema
- LaSalle, J., 53
- Lee, C., 5, 18, 88, 124, 211, 269
- Lefschetz, S., 53
- lema
de Barbalat, 29
- Lewis, F. L., 6, 18, 124, 212
- ley de control, 122, 210

- control Par-Calculado, 258
 control Par-Calculado+, 263
 control PD, 127
 control PD con compensación, 248
 control PD con compensación de gravedad,
 143
 control PD con compensación pre-
 calculada de gravedad, 157
 control PD con precompensación, 220
 control PD+, 237
 control PID, 187
 control por precompensación, 215
- Li, W., 53, 253
 Li, Z., 6, 18, 90
 linealidad, 95
 Lipschitz, 106, 166
 Lischinsky, P., 283
 Loría, A., xv, 203, 204
 Luh, J., 89
 Lyapunov, 15
 estabilidad en el sentido de, 36
 función candidata de, 44
 función de, 45
 método directo, 34, 45
 segundo método, 34
 teoría de, 34, 53
- método directo de Lyapunov, 34
 mínimo global, 168
 malla abierta, 215
 malla cerrada, 122, 210
 control Par-Calculado, 258
 control Par-Calculado+, 265
 control PD, 129
 control PD con compensación, 249
 control PD con compensación de gravedad,
 145
 control PD con compensación pre-
 calculada de gravedad, 159
 control PD con precompensación, 221
 control PD+, 238
 control PID, 191
 manipulador
- definición, 9
 Mann, W. R., 306
 mapa pasivo, 94, 117
 Marcus, M., 306
 Marth, G. T., 233
 Mathelin, M. F., 125, 212
 matriz, 23
 antisimétrica, 24, 102
 centrífuga y de Coriolis, 76, 100
 cuadrada, 24
 de inercia, 75, 98
 de transferencia, 31
 definida negativa, 26
 definida positiva, 25, 42
 diagonal, 24
 hessiana, 169, 307, 313
 identidad, 25
 jacobiana, 92, 292
 no singular, 25
 particionada, 161
 semidefinida negativa, 26
 semidefinida positiva, 25
 simétrica, 24
 singular, 25
 transpuesta, 23
- Mayorga, R. V., 89
 Meza, J. L., 203
 Milano, N., 89
 Minc, H., 306
 Miyazaki, F., 154, 183, 203
 modelo
 cinemático, 88
 cinemático directo, 61, 291
 cinemático inverso, 61, 292
 dinámico, 12, 75, 88, 286
 con accionadores, 81
 con fricción, 80
 momentum, 86
 motores de corriente continua, 81, 121,
 275
 modelo lineal, 81, 280
 modelo no lineal, 281

- Murphy, S., 204
 Murray, R. M., 6, 18
 Nagarkatti, S. P., 6, 18, 125, 212
 Nakamura, Y., 6
 neurona de Hopfield, 55
 Nicklasson, P., 203
 Nijmeijer, H., xv, 90
 norma
 espectral, 26
 euclídea, 23
 Ogata, K., 282
 Ollero, A., 6, 18
 Olsson, H., 283
 optimización, 168
 Ortega, R., xv, 203, 204, 253, 269
 oscilador
 armónico, 41
 de Van Der Pol, 39
 Ostertag, E., 125, 212
 Pámanes, A., xv
 péndulo, 48
 con fricción, 57
 control Par-Calculado, 261
 control PD, 132, 137
 control PD con compensación de gravedad, 154
 control PD con compensación pre-calculada de gravedad, 160
 control PD con precompensación, 221
 control PD+, 240
 control PID, 204
 control por precompensación, 216
 energía cinética, 49
 energía potencial, 49
 modelo, 87
 Paden, B., 154, 233, 252
 Panja, R., 154, 252
 parámetros
 dinámicos, 95
 Parker, T. S., 184
 pasividad, 94, 117
 Paul, R., 5, 88, 124, 203, 211
 Peñín, L. F., 6, 18, 89
 planeación del itinerario, 17
 Pomares, J., 6, 19
 posiciones articulares, 10, 60
 posiciones cartesianas, 61
 propiedades, 299
 de dinámica residual, 107
 de la matriz centrífuga y de Coriolis, 100
 de la matriz de inercia, 98
 del vector de gravedad, 105
 Puente, S. T., 6, 19
 punto fijo, 32
 Qu, Z., 6, 18, 124, 204, 212
 Raibert, M., 19
 Ramadarai, A. K., 233
 Rayleigh-Ritz, véase teorema
 regulación, 15
 resistencia de armadura, 83, 276
 Reyes, F., 234, 296
 Riedle, B. D., 233
 Rimon, E., 19
 Rizzi, A., 114, 253
 robótica, 3
 robot, 3
 cartesiano, 73, 93
 definición, 4, 9
 móvil, 3
 modelo dinámico, 75
 robots
 estabilidad de, 80
 navegación de, 17
 Rocco, P., 204
 símbolos de Christoffel, 76
 Sage, H. G., 125, 212
 Salgado, R., 233
 salidas, 11, 77, 84
 saltos catastróficos, 174

- Samson, C., xv, 203
 Santibáñez, V., 115, 203, 233
 Sastry, S., 6, 18, 53
 Schwarz
 desigualdad de, 23
 Sciavicco, L., 6, 18, 89, 125, 212
 seguimiento de trayectoria, 15
 sensores, 122, 210
 Siciliano, B., 6, 18, 19, 89, 124, 125, 212
 silla–punto, véase bifurcación
 sintonía, 143
 sintonía, 199
 control PD con precompensación, 223
 Sira–Ramírez, H., xv, 203
 sistema dinámico lineal, 31, 188, 214
 sistema lineal multivariable, 260
 Slotine, J. J., xv, 5, 18, 53, 88, 124, 211, 253
 Slotine–Li, véase control
 Spong, M., xv, 6, 18, 88, 114, 124, 140, 154, 203, 212, 253, 269, 283
 Stoughton, R., 233
 Sylvester, véase teorema
 Takegaki, M., 140, 153, 183
 Takeyama, I., 233
 Tarn, T. J., 90, 233
 Taylor, A. E., 306
 tecnología digital, 213
 teorema
 de contracción de mapas, 33
 aplicación, 133, 166
 de estabilidad, 45
 de estabilidad asintótica global, 46
 de LaSalle, 47, 51
 aplicación, 131, 146, 171, 197
 de Matrosov, 252
 de Rayleigh–Ritz, 26
 de Sylvester, 25
 de Taylor, 307
 del valor medio, 29, 300
 del valor medio para integrales, 308
 Tomei, P., 183
 Torres, F., 6, 19
 Tourassis, V., 90
 unión, 59
 valor absoluto, 22
 valor medio, véase teorema
 valores propios, 26
 Van Der Pol, véase oscilador
 van der Schaft, A. J., 90
 vector, 22
 de fuerzas externas, 76
 de fuerzas gravitacionales, 76
 de gravedad, 105
 velocidades articulares, 10
 Vidyasagar, M., 6, 18, 52, 53, 88, 114, 124, 140, 154, 203, 212, 269, 283
 Villani, L., 19
 voltaje, 83, 276
 Wen, J. T., xv, 125, 204, 212, 233, 269
 Whitcomb, L. L., xv, 114, 253
 Whitney, D., 19
 Wiggins, S., 184
 Wong, A. K., 89
 Yoshikawa, T., 6, 18, 89, 90, 124, 140, 154, 212, 269
 Yun, X., 90
 Zhang, F., 6, 18, 125, 212