Tema 1

- En los sistemas en los que se comparten recursos, se pueden producir bloqueos. No hay suficientes recursos para todos.
  - En telefónia (conmutación de cirtuitos), lo que se comparten son circuitos,y cuando no hay suficientes circuitos la llamada se pierde.
  - En conmutación de paquetes, se comparte un enlace. Si no hay suficiente capacidad se pierden paquetes
  - Erlang fue el primero que studio estos problemas y dio origen a la teoría de colas.
- La teoría de colas es una herramienta matemática que nos permite estudiar sistemas que comparten recursos.

- Parámetros que permiten medir la calidad de servicio
  - Prob. De bloqueo
  - Prob. De pérdida
  - Retardo
- Dimensionar los sistemas para alcanzar cierta calidad de servicio.
- Diseño, 2 criterios opuestos
  - Punto de vista del usuario: maxima calidad
  - Punto de vista del operador: mínimo de recursos y máxima ocupación

Modelo de un sistema de colas

- Sistema de colas: modelo que representa nuestro sistema
- Cuatro elementos básicos:
  - Llegadas: Descripción estadística de las llegadas. Tasa de llegadas, distribución del tiempo entre llegadas.
  - Mecanismo de servicio:
    - Recursos- No. de servidores
    - Tiempo de servicio: Distribución del tiempo de servicio:
      - Independiente del Sistema
      - Dependiente del Sistema.
  - Disciplina de servicio: Orden en el que se atienden las llegadas.
  - Tamaño del sistema

Notación de Kendall

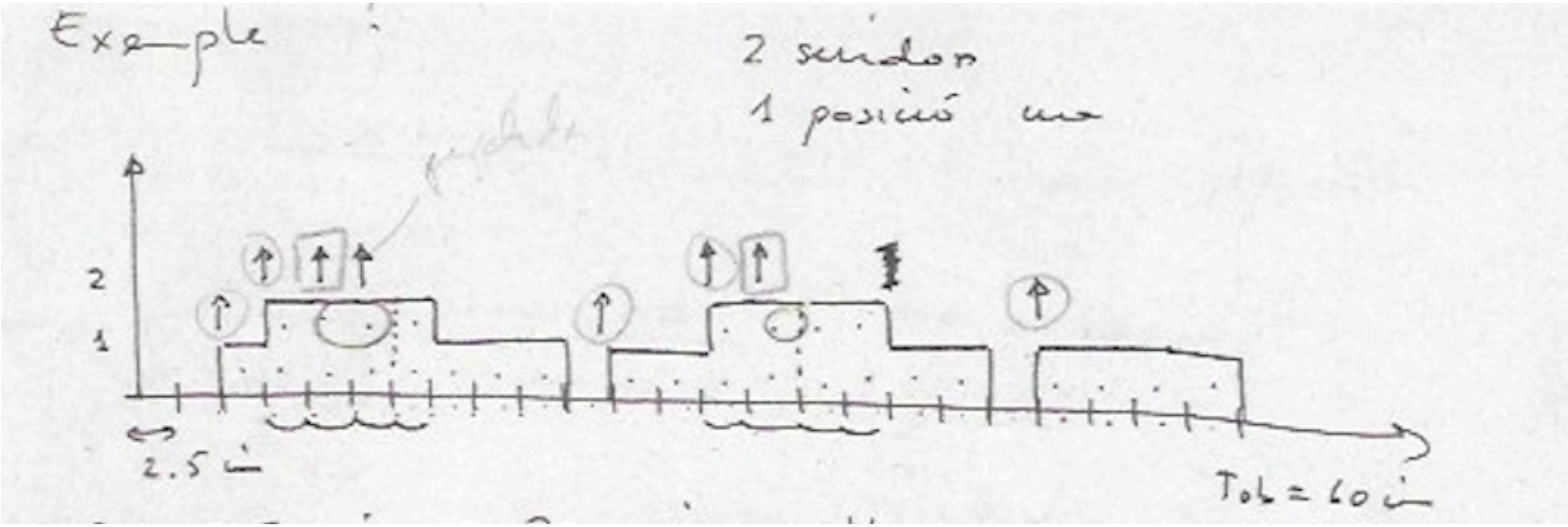
- A/B/m/k/N/Z
  - A: proceso de llegada: dist. del tiempo entre llegadas
    - M memoryless (exponencial)
    - D determinista
    - G general
  - B: dist. del tiempo de servicio
  - m: número de servidores (recursos del sistema-identica capacidad
  - k: capacidad del sistema (número máximo de usuarios que caben en el sistema) (por defecto infinita)
  - N: Tamaño de la población (por defecto infinita)
  - Z: disciplina de servicio: FCFS,LCFS,RR,…. Sin especificar→FCFS

Conceptos de teletráfico

- Caso 1: 1 sólo recurso:
  - Volumen de tráfico v_{tr}: tiempo total que un recurso está ocupado en un intervalo de observación T_{ob}.
  - Intensidad de tráfico I_{tr}: % de tiempo que un recurso está ocupado. Probabilidad de que un recurso esté ocupado (en regimen permante. T_{ob} tiende a infinito)
- Caso 2: Varios recursos
  - Volumen de tráfico: Suma de los v_{tr} de cada recurso por separado
  - Intensidad de tráfico: Número medio de recursos ocupados

- Tipos de tráfico:
  - Tráfico cursado TC= tasa cursada · Duración media del servicio
  - Tráfico ofrecido TO
  - Tráfico perdido TP
  - Tráfico demorado TD
- Grado de servicio
  - Probabilidad de bloqueo PB: Prob. de que todos los recursos esten ocupados
  - Probabilidad de pérdida PP: Prob. de que haya llamadas pérdidas o paquetes pérdidos
  - Probabilidad de demora PD: Prob. de que haya paquetes con demora

Ejemplo



Teorema de Little(I)

- Sistema que se considera:
  - Sistema de colas donde los usuarios llegan al azar para obtener servicio
  - En el contexto de redes de conmutación de paquetes:
    - Usuarios– paquetes
    - Tiempo de servicio– tiempo de transmisión
  - En el contexto de redes de conmutacion de circuitos:
    - Usuarios – llamadas
    - Tiempo de servicio—duración de llamada

Teorema de Little(II)

- Valores que interesan estimar:
  - Número medio de usuarios en el sistema
  - Retardo medio por usuario

- En función de información conocida:
  - Tasa de llegada de usuarios

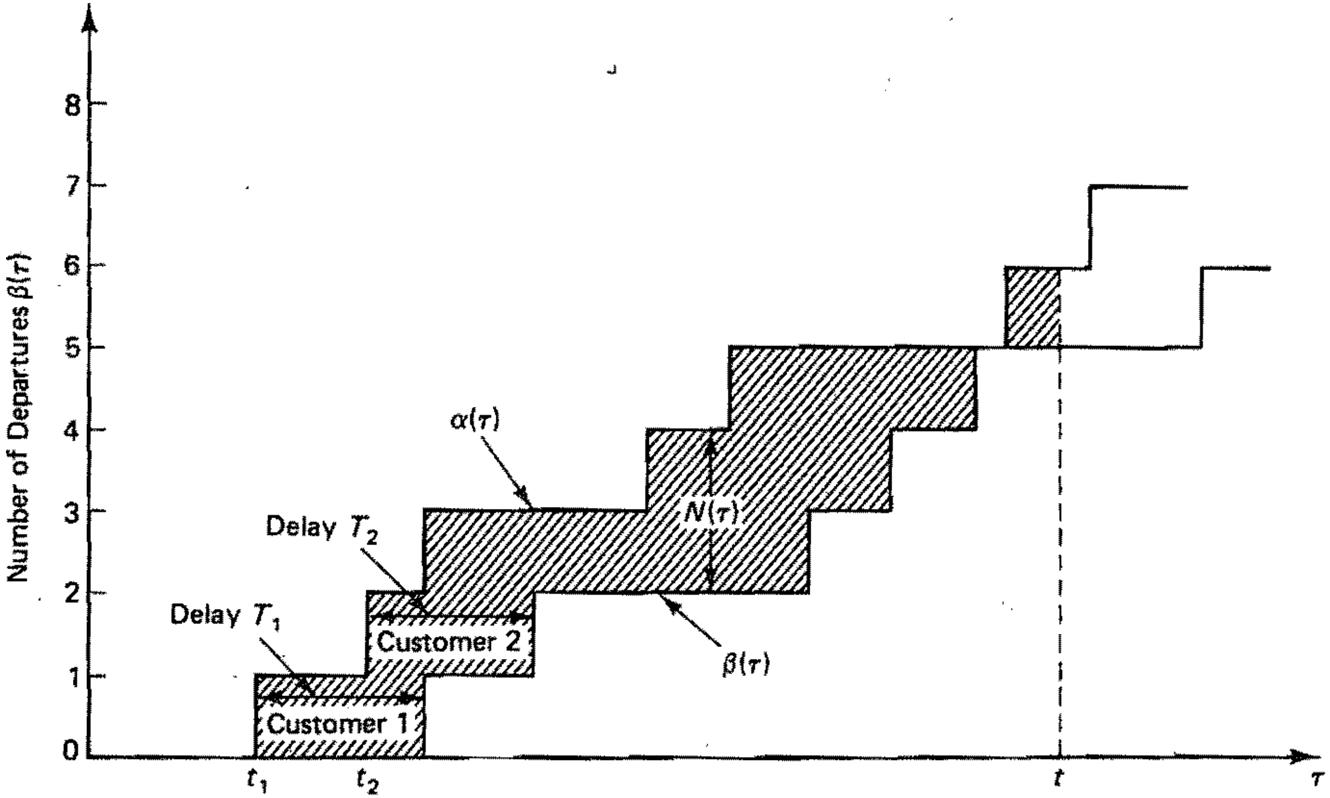
    no. medio de usuarios que llegan al sistema/unidad de tiempo)
  - Tasa de servicio de usuarios

    No. medio de usuarios atendidos/unidad de tiempo
  - En algunos casos esta información no es suficiente

Teorema de Little(III)

- La importancia del teorema de Little es debido a su generalidad
  - Sirve para casi cualquier sistema de cola que alcance el estado estable.
  - Independiente del orden en que se atienden los usuarios
- Notación
  - N(t) número de usuarios en el sistema en el instante t
  - α(t) número de usuarios que llegan en el intervalo [0,t]
  - β(t) número de usuarios que salen en el intervalo [0,t]
  - T_i tiempo que el i-ésimo usuario que llega pasa en el sistema

Teorema de Little(IV)



N=λT

- Número medio de usuarios en el sistema observados hasta el tiempo t - N_t

- Tasa de llegada medio en el intervalo [0, t] - λ_t

- Tiempo medio en el sistema por usuario hasta el tiempo t - T_t

- Relación entre estas variables.

Teoría de Colas.

Suposiciones
Proceso de llegada - Proceso de Poisson (I)

- Proceso de Poisson con tasa λ– Proceso estócastico A(t) que toma valores no negativos y cumple:
  - A(t): proceso de conteo del número de llegadas entre 0 y t.
  - Número de llegadas en intervalos disjuntos son independientes.
  - El número de llegadas en cualquier intervalo τ tiene un distribución de probabilidad:

$$P\{A(t+\tau) - A(t) = n\} = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

    - Número medio de llegadas en un intervalo τ es λτ

Proceso de llegada (II)

- Propiedades del proceso de Poisson:
  - Tiempos entre llegadas independientes y distribuidos exponencialmente.

$$P\{\tau_n \leq s\} = 1 - e^{-\lambda s}, \qquad s \geq 0$$

  - Para cada t≥0 y δ≥0

$$P\{A(t+\delta) - A(t) = 0\} = 1 - \lambda\delta + o(\delta)$$

$$P\{A(t+\delta) - A(t) = 1\} = \lambda\delta + o(\delta)$$

$$P\{A(t+\delta) - A(t) \geq 2\} = o(\delta)$$

  - Superposición.
  - Descomposición

Proceso de servicio

- Tiempo de servicio – distribución exponencial

$$P\{s_n \leq s\} = 1 - e^{-\mu s}, \qquad s \geq 0$$

  - Tiempos de servicio mutuamente independientes e independientes de los tiempos de llegada.(Condición violada en casos de colas en tandem)

- Caracteristicas:
  - Distribución sin memoria (memoryless)

$$P\{\tau_n > r + t \mid \tau_n > t\} = P\{\tau_n > r\}, \qquad \text{for } r, t \geq 0$$

Todas estas propiedades hacen que el futuro número de usuarios en un sistema M/M/k dependa del número de usuarios pasados solo a través del número presente de usuarios.

- Evolución de N(t) en el sistema

- Actividad que se puede dar en en sistema en el intervalo (t, t+δ)