Problemes

Anàlisi i Dimensionament de Xarxes

Grau en Enginyeria Telemàtica

Departament d'Enginyeria Telemàtica
Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
Universitat Politècnica de Catalunya

Teoria de cues. Sistemes markovians. Part I

Problema 1. Considereu un sistema format per 3 servidors i una cua de longitud 3 al qual s'ofereixen peticions de servei segons un procés de Poisson de taxa promig 0,5 peticions/min. La distribució del temps de servei es considera exponencial, essent el temps mig de servei de 3 minuts/petició. Calculeu:

a. Percentatge de temps que el sistema està buit.
b. Probabilitat de bloqueig del sistema.
c. Nombre mig d'elements a la cua.
d. Temps mig de permanència al sistema.
e. Percentatge de temps que està ocupat cada servidor suposant accés aleatori.

Problema 2. Considereu un sistema format per 4 servidors i 2 posicions de cua, al qual s'ofereixen peticions de servei segons un procés de Poisson de taxa promig 0,5 peticions/min. La distribució del temps de servei es considera exponencial, essent el temps mig de servei de 12 minuts per petició. Calculeu:

a. Percentatge de peticions perdudes.
b. Temps mig de permanència en cua.
c. Nombre mig d'elements al sistema.
d. Nombre mig de servidors ocupats.
e. Percentatge de temps que està ocupat cada servidor suposant accés aleatori.

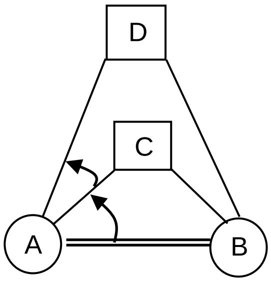
Problema 3. Considereu un sistema format per 2 servidors i 3 posicions de cua, al qual s'ofereixen peticions de servei segons un procés de Poisson de taxa promig 0,5 peticions/min. La distribució del temps de servei es considera exponencial, essent el temps mig de servei de 4 minuts per petició. Calculeu:

a. Percentatge de temps que el sistema està buit.
b. Temps mig entre peticions ateses.
c. Percentatge de peticions demorades.
d. Trànsit cursat.
e. Percentatge de temps que està ocupat cada servidor suposant accés seqüencial.
f. Temps mig que el sistema es manté amb els 2 servidors ocupats i la cua buida.

Problema 4. Es disposa d'un enllaç entre dues centraletes telefòniques amb un total de 7 circuits. Durant l'hora carregada s'estima que es reben, en promig, 30 peticions de trucada. La durada promig de cada trucada és de 10 minuts. Si un usuari intenta fer una trucada i no hi ha circuits lliures, la trucada es perd. Modelant el procés d'arribades com un procés de Poisson i suposant que la distribució del temps de servei és exponencial, calculeu:

a. Probabilitat que una petició de trucada no es pugui atendre.
b. Número mig de circuits ocupats.
c. Percentatge de temps que està ocupat el darrer circuit del sistema considerant ocupació aleatòria.
d. Percentatge de temps que està ocupat el darrer circuit del sistema considerant ocupació seqüencial.
e. Número mínim de circuits que caldria afegir per tal que el percentatge d'intents de trucada perduts fos inferior a l'1%.

Problema 5. A la xarxa telefònica de la figura s'ofereixen 6 Er d'A a B. (Suposeu que el procés d'arribades és Poisson i que la distribució del temps de servei és exponencial).



Les peticions de trucada s'ofereixen en primera opció als circuits de l'enllaç que uneix directament les centrals A i B. Si tots els circuits de la ruta directa estan ocupats, la petició de trucada s'ofereix als circuits de la ruta alternativa que passa per la central tàndem C. Si tots els circuits d'aquest enllaç estan ocupats, la petició es desborda sobre els circuits d'una segona ruta alternativa que passa per la central tàndem D.

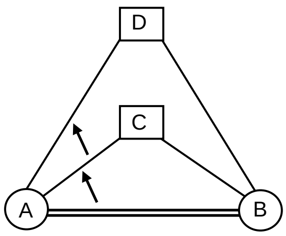
La secció A-B es vol dimensionar amb el nombre mínim de circuits per tal que el nombre mig de circuits ocupats sigui com a mínim de 5. La secció A-C es vol dimensionar amb el nombre mínim de circuits tal que el tràfic perdut de la secció sigui inferior a 0.5 Er. La secció A-D es vol dimensionar amb el nombre mínim de circuits per a que el percentatge de peticions de trucada perdudes en tot el sistema sigui inferior a l'1%.

a. Determineu el nombre de circuits necessari en cadascuna de les seccions A-B (C_{AB}), A-C (C_{AC}) i A-D (C_{AD}).

Segons el vostre disseny, calculeu:

b. Percentatge d'intents de trucada que es perden a cada secció.
c. Tràfic ofert a la secció A-D.
d. Nombre mig de circuits ocupats a la secció A-C.
e. % de temps que està ocupat un circuit qualsevol de la secció A-D (suposeu accés aleatori als circuits d'aquest grup).

Problema 6. Considereu la xarxa telefònica de la figura on s'ofereix un trànsit de 15 Er del node A al node B. (Considereu que el procés d'arribades és Poisson). Les peticions de trucada s'ofereixen en primera opció als circuits de l'enllaç A-B. Si tots els circuits de l'enllaç A-B estan ocupats, les peticions es desborden a la ruta alternativa a través del node C. Com a última opció es disposa d'una segona ruta de desbordament a través del node D. Si tots els circuits d'A-D estan ocupats, la petició es perd. Suposeu que el temps de servei es considera exponencial.



Calculeu, sense fer aproximacions:

a. Nombre mínim de circuits a l'enllaç A-B, per tal que el trànsit desbordat cap a l'enllaç A-C no superi el 25% del trànsit ofert a l'enllaç A-B.
b. Nombre mínim de circuits a l'enllaç A-C per tal que el trànsit cursat de l'enllaç A-C sigui superior a 1 Er.
c. Nombre mínim de circuits a l'enllaç A-D per tal que la probabilitat de pèrdua de l'enllaç A-D sigui inferior a 0,1.

Segons el disseny realitzat, calculeu:

d. Utilització del primer circuit de l'enllaç A-D en el cas que l'accés a aquest grup de circuits sigui aleatori i en el cas que l'accés sigui seqüencial.

Problema 7. Un operador de telefonia estudia com donar servei a una determinada població considerada infinita. El comportament estadístic d'aquesta població queda determinada pel fet que realitza 6 intents de trucada cada minut d'una durada exponencial de mitjana 180 seg. L'operador disposa d'una central que permet configurar fins a C_1 circuits de sortida de primera elecció i d'accés aleatori, mentre que la resta dels circuits, C_2, es configuren com a segona elecció i d'accés seqüencial. Per obtenir C_1 i C_2, l'operador desitja realitzar els següents càlculs sense fer aproximacions:

a. Calculeu el valor mínim de C_1 per tal que el nombre mig d'usuaris fent trucades utilitzant circuits d'aquest grup sigui com a mínim de 9.

b. Quin seria el percentatge d'utilització d'un circuit del primer grup? Representeu aquest percentatge per a diferents valors del tràfic ofert per la població (per exemple: 1Er, la meitat del valor real, el valor real i el doble del valor real), indicant el valor màxim que pot tenir el paràmetre representat. Fins a quin valor de TO es podria admetre si la central acceptés que, com a màxim, un 60% del TO s'oferís sobre el grup de circuits de segona elecció?

c. Calculeu el nombre mínim de circuits del segon grup per tal que els dos darrers circuits d'aquest grup cursin menys del 9% del tràfic ofert per la població. Quina és, en aquest cas, la probabilitat que una trucada d'un usuari no es pugui cursar en cap circuit?

d. Quants circuits s'haurien d'afegir, com a mínim, en el segon grup per tal d'aconseguir que la probabilitat que una trucada d'un usuari no es pugui cursar en cap circuit sigui com a molt de l'1%? Quin serà, en aquest cas, el nombre mig d'usuaris fent ús de circuits del segon grup?

Control d'admissió

Problema 8. Considereu un control d'admissió a l'entrada d'una xarxa de paquets on es multiplexen N=125 fonts digitals modelades com a fonts ON-OFF amb un temps de permanència en ON exponencial de promig 0,1 segons, i un temps de permanència en OFF exponencial de promig 4,9 segons. En ON, cada font genera informació a taxa constant R_p=4000 kb/s. Calculeu:

a. Probabilitat que una font estigui ON. (Feu el model de la font i calculeu la probabilitat de l'estat ON).

b. Probabilitat que hi hagi 120 fonts en ON.

c. Probabilitat que hi hagi més de 120 fonts en ON.

d. Temps mig que es mantenen 120 fonts en ON i 5 en OFF.

e. Calculeu la capacitat equivalent de l'enllaç per a una cota de la probabilitat de pèrdua $\varepsilon=10^{-5}$ utilitzant l'aproximació gaussiana segons la qual $C_L=R_p(m+k\sigma)$, on m és el nombre promig de fonts en ON, σ és la desviació típica del nombre de fonts en ON i $k = [-\ln(2\Pi)-2\ln(\varepsilon)]^{1/2}$. Compareu el resulta amb el valor de C_L resultant de considerar totes les fonts actives generant a taxa de pic i considerant el nombre mig de fonts actives. Comenteu el resultat.

f. Feu una gràfica de C_L en funció de N, mantenint R_p, mantenint la probabilitat de font en ON i fent variar N des de 10 fins a 250 per als tres models que coneixeu (aproximació gaussiana, totes les fonts actives a taxa de pic i el nombre mig de fonts actives transmetent a taxa de pic).

Problema 9. Considereu un control d'admissió a l'entrada d'una xarxa de paquets on es multiplexen 50 fonts digitals modelades com a fonts ON-OFF amb un temps de permanència en ON exponencial de promig 200 ms, i un temps de permanència en OFF exponencial de promig 600 ms. En ON, cada font genera informació a taxa constant R_p=250 kb/s. Calculeu:

a. Probabilitat que hi hagi 15 fonts en ON.

b. Temps mig que es mantenen 35 fonts en ON i 15 en OFF.

c. Calculeu la capacitat equivalent de l'enllaç per a una probabilitat de pèrdua (ε) de 10^{-5} utilitzant l'aproximació gaussiana segons la qual $C_L=R_p(m+k\sigma)$, on m és el nombre promig de fonts en ON, σ és la desviació típica del nombre de fonts en ON i $k = [-\ln(2\pi)-2\ln(\varepsilon)]^{1/2}$. Compareu el resultat amb els valors de C_L que s'obtenen utilitzant les aproximacions de la taxa de pic i de la taxa promig de les fonts, respectivament.

d. Suposant que C_L=5700 kb/s, indiqueu com es calcularia la probabilitat de tenir una nombre de fonts en ON generant un trànsit superior al que permet la velocitat de l'enllaç. (Deixeu indicada l'operació que faríeu, sense resoldre-la).

Control d'accés

Problema 10. S'utilitza un token bucket com a mecanisme de control de trànsit. El bucket s'omple a raó d'1 token cada 6,25 ms i la capacitat màxima del bucket és de 15 tokens. Suposeu es vol controlar el comportament d'una font que genera paquets de longitud constant igual a 1400 bytes i que la transmissió de cada paquet requereix un token.

a. Considerant que no hi ha buffer per guardar els paquets de la font que no troben cap token al bucket, calculeu la longitud màxima de les ràfegues de paquets que pot generar la font i el temps mínim entre ràfegues de longitud màxima per a que no es perdin paquets suposant que, quan genera paquets, la font ho fa a 2,24 Mb/s.

Suposant que la font que genera paquets segons un procés de Poisson de taxa promig 0,2 paquets/ms, calculeu:

b. Longitud mínima del buffer de dades per a el percentatge de paquets perduts sigui inferior al 20,2%.

Suposant que el token pool té capacitat per 3 tokens i que el buffer de dades permet emmagatzemar fins a 4 paquets, calculeu:

c. Percentatge de temps que el bucket està buit.
d. Probabilitat de pèrdua de paquets.
e. Número mig de tokens al bucket.
f. Retard promig de transmissió dels paquets.
g. Temps mig entre paquets que es transmeten.

Problema 11. S'utilitza un token bucket com a mecanisme de control de trànsit. El bucket s'omple a raó d'1 token cada 4 ms i la capacitat màxima del bucket és de 2 tokens. Es vol controlar el comportament d'una font que genera paquets segons un procés de Poisson de taxa promig 0,3 paquets/ms. Suposeu que es disposa d'un buffer de dades que permet mantenir 3 paquets en espera. Suposant que l'arribada de tokens segueix una distribució exponencial i utilitzant el model de cadenes de Markov de temps continu, calculeu:

a. Percentatge de paquets perduts.
b. Taxa de paquets transmesos.
c. Temps mig d'espera en cua dels paquets al buffer de dades.

Problema 12. Considereu una font que genera paquets a taxa 0,9 paquets/segon (segons un procés de Poisson). Per controlar la taxa de la font s'utilitza un token bucket amb una cubeta de 5 tokens de capacitat màxima que s'omple a taxa 0,8 tokens/segon.

Compareu la taxa cursada i la probabilitat de pèrdua obtinguda utilitzant els dos models analítics següents:

a. Una cadena de Markov de temps continuo (model M/M/1/K).
b. Una cadena de Markov de temps discret.

Teoria de cues. Sistemes markovians. Part II.

Problema 13. Considereu un servei telefònic d'atenció a l'usuari d'una empresa on es reben, en promig, 0,5 trucades cada minut. La durada promig de les consultes dels usuaris que truquen és de 10 minuts. Suposeu que el procés d'arribades es modela com un procés de Poisson i que el temps de servei es considera exponencial. Suposeu també que el sistema disposa d'un dispositiu que permet mantenir els usuaris del servei en espera fins que son atesos. Calculeu:

a. Número de treballadors mínim per tal que el percentatge d'usuari en espera per ser atesos no superi el 10%.
b. Temps mig d'espera en cua dels usuaris del servei.
c. Probabilitat que els usuaris estiguin en cua un temps superior a 30 segons.

Problema 14. Considereu un router amb una interfície connectada a un enllaç de fibra òptica on arriben, en promig, 200 paquets cada 1 ms (seguint un procés de Poisson). La longitud dels paquets segueix una distribució exponencial, de promig 750 bytes. El router és capaç de transmetre cada paquet utilitzant qualsevol longitud d'ona lliure de la fibra. La velocitat de transmissió de cada longitud d'ona és d'1Gb/s. Considerant que no hi ha pèrdua de paquets al buffer d'accés a l'enllaç, calculeu:

a. Número mínim de longituds d'ona necessàries per tal que el percentatge de paquets que han d'esperar abans de ser transmesos sigui inferior al 10%.

Suposant que hi ha 3 longituds d'ona, calculeu:

b. Percentatge de paquets que han d'esperar a la cua un temps inferior a 1,5 μs.

c. Temps mig d'espera dels paquets a la interfície del router.

d. Temps mig que hi ha 2 longituds d'ona ocupades i 1 buida.

e. Percentatge de temps que està ocupada cada longitud d'ona en els dos casos següents:

e1. Ocupació aleatòria.

e2. Ocupació seqüencial. (En aquest cas plantegeu la cadena però no resolgueu numèricament el sistema).

Problema 15. Una xarxa d'àrea local disposa d'un router que proporciona un accés a Internet de 2Mb/s. Els paquets arriben al router amb una distribució de Poisson de taxa 50 paquets/seg i tenen una longitud distribuïda exponencialment de promig 1500 bytes. El router té un buffer intern de capacitat considerada il·limitada. Calculeu:

a. Retard mig de transmissió d'un paquet.

S'afegeix una segona targeta al router que proporciona un accés a Internet redundant al primer i de la mateixa velocitat.

Suposant que les dues targetes s'utilitzen de forma equiprobable i que cadascuna disposa del seu propi buffer intern, calculeu:

b. Retard promig de transmissió d'un paquet. Hauria de ser la meitat del calculat a l'apartat a? Per què?

c. Utilització de cada enllaç.

d. Ocupació promig de cada buffer (en bytes).

Suposant que el segon enllaç només s'utilitza quan el primer està ocupat i que les dues targetes comparteixen un buffer únic, calculeu:

e. Utilització de cada enllaç.

f. Ocupació promig del buffer (en bytes).

Considereu novament que només es disposa d'un enllaç d'accés a Internet.

El router configura un mecanisme de control de congestió segons el qual, quan hi ha més de 2 paquets a la cua, redueix la taxa de generació de paquets a la meitat. Calculeu:

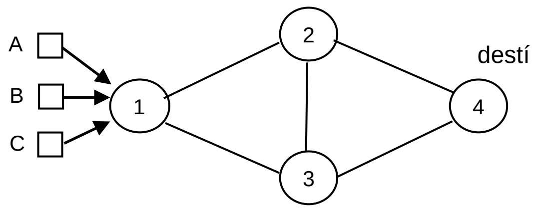
g. Percentatge de temps durant el qual les fonts tenen la taxa de generació de paquets reduïda a la meitat.

Si, a més del control de congestió, es limita la longitud del buffer a 9 posicions, calculeu:

h. Percentatge de paquets perduts.

i. Temps mig que es manté la cua plena.

Problema 16. En una xarxa de commutació de paquets com la de la figura, els terminals A, B i C generen tràfic de Poisson cap al destí (que es troba directament connectat al node 4) amb taxes, λ_A=1 paq/seg, λ_B= 2 paq/seg i λ_C=2,5 paq/seg, respectivament. La longitud dels paquets es considera distribuïda exponencialment, de promig 1400 bytes. La velocitat de transmissió de tots els enllaços és de 67,2 kb/s. Calculeu:



a. Retard mig que experimenta un paquet del terminal A des que es genera fins que arriba al destí (node 4) considerant que tots els paquets segueixen el camí 1-2-4.

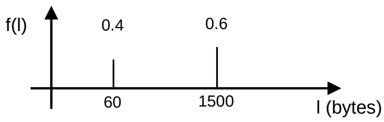
b. Retard mig d'un paquet qualsevol en el cas que cada node enviï els paquets amb la mateixa probabilitat per cadascun dels seus enllaços de sortida, excepte en el node 3 que els transmet cap al node 4 amb probabilitat 1.

Teoria de cues. Sistemes semi-markovians. Prioritats

Problema 17. Es disposa d'un switch amb prioritats que segueix la norma IEEE 802.1p. El switch té un port connectat a un enllaç de 128 kb/s per on es transmeten dos fluxos de paquets. Un dels fluxos correspon a paquets tipus telnet que arriben a raó de 15 paq/seg (arribades segons un procés de Poisson) i tenen longitud exponencial, de promig 80 bytes; l'altre flux és de paquets tipus ftp que arriben a raó de 5 paq/seg (arribades segons un procés de Poisson) i tenen longitud exponencial, de promig 1600 Bytes. Calculeu el temps mig des de l'arribada d'un paquet al switch fins que en finalitza la transmissió en els següents casos:

a. Sense prioritats.
b. Fent que els paquets telnet siguin prioritaris però sense possibilitat d'expulsar l'element en servei.
c. Fent que els paquets telnet siguin prioritaris i considerant la possibilitat d'expulsar l'element en servei en cas de ser un paquet menys prioritari.

Problema 18. Es disposa d'un enllaç de 128 kb/s per transmetre un flux de paquets que arriben segons un procés de Poisson de taxa promig 15 paq/seg. El 40% dels paquets tenen longitud constant 60 bytes i el 60% tenen longitud constant 1500 bytes. Calculeu:



a. Temps mig entre que arriba un paquet i en finalitza la seva transmissió (és a dir, temps mig de permanència al sistema) considerant una disciplina de cua FIFO.

Es defineixen prioritats, de manera que els paquets de 60 bytes són prioritaris respecte els paquets de 1500 bytes.

Considerant que no es pot expulsar en cap cas l'element en servei, calculeu:

b. Temps mig entre que arriba un paquet i en finalitza la seva transmissió.
c. Probabilitat que s'estigui transmetent un paquet de longitud 60 bytes.
d. Percentatge de temps que l'enllaç està ocupat transmetent paquets de longitud 1500 bytes.

Considerant que es pot expulsar l'element en servei si és menys prioritari que el que arriba, calculeu:

e. Temps mig entre que arriba un paquet i en finalitza la seva transmissió.
f. Temps mig que està expulsat un paquet de baixa prioritat.
g. Probabilitat que hi hagi un paquet de baixa prioritat amb el servei ja iniciat.

Problema 19. Un commutador té una interfície connectada a un enllaç de 2048 kb/s. El procés d'arribada de paquets a la interfície del commutador es modela com un procés de Poisson de taxa promig 450 paquets/segon. El 55% dels paquets que arriben tenen longitud constant 256 bytes (tipus A). El 25% tenen longitud exponencialment distribuïda de promig 768 bytes (tipus B). El 20% restant tenen longitud uniformement distribuïda[1] entre 256 i 1024 bytes (tipus C). Suposant que no es perden paquets, calculeu:

a. Nombre mig de paquets que hi ha a la cua.
b. Com caldria aplicar prioritats (sense expulsió) per tal de minimitzar el temps mig d'espera en cua? Calculeu el temps mig d'espera en cua en aquest cas.
c. Amb les prioritats definides a l'aparta anterior, calculeu el temps mig de permanència al sistema aplicant prioritats amb expulsió.

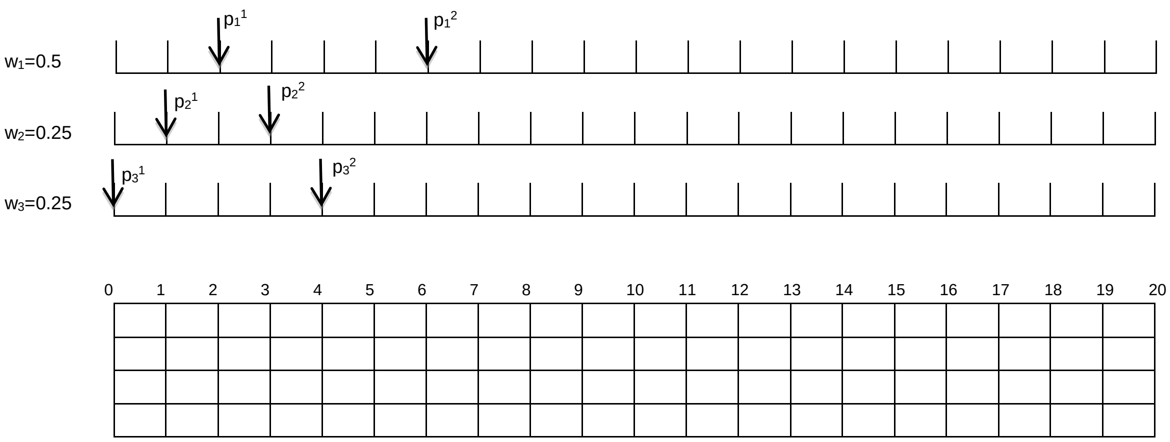
[1] Per a una variable aleatòria uniformement distribuïda entre a i b, el valor promig és x=(a+b)/2 i la variança σ^2=(b-a)^2/12

Planificadors.

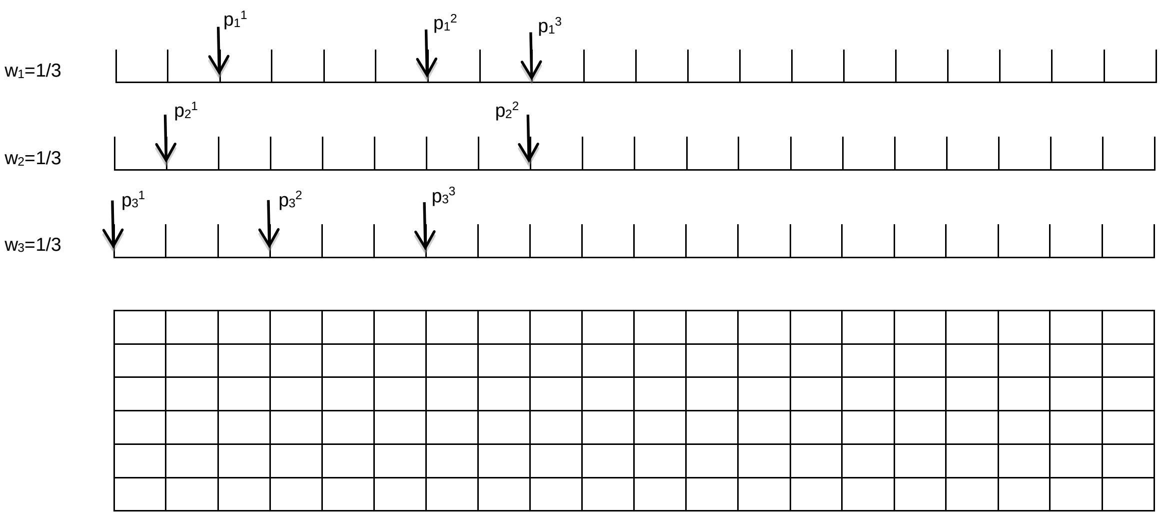
Problema 20. Indiqueu el vector d'assignació que correspon segons el criteri *weighted max-min fairness* considerant un canal de capacitat C=20, un vector de demandes D=[4 2 4 8 5] i un vector de pesos P=[2 1 1 4 2].

Problema 21. Indiqueu el vector d'assignació que correspon segons el criteri *weighted max-min fairness* considerant un canal de capacitat C=20, un vector de demandes D=[8 4 2 5 3] i un vector de pesos P=[2 1 1 4 2].

Problema 22. Considereu un planificador WFQ i determineu l'ordre d'enviament de la seqüència de paquets que s'indica a la figura. (Considereu que els pesos dels fluxos són 2/4, 1/4 i 1/4, respectivament, i que tots els paquets tenen longitud normalitzada igual a 2).

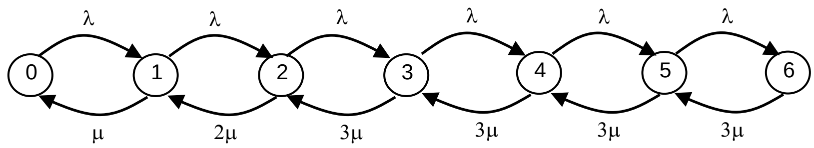


Problema 23. Considereu un planificador WFQ i determineu l'ordre d'enviament de la seqüència de paquets que s'indica a la figura. (Considereu que els pesos dels fluxos són 1/3, 1/3 i 1/3, respectivament, i que tots els paquets tenen longitud normalitzada igual a 2, excepte els paquets del flux 1 que tenen longitud normalitzada igual a 1).



Solucions

Problema 1.



a. P_0*100 = 21.3689948 %

b. $P_3+P_4+P_5+P_6$ = 0,22537563

c. $N_{cua} = 1P_4 + 2P_5 + 3P_6$ = 0,16527546 peticions

d. $T_{sistema} = N_{sistema} / \lambda_{cursada}$ = 3,33559322 minuts

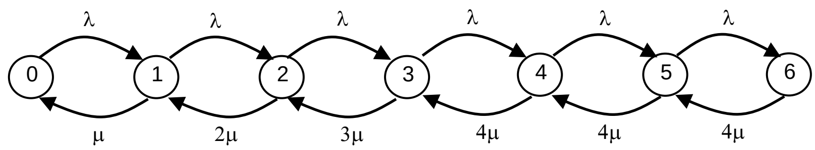
   $N_{sistema} = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6$ = 1,6427379 peticions

   $\lambda_{cursada} = \lambda P_0 + \lambda P_1 + \lambda P_2 + \lambda P_3 + \lambda P_4 + \lambda P_5 = \lambda\,(1\text{-}P_6)$ = 0,49248748 peticions/minut

e. TC/3 = [$\lambda_{cursada}\,(1/\mu)$] / 3 = 0,49248748 → 49,248748 %

Problema 2.

.



a. PP = $\lambda_{perduda}/\lambda_{oferta} = \lambda P_6 / \lambda = P_6$ = 0,38267717 → 38,2677 %

b. $T_{cua} = N_{cua} / \lambda_{cursada}$ = 3,30612245 minuts

   $N_{cua} = 1P_5 + 2P_6$ = 1,02047244 peticions

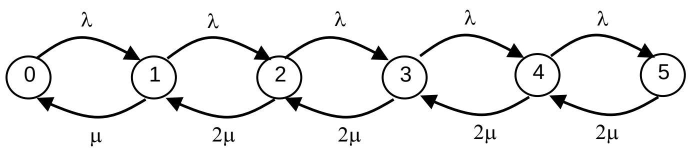
   $\lambda_{cursada} = \lambda P_0 + \lambda P_1 + \lambda P_2 + \lambda P_3 + \lambda P_4 + \lambda P_5 = \lambda\,(1\text{-}P_6)$ = 0,30866142 peticions/minut

c. $N_{sistema} = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6$ = 4,72440945 peticions

d. $N_{servidors} = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 4P_5 + 4P_6$ = 3,703937 servidors (TC = $\lambda_{cursada}\,(1/\mu)$ = 3,703937 Er)

e. TC/4 = [$\lambda_{cursada}\,(1/\mu)$] / 4 = 0,92598425 → 92,598425 %

Problema 3.



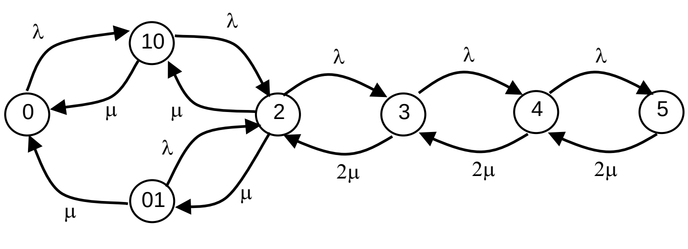
a. P_0 = 0,09090909 → 9,9090909 %

b. 1 / $\lambda_{cursada}$ = 2,4444444 minuts

c. PD = $\lambda_{demorada}/\lambda_{oferta} = (\lambda P_2 + \lambda P_3 + \lambda P_4)/ \lambda = P_2 + P_3 + P_4$ = 0,54545454 → 54,545454 %

d. TC = $\lambda_{cursada}\,(1/\mu)$ = 1,63636363 Er

e.



$$\begin{cases} P_{01} + P_{10} = P_1 = 0{,}18181818 \\ (\lambda+\mu)\, P_{01} = \mu P_2 = 0{,}25 * 0{,}18181818 = 0{,}0454545 \rightarrow P_{01} = 0{,}06060606;\ P_{10} = 0{,}12121212 \end{cases}$$

$TC_{primer\_servidor} = P_{10} + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 – P_0 – P_{01}$ = 0,84848484 → 84,8484 %

$TC_{segon\_servidor} = P_{01} + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 – P_0 – P_{10}$ = 0,78787878 → 78,7878 %

f. temps mig 2 servidors ocupats i la cua buida = temps mig de permanència a l’estat 2 del sistema = 1 / (λ+2μ) = 1 minut

Problema 4.

a. PP = 0.120519.
b. $N_{servidors\ ocupats}$ = 4.3974 servidors.
c. % de temps darrer circuit ocupat (accés aleatori) = 62.82%.
d. % de temps darrer circuit ocupat (accés seqüencial) = 35.664%.
e. cal afegir 4 circuits.

Problema 5.

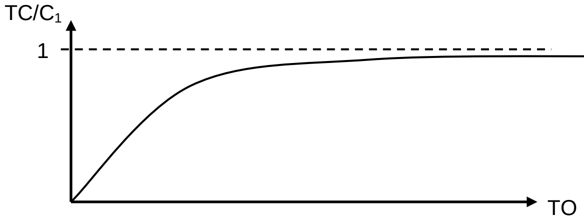
a. C_{AB} = 8 circuits, C_{AC} = 1 circuits, C_{AD} = 4 circuits.
b. PP_{AB} = 0.121876, PP_{AC} = 0.61657 circuits, PP_{AD} = 0.069439.
c. TO_{AD} = 0.45087.
d. $N_{servidors\ ocupats\ AC}$ = 0.280386.
e. % de temps ocupat un circuit d'AD = 10.48905%.

Problema 6.

a. $C_{AB\ min}$=14
b. $C_{AC\ min}$=2
c. $C_{AD\ min}$=7
d. $TC_{1er\ AD}$=0.28084 Er en accés aleatori, $TC_{1er\ AD}$=0.471735 Er en accés seqüencial

Problema 7.

a. C_{1min} = 10 circuits
b.



$TC/C_1 = TO\ [\ 1 – Er_B(TO,C_1)\ ]$

C_1 = 10 circuits

TO = 1Er → TC/C_1 = 0,1
TO = 9Er → TC/C_1 = 0,7488
TO = 18Er → TC/C_1 = 0,91173
TO = 36Er → TC/C_1 = 0,965016

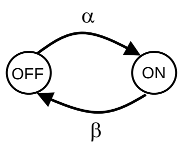
Tràfic ofert al segon grup de circuits ≤ 60% TO
$TO * Er_B(TO,C_1) \leq 0,6\ TO \rightarrow Er_B(TO,10) \leq 0,6 \rightarrow TO \leq 23,4$ Er

c. $TC_{2\ darrers\ circuits\ grup\ C2} = TO\ [\ Er_B(TO,C_1+C_2-2) - Er_B(TO,C_1+C_2)\ ] \leq 9\%\ TO \rightarrow C_1+C_2 \geq 13$, $C_{2\ min}$ = 3 circuits
$PP = PB = Er_B(18,13) = 0,357149$

d. $Er_B(18,C) \leq 0,01 \rightarrow C \geq 28 \rightarrow C_{addicionals}$ = 28 – 10 – 3 = 15 circuits
$TC_{2on\ grup} = 18\ [\ Er_B(18,10) – Er_B(18,28)\ ] = 8,75502$ Er

Problema 8.

a.



$\alpha P_{OFF}=\beta P_{ON}$
$P_{ON}+P_{OFF}=1$ → $P_{ON} = \alpha/(\alpha+\beta)$ = (1/4.9)/((1/0.1)+(1/4.9)) = 0.02

b. $P_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ $P_{120} = 2,82 * 10^{-196}$

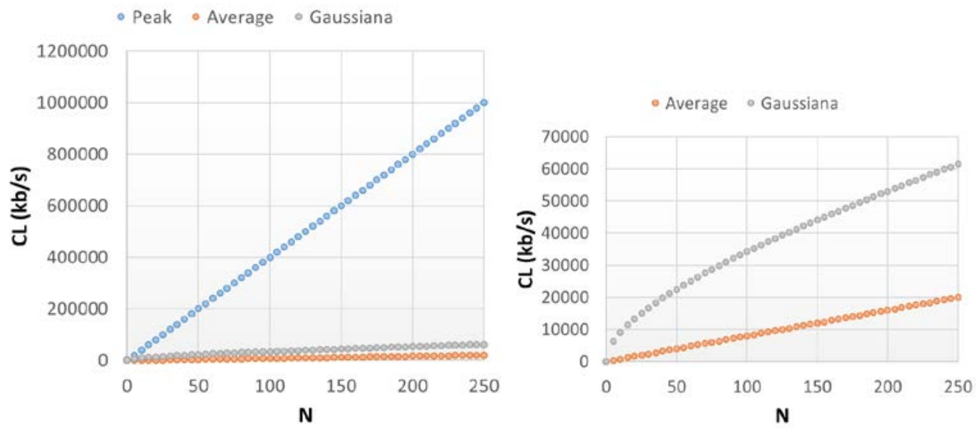
c. $P_{121}+P_{122}+P_{123}+P_{124}+P_{125} = 2,38 * 10^{-199}$

d. $1/(5\alpha+120\beta)$ = 0.832625 ms

e. aproximació peak → C_L = 500 Mb/s
aproximació gaussiana → C_L = 38,81959 Mb/s
aproximació average → C_L = 10 Mb/s

(Comentar el resultat!!!!)

f.



Problema 9.

a. $P_k = \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{N-k}$ $\quad P_{15} = \begin{pmatrix} 50 \\ 15 \end{pmatrix} 0{,}25^{15}\, 0{,}75^{35} = 0{,}08883558$

b. $1/(15\alpha+35\beta) = 5$ ms

c. aproximació peak → C_L = 12500 kb/s
aproximació gaussiana → C_L = 6705,63819 kb/s
aproximació average → C_L = 3125 kb/s

d. $C = C_L/R_p$ = 5700 kb/s / 250 kb/s = 22.8
Probabilitat més fonts actives que les que permet l'enllaç = $\sum_{k=23}^{50} P_k$

Problema 10.

a. Quan el bucket està ple, si la font genera a 0,2 paq/ms es triga 15/(0,2-0,16) = 372 ms a buidar-lo.
Quan el bucket està buit, mantenint la font en silenci es triga 15/0,16 = 93,72 ms en tornar-lo a omplir.

b. Suposant un model M/M/1/B+D: $PP = \rho^{(B+D)}(1-\rho)/(1-\rho^{(B+D+1)})$. Quan B=15, D=5, aleshores PP=0,201.

Model M/M/1/7 amb ρ=1,25
P_0=0,050399, P_1=0,062998, P_2=0,078748, P_3=0,098435, P_4=0,123043, P_5=0,153804, P_6=0,192255 i P_7=0,240319.

c. $P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$ = 0,807856 → 80,8 %

d. $PP = P_7$ = 0,240319

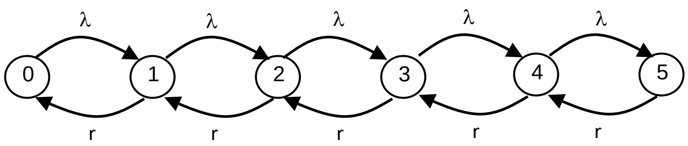
e. $N_{bucket} = 3P_0+2P_1+1P_2$ = 0,356 tokens

f. $w_q = N_q/\lambda_{cursada}$ = 12,952 ms
$N_q = 1P_4 + 2P_5 + 3P_6 + 4P_7$ = 1,9687 paquets
$\lambda_{cursada} = \lambda(1\text{-}PP)$ = 0,152 paquets/ms

g. $1/\lambda_{cursada}$ = 6,579 ms/paquets

Problema 11.

Model M/M/1/5 amb ρ=1,2 (bucket de capacitat 2 tokens i buffer de dades de capacitat 3 paquets)
P_0=0,1007057458, P_1=0,1208469, P_2=0,14501627, P_3=0,17401953, P_4=0,20882343, P_5=0,25058812

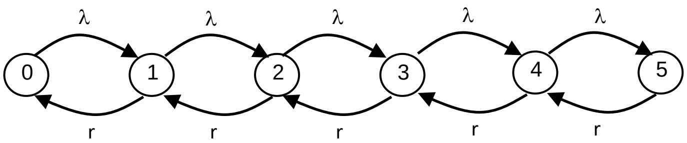


a. $PP = P_5$ = 0,25058812

b. $\lambda_{cursada} = \lambda(1\text{-}PP)$ = 0,22482356 paquets/s

c. $w_q = N_q/\lambda_{cursada}$ = 5,975489 segons
$N_q = 1P_3 + 2P_4 + 3P_5$ = 1,34343 paquets
$\lambda_{cursada} = \lambda(1\text{-}PP)$ = 0,22482356 paquets/s

Problema 12. a. Cadena de markov de temps continu. Model M/M/1/5 amb ρ=1,125. (L'estat 0 representa el bucket ple i l'estat 5 representa el bucket buit).



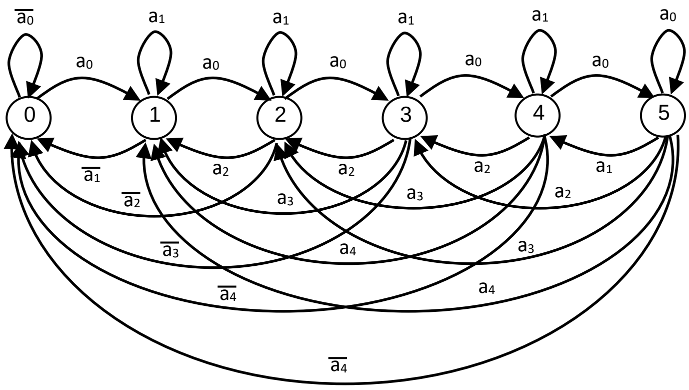
λ = 0,9 paquets/segon, r = 0,8 tokens/segon.

P_0=0,12168, P_1=0,13689, P_2=0,154001, P_3=0,173251, P_4=0,194907, P_5=0,219271

$\lambda_{cursada} = \lambda(1\text{-}P_5)$ = 0,702656 paquets/segon

PP = $\rho^{(B+D)}(1\text{-}\rho)/(1\text{-}\rho^{(B+D+1)}) = P_5$ = 0,219271

b. Cadena de Markov de temps discret. Cada estat representa el número de tokens al bucket. L'observació del bucket es realitza cada D = 1,25 segons (just abans de l'arribada d'un token al bucket).



$$\begin{cases} P_1 = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4 + a_4 P_5 \\ P_2 = a_0 P_1 + a_1 P_2 + a_2 P_3 + a_3 P_4 + a_3 P_5 \\ P_3 = a_0 P_2 + a_1 P_3 + a_2 P_4 + a_2 P_5 \\ P_4 = a_0 P_3 + a_1 P_4 + a_1 P_5 \\ P_5 = a_0 P_4 + a_0 P_5 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 \end{cases}$$

a_0=0,324652, a_1=0,365234, a_2=0,205444, a_3=0,077042, a_4=0,021668

P_0=0,30438, P_1=0,235045, P_2=0,178284, P_3=0,137912, P_4=0,097505, P_5=0,046873

$$\begin{aligned} \lambda_{cursada} D = \; & P_5 [\, 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5(1\text{-}a_0\text{-}a_1\text{-}a_2\text{-}a_3\text{-}a_4) \,] + \\ & + P_4 [\, 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5(1\text{-}a_0\text{-}a_1\text{-}a_2\text{-}a_3\text{-}a_4) \,] + \\ & + P_3 [\, 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4(1\text{-}a_0\text{-}a_1\text{-}a_2\text{-}a_3) \,] + \\ & + P_2 [\, 1a_1 + 2a_2 + 3(1\text{-}a_0\text{-}a_1\text{-}a_2) \,] + \\ & + P_1 [\, 1a_1 + 2(1\text{-}a_0\text{-}a_1) \,] + \\ & + P_0 [\, 1(1\text{-}a_0) \,] = 0{,}947936274 \end{aligned}$$

$\lambda_{cursada}$ = 0,758349 paquets/segon

PP = $1-[(\lambda_{cursada}D)/(\lambda D)]$ = 0,15739

Problema 13.

a. C_{min} = 9 treballadors

b. $T_{cua} = [\ (1/\mu)\ /\ (C\text{-}A)\ ]\ Er_c\ (A,C)$ = 0,201275 minuts

c. Prob (T_{cua} > 30 segons) = $Er_c\ (A,C)\ e^{-\mu(C-A)t}$ = 0,06591

Problema 14.

a. C_{min} = 4 longituds d'ona

b. Prob (T_{cua} < 1,5 μs) = $1 - Er_c\ (A,C)\ e^{-\mu(C-A)t}$ = 0,90998

c. $T_{cua} = [\ (1/\mu)\ /\ (C\text{-}A)\ ]\ Er_c\ (A,C)$ = 0,4705866666 μs

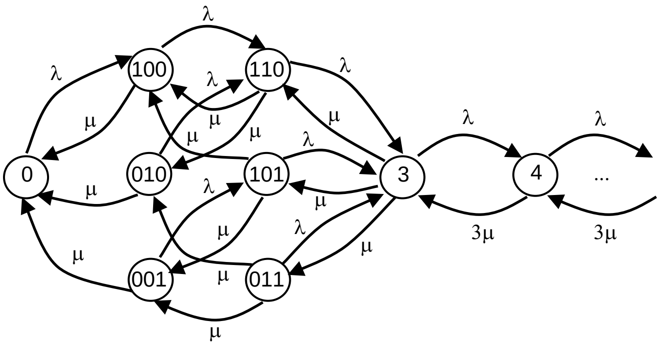
d. $1/\ (\lambda+2\mu)$ = 1,875 μs

e1. TC/C = 0,4 → 40%

e2. $TC_{1er} = P_{100} + P_{110} + P_{101} + \sum_{k=3}^{\text{infinit}} P_k$

$TC_{2er} = P_{010} + P_{110} + P_{011} + \sum_{k=3}^{\text{infinit}} P_k$

$TC_{3er} = P_{001} + P_{101} + P_{011} + \sum_{k=3}^{\text{infinit}} P_k$



Problema 15.

a. $w_{q\ M/M/1} = [\ (1/\mu)\ /\ (1 - A)\ ]\ A$ = 2,572 ms

retard total = 8,57 ms

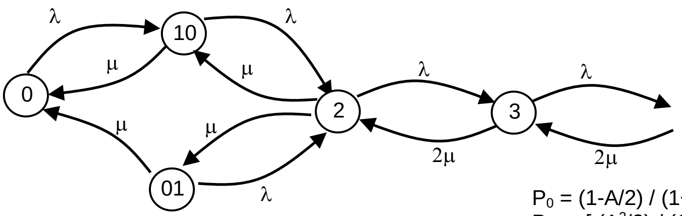
b. retard total = (1/2) [6 * 0,15 / (1 – 0,15) + 6] + (1/2) [6 * 0,15 / (1 – 0,15) + 6] = 7,0588 ms

(es redueix el temps d'espera en cua però el temps de transmissió és el mateix per tant el retard mig no es redueix a la meitat)

c. U = TC = A = 0,15 (per cada enllaç)

d. $N_q = 0{,}15^2\ /\ (1 – 0{,}15)$ = 0,02647 → 39,7 bytes

e.



$P_0 = (1\text{-}A/2)\ /\ (1\text{+}A/2)$ = 0,73913

$P_{01} = [\ (A^2/2)\ /\ (1\text{+}A)\ ]\ P_0$ = 0,025585

$P_{10} = [\ ((A^2/2) + A)\ /\ (1\text{+}A)\ ]\ P_0$ = 0,1961538

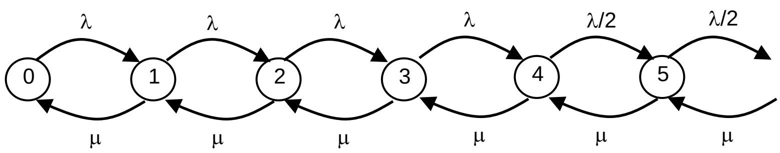
$P_k = A\ (A/2)^{k-1}\ P_0 \quad k > 1$

$U_1 = 1 – P_0 – P_{01}$ = 0,235285

$U_2 = 1 – P_0 – P_{10}$ = 0,0647162

f. $N_q = [\ (0{,}3/2)\ /\ (1 – 0{,}3/2)\ ]\ Er_C(0{,}3\ ,\ 2)$ = 0,00691 → 10,365 bytes

g.



$P_k = A^k\ P_0 \qquad 1 \le k \le 4$

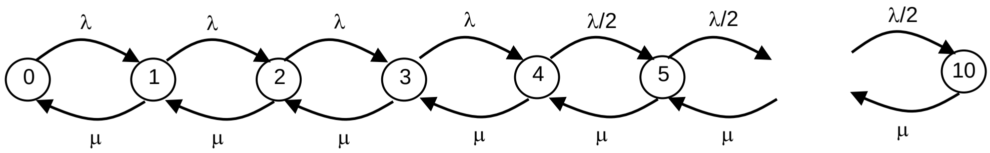
$P_k = A^4\ (A/2)^{k-4}\ P_0 \qquad 4 < k$

$P_0 = 1\ /\ [\ ((1 – A^5)\ /\ (1 – A)) + ((A^5/2)\ /\ (1 – A/2))\ ]$ = 0,701002

Percentatge de temps que les fonts tenen la taxa de generació de paquets a la meitat:

$1 - (P_0+P_1+P_2+P_3) = 1 - (1+A+A^2+A^3)\ P_0$ = 0,00668 → 0,668%

h.



$P_k = A^k P_0 \quad 1 \le k \le 4$
$P_k = A^4 (A/2)^{k-4} P_0 \quad 4 < k \le 10$

$P_0 = 1 / [((1 – A^5) / (1 – A)) + (A^4 ((A/2) – (A/2)^7) / (1 – A/2))] = 0{,}701002$
$P_1 = 0{,}2103006$
$P_2 = 0{,}06309018$
$P_3 = 0{,}018927054$
$P_4 = 0{,}005678$
$P_5 = 8{,}51717 \cdot 10^{-4}$
$P_6 = 1{,}27757 \cdot 10^{-4}$
$P_7 = 1{,}91636 \cdot 10^{-5}$
$P_8 = 2{,}874546 \cdot 10^{-6}$
$P_9 = 4{,}31182 \cdot 10^{-7}$
$P_{10} = 6{,}467729 \cdot 10^{-8}$

Percentatge de paquets perduts:
$\lambda_{perduda} = \lambda/2\ P_{10}$
$\lambda_{oferta} = \lambda\ (P_0+P_1+P_2+P_3) + \lambda/2\ (P_4+P_5+P_6+P_7+P_8+P_9+P_{10})$
$PP = \lambda_{perduda} / \lambda_{oferta} = 3{,}2354 \cdot 10^{-8}$

i. $1/\mu = 6$ ms

Problema 16.
a. Retard mig de transmissió d'un paquet des del node 1 fins al 4 = 4 segons
b. Retard mig de transmissió d'un paquet des del node 1 fins al 4 = 0,815775 segons

Problema 17.
a. $R = \rho\ 0{,}5\ x^2/x = 0{,}575 \times 0{,}5 \times 5037{,}5/28{,}75 = 50{,}375$ ms
$w_q = R/(1-\rho) = 118{,}5294$ ms
$T = w_q + x = 118{,}5294 + 28{,}75 = 147{,}2794$ ms
b. $w_{q\ telnet} = R/(1-\rho_{telnet}) = 50{,}375 / (1-0{,}075) = 54{,}459$ ms
$w_{q\ ftp} = R/[(1-\rho_{telnet})(1-\rho_{telnet}-\rho_{ftp})] = 50{,}375 / [(1-0{,}075)\ (1-0{,}575)] = 128{,}1399$ ms
$T_{telnet} = w_{q\ telnet} + x_{telnet} = 59{,}459$ ms
$T_{ftp} = w_{q\ ftp} + x_{ftp} = 228{,}1399$ ms
$T = (\lambda_{telnet}/\lambda)\ T_{telnet} + (\lambda_{ftp}/\lambda)\ T_{ftp} = 0{,}75 \times 59{,}459 + 0{,}25 \times 228{,}1399 = 101{,}629225$ ms
c. $w_{q\ telnet} = \rho_{telnet}\ 0{,}5\ (x^2_{telnet}/x_{telnet}) / (1-\rho_{telnet}) = 0{,}375 / (1-0{,}075) = 0{,}4054$ ms
$w_{q\ ftp} = 128{,}1399$ ms
$T_{telnet} = w_{q\ telnet} + x_{telnet} = 5{,}4054$ ms
$T_{ftp} = w_{q\ ftp} + x'_{ftp} = w_{q\ ftp} + x_{ftp}/(1-\rho_{telnet}) = 128{,}1399 + 108{,}108108 = 236{,}248$ ms
$T = (\lambda_{telnet}/\lambda)\ T_{telnet} + (\lambda_{ftp}/\lambda)\ T_{ftp} = 0{,}75 \times 5{,}4054 + 0{,}25 \times 236{,}248 = 63{,}116$ ms

Problema 18.
a. $R = \rho\ 0{,}5\ x^2/x = 0{,}86625 \times 0{,}5 \times 5279{,}0625/57{,}75 = 39{,}59296875$ ms
$w_q = R/(1-\rho) = 296{,}022196262$ ms
$w_q + x = 296{,}022196262 + 57{,}75 = 353{,}7722$ ms
b. $w_{q\ curts} = R/(1-\rho_{curts}) = 39{,}59296875 / (1-0{,}0225) = 40{,}5043158$ ms
$w_{q\ llargs} = R/[(1-\rho_{curts})(1-\rho_{curts}-\rho_{llargs})] = 39{,}59296875 / [(1-0{,}0225)\ (1-0{,}86625)] = 302{,}8360064$ ms
$w_q = (\lambda_{curts}/\lambda)\ w_{q\ curts} + (\lambda_{llargs}/\lambda)\ w_{q\ llargs} = 0{,}4 \times 40{,}5043158 + 0{,}6 \times 302{,}8360064 = 197{,}90333016$ ms
$T_{curts} = w_{q\ curts} + x_{curts} = 44{,}2543158$ ms
$T_{llargs} = w_{q\ llargs} + x_{llargs} = 396{,}5860064$ ms
$T = (\lambda_{curts}/\lambda)\ T_{curts} + (\lambda_{llargs}/\lambda)\ T_{llargs} = 0{,}4 \times 44{,}2543158 + 0{,}6 \times 396{,}5860064 = 255{,}65333016$ ms
c. $\rho_{curts} = 0{,}0225$
d. $\rho_{llargs} \times 100 = 84{,}375\%$

e. $w_{q\ curts} = \rho_{curts}\ 0{,}5\ (x^2_{curts}/x_{curts})\ /\ (1-\rho_{curts}) = 0{,}0478125\ /\ (1-0{,}0225) = 0{,}043158$ ms

$w_{q\ llargs} = R/[(1-\rho_{curts})(1-\rho_{curts}-\rho_{llargs})] = 302{,}8360064$ ms

$w_q = (\lambda_{curts}/\lambda)\ w_{q\ curts} + (\lambda_{llargs}/\lambda)\ w_{q\ llargs} = 0{,}4 \times 0{,}043158 + 0{,}6 \times 302{,}8360064 = 181{,}71887$ ms

$T_{curts} = w_{q\ curts} + x_{curts} = 3{,}793158$ ms

$T_{llargs} = w_{q\ llargs} + x'_{llargs} = w_{q\ llargs} + x_{llargs}/(1-\rho_{curts}) = 302{,}8360064 + 95{,}9079 = 398{,}743935$ ms

$T = (\lambda_{curts}/\lambda)\ T_{curts} + (\lambda_{llargs}/\lambda)\ T_{llargs} = 0{,}4 \times 3{,}793158 + 0{,}6 \times 398{,}743935 = 240{,}7636$ ms

f. $x_{expulsió\_llargs} = \lambda_{curts}\ x'_{llargs}\ x_{curts} = \rho_{curts}\ x_{llargs}/(1-\rho_{curts}) = 2{,}1579$ ms

g. $\rho'_{llargs} = \lambda_{llargs}\ x'_{llargs} = \lambda_{llargs}\ x_{llargs}/(1-\rho_{curts}) = 0{,}86317$

Problema 19.

a. $w_q = \rho\ 0{,}5\ x^2/x = 0{,}81 \times 0{,}5 \times 6{,}45/1{,}8 = 7{,}63816$ ms

$N_q = \lambda\ w_q = 3{,}437$ paquets

b. prioritats sense expulsió: C>A>B

$w_{q\ C} = R/(1-\rho_C) = 1{,}87258065$ ms

$w_{q\ A} = R/(1-\rho_C)(1-\rho_C-\rho_A) = 3{,}54991591$ ms

$w_{q\ B} = R/(1-\rho_C-\rho_A)(1-\rho_C-\rho_A-\rho_B) = 14{,}4799202$ ms

$w_q = (\lambda_c/\lambda)\ w_{qC} + (\lambda_A/\lambda)\ w_{qA} + (\lambda_B/\lambda)\ w_{qB} = 5{,}94694993$ ms

c. prioritats amb expulsió: C>A>B

$w_{q\ C} = 0{,}315/(1-\rho_C) = 0{,}40645161$ ms

$w_{q\ A} = (0{,}315+0{,}12375)/(1-\rho_C)(1-\rho_C-\rho_A) = 1{,}07323039$ ms

$w_{q\ B} = (0{,}315+0{,}12375+1{,}0125)/(1-\rho_C-\rho_A)(1-\rho_C-\rho_A-\rho_B) = 14{,}4799202$ ms

$w_q = (\lambda_c/\lambda)\ w_{qC} + (\lambda_A/\lambda)\ w_{qA} + (\lambda_B/\lambda)\ w_{qB} = 4{,}29154708$ ms

$x'_C = x_C = 2{,}5$ ms

$x'_A = x_A/(1-\rho_C) = 1{,}29032258$ ms

$x'_B = x_B/(1-\rho_C-\rho_A) = 5{,}68720379$ ms

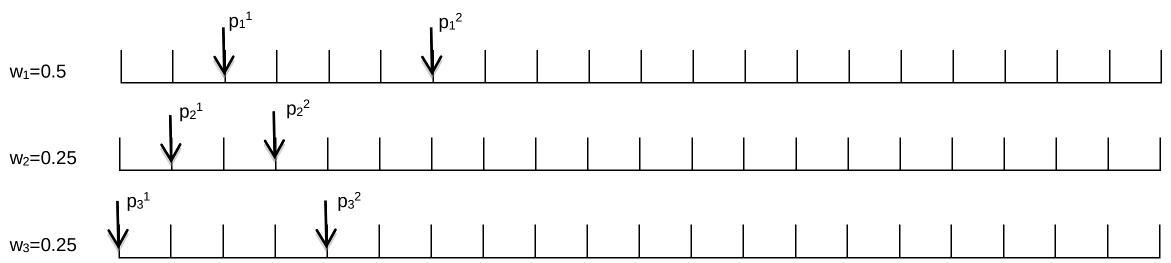
$x' = (\lambda_c/\lambda)\ x'_C + (\lambda_A/\lambda)\ x'_A + (\lambda_B/\lambda)\ x'_B = 2{,}63147837$ ms

$T = w_q + x' = 6{,}92302545$ ms

Problema 20. A = [4 2 2 8 4]

Problema 21. A = [6.66 3.33 2 5 3]

Problema 22.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

p_3^1	p_2^1	p_1^1	p_1^1	p_1^1	p_1^1	p_1^2	p_1^2	p_1^2	p_1^2	p_2^2	p_2^2								
p_3^1	p_2^1	p_1^1	p_1^1	p_1^1	p_1^1	p_1^2	p_1^2	p_1^2	p_1^2	p_2^2	p_2^2								
p_3^1	p_3^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_2^2	p_2^2	p_3^2	p_2^2								
p_3^1	p_3^1	p_3^1	p_3^1	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_2^2								

0 4 6 7 8 9 10 11 12 13 14 16 20

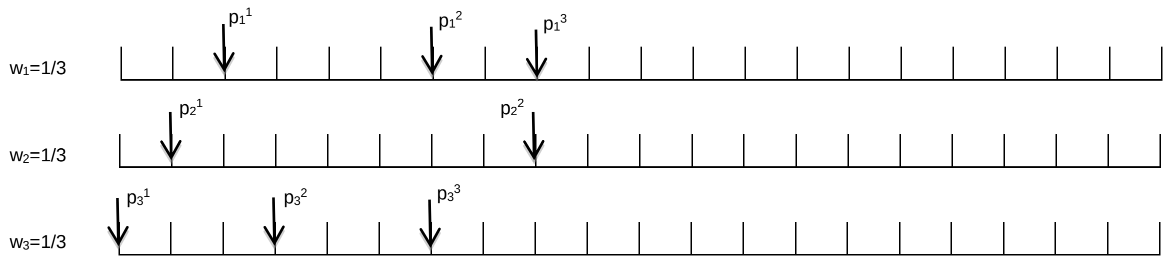
$V(p_1^1) = \max(6,0)+2/(1/2) = 10$ $V(p_2^1) = \max(4,0)+2/(1/4) = 12$ $V(p_3^1) = \max(0,0)+2/(1/4) = 8$

$V(p_1^2) = \max(10,10)+2/(1/2) = 14$ $V(p_2^2) = \max(7,12)+2/(1/4) = 20$ $V(p_3^2) = \max(8,8)+2/(1/4) = 16$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

p_3^1	p_3^1	p_1^1	p_1^1	p_2^1	p_2^1	p_1^2	p_1^2	p_3^2	p_3^2	p_2^2	p_2^2								

Problema 23.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

p_3^1	p_3^1	p_3^1	p_3^1	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^3	p_3^3	p_3^3	p_3^3	p_3^3							
p_3^1	p_3^1	p_3^1	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_3^3	p_3^3	p_3^3	p_3^3	p_3^3							
p_3^1	p_3^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_3^2	p_3^2	p_3^2	p_2^2	p_2^2	p_2^2	p_3^3	p_3^3							
p_3^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_2^1	p_1^2	p_1^2	p_2^2	p_2^2	p_2^2	p_2^2	p_2^2							
p_3^1	p_2^1	p_1^1	p_1^1	p_1^1	p_2^1	p_1^2	p_1^2	p_1^3	p_1^3	p_1^3	p_2^2	p_2^2							
p_3^1	p_2^1	p_1^1	p_1^1	p_1^1	p_2^1	p_1^2	p_1^2	p_1^3	p_1^3	p_1^3	p_2^2	p_2^2							

0 3 4.5 5.5 6.5 7.5 9 10.5 12 13 14 15 16.5 18

$V(p_1^1)$ = max(4.5,0)+1/(1/3) = 7.5
$V(p_1^2)$ = max(9,7.5)+1/(1/3) = 12
$V(p_1^3)$ = max(12,12)+1/(1/3) = 15

$V(p_2^1)$ = max(3,0)+2/(1/3) = 9
$V(p_2^2)$ = max(12,9)+2/(1/3) = 18

$V(p_3^1)$ = max(0,0)+2/(1/3) = 6
$V(p_3^2)$ = max(5.5,6)+2/(1/3) = 12
$V(p_3^3)$ = max(9,12)+2/(1/3) = 18

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

p_3^1	p_3^1	p_1^1	p_2^1	p_2^1	p_3^2	p_3^2	p_1^2	p_1^3	p_3^3	p_3^3	p_2^2	p_2^2							