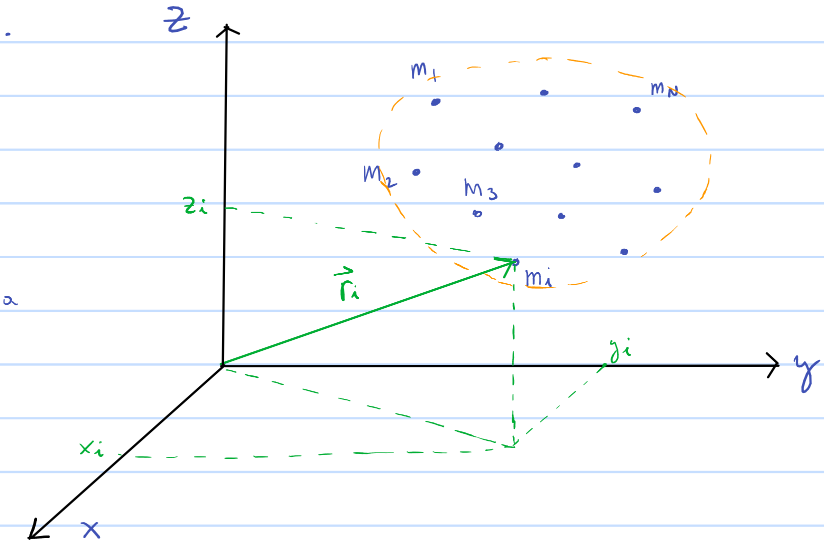
Centro de Masa (Cap. 9.6 Serway 10^{TH} ed.)

Considere un sistema de partículas que forman un conjunto de mayor tamaño.



El centro de masa es simplemente el promedio ponderado de las posiciones de las partículas, en donde el "peso" de cada posición es la fracción de la masa de cada partícula respecto a la masa total, es decir:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} x_i$$

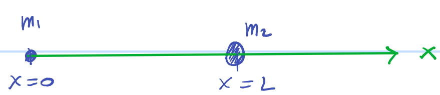
$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} y_i \qquad M_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} z_i$$

Ejemplo:

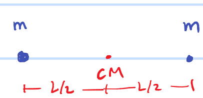
¿Dónde está ubicado el centro de masa del siguiente sistema de dos objetos?

Sol:

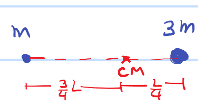


$$\bar{x} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot 0 + \frac{m_2}{m_1+m_2} L = \frac{m_2}{m_1+m_2} L$$

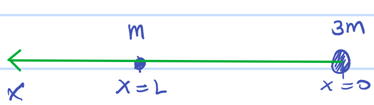
- Por ejemplo, si $m_1 = m_2$, $\bar{x} = \frac{m_2}{2m_2} L = \frac{L}{2}$ //



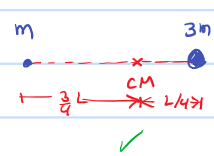
- ¿Y si $m_2 = 3m_1$? $\bar{x} = \frac{m_1}{m_1+3m_1} \cdot 0 + \frac{3m_1}{m_1+3m_1} L = \frac{3m_1}{4m_1} L = \frac{3}{4} L$



- ¿Y si hubiésemos puesto los ejes al revés?

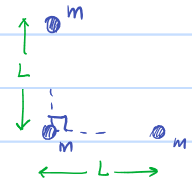


$$\bar{x} = \frac{3m}{4m} \cdot 0 + \frac{m}{4m} \cdot L = \frac{L}{4}$$

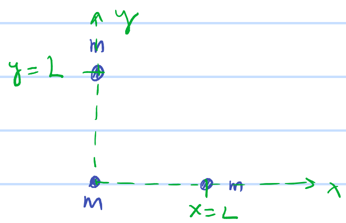


✓

Veamos otro ejemplo, pero ahora en 2 dimensiones:



En este caso elegimos



$$M_{TOT} = 3m$$

$$\overline{x} = \frac{m}{3m}\cdot 0 + \frac{m}{3m}\cdot 0 + \frac{m}{3m}\cdot L = \frac{L}{3}$$

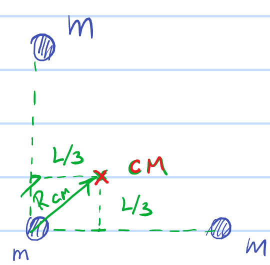
$$\overline{y} = \frac{m}{3m}\cdot L + \frac{m}{3m}\cdot 0 + \frac{m}{3m}\cdot 0 = \frac{L}{3}$$

$\therefore$ Las coordenadas del centro de masa son

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$$

lo cual denotaremos por $\vec{R}_{CM}$, es decir,

$$\vec{R}_{CM} = \left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$$



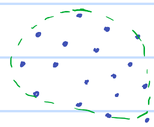
Tarea: Elegir otros ejes con distintos orígenes y mostrar que el centro de masa está ubicado en el mismo lugar.

$$\left.\begin{aligned}\overline{x} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} x_i \\ \overline{y} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} y_i \\ \overline{z} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} z_i\end{aligned}\right\} \quad (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \equiv \vec{R}_{CM}$$

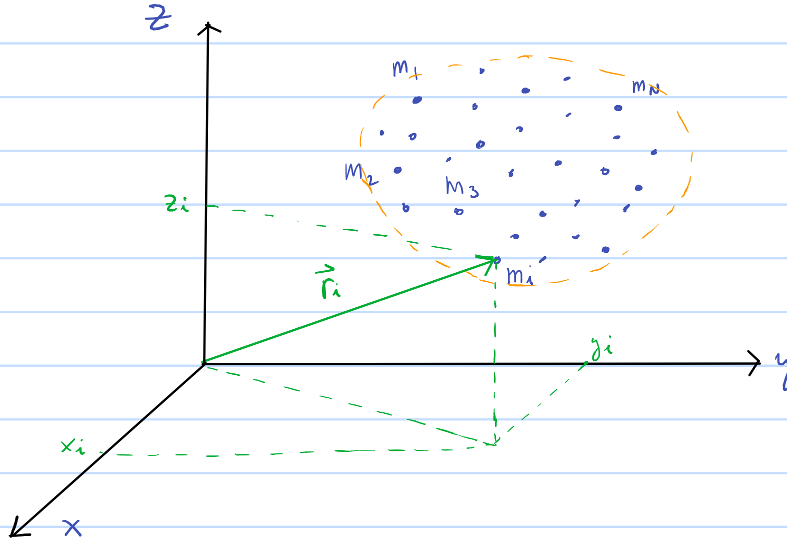
$$\vec{R}_{CM} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} x_i, \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} y_i, \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} z_i\right)$$

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} \underbrace{(x_i, y_i, z_i)}_{\vec{r}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} \vec{r}_i}$$

Estudiemos el movimiento de un montón de partículas



(Puede ser un "montón" rígido también)



La fuerza sobre cada una de las partículas es

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

La fuerza total sobre el sistema es

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,net}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)$$

* Notar que $\vec{F}_{TOT}$ es precisamente la fuerza externa total sobre el sistema. Todas fuerzas internas se cancelan por acción y reacción.

$$\therefore \quad \vec{F}_{ext} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)$$

¿Se parece a algo?

Dividamos por M_{TOT}

$$\frac{\vec{F}_{ext}}{M_{TOT}} = \frac{1}{M_{TOT}} \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)$$

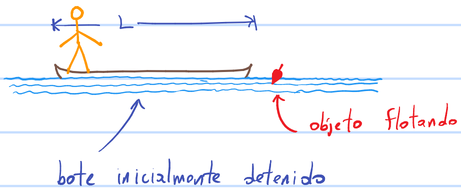
$$= \frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M_{TOT}} \vec{r}_i\right)}_{\vec{R}_{cm}} = \frac{d^2\vec{R}_{cm}}{dt^2}$$

$$\frac{\vec{F}_{ext}}{M_{TOT}} = \ddot{\vec{R}}_{cm} \implies \vec{F}_{ext} = M_{TOT}\,\ddot{\vec{R}}_{cm} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{F}_{ext} = M_{TOT}\,\vec{a}_{cm}}$$

Observación:

El centro de masa se comporta como si toda la masa del objeto estuviese concentrada en ese punto. Es decir, es el CM quien satisface la 2^{da} ley de Newton para la masa total del objeto.

Problema



- Persona de masa m_1.
- Bote de masa m_2.
- Largo del bote L.

¿A que distancia, desde la punta del bote, debiera estar como máximo el objeto flotando para que la persona, al caminar sobre hacia este, logre alcanzarlo?

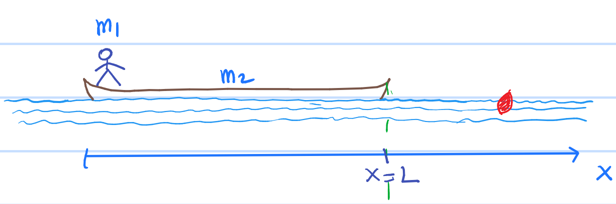
Sol:

Notar que no hay fuerzas externas netas sobre el bote o la persona, luego:

$$\vec{F}_{ext} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM}$$
$$\vec{0} = M_{TOT}\,\vec{a}_{CM} \implies \vec{a}_{CM} = 0 \quad \text{i.e.: } \vec{v}_{CM} = \text{const.}$$

Como el bote está inicialmente en reposo, $\vec{R}_{CM}$ también lo está, ie $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$.
Luego, $\vec{R}_{CM}$ no se mueve aunque la persona empiece a moverse.

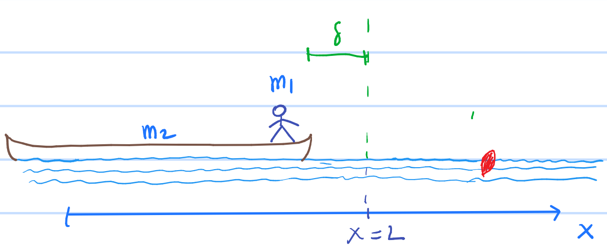
Antes:



lo demostraremos en seguida

$$\bar{x} = \frac{m_1 \cdot 0}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{m_2 L}{2(m_1+m_2)}$$

Después:



$$\bar{x} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(L-\delta) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{L}{2}-\delta\right)$$

Ya que la posición del CM no puede cambiar, tenemos

$$\frac{m_2 L}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(L-\delta) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{L}{2}-\delta\right)$$

$$\frac{m_2 L}{2\cancel{(m_1+m_2)}} = \frac{m_1}{\cancel{m_1+m_2}}(L-\delta) + \frac{m_2}{\cancel{m_1+m_2}}\left(\frac{L}{2}-\delta\right)$$

$$\cancel{\frac{m_2 L}{2}} = m_1 L - m_1 \delta + \cancel{\frac{m_2 L}{2}} - m_2 \delta$$

$$(m_1 + m_2)\,\delta = m_1 L$$

$$\therefore \boxed{\delta = \frac{m_1}{m_1+m_2} L}$$

Consideremos los siguientes casos límites:

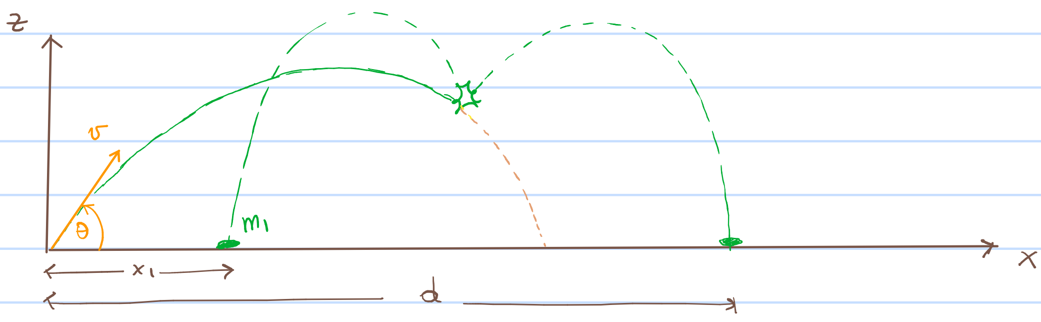
$m_1 \to 0$: Es decir, la masa de la persona es despreciable respecto al bote; aquí $\delta \to 0$, es decir, el bote prácticamente no se mueve mientras la persona (u hormiga!) llega al extremo derecho del bote.

$m_2 \to 0$: El bote es muy liviano; con esto $\delta \to L$, es decir, el bote avanza toda la distancia L y por ende, la persona prácticamente no avanza nada con respecto al agua.

Ejemplo:

Un proyectil de masa M se lanza con una rapidez inicial v y un ángulo de salida θ. En algún punto en el aire (desconocido) el proyectil explota en dos pedazos. Uno de ellos de masa m_1 se encuentra a una distancia x_1 del lugar de lanzamiento. ¿dónde está el otro pedazo? Asuma que el pedazo de masa m_1 cayó en la misma dirección del lanzamiento original.

Solución:



Como las fuerzas que hicieron explotar al objeto son fuerzas internas, la fuerza externa total sobre el sistema compuesto por los dos pedazos es la misma durante toda la trayectoria. Por lo tanto, el centro de masa sigue el movimiento original como si nada hubiese pasado.

De lanzamientos de proyectil recordamos que

$$d = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{g}$$

esta es exactamente la posición del centro de masa una vez que los dos pedazos ya han caído al suelo, luego

$$\frac{m_1}{M} x_1 + \frac{(M-m_1)}{M} x_2 = d$$

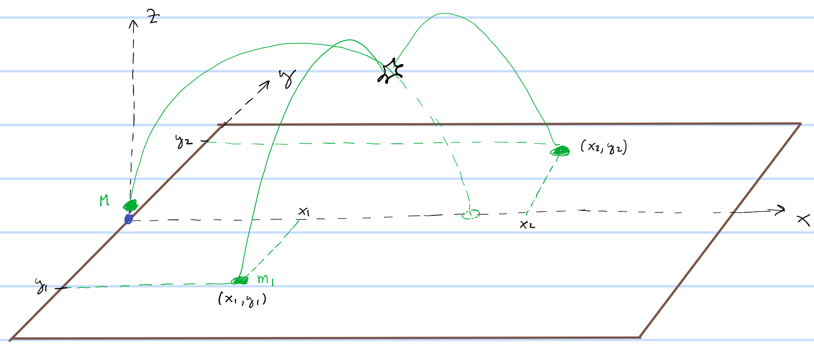
por lo tanto

$$\frac{m_1}{M} x_1 + \frac{(M-m_1)}{M} x_2 = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{g}$$

$$\therefore \quad x_2 = \frac{M}{M-m_1}\left(\frac{v^2 \sin 2\theta}{g} - \frac{m_1}{M}\right)$$

$$\boxed{x_2 = \frac{M}{M-m_1}\frac{v^2 \sin 2\theta}{g} - \frac{m_1}{M-m_1}}$$

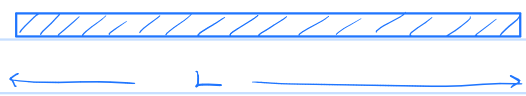
Tarea: Resuelva el caso más general en el cual el pedazo que se encuentra tiene componentes de posición no solo en x sino que (x, y).



Es decir, suponiendo que ud. encuentra el pedazo de masa m_1 en la posición (x_1, y_1), encuentre las coordenadas (x_2, y_2) del pedazo perdido como función de x_1, y_1 y los datos iniciales del lanzamiento v, θ, M.

Centro de masa para systemas continuos

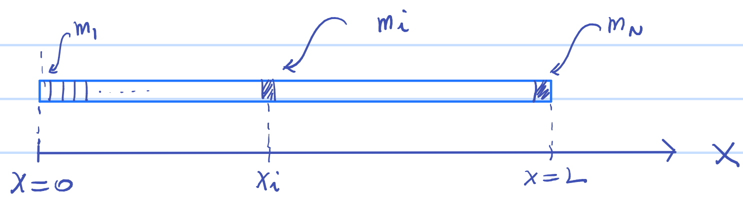
En vez de hacer una introducción teórica, vamos al grano con un ejemplo. ¿Dónde está el centro de masa de una barra con una distribución uniforme de masa?



Masa: M

(de grosor despreciable)

Ya que solo sabemos calcular el centro de masa para un conjunto de partículas, pensemos en la barra como un conjunto muy grande de partículas. Para esto divio



variable discreta $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} x_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

Sin embargo queremos que $N \to \infty$ y por ende $m_i \to 0$. Luego

$$m_i \equiv \Delta m_i \to 0 \qquad x_i \to x$$

variable continua

luego

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \cdot \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i \, \Delta m_i}_{\text{suma de Riemann}} \equiv \frac{1}{M} \int x \, dm$$

¿Cómo proseguir ahora? Continuamos con el concepto de densidad.

En este caso, densidad lineal

$$\frac{\text{masa}}{\text{largo}} \equiv \lambda \qquad \therefore \quad \lambda = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

$$\therefore \quad dm = \lambda \, dx \qquad (\text{En general } \lambda = \lambda(x))$$

Ahora sí sabemos qué estamos integrando

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int x \, dm$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda(x)\,dx$$

Para el caso de la barra uniforme $\lambda = \lambda(x) = \text{constante}$, es decir, no depende de x.

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$$

luego

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\frac{M}{L}\,dx = \frac{1}{\cancel{M}}\,\frac{\cancel{M}}{L}\int_0^L x\,dx =$$

$$= \frac{1}{L}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{1}{\cancel{L}}\,\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{L}{2} \quad //$$

Antes de continuar, repasemos el concepto de densidad de masa.

La masa total de la barra es M, por supuesto. Comprobemos

La cantidad

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} m_i$$

debe dar la masa total. En efecto

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} m_i = \int dm = \int_0^L \lambda\,dx = \int_0^L \frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{L}\int_0^L 1\cdot dx = \frac{M}{L}\cdot x\Big|_0^L = \frac{M\cancel{L}}{\cancel{L}} = M \quad //$$

¿Y si tuviésemos una barra no uniforme? Por ejemplo con $\lambda = \lambda(x) = \lambda_0 e^{-ax}$

(λ_0, a : constantes)

En este caso

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \lambda_0 x \quad \text{ya no es una simple constante; depende de } x.$$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx$$

$$= \int_0^L \lambda_0 e^{-ax} dx$$

$$= \lambda_0 \int_0^L e^{-ax} dx$$

$$= \lambda_0 \cdot \frac{e^{-ax}}{-a} \Big|_0^L$$

$$= \frac{\lambda_0}{-a} \left(e^{-aL} - 1 \right)$$

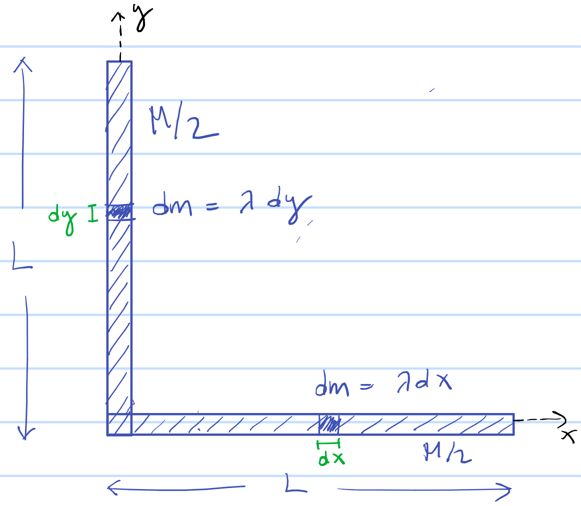
$$M = \frac{\lambda_0}{a} \left(1 - e^{-aL} \right) //$$

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \int_0^L x\, dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx$$

$$= \frac{\lambda_0}{M} \int_0^L x e^{-ax} dx$$

Ejemplo: Dos barras en forma de "L", con masa distruida uniformemente.

Sol: Vamos a poner los ejes de la manera más obvia. Llamemos M a la masa total del objeto (notar que el resultado final no debiera depender de M):



$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L x\, \lambda dy + \frac{1}{M}\int_0^L x\, \lambda dx$$

(notar que $\lambda = \frac{M/2}{L} = \frac{M}{2L}$)

$$= \frac{1}{M}\int_0^L \cancel{0 \cdot \lambda dy} + \frac{\lambda}{M}\int_0^L x\, dx$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{L^2}{2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{M}}\,\frac{\cancel{M}}{2L}\,\frac{L^2}{2} = \frac{L}{4} \quad //$$

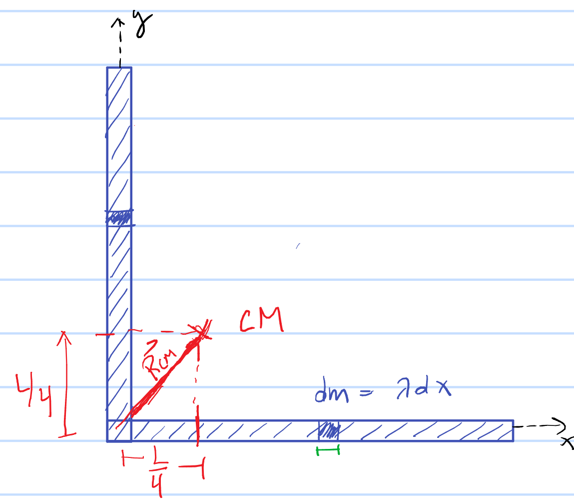
De similar modo

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L y\, \lambda dy + \frac{1}{M}\int_0^L y\, \lambda dx$$

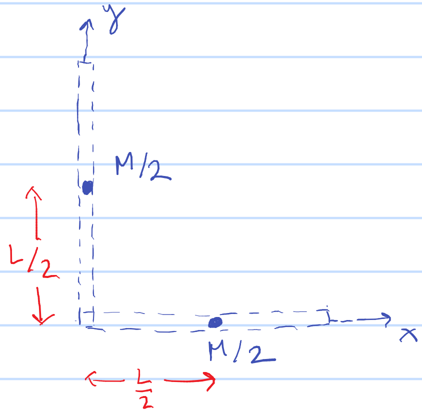
$$= \frac{\lambda}{M}\int_0^L y\, dy + \frac{\lambda}{M}\int \cancel{0 \cdot dx}$$

$$= \frac{M}{M\, 2L}\,\frac{L^2}{2} = \frac{L}{4}$$



$$\therefore \quad \vec{R}_{CM} = \left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}\right)$$

Notemos lo siguiente respecto al problema anterior.



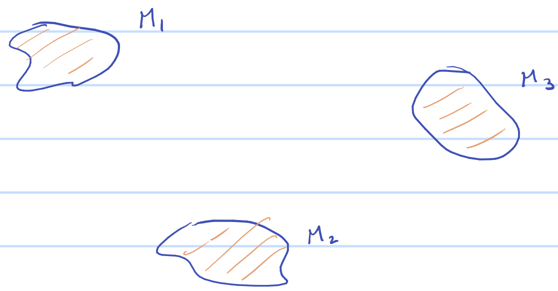
$$M_{TOT} = M/2 + M/2 = M$$

$$\bar{x} = \frac{M/2}{M} \cdot 0 + \frac{M/2}{M} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{M/2}{M} \cdot L/2 + \frac{M/2}{M} \cdot 0 = \frac{L}{4}$$

$$\therefore \quad \vec{R}_{CM} = \left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4} \right) \quad ✓✓$$

Lo anterior es un resultado general (casi un "teorema"):



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_{TOT}} \sum_{i=1} m_i \vec{r}_i \qquad M_{TOT} = M_1 + M_2 + M_3$$

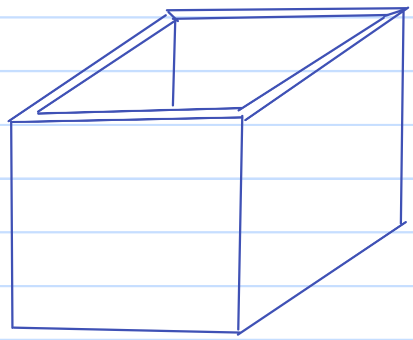
$$= \frac{1}{M_{TOT}} \left(\sum_{i=1}^{\text{bloque 1}} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{\text{bloque 2}} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{\text{bloque 3}} m_i \vec{r}_i \right)$$

$$= \frac{1}{M_{TOT}} \left(M_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{M_1} \sum_i m_i \vec{r}_i}_{\vec{R}_{CM}^{(1)}} + M_2 \cdot \underbrace{\frac{1}{M_2} \sum_i m_i \vec{r}_i}_{\vec{R}_{CM}^{(2)}} + M_3 \underbrace{\frac{1}{M_3} \sum_i m_i \vec{r}_i}_{\vec{R}_{CM}^{(3)}} \right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{M_1}{M_{TOT}} \vec{R}_{CM}^{(1)} + \frac{M_2}{M_{TOT}} \vec{R}_{CM}^{(2)} + \frac{M_3}{M_{TOT}} \vec{R}_{CM}^{(3)}}$$

Problemas

1. Calcule el centro de masa de una caja sin tapa (en donde todas sus caras son idénticas). (grosor despreciable)

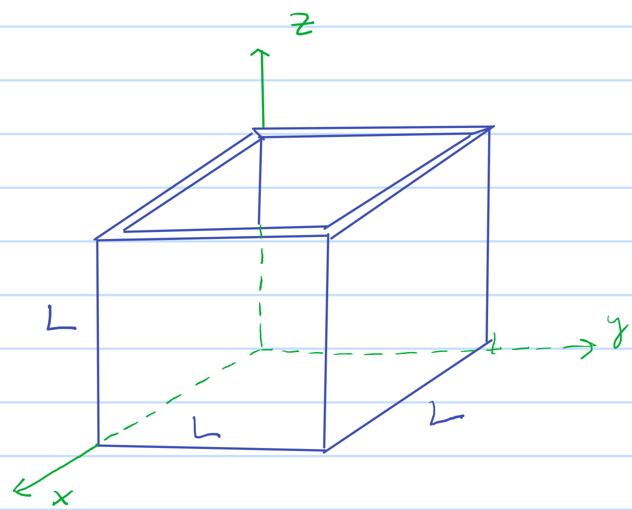


(cubo)

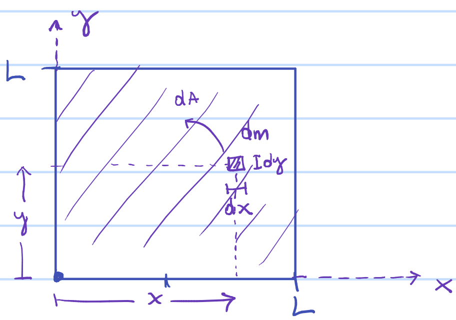
(de masa uniformemente distribuida)

$M_{TOT} = 5M_{placa}$

Solución:



Partamos calculando el centro de masa de una tapa.



$dA = dx\,dy$

$$\bar{x} = \frac{1}{M_{placa}} \int x\,dm$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M_{placa}} \int y\,dm$$

$\lambda \equiv \dfrac{masa}{largo}$: densidad lineal

$*$ $\sigma \equiv \dfrac{masa}{área}$: densidad superficial

$\left(\rho \equiv \dfrac{masa}{volumen}\right)$: densidad volumétrica

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \quad \therefore \quad dm = \sigma\,dA = \sigma\,dx\,dy$$

Entonces

$$\bar{x} = \frac{1}{M_{placa}} \iint x\,\sigma\,dx\,dy \quad , \text{ pero } \sigma = \text{constante} = \frac{M_{placa}}{L^2}$$

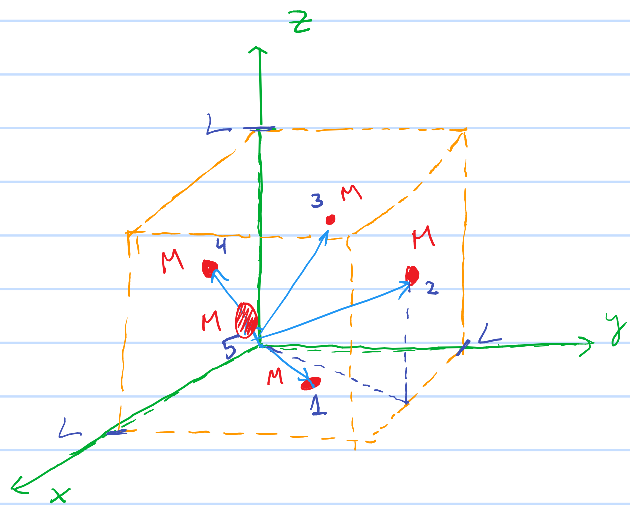
$$= \frac{\sigma}{M_{placa}} \iint x\,dx\,dy = \frac{\cancel{M_{placa}}}{\cancel{M_{placa}}\,L^2} \int_0^L x\,dx \int_0^L dy = \frac{1}{\cancel{L^2}} \cdot \frac{\cancel{L^2}}{2} \cdot L = \frac{L}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{1}{M}\iint y\,\sigma\, dx\, dy = \frac{\sigma}{M}\iint y\, dx\, dy = \frac{\sigma}{M}\int_0^L dx \int_0^L y\, dy$$

$$= \frac{\cancel{M}/\cancel{L^2}}{\cancel{M}} \cdot L \cdot \frac{\cancel{L^2}}{2}$$

$$= \frac{L}{2}$$

$\therefore$ El centro de masa de la placa está en su centro geométrico (duh!)



$$M_{TOT} = 5M$$

$$\vec{R}_{cm}^{(1)} = \frac{L}{2}\hat{\imath} + \frac{L}{2}\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{R}_{cm}^{(2)} = \frac{L}{2}\hat{\imath} + L\hat{\jmath} + \frac{L}{2}\hat{k}$$

$$\vec{R}_{cm}^{(3)} = 0\hat{\imath} + \frac{L}{2}\hat{\jmath} + \frac{L}{2}\hat{k}$$

$$\vec{R}_{cm}^{(4)} = \frac{L}{2}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \frac{L}{2}\hat{\imath}$$

$$\vec{R}_{cm}^{(5)} = L\hat{\imath} + \frac{L}{2}\hat{\jmath} + \frac{L}{2}\hat{k}$$

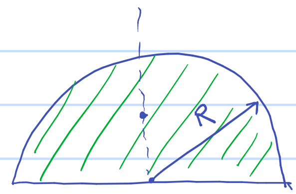
$$\vec{R}_{cm} = \frac{M}{5M}\vec{R}_{cm}^{(1)} + \frac{M}{5M}\vec{R}_{cm}^{(2)} + \frac{M}{5M}\vec{R}_{cm}^{(3)} + \frac{M}{5M}\vec{R}_{cm}^{(4)} + \frac{M}{5M}\vec{R}_{cm}^{(5)}$$

$$= \frac{\cancel{M}}{5\cancel{M}}\left(\frac{5}{2}L\hat{\imath} + \frac{5}{2}L\hat{\jmath} + 2L\hat{k}\right)$$

$$= \frac{L}{5}\left(\frac{5}{2}\hat{\imath} + \frac{5}{2}\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

$$= L\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath} + \frac{2}{5}\hat{k}\right) \quad //$$

2. Centro de masa de un semi-disco (uniforme)

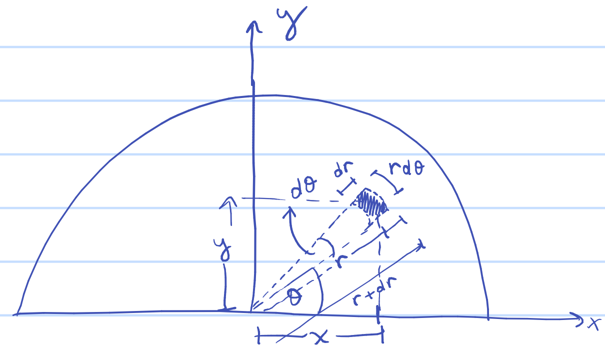


Solución

$$\sigma = \frac{\text{Masa}}{\text{Área}} = \frac{M}{\pi R^2/2} = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$



$$dA = dr\; r\,d\theta$$
$$= r\,dr\,d\theta$$

$$dm = \sigma\,dA = \sigma\; r\,dr\,d\theta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\,\sigma\iint x\;r\,dr\,d\theta \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\sigma\cdot\iint r\cos\theta\; r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{M}\,\frac{R^3}{3}\,\sin\theta\,\Big|_0^\pi$$

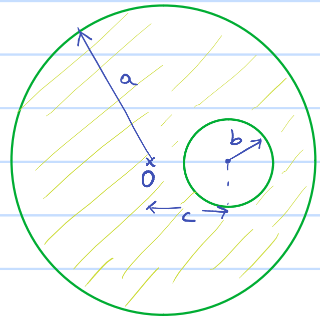
$$= \frac{\sigma}{M}\,\frac{R^3}{3}\Big(\underbrace{\sin\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big)$$

$$= 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sigma}{M}\int y\;r\,dr\,d\theta = \frac{\sigma}{M}\int r\sin\theta\;r\,dr\,d\theta = \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2\cancel{M}}{\cancel{M}\,\pi\cancel{R^2}}\,\frac{\cancel{R^3}}{3}\,(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{2R}{3\pi}\Big(\overbrace{-\cos\pi}^{-1} - \overbrace{\cos 0}^{1}\Big) = \frac{4}{3\pi}R = 0{,}42\,R$$

3. Un disco de masa uniforme y radio a tiene un hoyo descentrado de radio b. La separación entre los centros es c ¿dónde está el centro de masa?



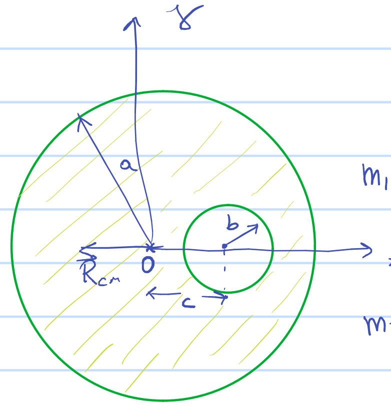
m_1: disco uniforme con un hoyo

Solución:

esta es la incógnita

$$0\hat{i} + 0\hat{j} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\, c\,\hat{i}$$

$$\therefore \quad \vec{R}_{CM} = -\frac{m_2}{m_1}\, c\,\hat{i} + 0\hat{j}$$



m_1: disco con hoyo

m_2: masa "hoyo"

$$\sigma = \frac{m_2}{\pi b^2} = \frac{m_1}{\pi a^2 - \pi b^2}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\cancel{\pi} b^2}{\cancel{\pi} a^2 - \cancel{\pi} b^2} = \frac{b^2}{a^2-b^2}$$

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = -\frac{b^2}{a^2-b^2}\, c\,\hat{i}}$$

//